

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

V. A. KOSTITZIN

**Applications des équations intégrales
(applications statistiques)**

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 69 (1935)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1935__69__1_0

© Gauthier-Villars, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

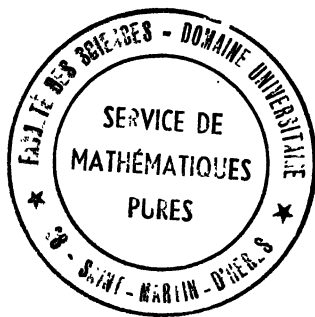
Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LXIX

Applications des équations intégrales (applications statistiques)

Par M. V. A. KOSTITZIN



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1935

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

APPLICATIONS DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

(APPLICATIONS STATISTIQUES)

Par M. V. A. KOSTITZIN.



I. — INTRODUCTION.

1. Le début de notre siècle est marqué par l'éclat subit de la théorie des équations intégrales. Il a suffi de l'apparition du célèbre Mémoire [11] de Fredholm pour que s'ensuive toute une cristallisation d'une théorie avec ses embranchements et applications innombrables. Hasard? Mode? On peut parfois le croire. Pourtant un examen même superficiel montre que toutes les idées directrices de Fredholm se trouvent chez ses prédécesseurs [1]. Seulement, par un phénomène bien connu des historiens de la science ces idées ou ces germes d'idées une fois émises ne se transforment pas immédiatement en idées forces. Pendant quelque temps elles sommeillent, en revenant de temps en temps à la surface pour reprendre ensuite leur sommeil. Puis le réveil vient, comme toujours brusquement. C'est la vogue qui dure quelques années, parfois quelques dizaines d'années, et ensuite la théorie acquise, développée, reconnue suit le lent développement de toutes les choses devenues classiques.

2. Nous n'allons pas essayer de suivre toutes les étapes consécutives de l'évolution qui a trouvé son dernier terme dans les équations intégrales. Quelques remarques sont cependant nécessaires. Le début du XIX^e siècle est caractérisé par le mécanisme de Laplace qu'il a opposé au « probabilisme ». Si les racines philosophiques de ce mécanisme baignent dans le courant matérialiste du XVIII^e siècle, son expression mathématique est visiblement empruntée à la mécanique céleste. Mais, en fait, dès qu'il s'agit d'un problème réel quelconque

ce mécanisme est plutôt une profession de foi qu'un instrument de travail. On est obligé de se servir d'outils moins parfaits philosophiquement mais pouvant donner des solutions utilisables. Ces outils sont peu nombreux mais indéfiniment transformables. L'outil principal est le passage du continu au discontinu et vice versa. L'augmentation du nombre de points matériels composant un système donne comme cas limite les équations aux dérivées partielles beaucoup moins « mécanistes » que les équations différentielles ordinaires. Inversement, en cherchant les solutions de ces équations, tantôt on divise un milieu ou un corps en éléments très petits en passant des équations différentielles aux équations algébriques, tantôt on décompose un phénomène en phénomènes élémentaires en nombre fini ou infini. On trouve ces méthodes partout; on les retrouve, accompagnées de considérations philosophiques, gnoséologiques, logiques, etc., à la base de la célèbre controverse sur les fonctions arbitraires qui a tant contribué au développement de l'analyse moderne.

Remarquons à ce propos que ces procédés n'ont rien de commun avec la conception atomistique de la matière ou bien s'il y a atomisme, c'est un atomisme préphysique s'apparentant à celui des philosophes grecs et ayant ses racines dans la préhistoire de la science, peut-être dans la préhistoire humaine. Ces « atomes », « éléments », « particules », etc. sont des entités entièrement fictives que l'on utilise dans une sorte d'expérience mentale et que l'on élimine soigneusement ensuite. Les équations obtenues par cette méthode ne contiennent que des grandeurs directement « observables » dans le sens de la physique phénoménologique. Donc, en fin de compte ces passages de continu au discontinu et inversement ne sont que des procédés mathématiques commodes mais sans aucun substratum réel.

Après la décomposition d'un milieu en éléments infinitésimaux on procède à l'établissement des équations. Cette opération prend naturellement deux aspects analogues aux deux parties du calcul infinitésimal. La première de ces méthodes conduit en fin de compte aux équations différentielles; on sait le développement prodigieux de ces équations avec leurs applications innombrables. L'autre méthode consiste en ce que l'on prête à chaque élément une certaine capacité d'action à distance dans l'espace ou dans le temps ou dans l'ensemble espace-temps, et pour un point donné on totalise les actions de tous les éléments du milieu. Cette méthode connue depuis longtemps a eu

moins de faveur que l'autre, et pour cause! Il est très facile de construire des hypothèses simples et plausibles sur les interactions d'éléments voisins ou sur les variations infinitésimales des propriétés des corps. Par contre l'action à distance n'a rien d'élémentaire, ne se prête pas si facilement au calcul, et une très longue évolution préalable fut nécessaire pour déterminer la forme de la fonction d'action dans les cas les plus simples et pour faire admettre ce procédé comme légitime. On arrive parfois à calculer ces fonctions en utilisant l'appareil d'équations différentielles et la notion de source. Dans d'autres cas, surtout quand les actions individuelles n'admettent pas la composition linéaire, l'action à distance reste inconnue, et la méthode directe de mise en équation ne donne rien. On comprend pourquoi l'apparition sporadique à travers le XIX^e siècle d'équations intégrales ne fut couronnée que très tard par la création d'une théorie mathématique développée. Il restait encore beaucoup à faire! Les systèmes de fonctions orthogonales, les développements en séries de Fourier, les propriétés de solutions réelles des équations différentielles. Du point de vue physique il fallait épuiser tout ce que peuvent donner les équations différentielles, trouver un passage des problèmes continus aux autres où la structure discontinue devient sensible et les équations différentielles cessent d'être applicables. Enfin, une circonstance très importante, l'aspect statistique que prennent actuellement toutes les théories physiques est aussi un des puissants facteurs ayant contribué au développement des équations intégrales.

Dans ce qui suit nous allons étudier une série de problèmes où la totalisation d'actions à distance mène à des équations intégrales. Dans certains cas le noyau (fonction d'action à distance) est connu, ce qui permet de résoudre formellement ou effectivement le problème. Dans d'autres cas on ne connaît que quelques propriétés du noyau, ce qui donne toutefois la possibilité d'étudier utilement les solutions. Enfin, il existe des cas où l'on ne sait rien sur le noyau mais le problème présenté sous forme d'équation intégrale a une certaine importance scientifique ou philosophique.

II. — RENOUVELLEMENT.

1. Les problèmes actuariels ne présentent qu'un intérêt pratique mais ils ont l'avantage d'être simples, et le mécanisme de formation

directe d'équations intégrales y est mieux visible [37]; d'autre part on y trouve des analogies avec quelques problèmes physiques et avec la théorie d'hérédité dans le sens de M. Volterra [36].

