HÉLÈNE FREDA

Méthode des caractéristiques pour l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 84 (1937)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1937__84__R3_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXXIV

Méthode des Caractéristiques pour l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques

Par M^{lle} Hélène FREDA

Avec une préface de M. Vito VOLTERRA

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1937

PRÉFACE.

Dans un Cours professé à l'Université de Rome en 1931, Mademoiselle Freda avait donné une exposition complète de la méthode des caractéristiques et de ses applications aux problèmes concernant les équations aux dérivées partielles du type hyperbolique. On retrouvera dans la présente publication, que M. Villat a bien voulu accueillir dans son *Mémorial des Sciences mathématiques*, l'essentiel des leçons de Mademoiselle Freda. L'auteur y a joint une excellente bibliographie, tenue au courant des derniers travaux sur le sujet. Son œuvre sera donc consultée avec fruit par quiconque veut acquérir une connaissance générale des bases, du développement et des applications de la méthode si féconde des caractéristiques.

L'exposé est très condensé, très riche de contenu et il atteint une clarté et une précision qui représentent un remarquable travail de mise au point.

C'était une entreprise ardue et qui impliquait une longue et difficile préparation que de présenter l'ensemble des diverses recherches et les résultats obtenus par un si grand nombre d'Auteurs pendant une longue suite d'années et de mettre le lecteur à même d'assimiler et d'apprécier convenablement l'une des méthodes les plus puissantes de l'Analyse. Mademoiselle Freda y a parfaitement réussi.

On s'en rendra compte en jetant un regard sur le plan du livre et sur l'argument des divers Chapitres.

L'Ouvrage débute par des généralités sur les équations hyperboliques, sur les problèmes au contour, et particulièrement le problème de Cauchy, sur les cônes et conoïdes caractéristiques, sur la formule de réciprocité qui est à la base même de la méthode. Suit. dans le second Chapitre, une étude très détaillée de la méthode originale de Riemann pour les équations hyperboliques à deux variables. L'Auteur y donne la synthèse de la solution du problème de Cauchy et passe ensuite à l'examen du cas limite où le support des données est constitué par deux caractéristiques issues d'un même point. Elle expose enfin l'élegante et importante application faite par M. Picard et concernant l'équation des télégraphistes. Le chapitre contient aussi une suggestive comparaison entre les équations hyperboliques et elliptiques.

Le chapitre suivant est consacré à l'exposé de la méthode que j'ai donnée dans mon Mémoire des *Acta Mathematica* et dont le but essentiel était de donner la marche à suivre pour traiter le problème fondamental dans le cas de trois variables ou même d'un nombre plus grand de variables. Si l'on veut toujours se rattacher aux problèmes physiques des vibrations il faut ne pas faire une facile extension, purement analytique, qui calque les procédés employés dans le cas de deux variables, mais il est nécessaire d'introduire de nouveaux éléments : les cônes caractéristiques dont, de prime abord, on ne pouvait soupçonner l'existence et l'utilité. La notion des conoides caractéristiques qui fut introduite dans des généralisations ultérieures se rattache directement au concept primordial de cône caractéristique. Dans le chapitre en question Mademoiselle Freda envisage non seulement le problème dit problème interne, mais encore le problème externe beaucoup plus difficile, qui nécessite l'emploi d'artifices compliqués et assez cachés et dont peu d'Auteurs se sont occupés. Elle montre enfin comme la méthode des images peut être adaptée au cas des équations hyperboliques.

Les Auteurs, au premier rang desquels il faut citer MM. d'Adhémar, Tedone et Coulon, qui ont continué dans la voie tracée et ont généralisé la méthode précédente. L'exposé de leurs résultats forme le sujet du Chapitre IV. Enfin dans un dernier chapitre Mademoiselle Freda envisage les méthodes de M. Hadamard qui a consacré de si beanx travaux à la question. On sait que ces recherches ont été exposées dans les conférences faites par M. Hadamard à l'Université Yale en 1920, conférences qui furent réunies en un volume, dont la traduction française a paru récemment et qui est apprécié de tous les Mathématiciens.

Dans tout le cours de son ouvrage Mademoiselle Freda expose des vues originales et elle modifie et complète plusieurs résultats par des considérations qui lui sont propres. Les rapports entre l'analyse mathématique et les applications mécaniques et physiques ne sont pas négligés. Enfin quelques aperçus historiques permettent d'apprécier l'évolution des méthodes plus anciennes qui se relient plus ou moins directement à celle des caractéristiques.

Je crois que le présent volume rendra de grands services et qu'il est bien à sa place dans la collection que M. Villat dirige avec tant de soin et de maîtrise.

Vito VOLTERRA.

MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

POUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES HYPERBOLIQUES

Par M$^{\text{lle}}$ Hélène FREDA.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES : PROBLÈMES AUX LIMITES ET VARIETÉS CARACTERISTIQUES.

1. **Problème de Cauchy.** — Les problèmes physiques qui conduisent à l'intégration des équations aux dérivées partielles exigent, pour de telles équations, la résolution des problèmes dits : *problèmes aux limites* c'est-à-dire la détermination, dans un domaine déterminé à m dimensions (s'il y a m variables indépendantes), des solutions des équations satisfaisant à des conditions déterminées aux points des variétés qui limitent ledit domaine. L'étude des problèmes aux limites possibles relatifs à une équation aux dérivées partielles doit être donc considérée comme un chapitre de l'Analyse particulièrement important en vue de ses applications.

Limitons-nous à considérer des équations aux dérivées partielles linéaires du deuxième ordre, c'est-à-dire des équations du type

$$F(u) = \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f. \tag{1}$$

où u représente une fonction inconnue des variables x_r; $A_{ik}=A_{ki}$, B_i, C, f sont des fonctions connues des mêmes variables; $i, k, r = 1, \ldots, m$. Un des plus simples problèmes aux limites pour de telles équations est le *problème de Cauchy* qui consiste à déterminer une solution de (1), étant données sur une variété Σ à m-1 dimensions, de l'espace $(x_1, \ldots x_m)$, les valeurs u_0 et u_1 (*données de Cauchy*) de u et d'une de ses dérivées premières suivant une direction donnée non tangente à Σ. Si les coefficients de (1) sont analytiques, ainsi que les données de Cauchy et Σ, un théorème classique (Cauchy-Kowalewsky) assure pour ledit problème, l'existence. au voisinage immédiat de Σ, d'une et d'une seule solution analytique, si Σ n'est pas une *variété caractéristique* pour (1), c'est-à-dire si, le long de Σ, on n'a pas

$$\sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_k} = 0, \tag{2}$$

en supposant que $G(x_1, \ldots, x_m) = 0$ soit l'équation de Σ; les variétés caractéristiques [définies par (2), indépendamment de l'intégration de (1)] correspondent à des cas où le problème de la détermination de ladite solution analytique devient impossible ou indéterminé.

Le théorème rappelé n'établit aucune différence entre les diverses équations qui rentrent dans le type (1); au contraire, si l'on considère les problèmes physiques qui exigent l'intégration de telles équations on peut, avec M. Hadamard, remarquer que ceux relatifs à certaines équations (par exemple l'équation de Laplace) n'exigent pas en général (¹) la résolution du problème de Cauchy, tandis que la résolution de ce problème est exigée par des questions physiques (relatives à la propagation des ondes dans des milieux illimités) qui conduisent à d'autres équations. Il faut observer cependant que, dans ces derniers cas, les données de Cauchy ne sont pas en général des fonctions analytiques, mais seulement régulières (continues, avec des dérivées continues jusqu'à un certain ordre) et quant à la solution u qu'il s'agit de

(¹) Nous avons ajouté les mots « en général », parce que dans le problème des *jets liquides*, l'étude du mouvement d'un liquide au voisinage d'une surface qui sépare ce dernier d'un liquide en repos peut se ramener à la résolution du problème de Cauchy relatif à l'équation de Laplace (VOLTERRA, *Journal de Math.*, t. XI, 1932).

déterminer, il n'importe pas en général qu'elle soit analytique, mais il importe par contre que son domaine (réel) d'existence ne soit pas limité au voisinage immédiat de Σ.

Or c'est précisément quand (en se limitant au domaine réel) on remplace les conditions relatives à l'analyticité des données et de la solution, par des conditions de simple régularité, que les diverses équations du type (1) se comportent diversement à l'égard du problème de Cauchy. Pour l'équation de Laplace, par exemple, on peut démontrer, comme l'a fait M. Hadamard, que le problème de Cauchy relatif à des données non analytiques arbitraires n'admet pas de solutions. Dans les chapitres suivants nous aurons par contre l'occasion d'étudier des équations (comprenant celles qui se rencontrent dans l'étude des phénomènes auxquels est liée une propagation par ondes) pour lesquelles il est possible de résoudre le *problème de Cauchy généralisé* (c'est-à-dire relatif à des données régulières et à une solution régulière *non locale*), à condition de choisir convenablement la variété Σ. (Dans les problèmes physiques auquels il est fait allusion, Σ est en général un plan $t =$ const., si t représente le temps.)

Il y a lieu d'observer que, quand on réussit à trouver une solution du problème de Cauchy relatif à une équation linéaire (à coefficients analytiques) et à une variété Σ non caractéristique, on peut être sûr que c'est la seule solution, en vertu d'un théorème d'unicité démontré par Holmgren. [Naturellement quand on parle des solutions de (1), il s'agit de fonctions ayant des dérivées au moins jusqu'au deuxième ordre.]

2. Équations hyperboliques. — Supposons que, pour (1), le déterminant Δ des coefficients A_{ik}, c'est-à-dire le discriminant de la forme quadratique

$$\mathfrak{A}(x_r; \gamma_r) = \sum_{i,k} A_{ik}(x_r)\,\gamma_i\gamma_k, \tag{3}$$

soit différent de zéro (nous laissons ainsi de côté les équations du *type parabolique*); alors suivant que (dans une certaine région de l'espace) la forme (3) [qui est dite la *forme caractéristique* de l'équation (1)] est ou non une forme définie, l'équation correspondante (1) est dite du *type elliptique* ou *hyperbolique*. Pour une équation elliptique il n'y a pas de caractéristiques réelles; il y en a par contre pour une équation hyperbolique.

Les équations qui se rencontrent quand on étudie les phénomènes d'ondes appartiennent précisément à la catégorie des équations hyperboliques (tandis que l'équation de Laplace peut être considérée comme la plus simple des équations elliptiques); les caractéristiques (réelles) de telles équations ont de l'importance au point de vue physique en ce qu'elle sont propres à représenter les *ondes*, et ont aussi beaucoup d'importance au point de vue analytique puisque (comme l'ont montré les classiques mémoires de Riemann et de Volterra) on peut les faire intervenir, d'une façon essentielle, dans l'intégration des équations correspondantes.

3. Problèmes mixtes. — Quand on étudie les problèmes de propagation des ondes en milieu limité, on est conduit à résoudre, pour des équations hyperboliques, non pas le problème de Cauchy (comme dans le cas des milieux illimités) mais les problèmes dits *mixtes*. C'est-à-dire que l'on doit déterminer, dans une certaine région de l'espace, une solution u d'une équation du type (1), quand sur une partie du contour on fournit les données de Cauchy u_0 et u_1, tandis que sur l'autre partie on donne seulement u_0, ou seulement u_1.

4. Cônes et conoïdes caractéristiques. — Avant de passer aux méthodes d'intégration à l'aide des caractéristiques, des équations hyperboliques nous rappellerons quelques notions fondamentales, dont nous devrons nous servir par la suite.

Précisons une fois pour toutes que dorénavant nous nous occuperons seulement des équations hyperboliques et des domaines réels.

Supposons $m > 2$, et égalons à o la forme (3); nous obtenons pour tout point $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_m)$ l'équation tangentielle d'un cône du second degré, dont le sommet est en P et que nous appellerons *cône caractéristique* relatif à (1) et a P.

Nous appelerons *bicaractéristiques* par rapport à (1), les caractéristiques de Cauchy relatives à l'équation du premier ordre (2) : pour avoir celles, $x_r = x_r(s)$ $(r = 1, \ldots, m)$, qui passent en un point $\mathrm{P}^0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, il suffit d'intégrer le système

$$(4)\qquad \frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathfrak{A}(x_r : p_r)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathfrak{A}(x_r ; p_r)}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, m);$$

avec les conditions : $x_i(0) = x_i^0$, $p_i(0) = p_i^0$, $\mathfrak{A}(x_i^0 ; p_i^0) = 0$.

Il y a une $\infty^{(m-2)}$ de bicaractéristiques pour P^0 (chacune correspond à l'un des systemes de valeurs possibles des rapports des parametres p_i^0 à l'un d'eux); elles constituent une variété a $(m-1)$ dimensions ayant en P_0 un point conique. Une telle variété, qui est caractéristique pour (1), prend le nom de *conoide caractéristique;* elle coincide avec le cône caractéristique de sommet P^0 si les coefficients A_{ik} de (1) sont constants (auquel cas les bicaractéristiques sont des droites); dans le cas contraire le cône caractéristique est tangent au conoide caractéristique en P^0.

L'équation $\Gamma(x_r | x_r^0) = 0$ du conoide caractéristique de sommet P^0 peut (comme l'ont montré Coulon et Hadamard), par un changement de variables, prendre la forme $\sum_{i,k} A_{ik}^0 \xi_i \xi_k = 0$ [A_{ik}^0 étant les valeurs des coefficients $A_{ik}(\xi_r)$ au point P^0] et aussi la forme $\sum_{r=1}^{m} A_r \eta_r^2 = 0$.

Dans le cas ou $m = 2$ (les variétés caractéristiques sont alors des lignes) le conoide caractéristique relatif à un point P^0 dégénère en les deux caractéristiques passant par ce point.

5. **Équations hyperboliques du type normal.** — Supposons (pour $m > 2$) l'équation du conoide caractéristique relatif à un point P^0 écrite sous la forme $\sum_{r=1}^{m} A_r \eta_r^2 = 0$. Si $m = 3$, on peut obtenir que, pour tous les points d'une certaine région, A_r soit négatif pour $r < m$ et A_m positif; si $m > 3$ par contre, cela n'est pas toujours possible; si c'est possible nous dirons, avec M. Hadamard que l'équation hyperbolique correspondante (1) est du *type normal.* (Cette dénomination est due au fait que les équations hyperboliques auxquelles ont conduit jusqu'à présent les problemes physiques sont de ce type.)

Le conoide caracteristique de sommet P^0 partage l'espace, autour de P^0, en deux régions correspondant respectivement à $\Gamma > 0$ et $\Gamma < 0$. Si l'équation (1) n'est pas du type normal, chacune de ces deux régions est telle que deux de ses points peuvent être joints par un arc. intérieur à ladite région et n'ayant aucun point commun avec la surface $\Gamma = 0$. Si au contraire l'équation (1) est du type normal, en supposant $A_m > 0$, la région $\Gamma > 0$ (l'intérieur du conoide) est à son tour partagée par le sommet du conoide ($\eta_1 = 0, \ldots, \eta_m = 0$) en deux parties, correspondant respectivement à $\eta_m > 0$ et à $\eta_m < 0$, telles que l'on ne peut aller d'un point de l'une à un point de l'autre sans passer par le sommet ou par l'extérieur du conoïde (région dans laquelle Γ est négatif). Pour les équations hyperboliques non normales, les conoïdes et les cônes caractéristiques sont a une seule nappe; pour celles qui sont normales il sont par contre à deux nappes; nous pouvons appeler *nappe directe* celle qui correspond à $\eta_m > 0$, *nappe rétrograde* l'autre.

6. **Directions conormales ou transversales.** — Etant donnée une équation hyperbolique (1), considérons une variété à $(m-1)$ dimensions Σ : soient $\pi_1, \ldots, \pi_m$ les cosinus directeurs de sa normale n. En tout point de Σ nous appellerons *conormale* ou *transversale* la direction N dont les cosinus directeurs sont proportionnels a $\frac{\partial \mathfrak{A}(x_r; \pi_r)}{\partial \pi_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $\mathfrak{A}$ étant la forme caractéristique (3); une fois fixé le sens positif pour n, celui de N est détermine, si par exemple on convient que les directions positives n et N restent du même côté par rapport au plan tangent seulement lorsque n est extérieur au cône caractéristique ayant son sommet au point considéré.

Posons $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial \mathfrak{A}(x_i, \pi_i)}{\partial \pi_i}\right]^2}$; nous appellerons *dérivée conormale ou transversale* de u

$$\frac{du}{dN} = \sum_{i=1}^{m} \frac{du}{dx_i} \cos x_i N = \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^{m} \frac{du}{dx_i} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \pi_i} \quad (5)$$ (1).

Cette direction N, introduite par d'Adhémar, sous le nom de conormale, pour l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} =$ une fonction connue, permet d'écrire plus simplement certaines formules et de déduire plus facilement certains résultats relatifs aux équations hyperboliques. Par exemple (comme l'a remarqué d'Adhémar pour l'équation ci-dessus) de la propriété facilement vérifiable que pour les variétés caractéristiques, et seulement pour elles, la conormale appartient au plan tangent, il résulte que si l'on connaît les valeurs d'une fonction u sur une variété caractéristique, on connaît également, sur la même

(1) Coulon prend comme dérivée conormale le deuxième membre de (5), M. Hadamard prend la même expression multipliée par λ.

variété, celles de $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$, et que si u est nulle sur ladite variété, il en est de même pour $\frac{\partial u}{\partial \bar{\mathrm{N}}}$.

La généralisation de la notion de conormale est due à Coulon et à M. Hadamard. Coulon a donné de cette direction la définition géométrique suivante : la conormale relative à un point P de Σ, est le diamètre conjugué, par rapport au cône caractéristique de sommet P, du plan tangent en P a Σ. La denomination de transversale a été proposée par M. Hadamard, en rapport avec le calcul des variations.

7. Formule de réciprocité relative à deux équations adjointes. — Soit l'équation hyperbolique (1); considérons son *adjointe*

$$(1)_a \qquad \mathrm{H}(v) = \sum_{ik} \frac{\partial^2(\mathrm{A}_{ik} v)}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_i \frac{\partial(\mathrm{B}_i v)}{\partial x_i} + \mathrm{C} v = 0,$$

[l'adjointe de $\mathrm{H}(v) = \varphi$ est $\mathrm{F}(u) = 0$; si $\mathrm{H}(u) \equiv \mathrm{F}(u)$, (1) est dite : *auto-adjointe*. Les deux équations, ayant la même forme caractéristique, ont les mêmes variétés caractéristiques : en particulier, les mêmes conoïdes et cônes caractéristiques].

On peut alors établir l'identité

$$(6) \qquad v\mathrm{F}(u) - u\mathrm{H}(v) = \sum_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i},$$

en prenant par exemple (les Φ_i ne sont évidemment pas complètement déterminés)

$$\Phi_i = \sum_k \mathrm{A}_{ik}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_k} - u \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) + uv\left(\mathrm{B}_i - \sum_k \frac{\partial \mathrm{A}_{ik}}{\partial x_k}\right).$$

Considérons une portion T de l'espace à m dimensions, limitée par le contour (à $m - 1$ dimensions) S. Supposons u et v [ainsi que les coefficients de (1)] régulières dans T ; choisissons comme direction positive n sur la normale à S celle qui se dirige vers l'intérieur T. De (6), et de la formule connue

$$\int\int \cdots \int_{\mathrm{T}} \left(\sum_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}\right) d\mathrm{T} = -\int \cdots \int_{\mathrm{S}} \left(\sum_i \Phi_i \pi_i\right) d\mathrm{S}$$

(π_i cosinus directeurs de la normale n), en se rappelant la définition de la dérivée transversale, on obtient la formule de réciprocité

$$(7) \qquad 0 = \int\int\cdots\int_{\mathrm{T}} [v\mathrm{F}(u) - u\mathrm{H}(v)]\,d\mathrm{T} + \int\cdots\int_{\mathrm{S}}\left[\lambda\left(v\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathrm{N}}\right) + \mathrm{L}uv\right] d\mathrm{S},$$

où $\mathrm{L} = \sum_{i} \pi_i\left(\mathrm{B}_i - \sum_{k} \frac{\partial \mathrm{A}_{ik}}{\partial x_k}\right)$ est o pour une équation auto-adjointe. Si u et v sont solutions respectivement de (1) et de $(1)_a$, on peut remplacer $\mathrm{F}(u)$ par la fonction connue f, et $\mathrm{H}(v)$ par o.

Des relations de réciprocité qui sont des cas particuliers de (7) furent établies par Riemann, Kirchhoff, Volterra; la généralisation est due à Coulon et Hadamard.

8. Ces notions fondamentales établies, nous allons nous occuper, dans les prochains chapitres, des méthodes d'intégration des équations hyperboliques à l'aide des caractéristiques.

Nous nous occuperons des équations linéaires, et nous nous bornerons à les considérer dans les domaines réels; pour les fonctions que nous devrons considérer, nous supposerons en général vérifiées seulement des conditions de régularité (continuité dans un certain domaine, existence et continuité des dérivées jusqu'à un certain ordre); quand nous parlerons du problème de Cauchy, nous entendrons par là parler du problème généralisé comme il a été dit au paragraphe 1.

CHAPITRE II.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES A DEUX VARIABLES (MÉTHODE DE RIEMANN).

1. Dans son mémoire classique *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite* (*Gottingen Abbandlungen*, t. VIII, 1860), Riemann a donné pour une équation hyperbolique à deux variables particulière, une méthode d'intégration dans laquelle il fait intervenir d'une façon essentielle, les variétés caractéristiques (lignes) de l'équation. C'est d'une telle méthode, qui est généralisable au cas d'une équation linéaire hyperbolique à deux variables quelconque (Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, 2^e partie, 1889, p. 71), que nous voulons nous occuper a présent.

2. Comment rapporter une équation à ses caractéristiques. — Supposons l'équation (1) (Chap. I, § 1) à deux variables ($m = 2$); la condition qu'il s'agit d'une équation hyperbolique se traduit par

$$A_{12}^2 - A_{11}A_{22} > 0.$$

Puisque le long d'une courbe $G(x_1, x_2) = 0$, dx_1, dx_2 sont proportionnels à $\frac{\partial G}{\partial x_2}$, $-\frac{\partial G}{\partial x_1}$, l'équation (2) des caractéristiques peut s'écrire

$$A_{11}\,dx_2^2 - 2\,A_{12}\,dx_1\,dx_2 + A_{22}\,dx_1^2 = 0.$$

Par cette équation sont définis deux systèmes (réels) de courbes caractéristiques, tels que par tout point (x_1, x_2) il passe une courbe de chaque système. Soient $f_1(x_1, x_2) = \text{const.}$, $f_2(x_1, x_2) = \text{const.}$ les deux familles de caractéristiques; faisons le changement de variables $\xi_i = f_i(x_1, x_2)$: les axes ξ_1, ξ_2 et leurs paralleles seront les caractéristiques de l'équation (1) transformée. Par suite, dans ladite équation, les coefficients de $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}$ et de $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2}$ seront nuls. Donc, l'équation hyperbolique (1), dans le cas $m = 2$, peut toujours, par un changement de variables (réel), se mettre sous la forme

$$(1') \qquad F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + cu = f.$$

On dit alors que l'équation est *rapportée à ses caractéristiques*. (Le cas étudié par Riemann correspond à $b_1 = b_2$, $c = f = 0$.)

3. Intégration (par la méthode des approximations successives de Picard), étant données les valeurs de la solution sur deux caractéristiques issues d'un point. — Nous pouvons supposer que l'équation est déjà rapportée à ses caractéristiques [et par suite de la forme (1')] et que en outre l'origine O des coordonnées x_1, x_2 coïncide avec le point duquel sont issues les deux caractéristiques sur lesquelles sont données les valeurs de la solution cherchée u. Supposons que sur le segment OP_1 du demi-axe positif x_1, on doit avoir $u = \varphi(x_1)$ et sur le segment OP_2 du demi-axe positif x_2, $u = \psi(x_2)$, φ et ψ étant deux fonctions régulieres connues, telles que $\varphi(0) = \psi(0)$.

Si l'on suppose que dans le rectangle R de côtés OP_1, OP_2 les coefficients de (1') soient réguliers, on pourra déterminer une solution de (1′), régulière dans R et satisfaisant aux conditions aux limites précédentes, par la méthode des approximations successives de Picard. Considérons pour cela les équations

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1 \partial x_2} = f,$$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial x_1 \partial x_2} = -\left(b_1 \frac{\partial u_{r-1}}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u_{r-1}}{\partial x_2} + c u_{r-1}\right) \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

elles seront satisfaites, avec les conditions aux limites $u_0 = \varphi(x_1)$ sur OP_1, $u_0 = \psi(x_2)$ sur OP_2; $u_r = 0$ sur OP_1 ainsi que sur OP_2, par les fonctions régulières dans R,

$$u_0 = \varphi(x_1) + \psi(x_2) - \varphi(0) + \int_0^{x_2} d\xi_2 \int_0^{x_1} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1,$$

$$u_r = -\int_0^{x_2} d\xi_2 \int_0^{x_1} \left[b_1(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial u_{r-1}}{\partial \xi_1} + b_2(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial u_{r-1}}{\partial \xi_2} + c(\xi_1, \xi_2) u_{r-1} \right] d\xi_1.$$

Dans R soit L une limite supérieure de

$$|u_0|, \quad \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_1}\right|, \quad \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_2}\right|$$

et M une limite supérieure de $|b_1|$, $|b_2|$ et $|c|$. On vérifie alors facilement que dans R les trois séries

$$\sum_0^\infty u_r, \qquad \sum_0^\infty \frac{\partial u_r}{\partial x_1}, \qquad \sum_0^\infty \frac{\partial u_r}{\partial x_2}$$

sont uniformément et absolument convergentes (pour chacune, les termes sont en valeur absolue inférieurs à ceux d'une série exponentielle); les deux dernières représentent les dérivées premières de la fonction u représentée par la première série. Puisque

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial x_1 \partial x_2} = -\left(b_1 \frac{\partial u_{r-1}}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u_{r-1}}{\partial x_2} + c u_{r-1}\right),$$

la série $\sum_0^\infty \frac{\partial^2 u_r}{\partial x_1 \partial x_2}$ sera, comme les trois précédemment considérées, uniformément et absolument convergente dans R et représentera $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$. On vérifie immédiatement que la fonction $u = \sum_0^\infty u_r$ (continue et pourvue de dérivées premières continues dans R) satisfait à (1′) et aux conditions au contour données.