Soit [30] $H(\tau)$ l'effectif au moment τ d'une collectivité se renouvelant par des naissances et par des admissions de nouveaux membres, et perdant ses membres par les voies de la mort, de la démission, etc. Supposons que l'accroissement total de $H(\tau)$ dans l'intervalle de temps $(\tau, \tau + d\tau)$ soit égal à $H(\tau)\varphi(\tau) d\tau$ et que le nombre de survivants au moment t de cet accroissement soit égal à $H(\tau)\varphi(\tau)p(t, \tau) d\tau$. Soient d'autre part $H(0)$ l'effectif initial et $H(0)p(t, 0)$ le nombre de survivants au moment t de cet effectif initial. Ces fonctions sont liées par l'équation intégrale de Volterra

$$(1) \quad H(t) = H(0)p(t, 0) + \int_0^t H(\tau)\varphi(\tau)p(t, \tau) d\tau.$$

Cette équation est de première espèce par rapport à la fonction de renouvellement $\varphi(t)$, de deuxième espèce par rapport à $H(t)$ et, s'il y a lieu, de deuxième espèce par rapport à la fonction d'élimination p .

2. Premier cas particulier. — Supposons que

$$p(t, \tau) = p(t - \tau).$$

L'équation (1) prend la forme

$$(2) \quad H(t) = H(0)p(t) + \int_0^t H(\tau)\varphi(\tau)p(t - \tau) d\tau.$$

Elle permet de déterminer n'importe laquelle des trois fonctions H , φ , p , lorsque les deux autres sont connues.

1° Supposons connues les fonctions $H(t)$ et $p(t)$. Pour déterminer $\varphi(t)$ multiplions (2) par $e^{\alpha z t} dt$ et intégrons par rapport à t de 0 à ∞ . On obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [H(t) - H(0)p(t)] e^{\alpha z t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{\alpha z t} dt \int_0^t H(\tau)\varphi(\tau)p(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty H(\tau)\varphi(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{\alpha z t} p(t - \tau) dt \\ &= \int_0^\infty H(\tau)\varphi(\tau) e^{\alpha z \tau} d\tau \int_0^\infty e^{\alpha z t} p(t) dt. \end{aligned}$$

Donc on peut isoler [9] la fonction $\varphi(t)$

$$(3) \quad \int_0^\infty H(\tau) \varphi(\tau) e^{\alpha z \tau} d\tau = \frac{\int_0^\infty [H(t) - H(0)p(t)] e^{\alpha z t} dt}{\int_0^\infty p(t) e^{\alpha z t} dt}.$$

L'inversion très simple de cette intégrale donne immédiatement $\varphi(t)$. On peut se servir de la constante α pour assurer la convergence des opérations. Posons par exemple $\alpha = -1$. On a

$$(4) \quad \varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi i H(\tau)} \int_C e^{\tau z} dz \frac{\int_0^\infty [H(t) - H(0)p(t)] e^{-tz} dt}{\int_0^\infty p(t) e^{-zt} dt},$$

le contour d'intégration C étant une droite parallèle à l'axe imaginaire et traversant la partie positive de l'axe réel à une distance suffisamment grande.

Soit $\alpha = i$. On a dans ce cas

$$(5) \quad \varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi i H(\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau} dz \frac{\int_0^\infty [H(t) - H(0)p(t)] e^{itz} dt}{\int_0^\infty p(t) e^{itz} dt}.$$

2° Supposons les fonctions H et φ connues. Le même procédé nous donne

$$\int_0^\infty p(t) e^{\alpha z t} dt = \frac{\int_0^\infty H(t) e^{\alpha z t} dt}{H(0) + \int_0^\infty H(\tau) \varphi(\tau) e^{\alpha z \tau} d\tau}.$$

On a donc, soit

$$(6) \quad p(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\tau z} dz \frac{\int_0^\infty H(t) e^{-zt} dt}{H(0) + \int_0^\infty H(t) \varphi(t) e^{-zt} dt},$$

soit

$$(7) \quad p(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz\tau} dz \frac{\int_0^\infty H(t) e^{izt} dt}{H(0) + \int_0^\infty H(t) \varphi(t) e^{izt} dt}.$$

3° Supposons les fonctions $p(t)$ et $\varphi(t)$ connues; la méthode précé-

dente n'est plus applicable à cause de la présence de la fonction $\varphi(t)$. Dans certains cas particuliers la résolution de l'équation (2) est très facile.

a. Posons tout d'abord

$$\varphi(t) = 1 + \mu t;$$

on a

$$H(t) = H(0)P(t) + \int_0^t H(\tau)(1 + \mu\tau)P(t - \tau) d\tau.$$

En procédant comme auparavant on trouve

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty H(t) e^{\alpha t z} dt - \int_0^\infty H(0) P(t) e^{\alpha t z} dt \\ &= \int_0^\infty e^{\alpha t z} dt \int_0^t H(\tau)(1 + \mu\tau)P(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty H(\tau)(1 + \mu\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{\alpha t z} P(t - \tau) dt \\ &= \int_0^\infty H(\tau)(1 + \mu\tau) e^{\alpha \tau z} d\tau \int_0^\infty e^{\alpha t z} P(t) dt \end{aligned}$$

ou bien

$$(8) \quad G(z) = H(0)P(z) + G(z)P(z) + \frac{\mu}{\alpha} P(z)G'(z)$$

en posant

$$G(z) = \int_0^\infty H(t) e^{\alpha t z} dt, \quad P(z) = \int_0^\infty e^{\alpha t z} P(t) dt.$$

L'équation différentielle linéaire de premier ordre (8) a comme solution

$$(9) \quad G(z) = \frac{\alpha}{\mu} H(0) \int_z^\infty e^{\frac{\alpha}{\mu} \int_z^u \left[1 - \frac{1}{P(s)}\right] ds} du.$$

L'inversion de cette intégrale nous donne la fonction $H(\tau)$.

b. Supposons ensuite que

$$\varphi(t) = e^{\mu t};$$

en multipliant l'équation

$$H(t) = H(0)P(t) + \int_0^t H(\tau) e^{\mu\tau} P(t - \tau) d\tau$$

par $e^{\alpha t z + n \mu t} dt$ et en intégrant par rapport à t de 0 à ∞ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [H(t) - H(0)P(t)] e^{\alpha t z + n \mu t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{\alpha t z + n \mu t} dt \int_0^t H(\tau) e^{\mu \tau} P(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty H(\tau) e^{\mu \tau} d\tau \int_\tau^\infty e^{\alpha t z + n \mu t} P(t - \tau) dt \\ &= \int_0^\infty H(\tau) e^{\alpha t z + (n+1)\mu \tau} d\tau \int_0^\infty P(t) e^{\alpha t z + n \mu t} dt \end{aligned}$$

ou bien

$$(10) \quad G_n(z) = H(0)P_n(z) + G_{n+1}(z)P_n(z),$$

en posant

$$\begin{aligned} G_n(z) &= \int_0^\infty H(\tau) e^{\alpha \tau z + \mu n \tau} d\tau, \\ P_n(z) &= \int_0^\infty P(t) e^{\alpha t z + n \mu t} dt. \end{aligned}$$

Soit

$$\Pi_n(z) = P_0(z)P_1(z) \dots P_n(z).$$

On peut donner à l'équation (10) la forme

$$\Pi_{n-1}G_n = H(0)\Pi_n + G_{n+1}\Pi_n.$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} G_0(z) &= H(0)P_0(z) + G_1(z)P_0(z) = H(0)\Pi_0(z) + G_1(z)\Pi_0(z), \\ \Pi_0G_1 &= H(0)\Pi_1 + G_2\Pi_1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

La sommation de ces équations donne

$$G_0(z) = H(0) \sum_{k=0}^n \Pi_k(z) + G_{n+1}(z) \Pi_n(z).$$

Supposons la série $\sum_{k=0}^\infty \Pi_k(z)$ convergente et le produit $\Pi_n G_{n+1}$ tendant vers zéro pour $n \rightarrow \infty$. On trouve

$$(11) \quad G_0(z) = \int_0^\infty H(\tau) e^{\alpha \tau z} d\tau = H(0) \sum_{k=0}^\infty \Pi_k(z).$$

L'inversion de cette intégrale donne la fonction $H(\tau)$.