On peut voir facilement que la solution du problème proposé est unique. Supposons un instant que, outre u, il existe une autre solution u' (régulière dans R). Posons $S_r = \sum_0^r u_s$; $U_r = u' - S_r$. U_r devra satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 U_r}{\partial x_1 \partial x_2} = -\left(b_1 \frac{\partial U_{r-1}}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial U_{r-1}}{\partial x_2} + c U_{r-1}\right)$$

et prendre la valeur o sur OP_1 et OP_2; puisque en outre elle doit être régulière dans R, elle sera donnée par

$$U_r = -\int_0^{x_2} d\xi_2 \int_0^{x_1} \left(b_1 \frac{\partial U_{r-1}}{\partial \xi_1} + b_2 \frac{\partial U_{r-1}}{\partial \xi_2} + c U_{r-1}\right) d\xi_1.$$

La formule qui lie U_r à U_{r-1} étant la même que celle qui permettait de passer de u_{r-1} à u_r, on peut affirmer que la série $\sum_0^\infty U_r$ est uniformément et absolument convergente : par suite $\lim_{r=\infty} |U_r| = 0$, c'est-à-dire $\lim S_r = u'$, c'est-à-dire $u = u'$.

4. Résolution du problème de Cauchy par la méthode de Riemann. — Considérons en même temps que (1′) son adjointe $H(v) = 0$ (Chap. I, § 7). Soit T une partie du plan x_1, x_2 dans laquelle u, v et les coefficients de (1′) soient réguliers; soit S le contour de T; supposons direct le couple des demi-axes positifs x_1, x_2 et, ayant choisi comme direction positive n de la normale à S celle qui se dirige vers l'intérieur de T, prenons la direction positive t de la tangente de façon que le couple t, n soit lui aussi direct.

Dans (6), les Φ pourront se mettre sous la forme

$$\Phi_r = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_s}(uv) - u\left(\frac{\partial v}{\partial x_s} - b_r v\right) \tag{8}$$

ou

$$\Phi_r = -\frac{1}{2} \frac{\partial (uv)}{\partial x_s} + v\left(\frac{\partial u}{\partial x_s} + b_r u\right) \qquad (r \gtrless s;\ r, s = 1, 2). \tag{8'}$$

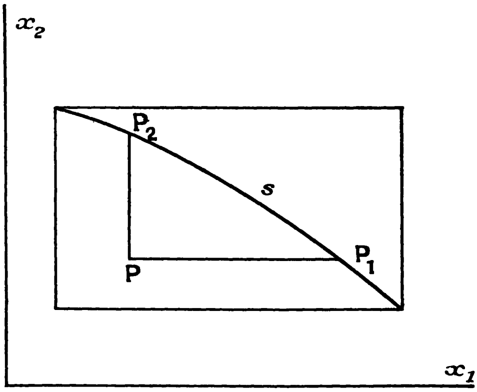
La formule de réciprocité (7), pour u et v respectivement solutions de $(1)'$ et de son adjointe, pourra s'écrire

$$(7') \qquad 0 = \int\int_T v f\, dT - \int_S (\Phi_1 dx_2 - \Phi_2 dx_1).$$

Considérons un point $P(X_1, X_2)$ et les deux caractéristiques qui en sont issues : dans l'un quelconque des quatre quadrants ainsi déterminés, traçons un arc s dont les extrémités P_1 et P_2 sont respectivement situées sur les parallèles menées par P aux axes x_1 et x_2. Supposant u, v et les coefficients de $(1')$ réguliers dans le triangle mixtiligne PP_1P_2, faisons coïncider dans $(7')$ T avec ce triangle; en substituant les seconds membres des formules (8) aux Φ, on obtient

$$(uv)_P = \pm \int\int_T v f\, dT + \frac{1}{2}[(uv)_{P_1} + (uv)_{P_2}] - \int_{\widehat{P_1P_2}} \Phi_1 dx_2 - \Phi_2 dx_1$$
$$+ \int_{\overline{P_1P}} u \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - b_2 v\right) dx_1 + \int_{\overline{P_2P}} u \left(\frac{dv}{dx_2} - b_1 v\right) dx_2.$$

Fig. 1.



Devant l'intégrale étendue à T on doit prendre le signe + ou − suivant que sur s le sens direct est (comme dans la figure 1) de P_1 à P_2 ou inversement. Choisissons une solution v^* de l'équation adjointe de façon que sur PP_1 : $\frac{\partial v^*}{\partial x_1} - b_2 v^* = 0$, et sur PP_2 : $\frac{\partial v^*}{\partial x_2} - b_1 v^* = 0$. v^* dépendra, en plus des variables x_1, x_2, des paramètres X_1, X_2, et pourra être représentée par $v^*(x_1, x_2; X_1, X_2)$ ou encore par $v^*(Q; P)$, Q désignant le point (x_1, x_2) [on aura $v^*_{P_1} = v^*(P_1; P)$; $v^*_{P_2} = v^*(P_2; P)$; $v^*_P = v^*(P; P)$]. Les conditions précédentes sont satisfaites, ainsi que la condition $v^*_P = 1$, si l'on détermine v^* de façon que sur PP_1 (c'est-à-dire pour

$x_2 = X_2$) $v^* = e^{\int_{X_1}^{x_1} b_2(\tau, X_2)d\tau}$ et sur PP_2 (c'est-à-dire pour $x_1 = X_1$)

$$v^* = e^{\int_{X_2}^{x_2} b_1(X_1, \tau)d\tau}$$

Le problème de la détermination d'une telle fonction v^* (*fonction de Riemann*) équivaut donc à celui considéré au précédent paragraphe et admet par conséquent une et une seule solution. Une fois déterminée la fonction de Riemann [laquelle depend des coefficients de (1′) et du point $P(X_1, X_2)$ mais non de la forme de s], la derniere formule ecrite devient

$$(9) \qquad u_P = \pm \int\int_T v f \, dT + \frac{1}{2}[(uv^*)_{P_1} + (uv^*)_{P_2}] - \int_{\widehat{P_1P_2}} (\Phi_1 \, dx_2 - \Phi_2 \, dx_1).$$

(9) exprime la valeur de u en P au moyen des valeurs que u et ses dérivées premieres prennent sur un arc de courbe s appartenant à l'un des quatre angles droits determinés par les caractéristiques issues de P et avec ses extrémités P_1 et P_2 sur ces caractéristiques elles-mêmes. Il est à remarquer que si l'on connaît sur s les valeurs de u et de l'une de ses derivees premières suivant une direction non tangente à s, on connaît sur s les dérivées premières de u suivant toutes les directions; il est aussi à remarquer que dans (9) on peut ne faire apparaître, au deuxième membre, que les valeurs le long de s, de u et de sa dérivée transversale $\frac{\partial u}{\partial N}$ [selon la définition donnée dans le précédent chapitre, la transversale N pour (1′) peut être identifiée avec la direction symétrique par rapport à l'axe x_1, de la tangente à s].

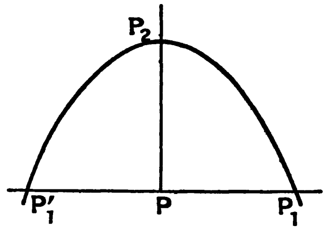
Si la ligne s est constituée par deux segments (caracteristiques) $P'P_2$ et $P'P_1$ respectivement paralleles aux axes x_1, x_2, en appliquant (9) et en substituant à Φ_1 et Φ_2 les seconds membres des formules (8), on peut éliminer les valeurs le long de s des dérivées premières de u et exprimer u_P en fonction des seules valeurs de u le long de s.

Supposons donnée une ligne L telle que pour tout point P d'une région du plan K (contigue à L) deux des demi-caractéristiques issues de P et formant un angle droit, interceptent une portion s (limitée par deux points P_1, P_2) de L.

On peut alors affirmer que si le problème de Cauchy relatif à (1′) et à L est résoluble dans la région K, la solution sera certainement exprimable au moyen de (9), en substituant à u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ le long de s

les données de Cauchy (avec comme corollaire que si la solution existe, elle est unique). On voit facilement que le problème de Cauchy, relatif à L, n'est pas possible dans K si dans cette région il existe des caractéristiques ayant avec L plus d'un point commun.

Fig. 2.

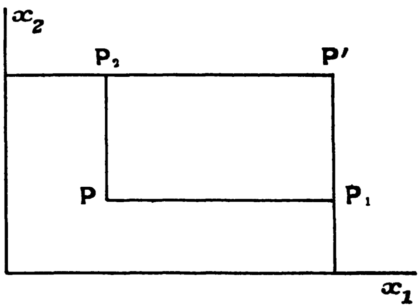


En effet, supposons qu'une parallèle à l'axe x_1 rencontre L aux points P_1 et P'_1 ; soit P un point du segment $P_1 P'_1$ et P_2 l'intersection avec L de la parallèle menée par P à l'axe x_2 (voir *fig.* 2). Nous pouvons alors obtenir pour u_P, au moyen de (9), deux expressions relatives respectivement aux arcs $P_1 P_2$ et $P'_1 P_2$; si les données de Cauchy sont arbitraires les deux expressions ne peuvent en général coïncider.

Supposons que toute caractéristique issue d'un point de L n'ait avec L aucun autre point commun. L sera une ligne non fermée; en la supposant limitée, considérons le rectangle R déterminé par les caractéristiques issues de ses extrémités (voir *fig.* 1). Soient $\bar{u}$ et $\frac{\partial \bar{u}}{\partial N}$ les données de Cauchy relatives à L; en tout point de cette ligne, en exprimant au moyen de ces données $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, on obtient les valeurs $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}$. Pour démontrer qu'en tout point P de R, la formule (9) $\left(\text{quand on y introduit } \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \text{ et } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}\right)$ donne la solution du problème de Cauchy relatif à (1') et à L, il suffirait de démontrer d'une manière quelconque (par exemple par la méthode des approximations successives) l'existence dans R d'une telle solution. Mais on peut aussi vérifier directement : 1° que le deuxième membre de (9) satisfait à l'equation (1') (relative aux variables X_1, X_2); 2° que lorsque P tend vers un point M de L, les valeurs en P de u, $\frac{\partial u}{\partial X_1}$, $\frac{\partial u}{\partial X_2}$ déduites de (9) tendent vers les valeurs $\bar{u}$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial X_1}$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial X_2}$ relatives au point M. Cette vérification (*synthèse de la solution*) peut se faire (et donne, sous les conditions précédentes relatives à L, un résultat positif) en se servant des propriétés fondamentales de la fonction de Riemann.

5. **Propriétés de la fonction de Riemann.** — Désignons encore par $H(v)$ l'expression différentielle adjointe de $F(u)$. De ce qu'on a vu dans le précédent paragraphe on peut déduire que la fonction de Riemann relative à l'équation $H(v) = \varphi$ (φ fonction connue) et au point $P'(\xi_1, \xi_2)$ est une fonction $u^*(Q; P') = u^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ qui par rapport aux variables x_1, x_2 satisfait à l'equation $F(u) = 0$ et aux conditions $\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 u = 0$ pour $x_2 = \xi_2$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} + b_1 u = 0$ pour $x_1 = \xi_1$, $u = 1$ pour $x_2 = \xi_2$ et $x_1 = \xi_1$. Considérons le rectangle déterminé par les caractéristiques issues de P′ et par celles issues du point $P(X_1, X_2)$; soient P_1, P_2 les deux autres sommets opposés du rectangle. La valeur $u_P^* = u^*(P; P')$ peut s'exprimer au moyen de (9) en posant $f = 0$ et en prenant comme ligne $P_1 P_2$ celle formée par

Fig. 3.



les segments caractéristiques $P_1 P'$, $P' P_2$. Prenons Φ_1, Φ_2 sous la forme (8′) et désignons (comme dans le paragraphe précédent) par $v^*(Q; P) = v^*(x_1, x_2; X_1, X_2)$ la fonction de Riemann relative à (1′) et au point P; la formule (9) se réduit alors à l'égalité : $u^*(P; P') = v^*(P'; P)$.

La fonction $v^*(x_1, x_2; X_1, X_2)$ a donc les propriétés suivantes :

Elle satisfait à l'équation $H(v) = 0$ ou à l'équation $F(v) = 0$ suivant qu'on la considère comme fonction des x_i ou des X_i.

Elle satisfait en outre aux conditions :

Pour $x_2 = X_2$, $\frac{dv}{dx_1} - b_2 v = 0$, $\frac{\partial v}{\partial X_1} + b_2 v = 0$;

Pour $x_1 = X_1$, $\frac{\partial v}{\partial x_2} - b_1 v = 0$, $\frac{\partial v}{\partial X_2} + b_1 v = 0$;

Pour $x_1 = X_1$ et $x_2 = X_2$, $v = 1$.

Comme corollaire, on a que pour une équation (1′) auto-adjointe v est symétrique par rapport aux deux groupes de variables x_i et X_i.

6. Synthèse de la solution du problème de Cauchy. — Pour faire la première des vérifications dont il est parlé à la fin du paragraphe 4, on doit calculer $\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}$, $\frac{\partial u}{\partial X_1}$, $\frac{\partial u}{\partial X_2}$ en tenant compte de ce que le deuxième membre de (9) dépend de X_1, X_2 soit parce que lorsque varie $P(X_1, X_2)$ les deux points P_1, P_2 et les domaines auxquels sont étendues les intégrales varient également; soit parce que la fonction de Riemann v^* dépend, en plus des variables x_i, des variables X_i. En se servant des propriétés établies au paragraphe 5 on voit alors facilement que le premier terme du deuxième membre de (9) vérifie l'équation $F(u) = f$ et que la somme des deux autres termes vérifie l'équation $F(u) = 0$. Pour la seconde des vérifications dont il est parlé à la fin du paragraphe 4 il est essentiel de tenir compte de la condition imposée à la ligne L d'être rencontrée en un seul point par toute parallèle aux axes. Quand cette condition est satisfaite, les domaines auxquels sont étendues les intégrales $\left[\text{dans les expressions de } u_P, \left(\frac{\partial u}{\partial X_1}\right)_P, \left(\frac{\partial u}{\partial X_2}\right)_P\right]$ tendent, lorsque P tend vers un point M de L, à se réduire au point M; on vérifie alors (en tenant compte des propriétés de la fonction de Riemann) que lorsque P tend vers M, dans le deuxième membre de (9), le premier terme tend vers o ainsi que ses dérivées premières par rapport à X_1 et X_2, tandis que la somme des deux autres termes et les dérivées premières de cette somme par rapport à X_1, X_2, tendent respectivement vers $\bar{u}_M$, $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}\right)_M$, $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}\right)_M$. Donc (9), si L satisfait à la condition indiquée, permet de résoudre le problème de Cauchy relatif à (1′) et à L, lorsque l'on a déterminé la fonction de Riemann relative à (1′).

7. Cas limite du problème de Cauchy. — Quand la ligne L est constituée par les deux demi-droites issues d'un point P', parallèles respectivement aux axes x_1, x_2 (voir *fig.* 3), d'après ce qui a déjà été dit, on pourra au moyen de (9) exprimer la valeur de u en tout point P de l'angle droit déterminé par les deux demi-droites, par l'intermédiaire des valeurs de u seul sur les deux segments $P'P_2$, $P'P_1$ déterminés sur les demi-droites elles-mêmes, par les caractéristiques issues de P. Donc, une fois déterminée, par un procédé quelconque, la fonction de Riemann relative à (1'), la formule (9) permet de résoudre le problème (dont il est parlé au paragraphe 3) de l'intégration de cette équation quand sont données arbitrairement (sauf les conditions de régularité) les valeurs de la solution sur deux caractéristiques issues d'un point. Dans ce cas, si P tend vers un point M de L, différent de P', on ne peut pas dire que les domaines auxquels sont étendus dans (9) les intégrales se réduisent au point M; cependant, en tenant compte des propriétés de la fonction de Riemann, on peut vérifier que u_P, calculé au moyen de (9), tend vers la valeur imposée $\overline{u}_M$.

8. Rôle des caractéritisques dans la méthode de Riemann. — Comme on l'a vu, ce sont les caractéristiques qui permettent de décider si pour une ligne L choisie comme support des données, le problème de Cauchy relatif à une équation donnée est possible ou non. Dans le cas où il est possible, si la ligne L est limitée par deux points A, B, ce sont encore les caractéristiques, et précisément les deux couples de caractéristiques issues de A et B, qui permettent de délimiter la région dans laquelle u reste déterminée; il est à remarquer que hors du quadrilatère Q déterminé par ces caractéristiques, les données relatives à L ne peuvent déterminer la solution : en effet, si l'on considère les prolongements AA' et BB' de L (au delà de A et au delà de B), et si sur ceux-ci on prolonge les données de Cauchy de façon qu'elles se raccordent en A et en B, on pourra déterminer une solution dans le quadrilatère Q' déterminé par les caractéristiques issues de A' et B'. Mais ces prolongements des données peuvent s'effectuer d'une infinité de manières; on aura par conséquent une infinité de solutions coïncidant toutes avec u dans Q, mais différentes l'une de l'autre dans le reste de Q'.

Les caractéristiques interviennent d'autre part quand il s'agit de déterminer la fonction auxiliaire (fonction de Rieman) que l'on d introduire dans la formule de réciprocité : en effet, de cette fonction, solution de l'équation adjointe, on connaît les valeurs (dépendant des coefficients de l'équation) sur les deux caractéristiques issues d'un même point.

Si l'on considère un point P quelconque, intérieur à la région dans laquelle la solution est déterminée par les données relatives à L, les deux caractéristiques issues de P permettent de distinguer sur L les données qui contribuent à déterminer la valeur de u en P (c'est-à-dire les données relatives à la partie de L interceptée par ces deux caractéristiques) de celles (relatives au reste de L) dont les variations éventuelles n'ont aucune influence sur u_P.

Supposons maintenant qu'en un point M de L les données présentent une discontinuité, et traçons les deux caractéristiques passant par M. En faisant usage de (9), on voit qu'à l'intérieur de chacune des quatre parties en lesquelles est ainsi divisée la région dans laquelle la solution est déterminée par les données, u et ses dérivées premières sont continues, mais que des discontinuités se présentent quand on passe de l'une à l'autre de ces quatre parties : c'est pourquoi on peut dire que les discontinuités qui existent sur L se propagent le long des caractéristiques.

9. **Intégration des équations elliptiques et intégration des équations hyperboliques.** — Formellement, équations hyperboliques et elliptiques peuvent différer de bien peu entre elles : il suffit de penser à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

et à cette autre $\Delta u = 0$, qui se déduit de la première en changeant simplement x_2 en ix_2. Cependant les problèmes d'intégrations pour les deux types d'équations présentent des différences essentielles, tenant au fait que l'on passe du cas des caractéristiques réelles à celui des caractéristiques imaginaires.

Le problème de Cauchy, relatif à des données non analytiques, résoluble, comme on l'a vu, pour les équations hyperboliques pourvu que l'on choisisse convenablement la ligne L support des données, ne l'est pas par contre, en général, pour les équations elliptiques.

Le problème de Dirichlet au contraire, possible pour les équations elliptiques ne l'est pas en général pour les équations hyperboliques.

De même les problèmes mixtes (correspondant à des conditions différentes sur les différentes parties du contour) sont pour les équations hyperboliques, comme nous le verrons bientôt, d'une autre nature que ceux relatifs aux équations elliptiques.

On peut enfin observer que tandis que (9) donne, pour les équations hyperboliques, dans le cas de données relatives à L non analytiques mais seulement régulières, une solution non analytique mais seulement régulière, pour l'équation elliptique $\Delta u = 0$ toute solution qui est continue, en même temps que ses dérivées premières, est nécessairement analytique à l'intérieur de son domaine d'existence.

10. Équations homogènes à coefficients constants. — Considérons l'équation

$$A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + B_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + B_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + Cu = 0$$

dans le cas où ses coefficients (satisfaisant à la condition $A_{12}^2 - A_{11}A_{22} > 0$) sont constants. Les caractéristiques sont alors deux faisceaux de droites parallèles et, pour rapporter l'équation à ses caractéristiques, il suffit de faire un changement linéaire de variables. Ceci fait, l'équation prend la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + cu = 0 \qquad (b_1,\ b_2,\ c \text{ constants}).$$

Si l'on fait alors le changement $u = \omega e^{-b_2 x_1 - b_1 x_2}$, on est conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} + \gamma\omega = 0,$$

avec γ constant; puisque cette équation est auto-adjointe et a nuls les coefficients des dérivées premières, la fonction de Riemann correspondante relative à un point (X_1, X_2) doit satisfaire à l'équation elle-même et se réduire à 1 quand $x_1 = X_1$ ou $x_2 = X_2$, c'est-à-dire quand $\rho = (x_1 - X_1)(x_2 - X_2)$ s'annule. Il semble alors naturel de chercher si la fonction de Riemann peut être fonction de ρ seul. Mais si $\omega = \omega(\rho)$, l'équation différentielle devient aux dérivées ordinaires, et si [en tenant compte de la condition $\omega(0) = 1$ et des conditions de régularité auxquelles doit satisfaire la fonction de Riemann] on cherche à l'intégrer en posant

$$\omega = 1 + \sum_{1}^{\infty} \lambda_r \rho^r,$$

on trouve la fonction de Bessel

$$\mathcal{J}_0(2\sqrt{\gamma\rho}) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^r(\gamma\rho)^r}{(r!)^2}.$$

11. Problèmes physiques correspondant à des équations hyperboliques à coefficients constants. — Le problème des vibrations d'une corde homogène et celui des vibrations longitudinales d'un gaz homogène, contenu dans un tube cylindrique étroit, conduisent à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{10}$$

(u composante du déplacement, x abscisse d'un point de la corde ou du tube, t temps, α constante).

Le problème de la propagation d'une perturbation électrique (caractérisée par la fonction u) le long d'un conducteur linéaire exige l'intégration de l'équation dite des télégraphistes

$$\mathcal{L}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\mathcal{C}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{R}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

(x abscisse d'un point du conducteur, t temps; $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$ constantes qui mesurent la résistance, la self-induction et la capacité du conducteur par unité de longueur; c vitesse de la lumière) [1].

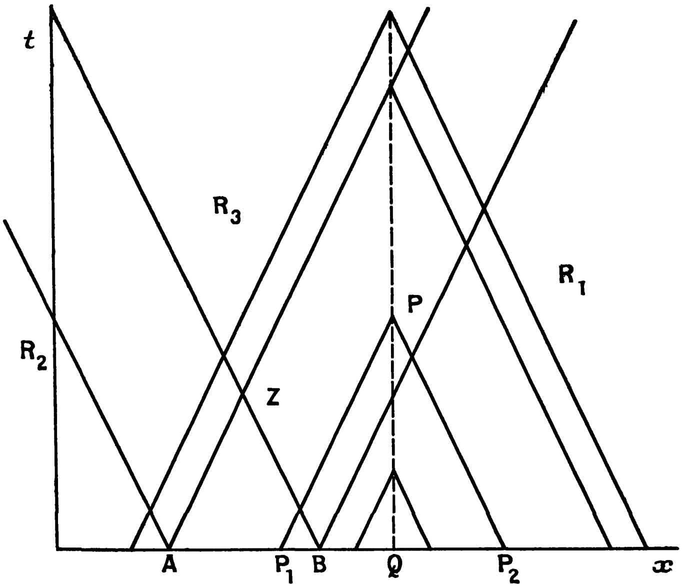
Proposons-nous d'étudier, aux instants successifs T, l'un des phénomènes dont on vient de parler, en un point générique Q, d'abscisse X, du milieu à une dimension dans lequel le phénomène a lieu : il suffira, dans le plan x, t (voir *fig.* 4) d'étudier le comportement de la fonction u [solution de (10) ou de (11)] aux points P(X, T) de la parallèle à l'axe t menée par le point Q(X, O). Lorsque la corde, le tube, le conducteur peuvent être considérés comme illimités dans les deux sens, on est conduit, pour ces équations à résoudre le problème de Cauchy relatif à la droite $t = 0$, sur laquelle on connaît $u = \psi(x)$,

---

[1] Le premier à appliquer la méthode des caractéristiques à (11) a été M. Picard.

et $\frac{\partial u}{\partial t} = \chi(x)$. Si, comme nous le supposerons, la perturbation est initialement localisée au segment AB de l'axe x correspondant

Fig. 4.



à $a \leq x \leq b$, c'est seulement sur ce segment que ψ et χ devront être considérés comme différents de o.

Les caractéristiques sont les deux faisceaux de droites parallèles $x \mp \lambda t = \text{const.}$ $\left[\lambda = \alpha \text{ pour } (10);\ \lambda = \frac{c}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}} \text{ pour } (11)\right]$; rapportons les équations à leurs caractéristiques au moyen du changement de variables

$$(\text{A}) \qquad x_1 = \text{K}(x - \lambda t); \qquad x_2 = \text{K}(x + \lambda t)$$

avec $\text{K} = 1$ pour (10) et $\text{K} = \frac{\mathcal{R}}{4c}\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{L}}}$ pour (11); pour cette dernière équation faisons encore le changement

$$(\text{B}) \qquad u = \mathcal{U} e^{x_1 - x_2}.$$

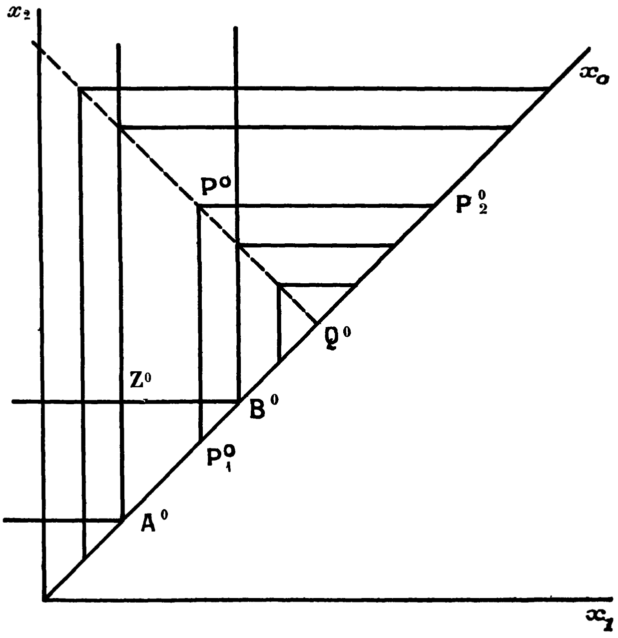
Les deux équations deviennent respectivement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} = 0, \tag{10'}$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial x_1 \, \partial x_2} + \mathfrak{U} = 0. \tag{11'}$$

Les formules (A) font correspondre à la droite $x (t = 0)$ du plan x, t, la droite $x^0 (x_1 = x_2)$ du plan x_1, x_2 ; aux points A et B de x les points A^0 et B^0 de x^0. Si au point P(X, T) du plan x, t correspond

Fig. 5.



le point $P^0(X_1, X_2)$ du plan x_1, x_2, à la droite PQ correspondra P^0Q^0 (perpendiculaire a x^0), aux deux segments de caractéristiques [relatives a (10) ou a (11)] PP_1. PP_2 correspondront les deux segments de caractéristiques [relatives a (10′) où a (11′)] $P^0P_1^0$, $P^0P_2^0$.

Les fonctions de Riemann relatives au point P^0 et aux équations auto-adjointes (10′) et (11′) sont respectivement : 1 et la fonction de Bessel $J_0\left[2\sqrt{(x_1 - X_1)(x_2 - X_2)}\right]$ (*voir* paragraphe précédent). La formule (9) [en tenant compte de ce que le long de x^0 on a $dx_1 = dx_2$

et en calculant Φ_1, Φ_2 d'après (8)] nous donne par suite pour (10′) et (11′) respectivement :

$$u_{P_0} = \frac{1}{2}(u_{P_1^0} + u_{P_2^0}) - \frac{1}{2}\int_{P_1^0}^{P_2^0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{x_1=x_2} dx_1,$$

$$\mathcal{U}_{P_0} = \frac{1}{2}(\mathcal{U}_{P_1^0} + \mathcal{U}_{P_2^0}) - \frac{1}{2}\int_{P_1^0}^{P_2^0} \left[\mathcal{J}_0\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1}\right) - \mathcal{U}\left(\frac{\partial \mathcal{J}_0}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathcal{J}_0}{\partial x_1}\right)\right]_{x_1=x_2} dx_1.$$

Mais pour une fonction $\theta(x_1, x_2)$, on tire de (A)

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_2} - \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)_{x_1=x_2} \mathrm{K}\lambda = \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{t=0};$$

d'autre part, pour une solution de (11′) et la solution correspondante de (11), on a [d'apres (B)] la relation $\mathrm{U} = e^{\frac{\mathcal{R}}{2\mathcal{L}}t} u$. Donc en nous rapportant au plan x, t et en introduisant les données de Cauchy, nous aurons pour (10) et (11) respectivement

$$(10'') \qquad u_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}(\psi_{\mathrm{P}_1} + \psi_{\mathrm{P}_2}) - \frac{1}{2\alpha}\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \chi(x)\, dx,$$

$$(11'') \qquad u_{\mathrm{P}} e^{\frac{\mathcal{R}}{2\mathcal{L}}\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(\psi_{\mathrm{P}_1} + \psi_{\mathrm{P}_2}) - \frac{1}{\lambda}\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} [\mu(x, \mathrm{X}, \mathrm{T})\psi(x) + \nu(x, \mathrm{X}, \mathrm{T})\chi(x)]\, dx.$$

Les points P_1, P_2 ont respectivement les abscisses $\mathrm{X} - \lambda\mathrm{T}$ et $\mathrm{X} + \lambda\mathrm{T}$; les fonctions μ et ν (qui se déduisent très facilement de $\mathcal{J}_0$) dépendent des coefficients de (11).

Supposons $\mathrm{X} > b$ (a et b sont les abscisses de A et B) et considérons dans le milieu vibrant, le point Q, d'abscisse X, durant trois intervalles de temps correspondant respectivement à

$$0 \leq \mathrm{T} < \frac{\mathrm{X} - b}{\lambda}; \qquad \frac{\mathrm{X} - b}{\lambda} \leq \mathrm{T} \leq \frac{\mathrm{X} - a}{\lambda}; \qquad \mathrm{T} > \frac{\mathrm{X} - a}{\lambda}.$$

En nous reportant à la figure 4, nous voyons que P_2 est toujours extérieur au segment AB. et que P_1 n'est intérieur à ce segment (et variable sur lui) que dans le deuxième intervalle de temps. Le deuxième membre de (10″) ou de (11″) résulte donc de la somme de deux termes dont le premier $\frac{1}{2}\psi_{\mathrm{P}_1}$, n'est différent de 0 (et variable avec le temps) que dans le deuxième intervalle de temps, tandis que l'autre (représenté par une intégrale étendue de B à P_j) est nul dans le premier intervalle de temps, variable dans le deuxième, constant dans le troisième. Les deux termes représentent des ondes se propageant avec la vitesse λ, dont la première a un front en avant et un front en arrière, tandis que l'autre n'a de front qu'en avant.

D'une façon analogue on peut considérer un point d'abscisse comprise entre a et b, ou bien plus petite que a.

Dans le plan x, t (voir *fig.* 4). une des caractéristiques issues de A limite, avec la caractéristique parallèle issue de B, une bande de plan; une autre bande est limitée par les deux autres caractéristiques issues de A et de B. Lorsque le point P(X, T) se déplace dans l'une de ces deux bandes, le deuxième membre de (10″) ou de (11″) varie en général avec le déplacement de P, mais reste constant si P, restant extérieur au triangle ZAB, se déplace parallèlement aux caractéristiques qui limitent les bandes; si par contre le point P se déplace dans l'une des régions R_1, R_2, R_3, extérieures aux bandes considérées, le deuxième membre de (10″) ou de (11″) conserve toujours la même valeur, qui est o pour R_1 et R_2. [Il faut se rappeler que le deuxième membre de (11″) ne représente la solution de (11) qu'au facteur d'amortissement $e^{-\frac{\mathcal{R}}{2\mathcal{L}}T}$ près.] Dans le plan x, t déplaçons la droite x parallèlement à elle-même avec une vitesse égale à l'unité. et considérons les valeurs de u correspondant aux parties de cette droite qui viennent successivement se situer à l'intérieur des deux bandes ou des régions R_1, R_2, R_3 : nous aurons une représentation utile de la propagation des ondes, le long de la droite x, de part et d'autre du segment AB siège de la perturbation initiale.

12. Problèmes mixtes. — L'étude des phénomènes de propagation des ondes dans des milieux à une dimension, dont il est parlé au paragraphe précédent, conduisent, lorsque ces milieux peuvent être regardés comme illimités dans un sens, mais limités dans l'autre par un point O, à intégrer l'équation (10) ou (11) dans la région du plan x, t correspondant à $x \geqq 0$, $t \geqq 0$, étant données : sur la dêmi-droite $t = 0$, $x \geq 0$ les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial t}$; sur la demi-droite $x = 0$, $t \geq 0$ les valeurs de u seulement. Un tel problème est un cas particulier de cet autre :

($\mathfrak{T}$). Intégrer une équation hyperbolique, connaissant les valeurs de la solution u sur deux lignes y et z d'origine O et les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial N}$ sur z seule, dans l'hypothèse où y et z appartiennent respectivement à deux consécutifs des quatre angles déterminés par les caractéristiques passant par O, et où ni y ni z n'ont avec une caractéristique quelconque plus d'un point commun.

Si l'on mène par O la caractéristique c intérieure à l'angle yz, on peut évidemment dans la région située entre z et c déterminer u en résolvant (par la méthode de Riemann) le problème de Cauchy relatif à z; ayant ainsi déterminé les valeurs de u sur c, il suffira de résoudre entre c et y le problème suivant :

($\mathfrak{T}_1$). Intégrer une équation hyperbolique connaissant les valeurs de la solution u sur deux lignes c et y d'origine O, dans l'hypothèse où c est caractéristique, où y n'a pas avec une caractéristique quelconque plus d'un point commun, où la caractéristique de l'autre système passant par O est extérieur à l'angle cy. [Tant dans le cas du problème ($\mathfrak{T}$) que dans celui du problème ($\mathfrak{T}_1$) nous supposerons que les données, relatives à la solution cherchée, se raccordent en O.] Comme l'a montré Picard, le problème ($\mathfrak{T}_1$) peut être résolu par la méthode des approximations successives, mais il peut aussi être ramené au problème de Cauchy par la résolution d'une équation intégrale de Volterra : nous parlerons de cette dernière méthode.

Supposons l'équation hyperbolique rapportée à ses caractéristiques c'est-à-dire du type (1') (§ 2); par un changement de coordonnées qui laisse invariantes les caractéristiques, on peut se ramener au cas où c coïncide avec le demi-axe positif x_1 et y avec la bissectrice ($x_1 = x_2$) de l'angle des deux demi-axes positifs x_1, x_2. Mais alors, si sur y, $u = \varphi(x_1)$ (φ fonction connue), on aura

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{x_1=x_2} = \varphi'(x_1);$$

posons

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{x_1=x_2} = \psi(x_1):$$

il suffira de déterminer ψ pour que l'on puisse considérer comme connues sur y les dérivées premières de la solution cherchée, et pour que le problème ($\mathfrak{T}_1$) puisse par suite être considéré comme ramené à celui de Cauchy relatif à la bissectrice y. Observons maintenant que la formule (9) (§ 4) nous permet d'écrire une égalité dont le premier membre est la valeur (connue) de u en un point quelconque $P(X_1, O)$ de c et dont le deuxième membre s'exprime au moyen des valeurs de u et de ses dérivées premières sur le segment de y intercepté par les deux caractéristiques issues de P; dans ce deuxième membre [une fois déterminée la fonction de Riemann $v^*(x_1, x_2; X_1, X_2)$] l'unique terme inconnu est

$$-\frac{1}{2}\int_0^{X_1} v^*(x_1, x_1; X_1, O)\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{x_1=x_2} dx_1,$$

les autres termes étant des fonctions connues de X_1. On a par suite une équation intégrale de première espèce (de Volterra) à laquelle doit satisfaire $\psi(x_1)$; puisque $v^*(X_1, X_1; X_1, O)$ est différent de O, on pourra, par une dérivation par rapport à X_1, transformer cette équation intégrale en une de deuxième espèce (de Volterra); le noyau résolvant de cette dernière pourra se déduire, comme on sait, du noyau $\frac{\partial v^*(x_1, x_1; X_1, o)}{\partial X_1}$. On peut démontrer de cette façon que le problème $(\mathfrak{T}_1)$ admet une et une seule solution (régulière) valable dans tout l'angle des demi-axes positifs x_1, x_2.

D'une façon analogue, Picard a démontré l'existence d'une et d'une seule solution pour le problème suivant :

Intégrer une équation hyperbolique, connaissant les valeurs de la solution u sur deux lignes d'origine O, n'ayant en dehors de O aucun autre point commun, n'ayant pas plus d'un point commun avec une caractéristique quelconque, et appartenant à l'une des quatre régions déterminées par les caractéristiques passant par O. (Ce problème peut se ramener à celui de Cauchy par la résolution d'une équation intégrale aux deux limites variables.)

Nous avons déjà dit comment le problème $(\mathfrak{T})$ peut se ramener à la résolution successive du problème de Cauchy et du problème $(\mathfrak{T}_1)$. De façon analogue, la résolution de nombreux problèmes mixtes, moins simples que $(\mathfrak{T})$, peut se ramener à la résolution du problème de Cauchy dans une portion du plan adjacente à la partie du contour sur laquelle sont données u et $\frac{\partial u}{\partial N}$, puis (en se servant des valeurs déjà calculées pour u) à la résolution, dans des régions successives contiguës du plan, du problème $(\mathfrak{T}_1)$ ou de celui de la détermination d'une solution u de l'équation hyperbolique. connaissant les valeurs de u sur deux caractéristiques issues d'un point. De cette façon, on réussit à établir, pour ces problemes, l'existence et l'unicité de la solution. (Il faut faire des hypothèses relatives au raccordement des données sur les diverses parties du contour.) Parmi les problèmes auxquels il vient d'être fait allusion, nous citerons comme exemple les deux suivants :

1° (Problème de la corde vibrante, de longueur finie l, fixe à ses extrémités.) Déterminer une solution (régulière) de l'équation (10) (§ 11) dans la bande du plan x, t correspondant à $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$, quand sont imposées les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial t}$ sur le segment $t = 0$. $0 \leq x \leq l$, et les valeurs de u seule sur les deux demi-droites : $x = 0$, $t \geq 0$; $x = l$, $t \geq 0$.

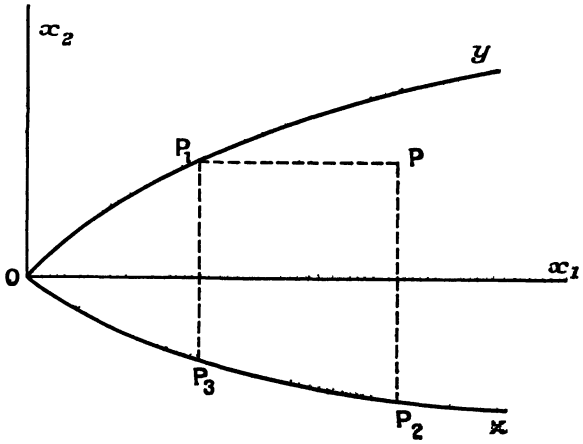
2° Déterminer une solution (réguliere) de l'équation (1′) (§ 2) à l'intérieur d'une circonférence de centre O du plan x_1, x_2, quand on impose les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ sur l'un des quatre arcs en lesquels la circonférence est divisée par les parallèles aux axes caracteristiques menés par O, et les valeurs de u seulement sur les deux arcs contigus à celui considéré, aucune condition n'étant imposée sur le quatrième arc.

Pour la résolution effective de l'un quelconque des problèmes aux limites dont il est parlé dans ce paragraphe, il apparaît évidemment désirable d'établir une formule qui exprime. en fonction des données, la valeur de la solution en un point générique de son domaine d'existence.

Supposons l'équation hyperbolique rapportée à ses caractéristiques, c'est-à-dire du type (1′). Considérons dans le plan x_1, x_2 un contour $\mathcal{C}$ tel que les deux caractéristiques issues de tout point P d'une région K (contiguë à $\mathcal{C}$) en interceptent une partie P_1P_2. Au moyen de la formule (9) (§ 4) nous pourrons pour toute solution de (1′), régulière dans K, exprimer la valeur de u_P en fonction des valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial N}$ relatives à la portion P_1P_2 de $\mathcal{C}$. Si sur quelques parties de $\mathcal{C}$ on ne connaît que les valeurs de u seule $\left(\text{ou de } \frac{\partial u}{\partial N} \text{ seule}\right)$, on devra chercher à éliminer dans (9) les éléments qui ne figurent pas parmi les données. Nous allons montrer avec M. Hadamard comment une telle élimination peut s'effectuer dans le cas du probleme ($\mathfrak{L}$) relatif à (1′).

La caractéristique comprise entre la ligne z $\left(\text{sur laquelle sont connues } u \text{ et } \frac{\partial u}{\partial N}\right)$ et la ligne y (sur laquelle on ne connaît que u) peut être prise pour le demi-axe positif x_1 (voir *fig.* 6). Tant que le point

Fig. 6.



$P(X_1, X_2)$ se trouve dans la région située entre x_1 et z, il n'y a rien à éliminer dans la formule (9); mais dès que P passe dans la région située entre x_1 et y, il faut éliminer dans la formule (9) correspondante les valeurs des dérivées premières de u le long de OP_1.

Considérons, en même temps que la fonction de Riemann $v^*(x_1, x_2; X_1, X_2)$, une autre fonction $\omega^*(x_1, x_2; X_1, X_2)$, solution elle aussi (par rapport aux variables x_1, x_2) de l'équation adjointe de (1') et satisfaisant aux conditions suivantes :

a. Quand le point $Q(x_1, x_2)$ varie sur OP_1, $\omega^*(Q, P) = -v^*(Q, P)$;

b. Quand Q varie sur la caractéristique P_1P_3, $\frac{\partial \omega^*}{\partial x_2} - b_1\omega^* = 0$

(la condition *b*, en tenant compte de *a*, équivaut à donner les valeurs de ω^* pour Q variable sur P_1P_3) [1].

Pour éliminer dans la formule (9) relative au point $P(X_1, X_2)$

---

[1] La fonction auxiliaire dont se sert Hadamard, à la place de ω^*, est celle qui correspond, selon les notations employées ici, à $(v^* + \omega^*)$.

($X_2 > 0$), les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial N}$ le long de OP_1, il suffit d'ajouter membre à membre la formule (9) et celle que l'on obtient d'après (7') (§ 4) en faisant coïncider la région T avec le triangle mixtiligne OP_1P_3 et la fonction $v(x_1, x_2)$ avec $\omega^*(x_1, x_2; X_1, X_2)$. [Il est à remarquer que dans la seconde des deux formules que l'on ajoute, à cause de la condition b, n'apparaissent que les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ relatives aux côtés P_1O et OP_3 dudit triangle, et $\frac{\partial u}{\partial N}$ est multipliée, sous le signe d'intégration, par $\frac{1}{2}\omega^*$, tandis que dans (9) $\frac{\partial u}{\partial N}$ est multipliée, sous le signe d'intégration, par $\frac{1}{2}v^*$.]

De la même façon, on peut obtenir une formule résolvant le problème ($\mathfrak{T}_1$). En procédant d'une façon analogue, on peut également réussir à éliminer dans (9) les éléments qui ne figurent pas parmi les données, pour des problèmes mixtes moins simples.

CHAPITRE III.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION

$$\Theta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x_1, x_2, x_3).$$

(MÉTHODE DE VOLTERRA.)

1. Nous avons vu dans le précédent chapitre le rôle fondamental que jouent, dans l'intégration par la méthode de Riemann d'une équation hyperbolique à deux variables, les lignes caractéristiques de cette équation. Avant même que fut établie une théorie générale des caractéristiques, Volterra eut l'intuition qu'un rôle analogue peut être joué, dans l'intégration des équations hyperboliques à plus de deux variables, par les variétés aujourd'hui dénommées conoïdes caractéristiques (Chap. I, § 4). Cette géniale intuition (jaillie d'avoir examiné à fond la façon dont les données interviennent dans les formules classiques de Parseval, Poisson, Kirchhoff, relatives aux équations des ondes cylindriques et sphériques) est ce qui importait essentiellement pour l'extension de la méthode de Riemann aux équations hyperboliques à trois variables ou plus. Dans quelques Mémoires

publiés de 1892 a 1894 Volterra se borne à étudier, au point de vue indiqué, l'intégration des équations du type

$$(12)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=\varphi(x_1,x_2,x_3)\qquad (c \text{ constante, } \varphi \text{ fonction connue}).$$

Mais ces travaux donnèrent l'impulsion à d'autres recherches importantes (dont nous nous occuperons dans les chapitres prochains), qui montrèrent comment la méthode donnée pour (12) était susceptible (conformément aux prévisions de l'Auteur) de s'étendre à des équations hyperboliques beaucoup plus générales. C'est pourquoi ces Mémoires, et en particulier celui qui sous le titre de *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes*, est inseré au tome XVIII (1894) des *Acta mathematica*, sont considérés, de même que le Mémoire de Riemann cité au précédent chapitre, comme fondamentaux dans la branche des mathématiques dont nous sommes en train de nous occuper.

L'exposition de la méthode de Volterra, relative à (12). se simplifie quand on se sert, comme nous le ferons, de la notion de conormale (ou transversale) due a d'Adhémar (Chap. I, § 6).

2. Par un changement simple de coordonnées, l'équation (12) peut se ramener à l'équation

$$(12')\quad \Theta(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=f(x_1,x_2,x_3)\qquad (f \text{ fonction connue}).$$

Les variétés caractéristiques pour cette équation sont les plans inclinés à 45° par rapport au plan $x_3=0$ et les enveloppes de ces plans. Pour (12′) (comme pour toute équation à coefficients constants) les conoïdes caractéristiques coïncident avec les cônes caractéristiques; le cône caractéristique de sommet $P(X_1, X_2, X_3)$ est défini par l'équation

$$\Gamma(x_1,x_2,x_3;X_1,X_2,X_3)=(x_3-X_3)^2-(x_1-X_1)^2-(x_2-X_2)^2=0.$$

Puisque (12′) est auto-adjointe, u et v étant deux fonctions régulières dans le volume T limité au contour S et ayant choisi comme direction positive de la normale en un point de S celle qui se dirige vers T, la formule de réciprocité (7) (Chap. I, § 7) devient

$$(13)\quad 0=\int\int\int_T[v\Theta(u)-u\Theta(v)]\,dT+\int\int_S\left(v\frac{\partial u}{\partial N}-u\frac{\partial v}{\partial N}\right)dS.$$

(La transversale positive N en un point de S est, dans le cas de (12'), conformément à ce qui est dit au Chapitre I, la demi-droite symétrique, par rapport au plan $x_3 = \text{const.}$ passant par ce point, de la normale positive n.)

Dans le cas d'une équation hyperbolique à deux variables, si l'on trace dans le plan de celles-ci une ligne fermée qui entoure un point P et si l'on considère les quatre arcs en lesquels elle est divisée par les deux caractéristiques passant par P, on peut, comme on l'a vu au précédent chapitre, exprimer la valeur en P d'une solution régulière u en fonction des valeurs de u et de sa dérivée transversale sur l'un quelconque des quatre arcs et pour chacun de ces derniers le problème se présente de façon identique. Dans le cas de (12'), si l'on considère une surface fermée entourant le point $P(X_1, X_2, X_3)$, elle est divisée par le conoïde caractéristique $\Gamma(x_1, x_2, x_3; X_1, X_2, X_3) = 0$ en trois parties, deux intérieures au conoïde (correspondant à $\Gamma > 0$, et $x_3 > X_3$ ou $x_3 < X_3$) et une extérieure (correspondant à $\Gamma < 0$); comme l'a démontré Volterra la valeur en P d'une solution régulière peut s'exprimer en fonction des valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial N}$ sur l'une quelconque de ces trois portions de surface, mais pour les deux intérieures au conoïde et pour celle extérieure le problème est essentiellement différent (une circonstance analogue se présente pour chaque équation hyperbolique normale à plus de deux variables). On est ainsi conduit à distinguer avec Volterra un *problème intérieur* et un *problème extérieur*.

3. **Problème intérieur.** — Considérons un cône caractéristique Γ de sommet P : nous désignerons par $\sigma_i^{(P)}$ toute surface qui constitue, avec une partie d'une nappe de Γ, le contour complet d'une région finie $\mathcal{J}^{(P)}$ de l'espace, intérieure à la nappe considérée et contiguë à P (nous écrirons parfois pour plus de simplicité, σ_i et $\mathcal{J}$ au lieu de $\sigma_i^{(P)}$ et $\mathcal{J}^{(P)}$). Maintenant, supposons donnée une surface Σ non fermée et satisfaisant aux conditions suivantes :

i_1. Il est possible de déterminer une région K, contiguë à Σ, constituée par tous les points P auxquels correspondent une partie $\sigma_i^{(P)}$ de Σ et une partie $\mathcal{J}^{(P)}$ de K;

i_2. Toute parallèle à l'axe x_3 menée par un point de K rencontre Σ en un seul point.

(Si Σ n'est pas illimitée, pour déterminer K, on devra considérer l'enveloppe des cônes caractéristiques ayant leur sommet en un point du contour de Σ.)