3. Deuxième cas particulier. — Supposons que

$$p(t, \tau) = \lambda(t - \tau) + \sigma(\tau) \mu(t - \tau);$$

l'équation (1) devient

$$(12) \quad H(t) = H(0) [\lambda(t) + \sigma(0) \mu(t)] \\ + \int_0^t H(\tau) \varphi(\tau) [\lambda(t - \tau) + \sigma(\tau) \mu(t - \tau)] d\tau.$$

Le calcul de $\lambda(t)$ ou de $\mu(t)$, toutes les autres fonctions étant connues, est facile.

Nous calculerons $H(\tau)$ en supposant la fonction de renouvellement $\varphi(\tau)$ constante, et $\sigma(\tau) = e^{k\tau}$. L'équation (12) devient

$$H(t) = H(0) [\lambda(t) + \mu(t)] + \int_0^t H(\tau) [\lambda(t - \tau) + e^{k\tau} \mu(t - \tau)] d\tau.$$

En multipliant cette équation par $e^{nht + \alpha z t} dt$ et en intégrant par rapport à t de 0 à ∞ , on trouve

$$\int_0^\infty H(t) e^{nht + \alpha z t} dt - H(0) \int_0^\infty [\lambda(t) + \mu(t)] e^{nht + \alpha z t} dt \\ = \int_0^\infty H(\tau) e^{n\alpha\tau + \alpha z \tau} d\tau \int_0^\infty \lambda(t) e^{nht + \alpha z t} dt \\ + \int_0^\infty H(\tau) e^{(n+1)k\tau + \alpha z \tau} d\tau \int_0^\infty \mu(t) e^{nht + \alpha z t} dt$$

ou bien

$$G_n(z) = H(0) L_n(z) + H(0) M_n(z) + G_n(z) L_n(z) + G_{n+1}(z) M_n(z).$$

en posant

$$G_n(z) = \int_0^\infty H(t) e^{\alpha z t + nkt} dt, \quad L_n(z) = \int_0^\infty \lambda(t) e^{\alpha z t + nkt} dt, \\ M_n(z) = \int_0^\infty \mu(t) e^{\alpha z t + nkt} dt.$$

On peut définir une suite de fonctions $S_n(z)$, telle que

$$\frac{S_{n+1}(z)}{S_n(z)} = \frac{M_n(z)}{1 - L_n(z)}, \quad \frac{S_1(z)}{S_0(z)} = \frac{M_0(z)}{1 - L_0(z)}, \quad S_0(z) = 1.$$

L'équation intégrale prend la forme

$$S_n(z) G_n(z) = S_{n+1}(z) G_{n+1}(z) + H(0) S_n(z) [L_n(z) + M_n(z)].$$

Il s'ensuit dans des conditions qu'il est facile de spécifier

$$G_0(z) = \int_0^\infty H(t) e^{\alpha z t} dt = H(0) \sum_{n=0}^\infty [L_n(z) + M_n(z)] S_n(z),$$

et l'inversion de cette intégrale permet de déterminer $H(t)$.

4. Troisième cas particulier. — Supposons que

$$p(t, \tau) = \sum_{k=0}^n p_k(t - \tau) \tau^k, \quad \varphi(\tau) = \text{const.};$$

l'équation (1) prend la forme

$$(13) \quad H(t) = H(0) p_0(t) + \sum_{k=0}^n \int_0^t H(\tau) \tau^k p_k(t - \tau) d\tau;$$

En procédant comme auparavant on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^\infty H(t) e^{\alpha t z} dt &= H(0) \int_0^\infty p_0(t) e^{\alpha t z} dt \\ &+ \sum_{k=0}^n \int_0^\infty H(\tau) \tau^k e^{\alpha z \tau} d\tau \int_0^\infty p_k(t) e^{\alpha z t} dt \end{aligned}$$

ou bien

$$G(z) \doteq H(0) P_0(z) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{\alpha^k} G^{(k)}(z) P_k(z)$$

en posant

$$G(z) = \int_0^\infty H(t) e^{\alpha t z} dt, \quad P_k(z) = \int_0^\infty p_k(t) e^{\alpha z t} dt.$$

Donc l'équation intégrale (13) se trouve transformée en équation différentielle linéaire, ce qui peut parfois faciliter sa résolution.

Ce procédé peut être considéré comme une généralisation de la méthode de résolution des équations intégrales du cycle fermé due à MM. V. A. Fock, P. Browne, etc. [9, 10, 6, 4].

5. La fonction d'élimination ou la fonction de survie p se rattache

très simplement à l'intensité de la mort $\mu(t)$. On a en effet

$$\mu(t) = -\frac{p'(t)}{p(t)};$$

on en tire [30, 31, 37]

$$p(t) = e^{-\int_0^t \mu(\tau) d\tau}$$

Donc, si les individus admis dans la collectivité sont du même âge la fonction d'élimination p figurant dans l'équation (1) a bien la forme simple

$$p(t, \tau) = e^{-\int_0^{t-\tau} \mu(s) ds}$$

On voit immédiatement tous les défauts de ce raisonnement; l'expérience montre d'ailleurs que les fonctions φ et p dépendent de l'effectif $H(t)$ d'une façon non linéaire.

On peut supposer que φ est une fonction linéaire décroissante de $H(t)$:

$$\varphi(t) = n - \nu H(t),$$

et que la mortalité se trouve favorisée par le fait de l'accroissement d'une population. Ces hypothèses simples nous donnent l'équation logistique

$$H'(t) = \alpha H(t) - \alpha H^2(t)$$

bien connue des statisticiens. L'équation (2) prend la forme

$$H(t) = H(0)p(t) + \int_0^t [n H(\tau) - \nu H^2(\tau)]p(t-\tau) d\tau.$$

Ces deux équations permettent de déterminer H et p .

L'équation intégrale (1) peut être utile dans l'étude de certains problèmes actuariels simples comme ceux des caisses de secours mutuel, etc., mais elle n'est pas suffisante pour étudier le développement numérique d'une population.

6. Cas stationnaire. — Dans le cas d'un effectif stationnaire $H(t) = H(0)$, et l'équation (2) devient

$$1 = p(t) + \int_0^t \varphi(\tau)p(t-\tau) d\tau.$$

Il n'y a pas de difficulté à séparer les fonctions $p(t)$ et $\varphi(t)$ et à les exprimer l'une par l'autre. On a en effet

$$p(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{\tau z} dz}{z + z \int_0^\infty \varphi(t) e^{-zt} dt},$$

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\tau z} dz \frac{1 - z \int_0^\infty p(t) e^{-tz} dt}{z \int_0^\infty p(t) e^{-tz} dt},$$

le contour d'intégration C étant une droite parallèle à l'axe imaginaire et traversant la partie positive de l'axe réel à une distance suffisamment grande.

III. — THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ.

1. La méthode directe de mise en équations que nous avons esquissée, trouve son application la plus intéressante dans la théorie cinétique des gaz. Supposons qu'un milieu gazeux soit composé de particules identiques se déplaçant avec des vitesses caractérisées par une fonction de répartition

$$F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta; t) d\omega,$$

x, y, z étant des coordonnées cartésiennes d'un élément de l'espace $d\omega \sim dx dy dz$; ξ, η, ζ étant des coordonnées de l'élément $d\omega \sim d\xi d\eta d\zeta$ dans l'espace de vitesses au moment t . Cette fonction est assujettie aux conditions suivantes [15, 16] :

1° F est une fonction continue quelle que soit la situation du point $(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)$. Cette hypothèse n'est valable que dans le cas d'un très grand nombre de particules et elle est à rejeter dans plusieurs problèmes de la physique moderne; elle est à rejeter dans la dynamique stellaire. D'après M. D. Hilbert cette condition est nécessaire pour la stabilité d'un gaz. Il s'ensuit que les gaz raréfiés ne sont pas stables ou qu'il faut mieux définir ce que l'on désigne comme stabilité d'un état gazeux.

2° F est fini; d'après M. D. Hilbert [15, 16] cette condition est aussi nécessaire pour la stabilité d'un état gazeux que la précédente; il faut remarquer à ce propos qu'il existe certainement des systèmes

essentiellement instables (les amas stellaires) et pourtant admettant F fini et « continu » dans les parties centrales; donc cette condition n'est pas suffisante.

3° F est essentiellement positif.

4° $F \rightarrow 0$ pour $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \rightarrow \infty$. Cette hypothèse est nécessaire pour assurer l'énergie cinétique finie dans les volumes finis ou infiniment petits.

5° F est dérivable. Cette hypothèse, comme la première, est certainement fausse mais nécessaire lorsqu'il s'agit de calculer les caractéristiques macroscopiques d'un état gazeux.

2. Les chocs. — Le calcul des chocs présente plusieurs particularités délicates et n'est jamais fait d'une façon satisfaisante. On peut affirmer que la méthode bien connue conduisant à l'équation de Boltzmann n'est applicable qu'aux gaz très denses, formés de particules très simples, parfaitement symétriques et distribuées de façon à ne pas créer des champs de forces trop variables. Ces conditions ne sont certainement pas remplies dans la plupart des cas réels, ce qui restreint considérablement la validité de la théorie de Boltzmann.

Soient ξ, η, ζ et ξ_1, η_1, ζ_1 les composantes de vitesses de deux particules avant le choc; ξ', η', ζ' et $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$ les composantes après le choc; α, β, γ les cosinus directeurs de la ligne de centres de ces particules au moment du choc; σ le diamètre d'une particule; on trouve facilement

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi + \alpha W, & \eta' &= \eta + \beta W, & \zeta' &= \zeta + \gamma W, \\ \xi'_1 &= \xi_1 - \alpha W, & \eta'_1 &= \eta_1 - \beta W, & \zeta'_1 &= \zeta_1 - \gamma W, \\ W &= \alpha(\xi_1 - \xi) + \beta(\eta_1 - \eta) + \gamma(\zeta_1 - \zeta).\end{aligned}$$

Ces formules déterminent une substitution linéaire homogène de $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$, telle que :

- 1° cette substitution est identique à sa réciproque;
- 2° elle est symétrique par rapport à deux particules;
- 3° elle vérifie quatre invariants

$$\xi + \xi_1, \quad \eta + \eta_1, \quad \zeta + \zeta_1, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

dont l'interprétation mécanique est immédiate.

Soit Φ une fonction quelconque

$$\Phi = \Phi(\xi, \eta, \zeta);$$

posons pour abrégé

$$\Phi_1 = \Phi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \quad \Phi' = \Phi(\xi', \eta', \zeta'), \quad \Phi'_1 = \Phi(\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1)$$

et définissons les opérateurs symboliques

$$[F, G] = \frac{1}{4} \sigma^2 [W | (F'G'_1 + F'_1 G' - FG_1 - F_1 G),$$

$$[F, F] = \frac{1}{2} \sigma^2 [W | (F'F'_1 - FF_1),$$

$$[F] = X \frac{\partial F}{\partial \xi} + Y \frac{\partial F}{\partial \eta} + Z \frac{\partial F}{\partial \zeta} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t},$$

X, Y, Z étant les composantes du champ extérieur rapportées à l'unité de masse; on peut admettre dans certains cas simples que X, Y, Z sont des fonctions connues de x, y, z, t indépendantes de la fonction F , ce qui généralement n'a pas lieu; en effet dans le cas de gravitation newtonienne X, Y, Z dépendent de la configuration du système et partant de la fonction de distribution F .

Dans ces conditions la fonction F vérifie l'équation fondamentale de Maxwell-Boltzmann

$$(1) \quad [F] = \int \int [F, F] d\omega_1 ds,$$

l'intégration étant étendue à l'espace de vitesses (ξ_1, η_1, ζ_1) et à la surface de la sphère-unité $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$.

3. État stationnaire. — Dans le cas d'état stationnaire l'équation (1) devient

$$(2) \quad \int \int [F, F] d\omega_1 ds = 0.$$

Cette équation a comme solutions dans des conditions assez générales la fonction de Maxwell :

$$(3) \quad F = a e^{-b[(\xi-u)^2 + (\eta-v)^2 + (\zeta-w)^2]},$$

en désignant par u, v, w, a, b les fonctions arbitraires de x, y, z, t , dont deux (a, b) ne sont jamais négatives.

L'équation (2) résulte d'une série d'hypothèses tout à fait spéciales sur la structure du gaz, etc.; donc, la fonction (3) n'est qu'un cas très particulier des fonctions de répartition conciliables avec l'état station-

naire. Une question se pose : dans quelle mesure la fonction (3) peut-elle servir comme première approximation pour la résolution de l'équation (1) ? C'est la même question qu'on peut poser toutes les fois qu'on se sert d'un cas statique comme de première approximation dans l'étude d'un cas dynamique. Il est d'usage courant de répondre par l'affirmative, et pourtant ce procédé donne des solutions fausses presque dans tous les cas réels.

4. Méthode de Hilbert [15, 16]. — M. D. Hilbert suppose implicitement X, Y, Z indépendants de F et se sert de la fonction (3) comme de première approximation en remplaçant la fonction F par une série paramétrique

$$(4) \quad F = \frac{\Phi}{\lambda} + \Psi + \lambda X + \dots$$

L'équation (1) se décompose en une suite récurrente d'équations intégrales

$$(5) \quad \iint [\Phi, \Phi] d\omega_1 ds = 0,$$

$$(6) \quad \iint [\Phi, \Psi] d\omega_1 ds = \frac{1}{2} [\Phi],$$

$$(7) \quad \iint [\Phi, X] d\omega_1 ds = \frac{1}{2} [\Psi] - \frac{1}{2} \iint [\Psi, \Psi] d\omega_1 ds,$$

...