Considérons une solution u de $(12')$ régulière dans K et proposons-nous d'exprimer sa valeur en un point quelconque $P(X_1, X_2, X_3)$ de K en fonction des valeurs que u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ prennent sur la partie correspondante $\sigma_i^{(P)}$ de Σ : c'est en cela que consiste le *problème intérieur*. $\Big($Remarquons que si des parties de Σ appartiennent à des variétés caractéristiques, la connaissance sur elles des valeurs de u entraîne comme conséquence celle des valeurs de $\frac{\partial u}{\partial N}\cdot\Big)$

Faisons coïncider T, dans la formule (13), avec la région $\mathcal{J}^{(P)}$ correspondant au point P : son contour S sera constitué par une portion d'une nappe du cône caractéristique de sommet P et par la portion $\sigma_i^{(P)}$ de Σ. Identifions dans (13) u avec la solution considérée de $(12')$ et v avec une intégrale de $\Theta(v) = 0$ qui soit fonction seulement de $\theta = \frac{\pm(x_3 - X_3)}{r}$ $\left[\text{où } r = \sqrt{(x_1 - X_1)^2 + (x_2 - X_2)^2}\right]$; il suffira que v satisfasse à l'équation $(\theta^2 - 1)\frac{d^2 v}{d\theta^2} + \theta\frac{dv}{d\theta} = 0$ et par suite on pourra prendre

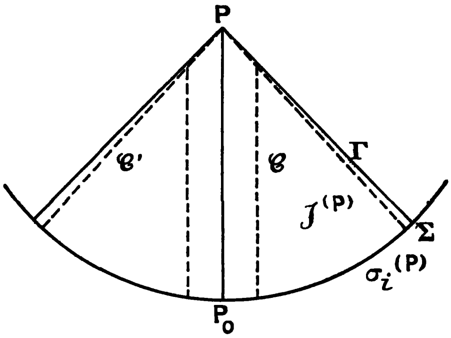
$$v = \log(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}). \tag{14}$$

v est réel dans la région $\mathcal{J}^{(P)}$ pourvu que l'on prenne dans l'expression de θ le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que cette région est intérieure à la nappe directe $(x_3 > X_3)$ ou à la nappe inverse (ou rétrograde) $(x_3 < X_3)$ du cône Γ. La fonction v définie par (14) est nulle et par conséquent (Chap. I, § 6) a sa dérivée transversale nulle sur la nappe du cône caractéristique qui limite $\mathcal{J}^{(P)}$; mais elle est indéterminée au point P, devient infinie le long de l'axe $(r = 0)$ du cône Γ et a des dérivées premières qui deviennent infinies comme $\frac{1}{\sqrt{(x_3 - X_3)^2 - r^2}}$ le long de la nappe en question de Γ. C'est pourquoi, avant d'introduire cette fonction v dans la formule de réciprocité, nous excluons de $\mathcal{J}^{(P)}$ l'axe $r = 0$ au moyen de la surface cylindrique $\mathcal{C}$ d'équation $r = \varepsilon$ et nous excluons la nappe du cône caractéristique en lui substituant celle $\mathcal{C}'$ d'un cône circulaire ayant le même sommet et le même axe, mais une demi-ouverture de $(45 - \eta)^\circ$ au lieu de 45°. Désignons par $[\mathcal{J}]$ la partie restante de $\mathcal{J}$ et par $[\mathcal{C}']$, $[\mathcal{C}]$ et $[\sigma_i]$ les parties des surfaces $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}$, et σ_i qui forment le contour S de $[\mathcal{J}]$. La formule (13) devient

$$0 = \iint\int_{[\mathcal{J}]} v f d[\mathcal{J}] + \iint_{[\mathcal{C}']+[\mathcal{C}]+[\sigma_i]} \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) dS.$$

Faisons tendre vers o, ε et η : les intégrales étendues à $[\mathcal{C}']$ tendent vers o puisque u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ sont nulles sur la nappe du cône caractéristique; $\iint_{[\mathcal{C}]} v \frac{\partial u}{\partial N}\, d[\mathcal{C}]$ tend aussi vers o, parce que le produit de ε

Fig. 7.



(qui figure comme facteur dans $d[\mathcal{C}]$) par la valeur de v en un point de $[\mathcal{C}]$ tend vers zéro; $\iint_{[\mathcal{C}]} u \frac{\partial v}{\partial N}\, d[\mathcal{C}]$ tend vers

$$\mp 2\pi \int_{X_3}^{X_3^0} u(X_1, X_2, \xi)\, d\xi$$

(X_3^0 valeur de x_3 correspondant à l'intersection P_0 avec σ_i de la droite $r = 0$) parce que le produit de ε par la valeur de $\frac{\partial v}{\partial N}$ en un point de $[\mathcal{C}]$ tend vers -1 lorsque ε tend vers o. (Dans tous les cas on doit prendre le signe supérieur ou l'inférieur suivant que $\mathcal{J}^{(P)}$ est intérieure a la nappe directe de Γ ou à la nappe inverse). A la limite on a donc

$$2\pi \int_{X_3^0}^{X_3} u(X_1, X_2, \xi)\, d\xi = \pm \iint_{\mathcal{J}^{(P)}} v f d\mathcal{J}_1^{(P)} \pm \iint_{\sigma_i^{(P)}} \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) d\sigma_i^{(P)}.$$

Dérivons par rapport à X_3 (au second membre dépendent de X_3 aussi bien la fonction v que la portion $\mathcal{J}^{(P)}$ de K et la portion $\sigma_i^{(P)}$ de Σ).

Nous obtiendrons

$$(15)\quad u(X_1,X_2,X_3)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial X_3}\left[\pm\iiint_{\mathcal{J}^{(P)}} v f d\mathcal{J}^{(P)} \pm \iint_{\sigma_i^{(P)}}\left(v\frac{\partial u}{\partial N}-u\frac{\partial v}{\partial N}\right)d\sigma_i^{(P)}\right].$$

La formule (15) résout le problème intérieur; elle peut aussi s'écrire, en tenant compte de ce que sur la nappe de Γ qui limite $\mathcal{J}^{(P)}$ (et par suite aussi sur l'intersection de cette nappe avec $\sigma_i^{(P)}$) $v=0$ et que, si l'on pose $\mathcal{R}=\sqrt{(x_3-X_3)^2-r^2}$, on a

$$\frac{\partial v}{\partial x_3}=-\frac{\partial v}{\partial X_3}=\pm\frac{1}{\mathcal{R}},\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=\mp\frac{(x_3-X_3)}{r\mathcal{R}},$$

$$(15')\quad u(X_1,X_2,X_3)=-\frac{1}{2\pi}\iiint_{\mathcal{J}^{(P)}}\frac{f}{\mathcal{R}}d\mathcal{J}^{(P)}-\frac{1}{2\pi}\iint_{\sigma_i^{(P)}}\frac{1}{\mathcal{R}}\frac{\partial u}{\partial N}d\sigma_i^{(P)}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial X_3}\iint_{\sigma_i^{(P)}}\frac{u}{\mathcal{R}}\left[\cos N x_3-\frac{(x_3-X_3)}{r}\cos N r\right]d\sigma_i^{(P)}.$$

On peut remarquer l'analogie de (15′) avec la formule bien connue de Green qui exprime la valeur en un point P d'une solution de l'équation elliptique $\Delta u=f$ comme somme d'un potentiel de volume, d'un potentiel de simple couche et d'un de double couche. Entre ces fonctions potentielles et les trois termes du second membre de (15′) comme l'a montré Volterra, il y a des analogies mais aussi des différences essentielles dues au passage d'une équation pour laquelle les cônes caractéristiques sont imaginaires (cônes isotropes) à une autre pour laquelle ils sont réels.

Considérons maintenant une surface σ_i' qui limite, avec une portion d'une nappe du cône caractéristique Γ de sommet P une partie $\mathcal{J}'$ de K non contigue a P : on voit facilement que, si dans le procédé indiqué dans ce paragraphe, on substitue à $\mathcal{J}$ et σ_i, $\mathcal{J}'$ et σ_i' on obtient la formule

$$(16)\qquad 0=\iiint_{\mathcal{J}'} v f d\mathcal{J}'+\iint_{\sigma_i'}\left(v\frac{\partial u}{\partial N}-u\frac{\partial v}{\partial N}\right)d\sigma_i'$$

[v étant toujours donnée par (14)].

4. Problème de Cauchy. — Étant donnée une surface Σ satisfaisant aux conditions (i_1), (i_2) indiquées au début du précédent paragraphe, considérons le volume correspondant K. Nous pouvons évidemment affirmer que, si le problème de Cauchy relatif à (12′) et à la surface Σ admet dans la région K une solution (réguliere), cette solution est certainement donnée par (15) ou (15′) (par suite elle est déterminée d'une façon univoque). Mais il reste à voir si, étant données arbitrairement (sauf les conditions de régularité), les valeurs $\overline{u}$ et $\overline{\frac{\partial u}{\partial N}}$ sur Σ, le deuxième membre de (15), quand on y introduit ces données, représente effectivement une fonction de X_1, X_2, X_3 satisfaisant à l'équation (12′) et aux conditions

$$\lim u_P = \overline{u}_M, \qquad \lim \sum_{s=1}^{3} \left[\frac{\partial u}{\partial X_s}\right]_P \cos[x_s N]_M = \left[\overline{\frac{\partial u}{\partial N}}\right]_M$$

lorsque P tend vers un point quelconque M de Σ.

La résolution de cette question (*synthèse de la solution*) est compliquée par la façon (à laquelle on a déjà fait allusion) dont se comportent la fonction v, définie par (14), et ses dérivées au sommet P du cône caractéristique, sur l'axe et sur la surface de ce cône. D'Adhémar a réussi à résoudre cette question en faisant usage de la notion (qu'il a introduite en même temps que Hadamard) de *partie finie d'une intégrale à élément infini*. Pour ce qui regarde cette notion et ses applications à l'étude des équations hyperboliques, nous renvoyons à ce que nous aurons l'occasion de dire au Chapitre V. Nous nous bornerons ici à quelques remarques relatives à ladite synthèse de M. d'Adhémar.

Des trois termes qui figurent au deuxieme membre de (15′) le premier satisfait à l'équation (12′) (relative aux variables X_s) tandis que les autres satisfont à la même équation rendue homogène [on doit tenir compte de ce que aussi bien la fonction v définie par (14) que la fonction $\frac{1}{\mathcal{R}}$ satisfont à l'équation $\Theta(u) = 0$, soit par rapport aux variables x_s, soit par rapport aux X_s]. Pour que la solution de (12′) donnée par le deuxième membre de (15′) satisfasse aux conditions relatives au contour Σ, il est nécessaire et suffisant que soit satisfaite la condition suivante :

i_3. Les plans tangents à Σ ont des inclinaisons inférieures à 45° par rapport aux plans $x_3 = \text{const.}$ [Si au lieu de (12′) on se rapportait à (12) il faudrait substituer à 45° l'angle dont la tangente est $\frac{1}{c}$.]

Que cette condition soit nécessaire, on peut le voir ainsi : si lorsque P tend vers un point M de Σ, le volume $\mathcal{J}^{(P)}$ et la surface $\sigma_t^{(P)}$ qui figurent dans (15) ou (15′) ne tendent pas vers o, on aura à la limite une relation à laquelle devront satisfaire les valeurs $\overline{u}$ et $\frac{\partial \overline{u}}{\partial N}$ sur une partie de Σ, relation incompatible avec l'arbitraire des données; mais pour que $\sigma_t^{(P)}$ tende vers o lorsque P tend vers M, il est nécessaire que tende vers o la surface $\tau_t^{(P)}$ interceptée par le cône caractéristique de sommet P sur le plan tangent à Σ en M; or, si ce plan n'a pas une inclinaison inférieure à 45° par rapport aux plans $x_3 = \text{const.}$, $\tau_t^{(P)}$ ne tend pas vers o.

Il serait beaucoup moins simple de montrer pourquoi la condition i_3 est suffisante.

Dans le cas où Σ est constituée par des variétés caractéristiques, comme on l'a déjà dit, on peut déduire au moyen de (15) la valeur d'une solution de (12′) en un point P de la région K, des seules valeurs de u sur Σ. Supposons imposées arbitrairement ces valeurs $\overline{u}$: la limite du deuxième membre de (15) lorsque P tend vers un point M de Σ sera-t-elle effectivement $\overline{u_M}$? A cette question, qui présente bien des difficultés, il a été donné une réponse affirmative (respectivement par d'Adhémar et par Hadamard) dans le cas où Σ est constituée par un demi-cône caractéristique et dans le cas où elle est constituée par deux demi-plans perpendiculaires entre eux, chacun étant incliné à 45° sur les plans $x_3 = \text{const.}$

La condition i_3 est équivalente à cette autre :

i'_3. Le plan tangent à Σ en chacun de ses points M et le cône caractéristique de sommet M n'ont pas, en dehors de M, d'autres points communs.

Nous dirons, avec Hadamard, que Σ (ou l'une de ses parties) a une *orientation d'espace* si elle satisfait à la condition i'_3; nous dirons qu'elle est *orientée dans le temps* lorsqu'elle ne satisfait pas à cette condition et n'est pas tangente à des variétés caractéristiques. La condition i_3 [ou i'_3] est certainement satisfaite par les plans $x_3 = \text{const.}$ (plans qui ont une importance particulière pour les applications physiques, puisque la variable x_3 représente alors le temps). Supposons que Σ coïncide avec le plan $x_3 = 0$; la formule (15′), puisque ce plan a une orientation d'espace, permet de résoudre le problème de Cauchy; en tout point de Σ on aura : $\cos N x_3 = \pm 1$, suivant que l'on considère les points $P(X_1, X_2, X_3)$ comme appartenant à la région $x_3 < 0$ ou à la région $x_3 > 0$; $\sigma_l^{(P)}$ s'identifiera avec le cercle de centre $P(X_1, X_2, O)$ et de rayon $|X_3|$. Si l'on suppose $f = 0$, on retrouve alors, comme l'a montré Volterra, la formule connue de Poisson-Parseval :

$$u(X_1, X_2, X_3) = \mp \frac{1}{2\pi} \int\int_{\sigma_l} \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial u}{\partial x_3} d\sigma_l \mp \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial X_3} \int\int_{\sigma_l} \frac{u}{\mathcal{R}} d\sigma_l.$$

où $\mathcal{R} = \sqrt{X_3^2 - (x_1 - X_1)^2 - (x_2 - X_2)^2}$. (En rapportant les points du plan Σ à un système de coordonnées polaires r, α, et en faisant la transformation $\alpha_1 = \alpha$, $|X_3| r_1 = r$, on peut écrire la formule précédente de façon que les domaines d'intégration ne dépendent pas des X_r.)

Quand Σ a une orientation d'espace, la région K (§ 3) dans laquelle est applicable la formule (15') se compose de deux parties respectivement contigues aux deux faces de Σ; on ne peut pas affirmer cela lorsque Σ n'a pas cette orientation.

Même lorsqu'il y a des parties de Σ orientées dans le temps, la formule (15'), comme nous le verrons dans ce chapitre même, peut être utilisée pour la résolution des problèmes aux limites relatifs à l'équation (12'). Notable est le cas [pour lequel Volterra a particularisé la formule (15')] où Σ est constituée par une portion du plan $x_3 =$ const. et par la surface cylindrique ayant comme génératrices les demi-droites parallèles au demi-axe $+x_3$ (ou $-x_3$) menées par les points du contour de ladite portion de plan.

5. Problème intérieur relatif à un système particulier. — Par un procédé analogue à celui qui a été employé pour (12') (§ 3), Volterra, dans les Mémoires auxquels nous avons déjà fait allusion, a intégré le système d'équations qui régit les vibrations élastiques dans un milieu indéfini quand le phénomène se produit de la même façon sur tous les plans (de l'espace ordinaire) parallèles à un plan donné β. En rapportant les points de ce dernier à deux axes de coordonnées cartésiennes x_1, x_2, les composantes u_1, u_2, suivant ces axes, des déplacements satisfont au système

$$(17) \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} - a^2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = f_1; \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} + a^2 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = f_2;$$

où t désigne le temps; a. b sont des constantes dépendant de la nature du milieu; f_1 et f_2 (fonctions connues) désignent les composantes suivant les axes x_1, x_2 des forces de masse;

$$\gamma = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

sont respectivement la dilatation et la rotation d'une particule. [La composante u_3, suivant la normale au plan β, du déplacement élastique satisfait à une équation du type (12).]

Dans l'espace-temps x_1, x_2, t considérons les deux cônes ayant pour sommet le point $P(X_1, X_2, T)$, pour axe la droite $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2$, et comme demi-angle d'ouverture $\operatorname{arctg} a$ et $\operatorname{arctg} b$. Étant données, sur une variété Σ (à deux dimensions) satisfaisant à des conditions analogues à i_1, i_2 du paragraphe 3, les valeurs de u_1, u_2 et de leurs dérivées normales, les formules données par Volterra expriment les valeurs de u_1, u_2 en un point P au moyen des données relatives à la partie de Σ qui est interceptée par la nappe directe ou inverse de celui des deux cônes précédents qui a la plus grande ouverture.

Dans quelques conférences, faites à Paris en 1933, Volterra a montré comment l'intégration du système (17) peut se ramener simplement à l'intégration des équations du type (12) [Comme on le déduit immédiatement de (17), la dilatation γ et la rotation $\frac{1}{2}\omega$ satisfont chacune à une équation de ce type.] Cela réussit d'une façon particulièrement simple quand Σ est le plan $t = 0$. [Ce dernier cas est traité dans une Note de R. Enaudi insérée aux *Rendiconti dei Lincei* de 1934.]

6. Conditions d'unicité pour les solutions de certains problèmes aux limites relatifs à l'équation (12') $\Theta(u) = f$. — Supposons donnée une surface Σ non fermée pour laquelle il est possible de déterminer une région contigue K de l'espace telle que la nappe rétrograde du cône caractéristique de sommet en l'un quelconque, P, des points de K limite avec Σ une portion finie $\mathcal{J}^{(P)}$ de la région K elle-même (§ 3).

Le contour de $\mathcal{J}^{(P)}$ sera constitué par $\sigma_i^{(P)}$ (portion de Σ) et par $(\Gamma_1^{(P)})$ (portion de la nappe rétrograde du cône caractéristique). Si Σ a des parties n'ayant pas une orientation d'espace, nous avons vu qu'il n'existe pas de solution u de (12') régulière dans K et correspondant aux valeurs $\overline{u}$ et $\overline{\frac{\partial u}{\partial N}}$ données arbitrairement sur Σ. On peut alors se demander si, étant données arbitrairement les valeurs de u sur Σ tout entière et celles de $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$ sur les parties de Σ ayant éventuellement une orientation d'espace, il reste ou non quelque indétermination pour u. Quelques résultats à ce sujet obtenus par Volterra sont insérés, sans démonstration, dans les *Actes du Congrès des Mathématiciens* tenu à Rome en 1908. Avec l'aide de quelques notes conservées par l'Auteur, nous avons pu reconstruire le procédé dont il s'est servi et que nous allons exposer en ajoutant quelques compléments aux résultats en question.

Supposons que Σ soit formée de parties $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \Sigma^{(3)}, \Sigma^{(4)}$ le long desquelles la normale n (intérieure à K) satisfait respectivement aux conditions

$$(c_1) \qquad 0^\circ \leqq \widehat{nx_3} < 45^\circ;$$

$$(c_2) \qquad \widehat{nx_3} = 135^\circ \text{ ou } 45^\circ;$$

$$(c_3) \qquad 45^\circ < \widehat{nx_3} \leqq 90^\circ;$$

$$(c_4) \qquad 90^\circ < \widehat{nx_3} < 135^\circ.$$

Pour voir si, étant données les valeurs de u sur Σ tout entière et celles de $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$ sur seulement les parties éventuelles $\Sigma^{(1)}$, il reste ou non dans K quelque indétermination pour une solution (régulière) de (12′), il suffit de voir si l'équation homogène $\Theta(u) = 0$ peut ou non avoir dans K des solutions (régulières) autres que la solution $u \equiv 0$, quand on impose la valeur 0 pour u sur Σ tout entière et la valeur 0 pour $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$ sur seulement les parties éventuelles $\Sigma^{(1)}$.

A toute portion $\sigma_i^{(\mathrm{P})}$ de Σ (§ 3) associons une direction $\mathcal{L}^{(\mathrm{P})}$ de cosinus directeurs constants, satisfaisant à la condition

$$(c) \qquad 0^\circ \leqq \widehat{\mathcal{L}^{(\mathrm{P})}x_3} < 45^\circ.$$

Si dans l'une quelconque des $\sigma_i^{(\mathrm{P})}$ il y a des parties $\Sigma^{(3)}$ ou $\Sigma^{(4)}$, nous supposerons qu'il est possible de determiner $\mathcal{L}^{(\mathrm{P})}$ de façon que. outre la condition (c), soit satisfaite aussi cette autre

$$(c') \qquad \widehat{n\mathcal{L}^{(\mathrm{P})}} \leqq 90^\circ$$

le long de ces parties $\Sigma^{(3)}, \Sigma^{(4)}$.

[Remarquons que la condition (c') peut être facilement satisfaite en même temps que la condition (c), dans les cas suivants :

Quand dans une $\sigma_i^{(P)}$ il n'y a pas de parties $\Sigma^{(4)}$ (il suffit alors de prendre $\mathcal{L}^{(P)}$ confondue avec la direction du demi-axe positif x_3);

Quand les parties $\Sigma^{(3)}, \Sigma^{(4)}$ d'une $\sigma_i^{(P)}$ appartiennent à un domaine suffisamment voisin d'un point régulier de Σ;

Quand dans une $\sigma_i^{(P)}$ il n'y a pas de parties $\Sigma^{(3)}$, et que les parties $\Sigma^{(4)}$ appartiennent à un même plan ou à des plans parallèles.]

On peut alors démontrer qu'une solution (régulière) de $\Theta(u) = 0$, nulle sur Σ et ayant une dérivée transversale nulle sur les parties éventuelles $\Sigma^{(1)}$ de Σ, est nulle sur toute surface conique caractéristique $(\Gamma_1)^{(P)}$ et par suite en tout point P de la région K.

Pour la démonstration on peut partir de la formule

$$(18)\quad 0 = -\int\int\int_T \frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}} \Theta(u)\, d\mathrm{T} = \int\int_S \left[\frac{\partial u}{\partial \mathcal{L}} \frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}} - \frac{1}{2} \varphi(u) \cos n\mathcal{L}\right] d\mathrm{S},$$

valable pour toute solution de $\Theta(u) = 0$ régulière dans l'espace T limité au contour S, si l'on pose

$$\varphi(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2,$$

$\mathcal{L}$ désignant une direction de cosinus directeurs constants, n la normale intérieure, N la transversale et par suite

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos n x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos n x_2 - \frac{\partial u}{\partial x_3} \cos n x_3$$

la dérivée transversale.

Faisons coïncider T avec $\mathcal{T}^{(P)}$ [et par suite S avec $(\Gamma_1)^{(P)} + \sigma_i^{(P)}$] et $\mathcal{L}$ avec une direction $\mathcal{L}^{(P)}$ satisfaisant aux conditions (c), (c'). Le long de $\sigma_i^{(P)}$, puisque $u = 0$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_r} = \pm \sqrt{\gamma(u)} \cos n x_r \qquad \text{avec} \qquad \gamma(u) = \sum_{s=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right)^2.$$

En tout point Q de $(\Gamma_1)^{(P)}$ la transversale N coïncide avec la demi-droite g [appartenant à $(\Gamma_1)^{(P)}$] d'origine Q et passant par P; désignons par ν la droite normale en Q à g et à n; exprimons les $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}$ relatives au point Q au moyen des dérivées de u le long des trois directions orthogonales ν, n, g. Posons

$$\Phi\left[\frac{\partial u}{\partial g}, \frac{\partial u}{\partial \nu}\right] = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial g}\right)^2 \cos \mathcal{L}^{(P)} g + \frac{\partial u}{\partial g} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cos \mathcal{L}^{(P)} \nu - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \cos \mathcal{L}^{(P)} n\right];$$

de la formule (18), on tire alors

$$(18') \qquad o = \int\int_{\sigma_\iota^{(P)}} - \frac{\gamma(u)}{2} \cos \mathcal{L}^{(P)} n \cos 2(n x_3)\, d\sigma_\iota^{(P)}$$
$$+ \int\int_{(\Gamma_1)^{(P)}} \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial g}, \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d(\Gamma_1)^{(P)}.$$

A cause de la condition c, on peut affirmer que en tout point de $(\Gamma_1)^{(P)}$, $\cos \mathcal{L}^{(P)} g$ est positif, tandis que le discriminant de la forme quadratique Φ [c'est-à-dire $1 - 2\cos^2 \mathcal{L}^{(P)} x_1$] est négatif, et par suite $\Phi \geqq 0$. Le long des parties $\Sigma^{(1)}$ de $\sigma_\iota^{(P)}$, $\gamma(u) = 0$ $\left(\text{puisque } u \text{ et } \frac{\partial u}{\partial N} \text{ sont nulles ainsi que par suite toutes les derivées premieres de } u\right)$; le long des parties $\Sigma^{(2)}$. $\cos 2(n x_3)$ est nul; le long des parties $\Sigma^{(3)}$, $\Sigma^{(4)}$ on a $\cos 2(n x_3) < 0$ et. à cause de la condition c', $\cos \mathcal{L}^{(P)} n \geqq 0$; par suite le long de $\sigma_\iota^{(P)}$ on a

$$- \frac{\gamma(u)}{2} \cos \mathcal{L}^{(P)} n \cos 2(n x_3) \geqq 0.$$

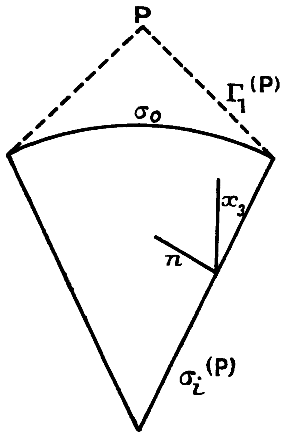
Puisque aucune des deux intégrales qui figurent dans (18′) ne peut être négative, les deux devront être nulles; mais ceci implique $\Phi = 0$ et par suite $\frac{\partial u}{\partial g} = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ en tout point de $(\Gamma_1)^{(P)}$; puisque $u = 0$ sur Σ. u devra être nul en tout point de $(\Gamma_1)^{(P)}$ et en particulier en P.

Tels sont en substance, à part quelques compléments introduits par nous, les résultats, auxquels nous avons fait allusion, de Volterra. Nous ajoutons les observations suivantes :

Si dans la région K, c'était les nappes directes des cônes caractéristiques qui limitaient les régions $\mathcal{J}^{(P)}$, on n'aurait évidemment qu'à substituer, dans ce qui a été dit précédemment, à la direction $+ x_3$, la direction $- x_3$.

Il est aussi à remarquer que lorsque l'on a démontré que $u = 0$ sur une surface conique caractéristique $(\Gamma_1)^{(P)}$, correspondant à une portion $\sigma_\iota^{(P)}$ de Σ, on peut ensuite appliquer les résultats précédemment exposés à la surface qui se déduit de Σ en substituant $(\Gamma_1)^{(P)}$ à $\sigma_\iota^{(P)}$; en procédant de cette façon, on peut déduire de nombreuses conséquences relatives à la détermination ou à l'impossibilité des problèmes aux limites. On réussit par exemple à démontrer que pour toute surface régulière Σ, satisfaisant à la condition indiquée au début de ce paragraphe et ayant en tout point sa normale n (intérieure à K) telle que $0° \leqq \widehat{nx_3} \leqq 135°$, si l'on se donne arbitrairement les valeurs de u sur Σ tout entière et les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial N}$ seulement sur les parties pour lesquelles $0° \leqq \widehat{nx_3} < 45°$, on ne peut avoir dans K plus d'une solution (régulière) correspondante de (12'). On peut aussi déduire immédiatement, dans de nombreux cas l'impossibilité du problème de Dirichlet relatif à (12'). Considérons par exemple une surface (non régulière) Σ satisfaisant, outre à la condition indiquée au début de ce paragraphe, à cette autre : $45° \leqq \widehat{nx_3} \leqq 90°$ en tout point; le problème de Dirichlet pour (12') sera certainement impossible dans toute région dont le contour complet est formé (*fig.* 8) par une portion $\sigma_i^{(P)}$ de Σ

Fig. 8.



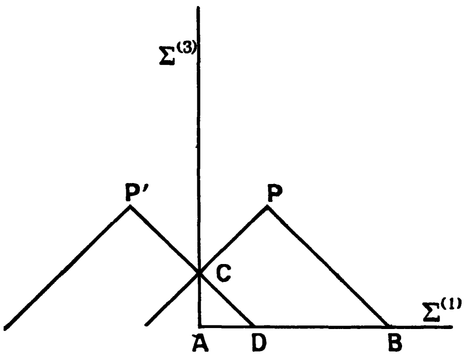
et par une autre surface σ_0 intérieure à la région $\mathfrak{J}^{(P)}$ correspondant à $\sigma_i^{(P)}$ (§ 3) : en effet, si l'on se donne arbitrairement les valeurs de u sur la partie $\sigma_i^{(P)}$ du contour, on ne pourra se les donner aussi arbitrairement sur la partie restante σ_0 de ce dernier.

7. La méthode des caractéristiques et la méthode des images appliquées à la résolution de quelques problèmes aux limites. — Parmi les problèmes aux limites considérés dans le précédent paragraphe, sont d'un intérêt particulier, pour les applications physiques (la variable x_3 représente alors le temps) ceux correspondant à un contour Σ constitué par une portion $\Sigma^{(1)}$ du plan $x_3 = 0$ et par une surface $\Sigma^{(3)}$ parallele à l'axe x_3. D'après ce qui a été vu au précédent paragraphe, le problème de déterminer dans la région K (correspondant au contour Σ) une solution (régulière) de l'équation $\Theta(u) = 0$, qui prenne sur Σ des valeurs données et ait sur $\Sigma^{(1)}$ une dérivée transversale $\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$ donnée, ne peut admettre plus d'une solution. La résolution effective d'un tel problème se présente quand, par exemple, on étudie les vibrations transversales d'une membrane tendue sur une portion $\Sigma^{(1)}$ du plan x_1, x_2. Si le contour $\mathcal{C}$ de la membrane est maintenu fixe, on connaît les valeurs de u (nulles) sur la surface $\Sigma^{(3)}$ lieu des demi-droites paralleles au demi-axe $+ x_3$ menées par les points de $\mathcal{C}$; en supposant connus les déplacements et les vitesses initiaux des points de la membrane, on connaît le long de $\Sigma^{(1)}$ soit u, soit $\frac{\partial u}{\partial N} = -\frac{\partial u}{\partial x_3}$.

Considérons un point $Q(X_1, X_2)$ intérieur à la membrane, en un instant $X_3 > 0$; il lui correspond dans l'espace-temps x_1, x_2, x_3 un point $P(X_1, X_2, X_3)$ de la région K. Si la valeur de X_3 est suffisamment petite, la nappe inverse $\Gamma_1^{(P)}$ du cône caractéristique de sommet P rencontre $\Sigma^{(1)}$ mais non $\Sigma^{(3)}$ et par suite la formule (15′) du paragraphe 3 (dans laquelle on pose $f = 0$) permet de déterminer la valeur de u en P en fonction des valeurs que u et $\frac{\partial u}{\partial x_3}$ ont à l'instant initial sur la partie de $\Sigma^{(1)}$ interceptée par la dite nappe. Mais pour des valeurs plus grandes de X_3, $\Gamma_1^{(P)}$ intercepte aussi une partie de $\Sigma^{(3)}$ et la formule citée peut donner la valeur u_P en fonction des données aux limites, seulement si l'on réussit à y éliminer les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial N}$ le long de cette partie de $\Sigma^{(3)}$. Cette élimination peut s'effectuer dans le cas où $\Sigma^{(1)}$ est un polygone, en combinant comme l'a montré Volterra, la méthode des caractéristiques avec celle des images.

Pour simplifier, considérons d'abord le cas dans lequel on doit intégrer l'équation $\Theta(u) = 0$ dans la région $x_3 \geqq 0$, $x_1 \geqq 0$, connaissant sur le demi-plan $\Sigma^{(1)}$, $x_3 = 0$, $x_1 \geqq 0$, les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial x_3}$ et sur le demi-plan $\Sigma^{(3)}$, $x_1 = 0$, $x_3 \geqq 0$, les valeurs de u seulement. Pour un point P, pour lequel $X_3 > X_1$ la nappe inverse $\Gamma_1^{(P)}$ du cône caractéristique de sommet P interceptera, outre une partie du plan $x_3 = 0$, une partie du plan $x_1 = 0$ et le long de celle-ci il faudra éliminer les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial N}$. Considérons le point P' image de P par rapport au plan $x_1 = 0$ (*fig.* 9) : les nappes inverses $\Gamma_1^{(P)}$ et $\Gamma_1^{(P')}$ se rencontrent sur ce plan. Imaginons écrite la formule (15') (avec $f = 0$) relative à P et au contour $\Sigma^{(1)} + \Sigma^{(3)}$: au premier membre, on aura u_P; au deuxième membre figureront des intégrales étendues aux portions de $\Sigma^{(1)}$ et $\Sigma^{(3)}$ représentées par AB et AC sur la figure 9. Une formule analogue peut être écrite relativement à P', il suffira (*cf.* la fin du paragraphe 3) de substituer au premier membre de la précédente un o; de remplacer au deuxième membre les coordonnées de P par celles de P',

Fig. 9



les intégrales étendues à la partie AB de $\Sigma^{(1)}$ par des intégrales étendues à la portion AD. (On remarquera que dans la deuxième formule les intégrales étendues a la portion CA de $\Sigma^{(3)}$ ne different de celles relatives à la première formule que parce que, au lieu de $\cos Nr$, on doit poser $-\cos Nr$.) En retranchant alors membre à membre les deux formules, on élimine dans l'expression de u_P les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial N}$ le long de $\Sigma^{(1)}$ (en les ajoutant, on éliminerait par contre les valeurs de u le long de $\Sigma^{(3)}$). On peut, comme l'a fait Hadamard, procéder pour ce probleme a la synthèse de la solution : on trouve alors que (en supposant les données régulières sur les plans $x_3 = 0$, $x_1 = 0$ et se raccordant à l'intersection de ces plans) dans la région K tout entière, la fonction u_P, obtenue par le procédé indiqué, donne effectivement la solution du problème aux limites proposé.

Revenons au cas de la membrane vibrante et supposons la polygonale : la surface $\Sigma^{(s)}$ sera alors une surface prismatique, formée de plusieurs plans α_s parallèles à l'axe x_3. Considérons dans la région K (intérieure à la surface prismatique et au demi-espace $x_3 > 0$) un point P (X_1, X_2, X_3) correspondant à une valeur suffisamment grande de X_3. Pour avoir u_P, exprimé au moyen des seules données aux limites, on peut s'aider, de la façon vue précédemment, des images $P^{(s)}$ de P par rapport aux divers plans α_s; mais la nappe inverse du cône caractéristique de sommet en l'une de ces images $P^{(s)}$ peut rencontrer (en des points correspondant a $x_3 > 0$), outre le plan α_s, quelque autre plan α_z; il faudra alors considérer l'image $P^{(sz)}$ de $P^{(s)}$ par rapport au plan α_z, et ainsi de suite. Il est intéressant de noter, avec Volterra, que (à la différence de ce qui arrive quand on applique la méthode des images à la résolution du problème de Dirichlet pour une équation elliptique) le nombre des images successives qu'il faut considérer pour pouvoir éliminer de la formule (15′) (relative à un point déterminé P) les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial N}$ le long de la surface prismatique $\Sigma^{(s)}$, est toujours fini, même si (comme dans le cas d'une membrane rectangulaire) il existe une infinité d'images successives de P par rapport aux plans α_s; en effet on peut évidemment faire abstraction des images qui sont à une distance supérieure à X_3 de tous les plans α_s; on a donc toujours dans la formule résolutive, un nombre fini de termes.

Supposons maintenant que l'on doive intégrer l'équation $\Theta(u) = 0$ dans la région K correspondant à un contour Σ (satisfaisant aux conditions indiquées au début du paragraphe 3) constitué par des parties ayant une orientation d'espace, sur lesquelles seront assignées u et $\frac{\partial u}{\partial N}$, et par des parties orientées dans le temps ou appartenant à des caractéristiques, sur lesquelles on assignera u seulement. Volterra a montré comment la méthode indiquée pour le cas des vibrations d'une membrane, peut s'étendre au probleme actuellement énoncé, quand les parties du contour orientées dans le temps appartiennent à des plans ou à des hyperboloïdes ayant comme cônes asymptotes des cônes caractéristiques. Nous indiquerons brievement comment une telle extension est possible. Soit un plan α et un point P extérieur à lui, menons par P la transversale au plan et prolongeons-là, au delà de son intersection P_0 avec α d'un segment P_0P' égal à PP_0; nous appellerons, avec Volterra, P' la *coimage* de P par rapport à α.

Étant donnés deux points $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ nous appellerons leur *codistance* la quantité réelle

$$\sqrt{\pm[(a_3-b_3)^2-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2]}.$$

Si deux points P, P′ sont l'un la coimage de l'autre par rapport à un plan α, les codistances de P et P′ à un même point de α sont égales et les deux cônes caractéristiques de sommets P et P′ se coupent en des points de α. Soit un hyperboloïde $\mathcal{J}$ d'équation $x_1^2+x_2^2-x_3^2=\pm c^2$ et un point $P(X_1, X_2, X_3)$; nous appellerons *coimage* de P par rapport à $\mathcal{J}$ le point $P'(X'_1, X'_2, X'_3)$ tel que $X'_r = \frac{\pm c^2 X_r}{X_1^2+X_2^2-X_3^2}$. Les codistances de P et P′ à un point de $\mathcal{J}$ sont dans un rapport constant; les cônes caractéristiques de sommets P et P′ se rencontrent en des points de $\mathcal{J}$. En tenant compte de ces propriétés, on voit que l'on peut se servir des *coimages*, comme dans le cas de la membrane vibrante on s'est servi des images, pour éliminer dans (15′) les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial N}$ le long des parties de Σ orientées dans le temps et appartenant à des plans ou à des hyperboloïdes dont les cônes asymptotes sont des cônes caractéristiques.

Nous ne croyons pas que l'on ait jusqu'à présent examiné le cas où le contour Σ (satisfaisant aux conditions i_1, i_2 indiquées au début du paragraphe 3) n'a pas de parties ayant une orientation d'espace. Un tel contour Σ pourrait par exemple être constitué par deux demi-plans σ, σ_1 (limités à une même droite) ayant respectivement les inclinaisons g^0 et g_1^0 par rapport au plan $x_3=0$, avec $90 > g \geq 45$ et $90 \geq g_1 > 45$. Les valeurs de u seulement sur Σ (paragraphe précédent) suffisent alors pour que u soit univoquement déterminée dans la région K correspondante. Si $g=45$, pour éliminer dans la formule (15′) relative à un point P de K les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial N}$ le long de σ_1 $\left(\text{sur } \sigma \text{ la connaissance de } u \text{ entraîne conséquemment celle de } \frac{\partial u}{\partial N}\right)$, il suffit de considérer seulement la coimage de P par rapport à σ_1; si g est elle aussi supérieure à 45, pour ladite élimination il faudrait par contre considérer un nombre infini de coimages par rapport aux deux plans. comme on le voit facilement en faisant la figure relative à ce cas; cas qui diffère par conséquent notablement de ceux considérés par Volterra.

8. **Le problème extérieur.** — Comme on l'a dit au paragraphe 2,

l'intégration par la méthode des caractéristiques de l'équation hyperbolique (12′) a conduit Volterra à distinguer un problème intérieur et un problème extérieur. (Distinction qui se présente comme opportune pour toute équation hyperbolique, normale, à plus de deux variables.) Du problème intérieur et de sa connexion avec le problème de Cauchy et avec les divers problèmes aux limites qui peuvent se poser pour ladite équation, nous avons parlé dans les précédents paragraphes; nous nous occuperons maintenant du problème extérieur.

Considérons le cône caractéristique $\Gamma^{(P)}$ de sommet P et désignons par $\sigma_e^{(P)}$ toute surface qui constitue, avec une portion de la nappe directe et une portion de la nappe inverse de $\Gamma^{(P)}$, le contour complet d'un volume fini $E^{(P)}$ extérieur à $\Gamma^{(P)}$ et contigu à P. Supposons maintenant donnée une surface Σ satisfaisant aux conditions suivantes :

e_1. Il est possible de déterminer une région H de l'espace constituée par tous les points P auxquels correspond une portion $\sigma_e^{(P)}$ de Σ et par suite une portion $E^{(P)}$ de l'espace;

e_2. Toute droite perpendiculaire à la direction x_3 menée par un point de H rencontre Σ en deux points seulement.

Considérons une solution (régulière) de (12′) et proposons-nous d'exprimer sa valeur en un point quelconque $P(X_1, X_2, X_3)$ de H au moyen des valeurs que la fonction u elle-même et sa dérivée transversale $\frac{\partial u}{\partial N}$ prennent sur la partie correspondante $\sigma_e^{(P)}$ de Σ : c'est en cela que consiste le problème extérieur. Pour résoudre ce problème, Volterra divise, au moyen du plan $x_3 = X_3$, la région $E^{(P)}$ en deux parties E_1, E_2 correspondant respectivement à $x_3 < X_3$ et à $x_3 > X_3$; dans chacune d'elles, il applique la formule de réciprocité (13) (§ 2) à la solution u de (12′) et à une solution, v_1 ou v_2, convenablement choisie, de l'équation homogène $\Theta(v) = 0$.

Nous chercherons à mettre en relief les propriétés essentielles de ces fonctions auxiliaires : cela peut être utile pour les extensions possibles à des équations plus générales.

Posons

$$r = \sqrt{(x_1 - X_1)^2 + (x_2 - X_2)^2}; \qquad \theta = \frac{x_3 - X_3}{r};$$

$$\chi(x) = \int_0^x \log(1 - \tau^2) \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}}.$$

Prenons avec Volterra

$$v_1 = \varphi(r, \theta) + \psi(r), \qquad v_2 = \varphi(r, \theta) - \psi(r),$$

φ et ψ étant données par les formules

$$(19)_A \qquad \varphi = \arcsin\theta, \qquad \psi = \frac{\pi}{2}$$

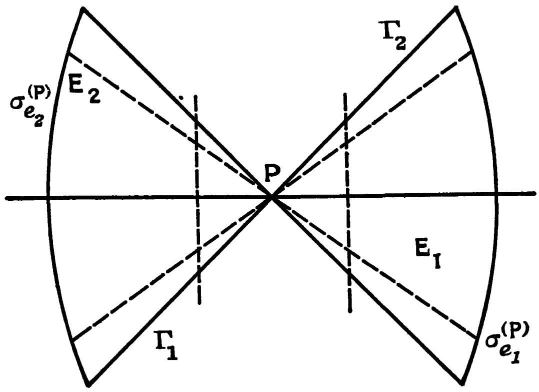
ou bien par ces autres

$$(19)_B \qquad \varphi = \log r \arcsin\theta + \chi(\theta), \qquad \psi = \chi(1) + \frac{\pi}{2}\log r.$$

[On vérifie facilement que $\Theta(\varphi) = 0$ et que $\Delta_{x_1, x_2}\psi = 0$ et que par suite $\Theta(v_1) = \Theta(v_2) = 0$.]

De E_1 et E_2. excluons le point P au moyen du cylindre Ω d'axe $r = 0$ et de rayon ρ ; excluons les nappes Γ_1. Γ_2 de $\Gamma^{(P)}$ au moyen de celles d'un autre cône circulaire, ayant le même axe et le même sommet que $\Gamma^{(P)}$, mais une demi-ouverture de $45° + \alpha°$ ($\alpha > 0$) au lieu de $45°$ (*fig.* 10). Dans les parties restantes de E_1 et E_2 (où v_1 et v_2 sont,

Fig. 10.



ainsi que u, régulières) appliquons la formule de réciprocité (13) respectivement à u et v_1, à u et v_2 ; passons ensuite à la limite pour ρ et α tendant vers 0.

Dans les deux formules que l'on obtient ainsi. ne figurent pas des intégrales étendues à Γ, parce que sur la nappe inverse Γ_1 ($\theta = -1$) v_1 est nulle $\left(\text{et par suite } \frac{\partial v_1}{\partial N}\right)$, tandis que v_2 $\left(\text{et par suite aussi } \frac{\partial v_2}{\partial N}\right)$

est nulle sur la nappe directe Γ_2 ($\theta = +1$). Si nous désignons par $\mathcal{C}$ la courbe (fermée) intersection de Σ avec le plan $x_3 = X_3$ et par γ la partie de ce plan intérieure à $\mathcal{C}$, nous pouvons observer que, le long de γ, la transversale N coïncide avec la direction $+x_3$ ou $-x_3$ suivant que l'on considere γ comme contour de E_1 ou de E_2. Par suite, en additionnant membre à membre les deux formules dont nous parlions, on obtient

$$(20)\qquad 0 = \sum_s \Big[\int\int\int_{E_s} v_s f\, dE_s + \int\int_{\sigma_{es}} \left(v_s \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v_s}{\partial N} \right) d\sigma_{es} \Big] + 2\int\int_\gamma \psi \frac{\partial u}{\partial x_3} d\gamma,$$

où $s = 1, 2$ et ou σ_{e1}, σ_{e2} sont les parties de $\sigma_e^{(P)}$ correspondant à E_1 et E_2.

Dérivons la formule précédente par rapport a X_3, en tenant compte de ce que sous les signes d'intégration seul φ dépend de X_3, mais que les régions E_1, E_2 et les parties σ_{e1}, γ, σ_{e2} de leurs contours dependent elles aussi de X_3. Rappelons-nous que v_s est nul sur Γ_s et par suite sur l'intersection $\mathcal{C}_s$ de Γ_s avec σ_{es}; observons que l'on peut écrire

$$\frac{\partial v_s}{\partial N} = \frac{\partial v_s}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial N} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial N}$$

et que $\frac{\partial v_s}{\partial r}$, qu'il faut calculer comme si θ était indépendant de r, est nulle sur Γ_s et par suite sur $\mathcal{C}_s$. On voit alors que, avec ladite dérivation, les intégrales étendues aux volumes E_s donnent

$$\int\int\int_{E^{(P)}} \frac{\partial \varphi}{\partial X_3} f\, dE^{(P)} + 2\int\int_\gamma \psi f\, d\gamma;$$

celles étendues aux surfaces σ_{es} donnent

$$\int\int_{\sigma_e^{(P)}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial X_3}\frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial}{\partial X_3}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial N} \right] d\sigma_e^{(P)}$$
$$- \frac{\partial}{\partial X_3}\int\int_{\sigma_e^{(P)}} u \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial N} d\sigma_e^{(P)} + 2\int_{\mathcal{C}} \left(\psi \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial \psi}{\partial N} \right) \frac{d\mathcal{C}}{\sin NX_3},$$

l'intégrale étendue à γ donne enfin

$$2\int\int_\gamma \psi \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} d\gamma - 2\int_{\mathcal{C}} \psi \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\cos N x_3}{\sin N x_3} d\mathcal{C},$$

Tenons compte de ce que $f + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \Delta_{x_1, x_2} u$ et de ce que, étant donnée la normale intérieure ν (dans le plan de γ) à la courbe $\mathcal{C}$, on a en tout point de cette dernière courbe pour une fonction ξ des variables x_1, x_2, x_3 (ou de x_1, x_2 seules),

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mathrm{N}} - \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \cos \mathrm{N} x_3 = \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \sin \mathrm{N} x_3.$$

Observons d'autre part que, étant donnée une circonférence c (dans le plan de γ) de centre P et de rayon ε, on a, d'après une formule bien connue de Green ($\Delta_{x_1, x_2} \psi$ étant nul) :

$$2 \int\!\!\int_\gamma \psi \, \Delta_{x_1, x_2} u \, d\gamma + 2 \int_{\mathcal{C}} \left(\psi \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) d\mathcal{C} = \lim_{\varepsilon = 0} 2 \int_c \left(u \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial u}{\partial r} \right) dc.$$

Mais cette dernière limite est o ou $2\pi^2 u_{\mathrm{P}}$ suivant que l'on prend pour φ et ψ les expressions $(19)_{\mathrm{A}}$ ou $(19)_{\mathrm{B}}$; en la désignant par $k u_{\mathrm{P}}$ on obtient donc de (20) après la dite dérivation par rapport à X_3

$$(21) \qquad \begin{aligned} - k u_{\mathrm{P}} = & \int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{E}^{(\mathrm{P})}} f \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{X}_3} \, d\mathrm{E}^{(\mathrm{P})} \\ & + \int\!\!\int_{\sigma_e^{(\mathrm{P})}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{X}_3} \frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}} - u \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}_3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial \mathrm{N}} \right] d\sigma_e^{(\mathrm{P})} \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}_3} \int\!\!\int_{\sigma_e^{(\mathrm{P})}} u \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{N}} \, d\sigma_e^{(\mathrm{P})}. \end{aligned}$$

Supposons que l'on prenne φ et ψ d'après $(19)_{\mathrm{A}}$; la formule (21), que nous désignerons alors par $(21)_{\mathrm{A}}$, puisque $k = 0$, donne seulement une relation entre les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$ sur $\sigma_e^{(\mathrm{P})}$. Si par contre on prend φ et ψ d'après $(19)_{\mathrm{B}}$, la formule (21), que nous désignerons par $(21)_{\mathrm{B}}$, dans laquelle $k = 2\pi^2$, donne la solution du problème extérieur.