L'équation (5) est tout à fait identique à (2). On a donc comme première approximation la fonction de Maxwell

$$\Phi = a e^{-b[(\xi-u)^2 + (\eta-v)^2 + (\zeta-w)^2]}.$$

Par des transformations ingénieuses, quoique assez pénibles, MM. D. Hilbert et E. Hecke [15, 16] montrent que l'équation (6) n'est pas autre chose qu'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce par rapport à Ψ . Posons en effet

$$\Psi = \psi \Phi,$$

ψ étant une nouvelle fonction inconnue. Comme

$$\Phi \Phi_1 = \Phi' \Phi'_1$$

l'équation (6) prend la forme

$$(6') \quad \frac{1}{4} \sigma^2 \iint |W| \Phi \Phi_1 (\psi'_1 + \psi' - \psi_1 - \psi) d\omega_1 ds = \frac{1}{2} [\Phi].$$

Remplaçons les variables $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ par de nouvelles variables

$$\begin{aligned} u + \frac{\xi}{\sqrt{b}}, & \quad v + \frac{\eta}{\sqrt{b}}, & \quad w + \frac{\zeta}{\sqrt{b}}, \\ u + \frac{\xi_1}{\sqrt{b}}, & \quad v + \frac{\eta_1}{\sqrt{b}}, & \quad w + \frac{\zeta_1}{\sqrt{b}}, \end{aligned}$$

et la fonction inconnue ψ par

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \psi \left(u + \frac{\xi}{\sqrt{b}}, v + \frac{\eta}{\sqrt{b}}, w + \frac{\zeta}{\sqrt{b}} \right).$$

On trouve dans ces conditions

$$I = \varphi k + I_* - I^* - I_*^* = - \frac{2b^2}{\sigma^2 a^2} [\Phi]$$

en posant pour abrégé

$$\begin{aligned} I &= \iint |W| e^{-(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)} (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1) d\omega_1 ds, \\ k &= \iint [|W| e^{-(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)} d\omega_1 ds, \\ I_* &= \iint |W| e^{-(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)} \varphi_1 d\omega_1 ds, \\ I^* &= \iint |W| e^{-(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)} \varphi' d\omega_1 ds, \\ I_*^* &= \iint |W| e^{-(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)} \varphi'_1 d\omega_1 ds. \end{aligned}$$

Calculons successivement ces quatre intégrales.

Remarquons tout d'abord que

$$\int |W| ds = 2\pi \sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2}.$$

Donc

$$k(\xi, \eta, \zeta) = 2\pi e^{-(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \int \sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2} e^{-(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)} d\omega_1$$

ou bien

$$k(\xi, \eta, \zeta) = 2\pi e^{-s} \int \sqrt{S + S_1 - 2P} e^{-s_1} d\omega_1,$$

en désignant par S , S_1 , P les expressions

$$S = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad S_1 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \quad P = \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1.$$

Il est facile de voir que la fonction $k(\xi\eta\zeta)$ ne dépend que de S . De même, l'intégrale I_* prend la forme simple

$$I_* = 2\pi \int \sqrt{S + S_1 - 2P} e^{-S - S_1} \varphi_1 d\omega_1.$$

Les intégrales I^* et I_* sont égales entre elles. Par des calculs simples, mais fastidieux, on peut montrer que

$$I^* = I_* = \int K^*(\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1) \varphi_1 d\omega_1,$$

en désignant par K^* l'expression

$$K^* = \frac{2\pi}{\sqrt{S + S_1 - 2P}} e^{-\frac{(S_1 - P)^2}{S + S_1 - 2P}}.$$

On trouve donc, en fin de compte, l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce :

$$(8) \quad k\varphi + \int K(\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1) \varphi_1 d\omega_1 = -\frac{2b^2}{a^2\sigma^2} [\Phi],$$

en désignant par K le noyau

$$(9) \quad K(\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 2\pi e^{-(S+S_1)} \sqrt{S + S_1 - 2P} \left\{ 1 - \frac{2e^{-\frac{P^2 - SS_1}{S + S_1 - 2P}}}{S + S_1 - 2P} \right\}.$$

Ce noyau est une fonction symétrique de deux systèmes de variables $(\xi\eta\zeta)$ et $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$. Il devient infini de l'ordre 1 pour $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$, $\zeta = \zeta_1$. Donc, la théorie ordinaire des équations intégrales lui est applicable. On voit, d'autre part, que K ne dépend que de trois combinaisons de six variables :

$$K(\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1) = H(S, S_1, P).$$

En se servant de cette propriété, M. H. Hecke [13, 14] a démontré une suite de propositions intéressantes dont il sera question plus loin. D'après un de ses théorèmes, le noyau K n'a pas de valeurs

fondamentales dans l'intervalle $(0, 1)$, et toutes les valeurs fondamentales sont positives. Reste à examiner si l'unité est une valeur fondamentale. Dans ce but, multiplions l'équation intégrale homogène

$$I = k\varphi + \int K(\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1)\varphi_1 d\omega_1 = 0$$

par $\varphi d\omega$ et intégrons dans tout l'espace des vitesses.

En revenant à la forme primitive de I , on trouve sans peine :

$$\int \int \int |W| e^{-S-S_1} (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1)^2 d\omega d\omega_1 ds = 0.$$

Donc, les fonctions fondamentales, s'il y en a, doivent vérifier l'équation

$$\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1 = 0,$$

et cette équation a cinq solutions linéairement indépendantes :

$$(10) \quad \psi^{(1)} = 1, \quad \psi^{(2)} = \xi, \quad \psi^{(3)} = \eta, \quad \psi^{(4)} = \zeta, \quad \psi^{(5)} = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

et n'a que celles-là.

Donc, d'après le troisième théorème de Fredholm, la fonction connue de l'équation (8) doit vérifier cinq conditions d'orthogonalité

$$(11) \quad \int \psi^{(i)}[\Phi] d\omega = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Ces conditions sont équivalentes à : 1^o équation de continuité; 2^o-4^o équations hydrodynamiques; 5^o équation d'état d'un gaz parfait.

En effet, l'équation

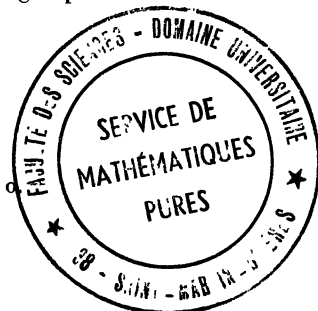
$$\int \psi^{(1)}[\Phi] d\omega = 0$$

se réduit à

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a}{b^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{au}{b^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{av}{b^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{aw}{b^{\frac{3}{2}}} \right) = 0$$

Les équations

$$\int \psi^{(2)}[\Phi] d\omega = 0, \quad \int \psi^{(3)}[\Phi] d\omega = 0, \quad \int \psi^{(4)}[\Phi] d\omega = 0$$



donnent

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} X - \frac{b^{\frac{3}{2}}}{2a} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{b^{\frac{5}{2}}} \right) &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ Y - \frac{b^{\frac{3}{2}}}{2a} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a}{b^{\frac{5}{2}}} \right) &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ Z - \frac{b^{\frac{3}{2}}}{2a} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{a}{b^{\frac{5}{2}}} \right) &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

On peut donc poser

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{pression} = p &= H \frac{a}{b^{\frac{5}{2}}}, \\ \text{densité} = \rho &= 2H \frac{a}{b^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \right.$$

H étant une constante.