Si l'on suppose $f = 0$ et Σ coïncidant avec une surface cylindrique de génératrices parallèles à l'axe x_3, on peut, comme l'a montré Volterra donner à $(21)_{\mathrm{A}}$, $(21)_{\mathrm{B}}$ une forme particulièrement simple : nous désignerons, sans les écrire, les formules que l'on obtient ainsi par $(21')_{\mathrm{A}}$ et $(21')_{\mathrm{B}}$

Pour $(21')_{\mathrm{B}}$, qui présente des analogies avec la formule bien connue de Kirchhoff relative à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = 0,$$

nous pouvons donner l'interprétation physique suivante :

Posons $x_3 = \alpha t$, $X_3 = \alpha T$ (t temps, α constante); considérons un phénomène caractérisé par une fonction $u(x_1, x_2, x_3)$, satisfaisant à l'équation $\Theta(u) = 0$ et régulière dans une région ω du plan x_1, x_2 limitée par une ligne fermée $\mathcal{L}$. La formule $(21')_B$ permet d'exprimer la valeur à l'instant T de u en un point $P_0(X_1, X_2)$ de ω, en fonction des valeurs que u et $\frac{\partial u}{\partial n}$ (n normale à $\mathcal{L}$) prennent en tout point Q de $\mathcal{L}$ dans l'intervalle de temps $T - \frac{r}{\alpha}$, $T + \frac{r}{\alpha}$ (r distance P_0Q). Nous pouvons par suite dire que, si l'on a enregistré à partir d'un instant t_0 les valeurs prises successivement par u et $\frac{\partial u}{\partial n}$ en les points de $\mathcal{L}$ et si l est la longueur de la plus grande corde de $\mathcal{L}$, on pourra calculer, au moyen de $(21')_B$, en tous les points de ω les valeurs de u relatives aux instants non antérieurs à $t_0 + \frac{l}{\alpha}$ (on peut faire correspondre un résultat parfaitement analogue à la formule citée de Kirchhoff).

Le problème extérieur a été également résolu par Volterra, par un procédé analogue à celui indiqué dans ce paragraphe, pour le systeme d'équations dont il est parlé au paragraphe 5.

9. **Le problème extérieur et les problèmes aux limites relatifs à (12').** — Considérons une surface Σ et une région H de l'espace satisfaisant aux conditions indiquées au début du paragraphe 8; supposons en outre qu'aucune partie de Σ ne satisfasse à la condition i_1 du paragraphe 3 (aucune partie n'a par suite une orientation d'espace). Nous pourrons identifier Σ avec une surface tubulaire orientée comme l'axe x_3; H coïncidera avec la région intérieure à Σ, ou avec une partie de celle-ci, suivant que Σ s'étend ou non indéfiniment dans les directions $+x_3$, $-x_3$. La formule $(21)_B$ pourra-t-elle, comme celle (15') relative au problème intérieur, être utilisée pour la résolution des problèmes aux limites (en particulier du problème de Cauchy) relatifs à l'équation (12') et à la surface Σ?

Pour que cela soit possible, il est évidemment nécessaire que tous les points de Σ appartiennent (comme points limites) à la région H dans laquelle (21) est applicable : or ceci n'est pas vérifié si la surface Σ ne s'étend pas indéfiniment dans les directions $+x_3$ et $-x_3$. (On voit en effet immédiatement que à un point P de Σ pour lequel la coordonnée x_3 est maximum ou minimum on ne peut associer une partie $\sigma_e^{(P)}$ de Σ.)

Considérons une solution u de (12') régulière à l'intérieur de la surface (limitée ou illimitée) Σ; considérons un point P de la région H et la portion correspondante $\sigma_e^{(P)}$ de Σ; prenons φ et ψ d'après $(19)_A$. La formule $(21)_A$ donne alors une condition à laquelle doivent satisfaire les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ relatives aux points de $\sigma_e^{(P)}$; lorsque P varie dans H, on a une infinité de ces conditions pour les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial N}$ sur Σ. [Outre ces conditions, données par Volterra, on peut en établir d'autres; on en obtient une, par exemple, comme l'a observé d'Adhémar, en faisant tendre dans la formule $(21)_B$, résolutive du problème extérieur, le point P vers un point Q de Σ, qui appartienne à H.] Par conséquent on peut affirmer qu'il n'y a pas en général de solution de (12') régulière dans la région intérieure à Σ et correspondant à des valeurs arbitrairement données sur Σ de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$; c'est-à-dire que le problème de Cauchy, relatif à (12') et à une surface Σ de la nature indiquée au début de ce paragraphe, n'admet pas de solution valable dans toute la région intérieure à Σ. [Ceci n'exclut pas que ce problème ne puisse admettre une solution dans une région convenable contiguë à Σ, analogue pour la connexion à un cylindre creux et dans laquelle les formules $(21)_A$, $(21)_B$ ne sont pas applicables.]

On peut alors se demander quelles données on peut assigner arbitrairement sur la surface Σ pour que dans sa région intérieure soit univoquement déterminée une solution régulière de (12'). Une fois résolue cette question, et étant donné un problème aux limites relatif à (12') et à Σ correctement posé, ce problème pourra être résolu (dans le cas où Σ s'étend indéfiniment dans les directions $+x_3$ et $-x_3$) en éliminant dans la formule résolutive du problème extérieur ce qui est surabondant.

Il est facile de vérifier qu'il ne suffira pas en général de connaître sur Σ les valeurs de u seules, ou celles de $\frac{\partial u}{\partial N}$ seules, pour que soit univoquement déterminée dans l'intérieur de Σ une solution régulière de $(12')$: il suffit de se reporter au cas où Σ est un cylindre ayant pour directrice une courbe du plan $x_3 = 0$ et des génératrices parallèles à l'axe x_3.

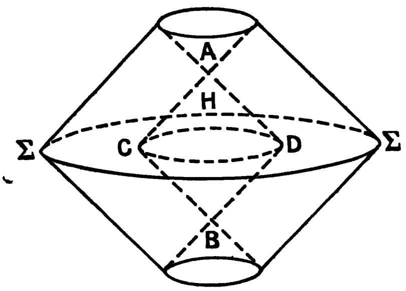
Les observations faites relativement a la formule $(21)_B$ valent pour les formules analogues qui ont été ou pourraient être déterminées pour des équations plus generales que $(12')$; en particulier elles valent pour la formule de Kirchhoff, à laquelle nous avons déja fait allusion, et dont nous parlerons encore dans le prochain chapitre. De telles formules peuvent avoir de l'importance, outre au point de vue analytique, au point de vue des applications a la physique (il suffit, pour nous en convaincre, de penser a l'emploi de la formule de Kirchhoff en optique). Pour de telles applications, il peut être d'importance négligeable qu'une formule exprime une valeur cherchée au moyen d'autres valeurs analytiquement surabondantes, si ces dernières peuvent être fournies par l'expérience.

10. Faisons encore quelques observations relatives aux formules $(21)_A$ et $(21)_B$. Remarquons avant tout que $(21)_B$ nous permet d'affirmer que deux solutions de $(12')$ (régulieres à l'intérieur de Σ) qui correspondent aux mêmes valeurs sur Σ de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ (ou de u seule si Σ est constituée par des variétés caractéristiques) coïncident nécessairement dans H. (La figure 11 représente une surface Σ constituée par deux portions de nappes de cônes caractéristiques et la région correspondante H limitée par les cônes ACD et BCD.) On peut en outre remarquer (observation faite par Volterra dans une de ses conférences données à Paris en 1933) que dans $(21)_B$ le coefficient de $\frac{\partial u}{\partial N}$ (sous le signe d'intégration étendue à $\sigma_e^{(P)}$), c'est-à-dire

$$\frac{-1}{\sqrt{r^2-(x_3-X_3)^2}} \log \frac{r^2-(x_3-X_3)^2}{r},$$

s'annule sur les parties de $\sigma_e^{(P)}$ appartenant éventuellement à la surface (variable avec P) $\left(r-\frac{1}{2}\right)^2-(x_3-X_3)^2=\frac{1}{4}$; par suite dans l'expression de u_P n'interviennent pas les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial N}$ relatives à ces parties. La même observation peut se faire pour les parties de $\sigma_e^{(P)}$ appartenant éventuellement à la surface $\left(r-\frac{c}{2}\right)^2-(x_3-X_3)^2=\frac{c^2}{4}$ (c constante arbitraire); pour le voir, il suffit de combiner linéairement les formules $(21)_A$, $(21)_B$, en tenant compte de ce que dans $(21)_A$ le coefficient de $\frac{\partial u}{\partial N}$ (sous le signe d'intégration) est $\frac{-1}{\sqrt{r^2-(x_3-X_3)^2}}$.

Fig. 11.



Prenons maintenant dans $(21)_A$, $(21)_B$ $u\equiv 1$ $\left(\text{par suite } f=0 \text{ dans toute la région intérieure à } \Sigma;\ u=1,\ \frac{\partial u}{\partial N}=0 \text{ sur } \Sigma\right)$. Ces deux formules nous fournissent alors d'intéressantes identités.

11. Rôle des conoïdes caractéristiques. — Tout ce qui est dit dans ce chapitre met en évidence l'importance du rôle que les cônes caractéristiques relatifs à l'équation $\Theta(u)=f$ peuvent avoir dans l'intégration de cette équation : soit pour établir si un problème aux limites est possible ou non, soit, pour déterminer, dans l'affirmative, le domaine dans lequel les données déterminent la solution, soit pour distinguer celles des données qui contribuent a déterminer la valeur de la solution en un point de celles qui n'influent pas sur cette valeur, soit enfin pour obtenir (au moyen de fonctions auxiliaires convenables) la formule résolutive du problème lui-même. (Il est utile, à ce propos, de confronter les résultats établis dans ce chapitre avec ceux du Chapitre II.)

Pour l'équation $\Theta(u)=f$ (comme pour toute équation linéaire hyperbolique ayant constants les coefficients des dérivées secondes), les cônes caractéristiques sont aussi conoïdes caractéristiques :

nous verrons dans les prochains chapitres que pour des équations hyperboliques plus générales, ce sont les conoïdes caractéristiques qui jouent le rôle que dans ce chapitre ont tenu les cônes $(x_3 - X_3)^2 - r^2 = 0$.

CHAPITRE IV.

QUELQUES EXTENSIONS DE LA MÉTHODE DE VOLTERRA.

1. En appliquant la méthode des approximations successives, d'Adhémar a montré comment on peut passer de la solution (donnée au précédent chapitre) du problème de Cauchy relatif à (12'), à celle du même problème relatif à l'équation $\Theta(u) = F\left(x_r, u, \frac{\partial u}{\partial x_r}\right)$ $\left(\text{F étant linéaire par rapport aux arguments } u \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_r}\right)$, équation qui a, évidemment, les mêmes cônes caractéristiques que (12').

2. **Intégration de l'équation**

$$\Delta_{(m-1),1}\, u = \sum_{s=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0. \tag{22}$$

— A cette équation peut se ramener, par une simple transformation de coordonnées, toute autre du type $\sum_{s=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0$ (c constante). Les cônes caractéristiques relatifs à (22) (qui coïncident avec les conoïdes caractéristiques) sont définis par $\Gamma = (x_m - X_m)^2 - r^2 = 0$, où $r^2 = \sum_1^{m-1} (x_s - X_s)^2$. Puisque chacun de ces cônes divise l'espace, autour de son sommet $P(X_1, \ldots, X_m)$ en trois parties, deux intérieures et une extérieure (Chap. I, § 5), on peut pour (22), comme pour (12'), se poser un problème intérieur et un problème extérieur. Pour résoudre ces problèmes par les procédés employés par Volterra pour (12'), l'unique question à résoudre est de déterminer les fonctions auxiliaires, solutions de (22), ayant par rapport aux cônes caractéristiques des propriétés analogues à celles des fonctions auxiliaires utilisées par Volterra. Une fois résolue cette question, il n'est plus que de substituer à $\Theta(u) = \Delta_{2,1}(u)$, $\Delta_{m-1,1}(u)$; à l'espace à trois dimensions, celui à m dimensions; aux variétés à deux dimensions considérées au précédent chapitre, leurs analogues à $(m-1)$ dimensions. La transversale N relative à un point du contour d'un volume T à m dimensions, sera encore la direction symétrique, par rapport au plan $x_m=$ const., passant par ce point, de la normale intérieure n.

Les extensions auxquelles il est fait allusion ont été faites par Tedone. Pour le probleme intérieur (Chap. III, § 3). il s'est servi dans le cas de $m=2p+2$ (p nombre entier $\geqq 1$) et dans le cas de $m=2p+1$ (p nombre entier >1), respectivement des fonctions auxiliaires suivantes :

$$v=\sum_{h=0}^{p-1}\frac{(-1)^{p-h-1}}{2h+1}\binom{p-1}{h}(\theta^{2h+1}-1), \tag{23}$$

$$v=\frac{\theta(\theta^2-1)^{\frac{m-4}{2}}}{m-3}+\sum_{h=2}^{p-1}(-1)^{h+1}\frac{m-4}{m-3}\cdots\frac{m-2h}{m-2h+1}\;\frac{\theta(\theta^2-1)^{\frac{m-(2h+2)}{2}}}{m-(2h+1)}$$
$$+(-1)^p\frac{m-4}{m-3}\cdots\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\log\left[\theta+\sqrt{\theta^2-1}\right], \tag{24}$$

où $\theta=\pm\frac{(x_m-X_m)}{r}$, le signe $+$ ou le signe $-$ devant être choisis d'apres le même critère qu'au paragraphe 3 du Chapitre III.

Ces fonctions [qui sont des solutions de (22) s'annulant ainsi que leurs dérivées transversales sur la nappe directe ou inverse du cône caractéristique $\Gamma^{(P)}$ de sommet $P(X_1, \ldots, X_m)$] deviennent infinies sur la droite $r=0$. C'est pourquoi, avant de les introduire dans la formule de reciprocité (Chap. I, § 7),

$$0=-\int\int_T\cdots\int[u\Delta_{m-1,1}(v)-v\Delta_{m-1,1}(u)]\,dT=\int_S\cdots\int\left(u\frac{\partial v}{\partial N}-v\frac{\partial u}{\partial N}\right)dS$$

en faisant coincider T avec une région $\mathcal{J}^{(P)}$ (Chap. III. § 3), il importe d'exclure de cette région la droite $r=0$ au moyen d'un cylindre (à $m-1$ dimensions) $r=\varepsilon$. Dans la formule de réciprocité, figure alors une intégrale étendue à une portion de ce cylindre; cette intégrale, en faisant tendre ε vers zéro, donne à la limite, à un facteur constant près, $\int_{X_m^0}^{X_m}(X_m-x_m)^{m-1}u(X_1, \ldots, X_{m-1}, x_m)\,dx_m$ (X_m^0 valeur de x_m au point d'intersection de la droite $r=0$ avec la variété $\Sigma_{(1)}$ à $m-1$ dimensions, support des données). Avec $m-2$ dérivations par rapport à X_m on peut obtenir la valeur de u_P exprimée en fonction des valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ sur la portion $\sigma_t^{(P)}$ de $\Sigma_{(t)}$ interceptée par le cône $\Gamma^{(P)}$.

En ce qui concerne la possibilité ou non de résoudre le problème de Cauchy relatif à (22) et à des valeurs arbitraires de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ sur un certain contour $\Sigma_{(t)}$, sont valables (comme cela résultera de ce que nous dirons dans le prochain chapitre) des considérations parfaitement analogues à celles développées pour (12′).

Parmi les cas de possibilité, il y a celui où $\Sigma_{(t)}$ coïncide avec l'hyperplan $x_m = 0$; alors $\sigma_t^{(P)}$ coïncide avec la portion de cet hyperplan intérieure à l'hypersphère Ω (à $m-2$ dimensions) d'équation $r = |X_m|$.

En particularisant pour ce cas ses formules. Tedone a trouvé que pour m pair ($m = 2p+2$). si l'on substitue à v son expression et si l'on pose

$$u(x_1, \ldots, x_{m-1}0) = u_0, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)_{x_m=0} = u_1,$$

on réussit à exprimer u_P en fonction de $\int_\Omega u_0\, d\Omega$, $\int_\Omega u_1\, d\Omega$ et de leurs dérivées par rapport à x_m, jusqu'à l'ordre p pour la première intégrale, jusqu'à l'ordre $p-1$ pour la deuxième. Pour $m = 4$ ($p = 1$) et $X_m > 0$, on retrouve la formule connue de Poisson :

$$u_P = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{X_4}\int\int_\Omega u_1\, d\Omega + \frac{\partial}{\partial X_4}\left[\frac{1}{X_4}\int\int_\Omega u_0\, \partial\Omega\right]\right\}.$$

Donc la valeur de u en P, si m est pair, dépend seulement de celles des données de Cauchy relatives à l'hyperplan $x_m = 0$, qui correspondent aux points de l'intersection Ω de cet hyperplan avec le cône caractéristique $\Gamma^{(P)}$ (fait exception le cas $m = 2$; *cf.* Chap. II, § 11); si par contre m est impair, elle dépend aussi des données de Cauchy relatives à la portion de l'hyperplan $x_m = 0$ intérieur à Ω.

De cette différence entre le cas de m pair et celui de m impair, on peut donner une interprétation physique. Limitons-nous, pour plus de simplicité, aux cas $m = 3$ (étudié au précédent chapitre) et $m = 4$. Soit x_m une variable apte à représenter le temps et u une fonction [solution de (22)] apte à représenter une propagation d'onde. Nous pouvons alors dire que dans le cas de m impair les ondes *laissent un* *résidu*, alors qu'elles n'en laissent pas si m est pair. En effet, supposons u et $\frac{\partial u}{\partial x_m}$ nuls en tous les points de la variété $x_m = 0$, exceptés ceux intérieurs à un contour fermé $\mathcal{C}$ à $m-2$ dimensions (perturbation localisée initialement à l'intérieur de $\mathcal{C}$). Considérons un point $P_0(X_1, \ldots, X_{m-1}, O)$ non intérieur à $\mathcal{C}$ et les points $P(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ de la parallèle menée par P_0 au demi-axe positif x_m. Si $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ sont la plus petite et la plus grande distance de P_0 aux points de $\mathcal{C}$, nous pourrons dire que l'intersection Ω de $\Gamma^{(P)}$ avec le plan $x_m = 0$, laissera $\mathcal{C}$ à son extérieur. de l'instant initial $X_m = 0$ jusqu'à l'instant $X_m = \mathcal{R}'$; elle contiendra dans son intérieur une partie variable de $\mathcal{C}$ de l'instant $X_m = \mathcal{R}'$ jusqu'à l'instant $X_m = \mathcal{R}''$; à partir de cet instant elle contiendra $\mathcal{C}$ tout entier. Les formules résolutives du problème de Cauchy nous permettent alors d'affirmer que la valeur de u aux points $P(X_1, \ldots, X_m)$ correspondant au premier intervalle de temps sera nulle; en ceux correspondant au deuxième, elle sera variable; en ceux correspondant au troisième, elle sera constante si m est impair, nulle si m est pair. Donc tout point P_0 (de l'espace ordinaire), qui n'appartient pas à la région intérieure à $\mathcal{C}$. est soumis aux ondes durant un intervalle de temps $\mathcal{R}'\mathcal{R}''$ dépendant de sa plus petite et de sa plus grande distance aux points de $\mathcal{C}$; dans le seul cas où m est impair les ondes laissent en P_0, après cet intervalle de temps, une perturbation résiduelle constante.

Imitant Volterra, Tedone a également particularisé ses formules, résolutives du problème intérieur. dans le cas où le contour $\Sigma_{(i)}$ est formé de deux parties, dont l'une τ est la portion du plan $x_m = k$ (k constante) limitée par un contour fermé (à $m-2$ dimensions) S_0 et l'autre est la variété cylindrique γ, lieu des parallèles au demi-axe positif ou au demi-axe négatif x_m menées par les points de S_0. Si l'on se borne à considérer les points $P(X_1, \ldots, X_m)$ de la même partie de γ par rapport à τ, intérieurs à γ et correspondant à des valeurs suffisamment grandes de $|X_m|$, l'intersection S du cône caractéristique $\Gamma^{(P)}$ avec $\Sigma_{(i)}$ appartient entièrement à γ. Pour de tels points P, dans le cas $m = 2p + 2$, Tedone a réussi (en substituant à v son expression et en exécutant les dérivations par rapport à X_m) à donner à la formule résolutive du problème intérieur la forme

$$u_P = \int_{S_0} \{ \Phi \}_{x_m = X_m \pm r} dS_0; \tag{25}$$

Φ étant une expression dépendant (linéairement) de u, $\frac{\partial u}{\partial n}$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre p pour u, jusqu'à l'ordre $p-1$ pour $\frac{\partial u}{\partial n}$ (on remarquera que sur γ la normale n coïncide avec la transversale N et que, aux points de S_0, cette direction coïncide aussi avec la normale ν à S_0 menée dans le plan $x_m = k$). Les deux signes devant r correspondent respectivement aux cas $X_m \lessgtr k$. Si u était solution, au lieu de (22), de l'équation

$$\sum_{s=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = 0,$$

la quantité sous le signe d'intégration, dans (25) devrait être prise pour $x_m = X_m \pm \frac{r}{c}$. Dans le cas $m = 4 (p = 2)$, la formule (25) devient

$$(26) \qquad u_P = \frac{1}{4\pi} \int\int_{S_0} \left\{ u \frac{\partial \frac{1}{r}}{d\nu} \pm \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \nu} \frac{\partial u}{\partial x_4} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\}_{x_4 = X_4 \pm r} dS_0.$$

Des deux formules rassemblées dans (26), celle qui correspond aux signes inférieurs n'est pas autre chose que la formule de Kirchhoff à laquelle il a déjà été fait allusion dans le précédent chapitre (§§ 1, 8, 9), et dont les formules de Tedone constituent par suite une généralisation [1].

Observons que si $Q_0(x_1, \ldots, x_{m-1}, k)$ est un point de la variété que nous avons désignée par S_0, $Q[x_1, \ldots, x_{m-1}, (X_m \pm r)]$ est le point où la génératrice de γ passant par Q_0 rencontre $\Gamma^{(P)}$; puisque nous avons désigné par S l'intersection de γ avec la nappe directe ou inverse de $\Gamma^{(P)}$, la formule (25) peut aussi s'écrire :

$$(25') \qquad u_P = \int_S \Phi \, dS_0.$$

Nous pouvons maintenant, évidemment, faire abstraction de la manière dont (25), (25′) ont été obtenues et supposer que dans ces

---

[1] Parmi les nombreux procédés par lesquels on a démontré la formule de Kirchhoff, signalons, pour leur grande simplicité et leur élégance, ceux dus à Beltrami (en particulier celui contenu à la page 528 et suiv. du Vol. IV de ses *Œuvres*) : procédés susceptibles d'extension à des cas plus généraux.

formules S est une variété fermée quelconque, à $(m-2)$ dimensions, appartenant à la nappe directe ou rétrograde de $\Gamma^{(P)}$, que S_0 est sa projection (parallèlement à l'axe x_m) sur un plan $x_m = k$. Nous pouvons alors voir que (25) [ou (25′)] permet, dans le cas de m pair, de résoudre le problème extérieur relatif à (22). En effet, supposons donnée une variété $\Sigma_{(e)}$ à $m-1$ dimensions et une région H à m dimensions satisfaisant à des conditions analogues à e_1, e_2 du paragraphe 8 du précédent chapitre. Si l'on connaît sur $\Sigma_{(e)}$ [que nous supposerons non tangente en aucun point à des variétés caractéristiques] les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ relatives à une solution (régulière) de (22), on connaîtra sur $\Sigma_{(e)}$ la dérivée première de u suivant une direction quelconque l, et l'on pourra calculer les valeurs, sur $\Sigma_{(e)}$ des dérivées successives par rapport à x_m (jusqu'à l'ordre p ou $p-1$) de u et $\frac{\partial u}{\partial l}$ (en supposant que ces dérivées existent); le calcul est immédiat si $\Sigma_{(e)}$ est une variété cylindrique de génératrices parallèles à l'axe x_m; il est moins simple [mais peut s'effectuer en faisant usage de (22)] dans les autres cas. Soit $P(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ un point de H et soient S_1, S_2 les intersections (à $m-2$ dimensions) des deux nappes de $\Gamma^{(P)}$ avec $\Sigma_{(e)}$. En supposant $m = 2p+2$, nous pourrons écrire (25′) en faisant coïncider S avec S_1 ou S_2 et S_0 avec la projection de S_1 ou de S_2 sur le plan $x_m = k$; pour tout point P de H. on pourra par suite avoir u_P exprimé en fonction des valeurs connues sur $\Sigma_{(e)}$: c'est-à-dire que l'on pourra résoudre le problème extérieur au moyen de (25′). Les deux expressions que l'on obtient pour u_P, suivant que l'on se rapporte à l'intersection avec $\Sigma_{(e)}$ de la nappe directe ou de la nappe inverse du cône $\Gamma^{(P)}$, devront être égales entre elles : on obtient par suite des conditions auxquelles doivent satisfaire les valeurs de u et de ses dérivées sur $\Sigma_{(e)}$. Dans le cas $m = 4$ la solution du problème extérieur peut, d'après ce qui a été dit, être fournie par l'une des deux formules rassemblées dans (26) : dans chacune des deux expressions que l'on obtient ainsi pour u_P interviennent seulement les valeurs de u et de ses dérivées premières relatives à l'une des deux intersections de $\Sigma_{(e)}$ avec $\Gamma^{(P)}$. Si u était solution, au lieu de l'équation $\Delta_{3,1}(u) = 0$, de $\Delta_{3,1}(u) = f$ (f fonction connue), il suffirait d'ajouter au deuxième membre de (26) le terme

$$-\frac{1}{4\pi}\int\int_{T_0}\int \frac{1}{r}[f]_{x_4 = X_4 \pm r}\, dT_0,$$

T_0 étant la portion de l'hyperplan $x_4 = k$ limitée à S_0. Les deux formules ainsi obtenues (desquelles celle correspondant aux signes inférieurs n'est pas autre chose que la formule connue donnée par Beltrami comme extension de celle de Kirchoff) peuvent donc donner la solution du problème extérieur pour l'équation $\Delta_{3,1}(u) = f$ [1].