Occupons-nous maintenant de la cinquième condition :

$$\int \psi^{(5)}[\Phi] d\omega = 0.$$

Cette condition se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{b^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{b^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{b^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w}{b^{\frac{3}{2}}} \right) = 0.$$

ou bien, tenant compte de l'équation (12), à

$$(15) \quad \frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + w \frac{\partial a}{\partial z} = 0,$$

ce qui signifie que la fonction a reste constante pour un élément fluide en mouvement. D'autre part, l'élimination de b des équations (14) donne

$$p = H^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{5}{3}} a^{-\frac{2}{3}} \rho^{\frac{5}{3}},$$

ce qui veut dire que le processus est adiabatique et que le gaz est monoatomique, chaque atome étant comparable à une sphère parfaite. Cette propriété du gaz obtenue en première approximation ne peut évidemment pas être changée par les approximations suivantes.

Quelques mots sont encore nécessaires sur l'interprétation des fonctions a , b . En éliminant a des équations (14), on trouve

$$p = \rho \frac{1}{2b}.$$

En comparant cette équation à celle bien connue qui relie la pression p , la densité ρ et la température T des gaz parfaits

$$p = R \rho T,$$

on trouve la relation simple entre b et T :

$$T = \frac{1}{2Rb}.$$

Les équations différentielles (12). (13). (15) jointes aux conditions initiales et limites permettent de déterminer complètement les fonctions a , b , u , v , w . Désignons ces valeurs par a^* , b^* , u^* , v^* , w^* , et la valeur correspondante de Φ par Φ^* . La première approximation Φ^* est déterminée, et nous passons à la détermination de la seconde approximation.

L'équation (6') devient

$$\frac{1}{4} \sigma^2 \int \int |W| \Phi^* \Phi_i^* (\psi_i' + \psi' - \psi_i - \psi) d\omega_1 ds = \frac{1}{2} [\Phi^*].$$

Soit $\psi^{(0)}$ une solution particulière de cette équation intégrale vérifiant les conditions d'orthogonalité

$$\int \psi^{(i)} \psi^{(0)} \Phi^* d\omega = 0 \quad (i = 1, 2, 5, 4, 5)$$

et $\Psi^{(0)} = \Phi^* \psi^{(0)}$, la solution bien définie de l'équation intégrale

$$\int \int [\Phi^*, \Psi] d\omega_1 ds = \frac{1}{2} [\Phi^*]$$

vérifiant les conditions analogues

$$\int \psi^{(i)} \Psi^{(0)} d\omega = 0.$$

La solution la plus générale de la même équation aura la forme

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \Phi^* \sum_{k=1}^5 c^{(k)} \psi^{(k)}.$$

Les coefficients $c^{(k)}$ sont des fonctions pour le moment inconnues de x, y, z, t .

Passons maintenant à l'équation

$$(7) \quad \int \int [\Phi^*, X] d\omega_1 ds = \frac{1}{2} [\Psi] - \frac{1}{2} \int \int [\Psi^*, \Psi] d\omega_1 ds.$$

En remplaçant X par $\chi \Phi^*$, on obtient pour χ une équation intégrale linéaire du même type que (8), avec le même noyau et les mêmes fonctions fondamentales $\psi^{(i)}$. Donc, on a encore des conditions d'orthogonalité

$$\int \psi^{(i)} [\Psi] d\omega - \int \int \int \psi^{(i)} [\Psi^*, \Psi] d\omega d\omega_1 ds = 0.$$

Or, quelles que soient les fonctions L, M, N , elles vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int \int \int L[M, N] d\omega d\omega_1 ds &= \int \int \int L_1[M, N] d\omega d\omega_1 ds \\ &= - \int \int \int L' [M, N] d\omega d\omega_1 ds \\ &= - \int \int \int L'_1 [M, N] d\omega d\omega_1 ds \\ &= \frac{1}{4} \int \int \int (L + L_1 - L' - L'_1) [M, N] d\omega d\omega_1 ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\int \int \int \psi^{(i)} [\Psi^*, \Psi] d\omega d\omega_1 ds \\ &= \frac{1}{4} \int \int \int [\psi^{(i)} + \psi^{(i)}_1 - \psi'^{(i)} - \psi'^{(i)}_1] [\Psi^*, \Psi] d\omega d\omega_1 ds = 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\int \psi^{(i)} [\Psi] d\omega = 0$$

ou bien

$$\int \psi^{(i)} \left[\Psi^{(0)} + \Phi^* \sum_{k=1}^5 c^{(k)} \psi^{(k)} \right] d\omega = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Donc, les coefficients inconnus $c^{(k)}$ vérifient cinq équations différentielles linéaires. On peut en déterminer sans ambiguïté ces coefficients si l'on connaît leurs valeurs initiales $c^{(k)}(x, y, z, t_0)$, ou bien les valeurs initiales des fonctions

$$\int \psi^{(i)} \Psi d\omega \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

De cette façon, Ψ est complètement déterminé. Désignons sa valeur par Ψ^* et par $X^{(0)}$ la solution de l'équation

$$(7') \quad \int \int [\Phi^*, X] d\omega_1 ds = \frac{1}{2} [\Psi^*] - \frac{1}{2} \int \int [\Psi^*, \Psi^*] d\omega_1 ds$$

vérifiant les conditions d'orthogonalité

$$\int \psi^{(i)} X^{(0)} d\omega = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

La solution générale de l'équation (7')

$$X = X^{(0)} + \Phi^* \sum_{k=1}^5 d^{(k)} \psi^{(k)}$$

contient cinq coefficients inconnus $d^{(k)}(x, y, z, t)$ qu'on peut déterminer sans ambiguïté lorsque sont connues les valeurs initiales des fonctions $\int \psi^{(i)} X d\omega$, ce qui nous donne la fonction X^* . En continuant de cette façon on obtient en fin de compte la solution

$$F^* = \frac{\Phi^*}{\lambda} + \Psi^* + \lambda X^* + \dots$$

qui dépend en fait de cinq fonctions arbitraires $\Lambda_i(x, y, z)$ égales aux valeurs initiales des fonctions $\int \psi^{(i)} F d\omega$. Il est donc possible de déterminer l'état stable d'un gaz lorsque l'on connaît au moment $t = t_0$ sa densité, sa température et les composantes de vitesse u, v, w en chaque point de l'espace. Nous avons vu que la première approximation correspondait au mouvement stable d'un gaz monoatomique parfait se trouvant à l'état adiabatique. Dans la pensée de M. D. Hilbert, la deuxième approximation devait compléter les équations (12), (13), (15) en y introduisant les termes correspondant au frottement, à la conductibilité de chaleur, etc.

Cette méthode devait conduire à des expressions explicites des coefficients de frottement, de conductibilité thermique, etc. Il faut avouer que ces espoirs ne sont pas encore réalisés et que les coefficients $c^{(k)}$ et la solution particulière $\psi^{(0)}$ de l'équation intégrale (8) restent encore à calculer.