La possibilité, à laquelle nous avons fait allusion, d'obtenir dans le cas de m pair la solution du problème extérieur, relatif à (22), à partir des formules résolutives du problème intérieur a échappé à Tedone. Il a étudié le problème extérieur suivant le procédé employé par Volterra pour (12'); il a réussi ainsi, en se servant de fonctions auxiliaires adéquates, à établir tant dans le cas de m pair que dans celui de m impair, des relations auxquelles doivent satisfaire les valeurs de u et de ses dérivées sur la variété $\Sigma_{(e)}$ a laquelle le problème extérieur se rapporte. (Dans le cas de m pair et de $\Sigma_{(e)}$ cylindrique avec des génératrices parallèles à l'axe x_m, il est parvenu, par un autre chemin, à ces mêmes relations auxquelles nous faisions, à l'instant, allusion.) Tedone n'est parvenu à la résolution effective du problème extérieur que dans le cas de m impair ($m = 2p + 1$). En posant dans ce cas :

$$\theta = \frac{x_m - X_m}{r}, \qquad D = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r},$$

$$V(r, \theta) = D^{p-1}\int_0^{\theta} \log[r(1-\tau^2)]\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

$$v(r, \theta) = V(r, \theta) \pm V(r, 1), \tag{27}$$

il s'est aidé des deux fonctions données par les formules (27) d'une façon analogue à celle dont Volterra s'est aidé des fonctions désignées par v_1 et v_2 au paragraphe 8 du précédent Chapitre. A noter que les deux solutions de (22) données par (27) s'annulent respectivement sur la nappe inverse et sur celle directe de $\Gamma^{(P)}$ et que $V(r, 1)$ est une fonction harmonique de $x_1, \ldots, x_{m-1}$ satisfaisant à la condition :

$$\lim_{r=0}\left\{ r^{m-2}\frac{\partial}{\partial r}V(r, 1)\right\} = \text{const.}$$

[1] D'Adhémar, en résolvant par d'autres moyens le problème extérieur relatif à cette équation, a donne pour u_P une expression dans laquelle interviennent les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ relatives aux deux intersections de $\Sigma_{(e)}$ avec $\Gamma^{(P)}$; cette formule peut se simplifier en faisant intervenir, comme il a été dit, une seule de ces intersections.

Sur le problème extérieur relatif à (22), on peut développer des considérations parfaitement analogues à celles faites pour (12').

Nous terminerons ce paragraphe en mentionnant l'application que Tedone a faite de la methode des caractéristiques au système des équations différentielles qui règle les vibrations d'un corps élastique, obtenant ainsi pour la première fois les formules d'intégration de ce système.

3. Intégration de l'équation

$$\Delta_{p,q}(u)=\sum_1^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}-\sum_1^q \frac{\partial^2 u}{\partial y_s^2}=0.$$

— Une contribution notable à l'extension de la méthode de Volterra a été fournie par Coulon dans sa Thèse publiée en 1902. Dans celle-ci, l'Auteur a étudié particulièrement l'équation :

$$\Delta_{p,q}(u)=0 \tag{28}$$

dans l'hypothèse $p,\ q>1$. Cette équation, qui n'est pas du type normal (Chap. I, § 5), a comme cône caractéristique $\Gamma^{(P)}$, de sommet $P(X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_q)$, la variété à $p+q-1$ dimensions $\tau^2-r^2=0$, où l'on a posé

$$\tau^2=\sum_1^q (y_s-Y_s)^2 \qquad \text{et} \qquad r^2=\sum_1^p (x_t-X_t)^2.$$

Ce cône divise l'espace (à $m=p+q$ dimensions) autour de P en deux parties dans lesquelles on a respectivement $\tau^2-r^2>0$, $\tau^2-r^2<0$; chacune de ces deux parties est (pour $p, q>1$) linéairement connexe, à la différence de ce qui arrive dans le cas de Volterra et Tedone ($p>1$, $q=1$), cas dans lequel la première des deux régions est divisée à son tour en deux parties (correspondant respectivement à $y_1 \gtrless Y_1$) telles que l'on ne peut passer d'un point de l'une à un point de l'autre sans traverser la surface conique $\Gamma^{(P)}$. Pour l'équation (28), il n'y a par suite pas de raison de distinguer un problème intérieur et un problème extérieur.

Soit une variété Σ à $p+q-1$ dimensions : supposons que tout cône $\Gamma^{(P)}$ ayant son sommet en un point $P(X_t, Y_s)$ d'une certaine région W (à $p+q$ dimensions) limite, avec Σ, une portion finie $T^{(P)}$ de W, contiguë à P. Proposons-nous d'exprimer la valeur en P d'une solution u de (28), régulière dans W, en fonction des valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial N}$ sur Σ. (Si n est la normale à une variété à $p+q-1$ dimensions, les cosinus directeurs de la transversale N sont $\cos nx_1, \ldots, \cos nx_p, -\cos ny_1, \ldots, -\cos ny_q$.) Dans $T^{(P)}$, $\tau^2 - r^2$ peut être > 0 ou < 0; il suffira d'examiner l'un de ces deux cas, puisque pour passer à l'autre il n'est que d'échanger les x_t, X_t avec les y_s, Y_s et le nombre p avec le nombre q. Supposons donc que dans $T^{(P)}$, $\tau^2 - r^2$ soit > 0; $T^{(P)}$ contiendra alors une partie, $\mathcal{R}$, de la variété à q dimensions $r = 0$ (ou $x_t = X_t$, $t = 1, 2, \ldots, p$). Pour résoudre le problème proposé, Coulon, imitant Volterra, a résolu préalablement la question de déterminer des solutions v de (28) satisfaisant aux conditions suivantes : $v = 0$, et par suite $\frac{\partial v}{\partial N} = 0$, sur le cône $\Gamma^{(P)}$; sur $\mathcal{R}$, v et ses dérivées premières deviennent infinies de telle façon que, si de $T^{(P)}$ on exclut $\mathcal{R}$ au moyen d'une portion $\mathcal{C}$ du cylindre (à $p+q-1$ dimensions) $r^2 = \varepsilon^2$, on ait

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_C \cdots \int \left(u \frac{\partial v}{\partial N} - v \frac{\partial u}{\partial N}\right) d\mathcal{C} = \int_R \cdots \int u(X_1, \ldots, X_p, y_1, \ldots, y_q) \psi(\tau)\, d\mathcal{R};$$

ψ (fonction de τ et par suite des y_s et des Y_s) devant satisfaire à l'une ou l'autre des deux conditions suivantes A et B :

A. L'opérateur $\sum_1^q \frac{\partial^2}{\partial Y_s^2}$ appliqué un nombre convenable de fois à $\int_\rho \cdots \int \varphi(y_1, \ldots, y_q)\psi(\tau)\, d\rho$ (ρ région de l'espace $y_1, \ldots, y_q$ indépendante des Y_s) donne comme résultat, à un facteur constant près, $\varphi(Y_1, \ldots, Y_q)$.

B. La dérivation $\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_q}}{\partial Y_1^{\alpha_1} \ldots \partial Y_q^{\alpha_q}}$ appliquée à la même intégrale, pour des valeurs convenables (certaines éventuellement nulles) des α_s, donne comme résultat 0.

Supposons déterminée une telle fonction v; soit $[T^{(P)}]$ la partie de $T^{(P)}$ qui reste quand on exclut $\mathcal{R}$ de la façon indiquée; soit S le contour complet de $[T^{(P)}]$. Appliquons à u et v la formule de réciprocité (Chap. I, § 7)

$$0 = \int_S \cdots \int \left(u \frac{\partial v}{\partial N} - v \frac{\partial u}{\partial N}\right) dS.$$

A cause des propriétés de v, il n'apparaîtra pas au deuxième membre de cette formule d'intégrales étendues à $\Gamma^{(P)}$, mais seulement des intégrales étendues à $\mathcal{C}$ et à une portion de Σ; en faisant tendre ε vers o et en appliquant aux deux membres de l'égalité à plusieurs reprises l'opérateur $\sum_1^q \frac{\partial^2}{\partial Y_s^2}$ ou bien l'opérateur $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_q}}{\partial Y_1^{\alpha_1}\ldots\partial Y_q^{\alpha_q}}$, suivant qu'est satisfaite la condition (A) ou la condition (B), on obtiendra dans le premier cas, la valeur de u en $P(X_t, Y_s)$ exprimée en fonction des valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ relatives à la partie $\sigma^{(P)}$ de Σ qui contribue à limiter $T^{(P)}$; dans le deuxième cas, on obtiendra une condition à laquelle devront satisfaire les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ en question.

Dans tous les cas, correspondant à p et q impairs, ou l'un pair et l'autre impair, ou tous les deux pairs, Coulon a déterminé des fonctions v possédant les propriétés indiquées (soit en posant la condition A, soit en posant la condition B); ces fonctions s'expriment, dans les divers cas, au moyen des fonctions hypergéométriques et des fonctions logarithmiques (¹).

Étant donnée une variété Σ à $p+q-1$ dimensions, s'il est possible de déterminer un espace W à $p+q$ dimensions satisfaisant aux conditions indiquées dans ce paragraphe même, on pourra affirmer que le problème de Cauchy relatif à (28) et à Σ n'admet pas, en général, de solution valable dans W tout entier; en effet, comme on l'a dit, les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ sur Σ devront satisfaire à des conditions et par suite ne peuvent être données arbitrairement. On peut alors se demander si, et de quelle façon, il est possible de se poser pour (28) un problème aux limites (relatif au seul contour Σ) qui admette une et une seule solution (régulière) valable dans tout W. Une telle question ne peut être considérée comme résolue; la résoudre présenterait un intérêt certain, même si, comme l'a observé Hadamard, on ne connaît pas de problèmes physiques conduisant à résoudre des problèmes aux limites pour des équations hyperboliques qui ne sont pas du type normal.

(¹) Il est à remarquer que les résultats relatifs à l'équation étudiée par Coulon, de même que ceux relatifs à l'équation étudiée par Tedone, s'étend facilement au cas où le deuxième membre, au lieu de zéro, est une fonction connue.

4. Coulon a aussi étudié l'équation

$$\Delta_{p,q}(u) + k.u = 0 \qquad (k \text{ constante}),$$

à laquelle, comme il l'observe, peut se ramener, par d'adéquats changements de fonction et de variables, toute équation du deuxième ordre linéaire, homogène, à coefficients constants, du type hyperbolique. Mais dans ce cas, pour p, $q > 1$, il a réussi seulement (par un procédé analogue à celui suivi pour $k = 0$) à ramener le problème de la détermination de u_P, en fonction des valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ sur Σ, à la résolution d'une équation intégrale à laquelle est applicable la méthode des approximations successives.

Toujours dans la Thèse citée, Coulon s'est en outre occupé des équations hyperboliques qui n'ont pas de coefficients constants; en se bornant au cas de trois variables, il s'est proposé de faire jouer aux conoïdes caractéristiques relatifs à ces équations un rôle parfaitement analogue à celui qu'ont les cônes caractéristiques dans les travaux de Volterra relatifs à l'équation (12'). Ayant établi, relativement à l'une de ces équations la formule de réciprocité (7) (Chap. I, § 7), Coulon, voulant appliquer la méthode de Volterra, a ramené la résolution du problème intérieur à la détermination d'une solution v de l'adjointe de l'équation donnée qui s'annule sur le conoïde caractéristique de sommet en un point $P(X_1, X_2, X_3)$ et devienne infinie, d'une façon déterminée, ainsi que ses dérivées premières, sur la droite $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2$ (en supposant que cette droite passe à l'intérieur du conoïde). Coulon a fait voir comment, une fois déterminée v, il suffit, pour résoudre le problème intérieur de faire l'inversion d'une intégrale du type $\int_{X_3^0}^{X_3} u(X_1, X_2, x_3)\,\varphi(X_3 - x_3)\,dx_3$, φ étant une fonction connue, lorsque v est connue; il a en outre montré comme cette inversion est possible, sous certaines conditions relatives à φ; il n'a pas réussi cependant à déterminer effectivement cette fonction v, sinon dans le cas de l'équation $\Delta_{2,1}(u) + k.u =$ une fonction connue (k constant).

Nous verrons au prochain chapitre les progrès que les travaux de Hadamard ont fait accomplir au problème de l'intégration, par la méthode des caractéristiques, d'une équation hyperbolique à coefficients variables.

CHAPITRE V.

INTÉGRATION PAR LA METHODE DES CARACTÉRISTIQUES, DE L'ÉQUATION GÉNERALE LINÉAIRE, HYPERBOLIQUE, DU TYPE NORMAL.

1. Nous consacrerons ce chapitre aux importantes recherches de Hadamard relatives à l'intégration des équations hyperboliques; nous nous rapporterons pour cela à l'exposition que l'Auteur lui-même en a faite dans son livre *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques* (Paris, Hermann et C[ie], 1932), livre qui nous a été très utile pour la rédaction du présent volume.

Les travaux d'Hadamard se rapportent aux seules équations du type normal (Chap. I, § 5), équations qui ont une importance particulière en vue de leurs applications physiques ([1]).

2. Considérons une équation générique linéaire, hyperbolique, à m variables ($m \geq 3$), du type normal, à coefficients analytiques :

$$(1) \qquad \mathrm{F}(u) = \sum_{i,\kappa} \mathrm{A}_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i \mathrm{B}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \mathrm{C}u = f$$

et dans l'espace $x_1 \ldots x_m$ une variété à $m - 1$ dimensions Σ; supposons qu'il soit possible de déterminer une région K de l'espace à m dimensions telle que l'une des deux nappes du conoïde caractéristique $\Gamma^{(\mathrm{P})}$ [de sommet en l'un quelconque $\mathrm{P}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m)$ de ses points] limite avec une portion $\sigma_i^{(\mathrm{P})}$ de Σ une partie finie $\mathcal{J}^{(\mathrm{P})}$ de K intérieure à $\Gamma^{(\mathrm{P})}$ (Chap. I, § 5) et contiguë à P. Nous supposerons, ainsi qu'aux paragraphes suivants, que ce sont les nappes rétrogrades des conoïdes caractéristiques qui limitent, avec Σ, les régions $\mathcal{J}^{(\mathrm{P})}$ de l'espace. Nous appellerons encore problème intérieur (Chap. III, § 3) celui qu'a pour but d'exprimer la valeur u_{P} d'une solution de (1) (régulière dans K) en fonction des valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$ sur $\sigma_i^{(\mathrm{P})}$.

([1]) A ce propos, on peut observer (comme nous l'avons déjà dit à propos des recherches de Coulon) qu'il ne serait pas sans intérêt, du moins au point de vue analytique, d'étudier par la méthode des caractéristiques, les équations hyperboliques non normales.

Il est possible d'obtenir, en général, des formules résolutives de ce problème en se servant, comme l'a montré Hadamard, des *solutions élémentaires* des équations différentielles.

3. Solution élémentaire. — Étant donnée une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, à m variables, linéaire, homogène, à coefficients analytiques, elliptique ou hyperbolique, on peut démontrer qu'elle admet une solution (*solution élémentaire*) ayant comme pôle un point arbitraire $P(X_1, \ldots, X_m)$ de l'espace à m dimensions. Si $\Gamma(x_1, \ldots, x_m; X_1, \ldots, X_m) = 0$ est l'équation du conoïde caractéristique $\Gamma^{(P)}$ de sommet P, la solution élémentaire relative au point P dans le cas de m impair est du type $\mathfrak{U}.\Gamma^{-\frac{m-2}{2}}$ et dans le cas de m pair, du type $\mathfrak{U}_1\Gamma^{-\frac{m-2}{2}} - \mathfrak{U}_2 \log\Gamma$, en désignant par $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, des fonctions holomorphes des variables x_r, X_r. Cette solution élémentaire est complètement déterminée dans le premier cas, et elle l'est dans le deuxième cas à une fonction holomorphe près si $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}_1$ sont assujetties à la condition de prendre au point P la valeur $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$, Δ étant le discriminant de la forme caractéristique (Chap. I, § 2) correspondant à l'équation considérée.

Les solutions élémentaires deviennent infinies non seulement au point P mais tout le long du conoïde $\Gamma^{(P)}$. La même démonstration de l'existence des solutions élémentaires, donnée par Hadamard, montre comment on pourra construire les développements de $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ en séries de puissances de Γ convergentes dans un domaine convenable entourant P. Pour des équations particulières, on peut chercher à déterminer les solutions élémentaires correspondantes par des procédés spéciaux, suggérés par l'intuition, sans recourir aux développements en série indiqués. On trouve ainsi facilement les solutions élémentaires u^{**} relatives aux équations du type

$$\Delta_{p,q}(u) = \sum_1^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_r^2} - \sum_1^q \frac{\partial^2 u}{\partial y_s^2} = 0 \qquad (p+q=m):$$

l'on a, pour $p = q = 1$,

$$u^{**} = \log\sqrt{\pm[(y_1 - Y_1)^2 - (x_1 - X_1)^2]}$$

et, pour $p > 1$, $q \geqq 1$,

$$u^{**} = \left\{ \sqrt{\pm \left[\sum_1^q (y_s - Y_s)^2 - \sum_1^p (x_r - X_r)^2 \right]} \right\}^{(2-m)},$$

fonctions analogues aux solutions élémentaires bien connues $\log r$ et r^{2-m} de l'équation de Laplace à deux ou plusieurs variables. Pour l'équation des ondes amorties

$$\sum_{r=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + k u = 0 \qquad (k \text{ constant}),$$

en posant

$$\Gamma = (x_m - X_m^2)^2 - \sum_{r=1}^{m-1} (x_r - X_r)^2, \qquad j(\xi) = \sum_0^\infty \frac{\xi^n}{(n\,!)^2},$$

on obtient dans les cas $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$ respectivement les solutions élémentaires :

$$j\left(\frac{k\Gamma}{4}\right) \log \Gamma, \quad \Gamma^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \sqrt{k\Gamma}, \quad \Gamma^{-1} j\left(\frac{k\Gamma}{4}\right) + \frac{k}{4} j'\left(\frac{k\Gamma}{4}\right) \log \Gamma.$$

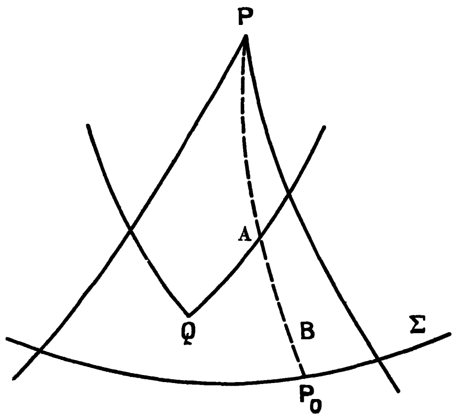
4. Rôle de la solution élémentaire dans la résolution du problème intérieur, pour m impair. — Volterra, pour résoudre le problème intérieur relatif à l'équation (auto-adjointe) (12'), étudiée par lui, a introduit dans la formule de réciprocité (7) (Chap. I) relative à une région $\mathcal{J}^{(P)}$ une fonction auxiliaire v, qui ne coïncide pas avec la solution élémentaire, mais lui est liée. En effet la fonction

$$v = \log \frac{(X_3 - x_3) + \sqrt{(X_3 - x_3)^2 - r^2}}{r},$$

utilisée par Volterra (Chap. III. § 3), peut se déduire de la solution élémentaire $\dfrac{1}{\sqrt{(X_3 - x_3)^2 - r^2}}$ en intégrant par rapport à X_3 entre $x_3 + r$ et X_3. Cette solution élémentaire ne peut être introduite sans modifications dans la formule (7) relative à une région $\mathcal{J}^{(P)}$ [pas même en excluant le point P par une surface que l'on ferait ensuite tendre vers P], parce que, étant donné l'ordre d'infinitude le long du conoïde caractéristique $\Gamma^{(P)}$ des quantités sous le signe d'intégration, certaines intégrales n'auraient pas de sens. (Une observation analogue peut être faite dans le cas d'une équation hyperbolique normale générale à un nombre impair de variables). La fonction v employée par Volterra présente l'avantage de s'annuler (avec sa dérivée transversale) sur le conoïde $\Gamma^{(P)}$ [si bien que les intégrales qui dans (7) devraient être étendues à la partie du contour de $\mathcal{J}^{(P)}$ constituée par le conoïde caractéristique s'éliminent]; elle peut être introduite dans la formule (7) relative a la région $\mathcal{J}^{(P)}$. à condition d'exclure de celle-ci la ligne $r = 0$ (singuliere pour cette fonction) par une surface cylindrique circulaire dont on fait ensuite tendre le rayon vers zéro; à la limite on n'obtient pas immédiatement la valeur de u [solution de (12')] en P, mais la valeur de $\int_{X_3^0}^{X_3} u(X_1 X_2 \xi)\, d\xi$; seule une dérivation par rapport à X_3 donne u_P.

Ayant fait ces observations, Hadamard indique comment on peut procéder dans le cas d'une équation hyperbolique générale à trois variables si l'on veut imiter strictement Volterra. Considérons, en même temps qu'une telle équation $F(u) = f$. son adjointe $H(v) = 0$ et construisons la solution élémentaire de cette dernière : $v^{**} = V\Gamma^{-\frac{1}{2}}$, relative a un point $P(X_1, X_2, X_3)$. De P à un point P_0 de $\sigma_t^{(P)}$, menons une ligne $\mathcal{L}$ (voir *fig.* 12) assujettie à la condition d'être intérieure à

Fig. 12.



toute région $\mathcal{J}^{(N)}$ correspondant à l'un de ses points N. [Les régions $\mathcal{J}^{(N)}$ sont supposées, comme on l'a dit, limitées par Σ et les nappes inverses des conoïdes $\Gamma^{(N)}$.] Soient $\varphi_s(\tau)$ ($s = 1, 2, 3$) les coordonnées de N, τ décroissant sur $\mathcal{L}$ quand N va de P à P_0. Soit $Q(x_1, x_2, x_3)$ un point de $\mathcal{J}^{(P)}$ n'appartenant pas à $\mathcal{L}$ et A l'intersection avec $\mathcal{L}$ de la nappe directe du conoïde caractéristique $\Gamma^{(Q)}$; soit B un point de $\mathcal{L}$ extérieur à $\Gamma^{(Q)}$; soient T, T_1, T_2 les valeurs de τ correspondant à P, A et B. La fonction $\Gamma(Q; N) = \Gamma[x_1, x_2, x_3; \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \varphi_3(\tau)]$ qui s'annule pour $\tau = T_1$, a des signes opposés quand N varie respectivement sur les arcs BA et AP. (Nous la supposerons négative sur le premier arc, positive sur le second.) Si $v^{**}(x_1, x_2, x_3; X_1, X_2, X_3)$ est la solution élémentaire de $H(v) = 0$ correspondant au point $P(X_1, X_2, X_3)$, $\int_{T_2}^{T} \chi(\tau)\, v^{**}[x_s; \varphi_s(\tau)]\, d\tau$ (χ fonction arbitraire) sera certainement une solution de la même équation. Mais l'intégrale écrite, à cause du facteur $\Gamma^{-\frac{1}{2}}$ de v^{**}, est la somme d'une partie imaginaire et d'une partie réelle (qui correspondent respectivement à τ variant de T_2 à T_1 et de T_1 à T) qui toutes deux devront satisfaire à l'équation (à coefficients réels) $H(v) = 0$. On obtient par suite pour cette dernière équation la solution (réelle)

$$v(x_1, \ldots; X_1, \ldots) = \int_{T_1}^{T} \chi(\tau)\, v^{**}[x_1, \ldots; \varphi_1(\tau), \ldots]\, d\tau.$$

Cette fonction a comme ligne de singularités $\mathcal{L}$; on peut l'introduire dans la formule de réciprocité (7) relative à $\mathcal{J}^{(P)}$ si l'on exclut $\mathcal{L}$ de cette région par une surface tubulaire que l'on fait ensuite tendre vers la ligne elle-même; les intégrales relatives à la portion du contour constituée par le conoïde caractéristique s'éliminent comme dans le cas de Volterra; celles relatives à la surface tubulaire, à la limite, se réduisent à

$$2\pi \int_{T_0}^{T} \chi(\tau)\, u[\ldots \varphi_s(\tau) \ldots]\, d\tau;$$

avec une dérivation par rapport à T on a par suite une formule qui permet de résoudre le problème intérieur.

Avec le procédé indiqué, d'abord on soumet la solution élémentaire à une intégration, puis on dérive la formule de réciprocité par rapport à la limite supérieure de l'intégration précédente [1]. Hadamard

[1] Également dans le cas de l'équation générale hyperbolique, normale, à un

a réussi à éliminer ces deux opérations successives, et à rendre possible l'introduction directe de la solution élementaire dans la formule de réciprocité, en se servant de la notion de *partie finie d'une intégrale infinie*. Hadamard et d'Adhémar ont été conduits respectivement à l'introduction de cette notion, le premier à propos des questions que nous exposons actuellement, le second, comme nous l'avons déjà dit (Chap. III, § 4), à propos de la *synthèse* de la solution du probleme de Cauchy donnée par Volterra pour l'équation (12').