§. Recherches de MM. E. Hecke et D. Enskog. — M. E. Hecke

[13-14], qui a tant contribué au travail de M. D. Hilbert [15-16], a publié deux Mémoires contenant des résultats intéressants sur l'équation intégrale (8). Il montre, en particulier, qu'on peut réduire la résolution de cette équation à la résolution d'une suite d'équations intégrales de Fredholm à une variable. Posons, dans ce but,

$$\begin{aligned} S = r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad S_1 = r_1^2, \quad \xi = rf, \quad \eta = rg, \quad \zeta = rh, \\ P = rr_1(ff_1 + gg_1 + hh_1) = rr_1 \cos \theta. \end{aligned}$$

L'expression k ne dépend que de r ; le noyau K est une fonction de $r, r_1, \cos \theta$, que nous écrirons sous la forme $L(r, r_1, \cos \theta)$. Supposons que cette fonction soit développable en une série de fonctions sphériques :

$$L(r, r_1, \cos \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(r, r_1) P_k(\cos \theta).$$

On a, évidemment,

$$L_k(r, r_1) = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} L(r, r_1, u) P_k(u) du.$$

Supposons, d'autre part, que la fonction connue, ainsi que $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ soient représentables sous la même forme

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum \omega_k(r) Y_k(f, g, h), \\ \text{fonction connue} &= \sum \varepsilon_k(r) Y_k(f, g, h), \end{aligned}$$

$Y_k(f, g, h)$ étant une fonction sphérique d'ordre k . Dans ces conditions, l'équation intégrale

$$k(r)\varphi + \int L(r, r_1, \cos \theta) \varphi_1 d\omega_1 = \sum \varepsilon_k(r) Y_k(f, g, h)$$

prend la forme

$$\begin{aligned} &k(r) \sum_k \omega_k(r) Y_k(f, g, h) \\ &+ \sum_k \sum_n \int \int L_k(r, r_1) \omega_n(r_1) r_1^2 P_k(\cos \theta) Y_n(f_1, g_1, h_1) dr_1 ds_1 \\ &= \sum_k \varepsilon_k(r) Y_k(f, g, h). \end{aligned}$$

Or, l'intégrale $\int P_k(\cos \theta) Y_n(f_1, g_1, h_1) ds_1$, étendue à la surface de

la sphère-unité est nulle pour $k \neq n$ et égale à $\frac{4\pi}{2k+1} Y_k(f, g, k)$ pour $k = n$. Donc

$$\begin{aligned} & k(r) \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(r) Y_k(f, g, h) \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2k+1} Y_k(f, g, h) \int L_k(r, r_1) \omega_k(r_1) r_1^2 dr_1 \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(r) Y_k(f, g, h). \end{aligned}$$

En supposant que les fonctions sphériques soient les mêmes à droite et à gauche dans cette équation, on a une suite d'équations intégrales à une variable pour déterminer les coefficients $\omega_k(r)$:

$$(16) \quad k(r) \omega_k(r) + \frac{4\pi}{2k+1} \int_0^{\infty} L_k(r, r_1) \omega_k(r_1) r_1^2 dr_1 = \varepsilon_k(r).$$

Les noyaux partiels $L_k(r, r_1)$ sont évidemment symétriques, et l'étude des équations intégrales (16) ne présente pas de difficultés théoriques. Malheureusement, les difficultés pratiques sont énormes, et c'est en essayant de les surmonter que M. D. Enskog [7-8] fut amené à une nouvelle méthode de résolution des équations intégrales.

Soit

$$I(\varphi) = k(s) \varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s)$$

une équation intégrale. Supposons la fonction $K(s, t)$ symétrique et la fonction $k(s)$ toujours positive.

Construisons l'expression

$$\int_a^b \varphi I(\varphi) ds = \int_a^b k(s) \varphi^2(s) ds + \int_a^b \int_a^b \varphi(s) K(s, t) \varphi(t) dt$$

et supposons, quelle que soit la fonction φ , l'intégrale

$$\int_a^b \varphi I(\varphi) ds$$

toujours positive. Soit, d'autre part, $\{u_n(s)\}$ un système de fonc-

tions linéairement indépendantes tel, que chaque fonction continue dans l'intervalle (a, b) peut être approchée avec l'exactitude désirée par une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions $u_n(s)$. Normalisons ce système en lui substituant un autre $\{\nu_n(s)\}$ défini par les relations

$$\begin{aligned} \nu_n(s) &= A_{n1} u_1(s) + A_{n2} u_2(s) + \dots + A_{nn} u_n(s), \\ \int_a^b \nu_n I(\nu_m) ds &= \\ &= \int_a^b k(s) \nu_n \nu_m ds + \int_a^b \int_a^b \nu_n(s) K(s, t) \nu_m(t) dt = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ 1 & (n = m). \end{cases} \end{aligned}$$

On voit que ces fonctions peuvent être déterminées par les opérations successives

$$\begin{aligned} \nu_1(s) &= A_{11} u_1(s), & \int_a^b \nu_1 I(\nu_1) ds &= 1, \\ \nu_2(s) &= A_{21} u_1(s) + A_{22} u_2(s), \\ \int_a^b \nu_1 I(\nu_2) ds &= 0, & \int_a^b \nu_2 I(\nu_2) ds &= 1, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

sans aucune ambiguïté.

Soit $g(s)$ une fonction continue. Construisons un système de coefficients généralisés de Fourier

$$c_k = \int_a^b g(s) I(\nu_k) ds = \int_a^b \nu_k I(g) ds.$$

On peut représenter formellement la fonction $g(s)$ par la série généralisée de Fourier $\sum c_k \nu_k(s)$. Ces coefficients vérifient le théorème généralisé de Parseval

$$\int_a^b g I(g) ds = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

De même, s'il y a deux fonctions continues

$$g(s) \sim \sum c_k \nu_k(s), \quad h(s) \sim \sum a_k \nu_k(s),$$

on a

$$\int_a^b g(s) I(h) ds = \int_a^b h(s) I(g) ds = \sum c_k a_k.$$

Ceci posé, déterminons pour la fonction inconnue $\varphi(s) \sim \sum a_k \nu_k(s)$ les coefficients de Fourier généralisés. On trouve sans peine

$$a_k = \int_a^b \varphi(s) I(\nu_k) ds = \int_a^b \nu_k(s) I(\varphi) ds = \int_a^b \nu_k(s) f(s) ds,$$

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(s) \int_a^b \nu_k(u) f(u) du.$$

Cette méthode est des plus utiles pour la résolution approchée d'équations intégrales, mais en ce qui concerne la théorie cinétique des gaz, les calculs n'ont jamais été poussés jusqu'au bout, et l'on continue de recourir à d'autres procédés de calcul pour obtenir l'expression approchée de la fonction de répartition des vitesses.