5. Partie finie d'une intégrale infinie. — Considérons l'intégrale $J=\int_a^b \frac{A(\xi)\,d\xi}{(b-\xi)^{p+\frac{1}{2}}}$ (p nombre entier positif; A fonction réguliere ayant, au moins au voisinage de b, des dérivées jusqu'a l'ordre p); si $A(b), A'(b), \ldots, A^{p-1}(b)$ ne sont pas toutes nulles, l'intégrale par elle-même n'a pas de sens. Nous définirons comme la *partie finie* de J et nous la désignerons (avec Hadamard) en superposant à l'intégrale le signe $\lceil$, la $\lim\limits_{x=b}\left[\int_a^x \frac{A(\xi)\,d\xi}{(b-\xi)^{p+\frac{1}{2}}}+\frac{B(x)}{(b-x)^{p-\frac{1}{2}}}\right]$, B étant une fonction assujettie aux conditions : que la limite indiquée existe; que, au voisinage de $x=b$, B admette des dérivées jusqu'à l'ordre p. Évidemment B n'est pas completement déterminée par ces conditions (sont seules déterminées les valeurs en b de B et de ses $p-1$ premieres dérivées); mais la valeur de la limite est indépendante du choix de B.

Dans le cas simple ou $A(\xi)$ se réduit a une constante k, cette limite coincide avec

$$\lim_{x=o}\left\{\left[\frac{k}{\left(p-\frac{1}{2}\right)(b-\xi)^{p-\frac{1}{2}}}\right]_a^x+\frac{B(x)}{(b-x)^{p-\frac{1}{2}}}\right\}.$$

On doit prendre

$$B=\frac{-k}{p-\frac{1}{2}}+(b-x)^p\varphi(x),$$

nombre impair de variables, on peut, comme le remarque Hadamard, suivre un procédé analogue; seulement on devra soumettre la solution élémentaire à des intégrations répétees et la formule de réciprocite a des derivations répétées.

φ étant une fonction régulière au voisinage de b (en particulier on peut prendre $\varphi = 0$) et la limite est donnée par $\dfrac{-k}{\left(p-\frac{1}{2}\right)(b-a)^{p-\frac{1}{2}}}$.

Si k est une fonction (régulière) de b le résultat reste invarié. Si au lieu de k, il y a une fonction $A(\xi)$ (ayant les propriétés indiquées au début de ce paragraphe) on peut se ramener au cas précédent. En effet, soit $A_1(\xi)$ la différence entre $A(\xi)$ et les p premiers termes de son développement en série de puissances de $(b-\xi)$, on aura

$$\left|\overline{\mathrm{J}} = \int_a^b \frac{A_1(\xi)\,d\xi}{(b-\xi)^{p+\frac{1}{2}}} + \sum_{s=0}^{p-1} \left|\overline{\int_a^b \frac{A^s(b)(b-\xi)^s(-1)^s}{s!\,(b-\xi)^{p+\frac{1}{2}}}\,d\xi.}\right.\right.$$

Le premier terme du deuxieme membre est fini; les p autres termes sont du type précédemment considéré. [Le calcul indiqué peut évidemment s'appliquer à $\left|\overline{\int_a^b \frac{\alpha(\xi)\,d\xi}{G(\xi)^{p+\frac{1}{2}}}}\right.$, si G devient infinie en b comme $(b-\xi)$ et si G et α satisfont à d'adéquates conditions de régularité.] Parmi les propriétés de ces intégrales généralisées nous noterons celle d'admettre la dérivée par rapport à b qui est donnée simplement en substituant à la quantité sous le signe $\left|\overline{\int}\right.$ sa dérivée par rapport à b.

Passons au cas d'intégrales multiples. Considérons par exemple

$$\mathrm{J}_1 = \underbrace{\int\int\int}_{\mathrm{T}} \frac{A(x_1, x_2, x_3)\,d\mathrm{T}}{[G(x_1, x_2, x_3)]^{p+\frac{1}{2}}}$$

dans l'hypothèse où une partie du contour de T appartient à la surface $G = 0$. Supposons que cette partie du contour de T soit régulière et qu'elle coupe sous un angle différent de o les parties contiguës (elles aussi régulières) du même contour; supposons que la fonction A soit régulière et admette (au moins au voisinage de la surface $G = 0$) des dérivées jusqu'à l'ordre p. Excluons la partie de T contigué à la surface $G = 0$ au moyen d'une autre surface τ d'équation $G(x_1, x_2, x_3) = \gamma(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$, où γ et ses dérivées jusqu'à l'ordre p tendent vers zéro avec ε (on peut prendre par exemple $\gamma = \varepsilon D$, D étant une fonction dérivable des x_s, indépendante de ε). Nous définirons comme partie finie de J_1 la limite pour $\varepsilon = 0$ de la somme de l'intégrale étendue à la partie restante T_1 de T et d'un terme convenable du type $\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}$ (déterminé à des termes tendant vers zéro avec ε près).

On peut démontrer la propriété exprimée par l'égalité

$$\left|\overline{\iiint \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}\, dT}\right. = \left|\overline{\iint dx_1\, dx_2 \left|\overline{\int \frac{A}{G^{p+\frac{1}{2}}}\, dx_3}\right.}\right..$$

D'une façon analogue a ce qui arrive pour les intégrales simples, dans le cas de ces intégrales multiples généralisées la dérivation par rapport à un paramètre dont dépend la forme de la partie du contour appartenant à la surface $G = 0$ peut s'effectuer sans écrire aucun terme se rapportant a cette dépendance. Si la surface $G = 0$ a un point singulier (comme il arrive dans le cas du conoïde caractéristique), on devra l'exclure par une adéquate portion de surface, que l'on fera ensuite tendre vers le point.

Des considérations parfaitement analogues valent pour les intégrales multiples d'ordre autre que trois.

6. **Résolution du problème intérieur pour *m* impair.** — Considérons l'équation hyperbolique normale à coefficients analytiques (1), en supposant impair le nombre des variables ($m = 2p + 1$); considérons en outre une variété Σ (a $m - 1$ dimensions) et une portion K de l'espace (à m dimensions) satisfaisant aux conditions indiquées au paragraphe 2. A un point quelconque $P(X_1, \ldots, X_m)$ de K on pourra associer une portion $\sigma_t^{(P)}$ de Σ et une portion $\mathcal{J}^{(P)}$ de K. Excluons de l'une de ces régions $\mathcal{J}^{(P)}$ le point P au moyen d'une variété convenable θ, à $m - 1$ dimensions : soit $\mathcal{J}_1^{(P)}$ la partie restante de $\mathcal{J}^{(P)}$. Excluons de $\mathcal{J}_1^{(P)}$ la nappe (inverse) $\Gamma_1^{(P)}$ du conoïde caractéristique de sommet P, au moyen de la nappe (inverse) Γ_1 du conoïde caractéristique de sommet en un point P′ infiniment voisin de P : soit $\mathcal{J}_0^{(P)}$ la partie restante de $\mathcal{J}_1^{(P)}$ et soient $\sigma_0^{(P)}$ et θ_0 les parties de $\sigma_t^{(P)}$ et de θ qui limitent $\mathcal{J}_0^{(P)}$. Dans cette derniere région appliquons la formule de réciprocité (7), en prenant pour v la solution élémentaire $v^{**}(Q, P) = V\Gamma^{-\frac{m-2}{2}}$ de l'adjointe de l'équation donnée. (L'équation $\Gamma = 0$ du conoïde carac-

téristique est supposée écrite de façon que dans $\mathcal{J}^{(P)}\,\Gamma$ soit > 0.) Chacune des intégrales étendues à $\mathcal{J}_0^{(P)}$, à $\sigma_0^{(P)}$ et à θ_0 pourra s'écrire comme somme des parties finies des intégrales correspondantes étendues à $\mathcal{J}_1^{(P)}$, à $\sigma^{(P)}$ ou à θ et d'un terme infini d'ordre fractionnaire pour P' tendant vers P; les intégrales étendues à Γ' sont elles aussi infinies d'ordre fractionnaire pour P' tendant vers P; puisque la somme de tous ces termes est o, la somme de ces parties finies et celle des quantités infinies fractionnaires seront séparément nulles. En posant $\omega = \sigma_t^{(P)} + \theta$, on obtient par suite

$$(29) \qquad 0 = \left| \overline{\int\int_{\mathcal{J}_1^{(P)}} \cdots \int v^{**} f\, d\mathcal{J}_1^{(P)}} \right. + \left| \overline{\int_\omega \cdots \int \left[\lambda \left(v^{**} \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v^{**}}{\partial N} \right) + \mathrm{L} u v^{**} \right] d\omega} \right. .$$

Il reste à passer à la limite pour θ tendant vers P. En rapportant le voisinage de P à un système de coordonnées curvilignes convenable, Hadamard a réussi à calculer la limite de la partie finie de l'intégrale étendue à θ, qui est $(-1)^p \Omega_{2p-2} \pi u_P$ (Ω_{s-1} désignant la surface de l'hypersphère de rayon 1 dans l'espace à s dimensions). Il a obtenu ainsi pour une solution u de (1) une formule qui exprime u_P en fonction des valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ sur $\sigma_t^{(P)}$. Cette formule [que nous désignerons dans la suite par (30)] peut se déduire de (29) en substituant dans le deuxième membre a $\mathcal{J}_1^{(P)}$ et à ω respectivement $\mathcal{J}^{(P)}$ et $\sigma_t^{(P)}$, en multipliant le deuxième membre lui-même par $\frac{(-1)^{p+1}}{\Omega_{2p-2}\pi}$, en mettant enfin au premier membre u_P au lieu de o.

Pour la validité de (30), la régularité de Σ, l'analyticité des coefficients de (1), la régularité (existence des dérivées jusqu'à l'ordre p) de u dans $\mathcal{J}^{(P)}$, de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ sur Σ, sont des conditions suffisantes. En particularisant la formule (30) pour les cas étudiés par Volterra et Tedone et en effectuant les calculs nécessaires à l'elimination du symbole $\overline{|\ \ }$, Hadamard a retrouvé les formules résolutives dont il a été parlé aux précédents chapitres; en procédant d'une manière analogue pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + k u = 0,$$

il a obtenu (ce à quoi Coulon n'avait pas réussi) une formule résolutive du problème intérieur pour cette équation : cette formule devient particulièrement simple quand Σ coïncide avec le plan $x_1 = 0$.

7. Le problème de Cauchy dans le cas de *m* impair. — Supposons assignées sur Σ les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ de façon arbitraire (sauf les conditions de régularité dont il est parlé au précédent paragraphe). Écrivons pour tout point $P(X_1, \ldots, X_m)$ de K la formule (30) en y introduisant les données relatives à Σ : nous définirons ainsi une fonction des variables $X_1, \ldots, X_m$. Cette fonction satisfera-t-elle à l'équation (1) et aux conditions relatives au contour Σ ? Il est important de le vérifier, c'est-à-dire de faire la *synthèse* de la solution.

Comme nous l'avons déjà dit, d'Adhémar, en introduisant lui aussi la notion de partie finie d'une intégrale infinie, a effectué cette synthèse pour la solution (donnée par Volterra) de l'équation (12'); Hadamard l'a effectuée dans le cas de l'équation générale hyperbolique normale (à coefficients analytiques) à un nombre impair de variables, en faisant un usage systématique de ladite notion et en se servant en outre de la *propriété d'échange* suivante de la solution élémentaire $v^{**}(Q; P)$: si v^{**} considéré comme fonction de $Q(x_1, \ldots, x_m)$ est la solution élémentaire (relative au point P) de l'adjointe de (1), considérée comme fonction de $P(X_1, \ldots, X_m)$, elle est solution (élémentaire) de l'équation (1) rendue homogène.

Considérons par exemple le terme qui dans (30) contient l'intégrale étendue à $\sigma_l^{(P)}$: à cause de la présence du symbole $\lceil$ les dérivations par rapport aux variables X_r (qui influent sur la forme du contour) peuvent, comme on l'a déjà indiqué, s'effectuer directement sous le signe d'intégration sans écrire aucun terme relatif à cette influence; mais sous le signe d'intégration seules dépendent des X_r, v^{**} et $\frac{\partial v^{**}}{\partial N}$, qui (en vertu de la propriété d'échange) considérées comme fonctions de ces variables satisfont à l'équation $F(u) = 0$, donc le terme considéré de (30) satisfera aussi à la même équation. Avec quelques précautions particulières relatives au point singulier P, on peut vérifier que le terme de (30) contenant l'intégrale étendue à $\mathcal{T}^{(P)}$ satisfait à l'équation $F(u) = f$. Jusqu'à ce moment de la synthèse, il n'est pas nécessaire de faire d'hypothèses (autres que celles déjà admises) relativement à Σ. Dans la vérification des conditions aux limites, on trouve par contre (comme condition nécessaire et suffisante) la condition (déjà donnée par d'Adhémar pour le cas étudié par lui) que la variété Σ soit extérieure à tout conoïde caractéristique de sommet en l'un quelconque de ses points : Hadamard exprime cette condition en disant que Σ doit avoir *une orientation d'espace*. Cette seconde partie de la synthèse n'est pas facile, elle présente au contraire des points délicats. Nous nous bornerons à observer que la condition précédente apparaît intuitivement nécessaire par le fait que c'est seulement lorsqu'elle est satisfaite qu'il se vérifie que pour P tendant vers un point quelconque (régulier) Q de Σ, $\mathcal{J}^{(P)}$ et $\sigma_i^{(P)}$ tendent à se réduire au point Q; si en Q, Σ n'a pas une orientation d'espace ni n'est tangente à une variété caractéristique, en passant à la limite pour P tendant vers Q, la formule (30) donne une condition à laquelle doivent satisfaire les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ sur une portion finie de Σ, condition incompatible (pour une surface Σ générale) avec l'arbitraire des valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ sur cette variété.

Si Σ est une variété caractéristique, il suffit, comme il a déjà été dit, de connaître sur elle les valeurs de u pour que soient déterminées conséquemment celles de $\frac{\partial u}{\partial N}$.

8. **Cas d'un nombre pair $m = 2p$ de variables (méthode de descente).** — Pour m pair, on ne peut résoudre le problème intérieur par le même procédé que pour m impair; on doit en effet tenir compte de ce que pour $m = 2p$ la solution élémentaire n'est pas entièrement déterminée et de ce que Γ y figure avec un exposant négatif non plus fractionnaire, mais entier. Hadamard passe du cas de m impair à celui de m pair par la méthode suivante qu'il appelle de *descente*.

Soit l'équation hyperbolique, normale (à coefficients analytiques), à $2p$ variables,

$$F(u) = f; \tag{1}$$

supposons-la écrite de façon que la forme caractéristique correspondante $\sum_{ik} A_{ik}\gamma_i\gamma_k$ ait un terme positif et $m-1$ termes négatifs; la même chose soit vérifiée pour le premier membre de l'équation $\Gamma = 0$ du conoïde caractéristique. Considérons une variété Σ à $m-1$ dimensions et une région K de l'espace à m dimensions satisfaisant aux conditions indiquées au paragraphe 2; à tout point $(x_1, \ldots, x_m)$ de K associons les points $(x_1, \ldots, x_m, z)$ (avec z arbitraire) d'un espace K' à $m+1$ dimensions. A Σ correspondra dans K' un hypercylindre Σ' à m dimensions, ayant Σ comme directrice sur l'hyperplan $z = 0$. A (1) associons l'équation (hyperbolique normale)

$$F(u') - \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} = f; \tag{1$_A$}$$

si $\Gamma = 0$ est l'équation du conoïde caractéristique relatif à (1) et au point $P(X_1, \ldots, X_m)$, $\Gamma - (z - Z)^2 = 0$ est celle du conoïde caractéristique relatif à (1_A) et au point $P'(X_1, \ldots, X_m, Z)$. Supposons que Σ ait une orientation d'espace, la même chose se vérifiera alors pour Σ'. En tout point de Σ' assignons pour u' et $\frac{\partial u'}{\partial N}$ des valeurs égales à celles données (arbitrairement) pour u et $\frac{\partial u}{\partial N}$ au point correspondant de Σ. Dans K' résolvons, au moyen de (30), le problème de Cauchy relatif à (1_A) et aux données assignées sur Σ' : puisque ces données ne dépendent pas de z, la solution que nous obtiendrons ainsi elle non plus ne dépendra pas de z, u' satisfera donc à (1); elle satisfera en outre certainement aux conditions relatives au contour Σ. Dans la formule résolutive du problème de Cauchy [relatif à (1) et à Σ], que l'on obtient ainsi, apparaissent cependant des éléments relatifs à l'espace K' [en particulier la solution élémentaire relative à l'adjointe de (1_A)] qu'il faut éliminer. Hadamard, en effectuant cette élimination, a réussi à obtenir une formule contenant seulement des éléments relatifs à l'espace K (¹). Dans cette formule [qui s'écrit d'une façon moins concise que la formule (30) relative au cas de m impair] n'apparaît aucun symbole de partie finie d'une intégrale, ni n'apparaît la solution élémentaire

$$\left(v^{**} = V_1 \Gamma^{-\frac{m-2}{2}} - V_2 \log \Gamma\right)$$

de l'équation adjointe : seuls apparaissent séparément les coefficients V_1, V_2 (²). En général dans cette formule (correspondant à $m = 2p$)

(¹) Hadamard a indiqué aussi comment on peut directement (c'est-à-dire sans recourir à la méthode de descente) traiter le cas de m pair.

(²) Dans le cas $m = 2$ la fonction de Riemann relative à l'équation (1') (Chap. II) coïncide avec le coefficient du terme logarithmique de la solution élémentaire de la même équation.

les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$ relatives à Σ interviennent sous les signes d'intégration étendus soit à la portion $\sigma_i^{(\mathrm{P})}$ de Σ, soit à l'intersection $s^{(\mathrm{P})}$ de Σ avec le conoïde caractéristique $\Gamma^{(\mathrm{P})}$; mais si l'équation (1) (à $2p$ variables) est telle que pour la solution élémentaire de son adjointe le coefficient V_2 soit nul, les intégrales étendues à $\sigma_i^{(\mathrm{P})}$ manquent : dans ce cas, on peut dire que l'équation (1) (quand f y est nul) correspond à une propagation d'ondes qui ne laissent pas de résidus (Chap. IV, § 2). Cette condition est vérifiée pour l'équation des ondes sphériques ou hypersphériques $[\Delta_{m-1,1}(u) = 0]$ à un nombre pair, supérieur à deux, de variables.

Dans le cas de m pair, étant donnée la méthode par laquelle la solution du problème de Cauchy a été déduite de celle relative au cas de m impair, il est superflu de procéder à la synthèse de la solution.

Hadamard, en particularisant convenablement sa formule, a retrouvé, même dans le cas de m pair, les formules relatives aux cas qui avaient été déjà précédemment étudiés.

9. **Problèmes mixtes. Problème extérieur.** — Si Σ est constituée par des parties ayant une orientation d'espace sur lesquelles sont assignées u et $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$ et par des parties n'ayant pas cette orientation sur lesquelles est assignée u, pour obtenir en tout point de K la valeur d'une solution de (1) (à un nombre impair ou pair de variables) on peut procéder comme nous l'avons vu dans le cas étudié par Volterra, c'est-à-dire se servir des formules résolutives du problème intérieur et y procéder à l'élimination des éléments (relatifs à Σ) qui ne figurent pas parmi les données.

Outre ces problemes mixtes, on pourrait étudier pour l'équation générale hyperbolique normale le *problème extérieur*, correspondant à celui traité par Volterra pour l'équation (12'). [Dans son livre cité, Hadamard établi seulement, pour le cas de m impair, des conditions auxquelles doivent satisfaire les valeurs de u et $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$ sur la variété à $m-1$ dimensions à laquelle le problème extérieur se rapporte.] Au sujet de l'importance que pourrait avoir la résolution d'un tel problème, nous renvoyons à ce que nous avons dit au Chapitre III.

10. Les précédents paragraphes de ce chapitre peuvent donner

une idée de la généralité des résultats obtenus par Hadamard et de l'importance que, pour l'obtention d'une telle généralité, ont eu l'introduction dans la méthode des caractéristiques des solutions élémentaires des équations différentielles et l'usage systématique des parties finies des intégrales infinies. Il est à noter que. comme Hadamard lui-même l'a montré, ces résultats sont susceptibles d'extension au cas d'équations (linéaires) à coefficients non analytiques et peuvent être mis sous une forme invariante par rapport a un changement de variables.

11. Presques toutes les références bibliographiques qui suivent se rapportent aux travaux qui nous ont aidés pour la rédaction du présent volume. Pour d'ultérieures notices bibliographiques sur des sujets en relation avec ceux que nous avons traité ici, on peut utilement consulter le volume de d'Adhémar de la Collection Scientia *Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles*, les Leçons de Stockholm de Volterra, l'œuvre d'Hadamard citée au début du présent chapitre.

Nous ne voulons pas terminer cette page sans exprimer nos remerciements au Professeur Volterra pour les œuvres de sa bibliothèque mises aimablement à notre disposition, pour quelques utiles indications qu'il nous a fournies et enfin pour la préface dont il a bien voulu nous honorer.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

BELTRAMI (E.). — Sull' espressione data da Kirchoff al principio di Huyghens (*Rend. Acc. Lincei*, 2e semestre, t. 4, 1895, p. 29; *Operè*, t. 4, p. 525; Milano, Hœpli, 1920).

— Sul teorema di Kirchhoff (*Rend. Acc. Lincei*, t. 4, p. 51; *Opere*, t. 4, p. 528).

COULON (J.). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques (*Thèse*, Paris, Hermann, 1902).

D'ADHÉMAR (R.). — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique (*Journ. de Math.*, t. 10, 1904, p. 131).

— Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique (*Journ. de Math.*, t. 2, 1906, p. 357).

— Sur une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 20, 1905, p. 142).

— Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles (*Collection Scientia*, Paris, Gauthier-Villars, 1907).

DARBOUX (G.). — *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, IIe Partie, p. 71-98 (Paris, Gauthier-Villars, 1889).

ENAUDI (R.). — Sul problema di Cauchy relativo ad onde elastiche superficiali (*Rend. Acc. Lincei*, 1er semestre, t. 19, 1934, p. 311).

FRIEDRICHS (K.) et LEWY (H.). — Ueber die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Losungen beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen (*Math. Ann.*, t. 98, 1927, p. 192).

— Das Anfangswertproblem einer beliebigen nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichung beliebiger Ordnung in zwei Variablen (*Math. Ann.*, t. 99, 1928, p. 200).

— Ueber fortsetzbare Anfangsbedingungen bei hyperbolischen Differential gleichungen in drei Veranderlichen (*Nachr. d. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.*, 1932, p. 135).

GOURSAT (E.). — *Cours d'Analyse*, t. 3, p. 47-167 (Paris, Gauthier-Villars, 1915).

HADAMARD (J.). — Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles (*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 21, 1904, p. 535, et t. 22, 1905, p. 101).

— Théorie des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques et problème de Cauchy (*Acta Math.*, t. 31, 1908, p. 333).

— *Leçons sur la propagation des ondes* (Paris, Hermann, 1903).

— *Lectures on Cauchy's problem* (New Haven, Yale University Press, 1923).

— *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques* (Paris, Hermann, 1932).

KIRCHHOFF. — Zur Theorie der Lichtstrahlen (*Sitzungsber. der K. Ak. der Wiss. zu Berlin*, 1882, p. 641).

LEVI CIVITA (T.).— *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa* (Bologna, Zanichelli, 1931).

PICARD (E.). — Mémoire sur les équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives (*Journ. de Math.*, t. 6, 1890, p. 210).

— Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'électricité (*Bul. Soc. math. de France*, t. 22, 1894, p. 2).

— *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la physique mathématique* (Paris, Gauthier-Villars, 1927).

PICONE (M.). — *Sulla determinazione di un integrale dell'equazione*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = c_1 u + c_2$$

noti i valori di u su 2 segmenti di curve uscenti da un punto. (*Rend. Circ. Mat. di Palermo*, t. 31, 1911, p. 133.

RIEMANN (B.). — Ueber die fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite (*Gött. Abhand.* t. 8, 1860; *Gesammelte Werke*, p. 145, Leipzig, Teubner, 1876); *Œuvres mathématiques*, traduit par Laugel, p. 177 (Paris, Gauthier-Villars, 1898).

RIEMANN (Weber). — *Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, t. 1, p. 605-625 (Braunschweig, Vieweg et Sohn, 1925).

TEDONE (O.). — Sulla dimostrazione della formula che rappresenta analiticamente il principio di Huyghens (*Rend. Acc. Lincei*, vol. 5, 1er semestre, 1896, p. 357).

— Sulla integrazione delle equazioni dell'elasticità (*Ibid.*, p. 460).

— Sulla integrazione dell'equazione $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0$ (*Annali di Mat.*, t. 27, 1898, p. 1).

VOLTERRA (V.). — Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi (*Rend. Acc. Lincei*, 2e semestre, t. 1, 1892, p. 161).

— Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi (*Ibid.*, p. 265).

— Sur les vibrations des corps élastiques isotropes (*Acta Math.*, t. 18, 1894, p. 161).

— Note on the application of the method of images to problems of vibrations (*Procedings London Math. Soc.*, t. 2, 1904, p. 327).

— Sull'applicazione del metodo delle immagini alle equazioni di tipo iperbolico (*Atti Congresso Internaz. dei Mat. tenuto a Roma nel* 1908, t. 2, p. 90; Tipogr. Lincei, 1909).

— *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles professées à Stockholm* (Upsal, 1906; Paris, Hermann, 1912).

— *Lectures delivered at the celebration of the* 20 *th Anniversary of the foundation of Clark University* (Published by Clark University, 1912).

TABLE DES MATIÈRES.