6. Problème généralisé. — Supposons que le champ de forces se compose de deux parties :

1° Champ extérieur X, Y, Z indépendant de F ;

2° Champ A, B, C provenant du gaz lui-même comme résultat d'actions individuelles des molécules. Dans le cas de gravitation newtonienne on a

$$A = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

$$U = \int \int \frac{F d\omega_1 d\omega_1}{R},$$

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

L'équation de Boltzmann prend la forme

$$\int \int [F, F] d\omega_1 ds = [F]$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + X \frac{\partial F}{\partial \xi} + Y \frac{\partial F}{\partial \eta} + Z \frac{\partial F}{\partial \zeta}$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} \int \int \frac{F d\omega_1 d\omega_1}{R}$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} \int \int \frac{F d\omega_1 d\omega_1}{R} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial z} \int \int \frac{F d\omega_1 d\omega_1}{R}.$$

Donc, en remplaçant F par le développement,

$$F = \frac{\Phi}{\lambda} + \Psi + \lambda X + \dots$$

on obtient une suite d'équations intégrô-différentielles un peu différentes de celles de M. D. Hilbert :

$$\begin{aligned} \int \int [\Phi, \Phi] d\omega_1 ds &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} \int \int \frac{\Phi d\omega_1 d\omega_1}{R} \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} \int \int \frac{\Phi d\omega_1 d\omega_1}{R} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial z} \int \int \frac{\Phi d\omega_1 d\omega_1}{R}, \\ \int \int [\Phi, \Psi] d\omega_1 ds &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial z} + X \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + Y \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + Z \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right. \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} \int \int \frac{\Psi d\omega_1 d\omega_1}{R} \\ &\left. + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} \int \int \frac{\Psi d\omega_1 d\omega_1}{R} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial z} \int \int \frac{\Psi d\omega_1 d\omega_1}{R} \right], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

La première de ces équations permet de déterminer la première approximation Φ ; il y entrera quelques fonctions de x, y, z, t qu'il faut déterminer et qui caractérisent l'état macroscopique du milieu. En substituant Φ dans la seconde équation on obtient une équation intégrale linéaire permettant de déterminer la fonction Ψ . La résolution, même approchée, de ces équations est beaucoup plus laborieuse que celle des équations (5), (6), (7).

IV. — ÉQUATION INTÉGRALE DE KUNDT ET WARBURG.

1. Après le problème très général du chapitre précédent nous allons considérer un problème particulier étudié en 1875 par les physiciens allemands Kundt et Warburg [25] et repris depuis par plusieurs auteurs. Il s'agit d'une couche de gaz raréfié limitée par deux parois planes parallèles. Ces parois se trouvent dans des conditions physiques et mécaniques différentes. Il faut étudier le régime stationnaire du gaz qui s'établit en fin de compte.

Supposons pour fixer les idées que l'une des parois est immobile et l'autre se déplace dans son plan avec une vitesse constante. Choisissons les axes de coordonnées comme il suit : prenons comme centre un point quelconque O de la paroi immobile; l'axe X sera la droite normale aux parois et passant par O; l'axe Z sera la droite passant par O et parallèle à la vitesse de la paroi mobile; l'axe Y sera la

droite passant par O et formant avec les autres axes un trièdre normal. Supposons pour simplifier les choses que la vitesse de toutes les molécules soit égale à leur vitesse moyenne c . Soient : l , parcours libre moyen; ν , le nombre de molécules dans un centimètre cube; ρ , densité du gaz; μ , masse d'une molécule; $d\tau$, l'élément de volume (en supposant naturellement toutes les dimensions de cet élément inférieures à l); dN , le nombre de chocs par seconde dans $d\tau$; $w(x)$, la vitesse du gaz superposée à l'agitation calorique; h , distance entre les parois; B , vitesse de la paroi mobile.

Prenons un plan x parallèle aux parois et dans ce plan un élément plan dS . Soit d'autre part $d\tau$ un élément de volume situé à distance u de la paroi immobile entre le plan x et la paroi mobile. On peut déterminer la situation de $d\tau$ par rapport à dS , soit en coordonnées polaires (r, φ, ψ); r , étant la distance ($dS, d\tau$); φ , l'angle entre r et l'axe x et ψ , l'angle de position du plan ($dS, d\tau$, droite passant par dS et parallèle à l'axe x), soit en coordonnées mixtes (φ, ψ, u); on a évidemment $u = x + r \cos \varphi$, et $d\tau = \frac{(u-x)^2 \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} du d\varphi d\psi$. Seules les molécules quittant l'élément $d\tau$ par suite des chocs nous intéressent, les autres ne faisant que passer par cet élément. Le nombre de ces molécules dN est égal à $\frac{c\nu}{l} d\tau$ par seconde. De ces molécules $\frac{c\nu}{4\pi l r^2} \cos \varphi d\tau dS$ se dirigent vers dS mais il n'y a que $\frac{e^{-\frac{r}{l}} \cos \varphi c\nu d\tau dS}{4\pi l r^2}$ qui arrivent sans subir de chocs jusqu'à dS . Elles y apportent une quantité de mouvement égale à

$$\frac{w(u)\mu c\nu e^{-\frac{r}{l}} \cos \varphi d\tau dS}{4\pi l r^2},$$

et pour déterminer la part qu'elles apportent à la vitesse moyenne au point ($x, 0, 0$) il faut diviser cette quantité de mouvement par

$$\varphi c \cos \varphi dS = \nu \mu c \cos \varphi dS.$$

On obtient de cette façon

$$\frac{w(u)\mu c\nu e^{-\frac{r}{l}} \cos \varphi d\tau dS}{4\pi l r^2 \nu \mu c \cos \varphi dS} = \frac{e^{-\frac{u-x}{l \cos \varphi}} w(u) \sin \varphi du d\varphi d\psi}{4\pi l \cos \varphi}.$$

Intégrons cette expression dans tout l'espace compris entre le plan x et la paroi mobile : nous obtenons la partie de vitesse moyenne $\bar{\omega}(x)$ due à l'apport des molécules venant de cette partie de l'espace. Cette intégrale est égale à

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1(x) &= \frac{1}{4\pi l} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi d\varphi \int_x^h \frac{e^{-\frac{u-x}{l \cos \varphi}} \omega(u) \sin \varphi du}{\cos \varphi} \\ &= \frac{1}{2l} \int_x^h \omega(u) du \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{\kappa(u-x)}{l}} dk}{k}.\end{aligned}$$

On obtient de la même façon l'apport des molécules venant de l'espace compris entre la paroi immobile et le plan x

$$\bar{\omega}_2(x) = \frac{1}{2l} \int_0^x \omega(u) du \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{k(x-u)}{l}} dk}{k}.$$

Il faut encore calculer l'apport des molécules renvoyées par des parois. Étant donnée la structure superficielle des corps solides on peut supposer qu'une partie seulement des molécules entrant en choc avec les parois s'envole immédiatement sans avoir fait à l'intérieur de la couche superficielle un parcours plus ou moins long et compliqué.

Schématiquement on peut comparer la surface d'un corps solide à un terrain creusé de puits cylindriques suffisamment profonds. Les molécules qui viennent heurter les interstices repartent sans avoir pris la vitesse de la paroi. Les molécules qui heurtent les parois cylindriques des puits en ressortent ayant acquis en moyenne la vitesse de translation des parois.

On peut caractériser par un certain nombre α le rapport entre la surface occupée par les interstices et la surface totale renvoyant les molécules après les chocs.

Il faut aussi tenir compte du phénomène de réflexion multiple des molécules, ainsi que de l'adsorption indépendante de la rugosité des parois. Nous n'allons pas cependant introduire tous ces facteurs qui compliqueraient inutilement nos équations. Dans un Mémoire qui doit paraître prochainement, j'étudie les équations traduisant le phénomène de réflexion multiple des molécules.

Dans le cas le plus simple où toutes les molécules heurtant les parois sont pour un certain temps absorbées et reviennent ayant acquis en moyenne la vitesse de la paroi on peut supposer fictivement

que tout l'espace de l'autre côté d'une paroi soit rempli du gaz ayant la même vitesse moyenne que la paroi. Alors, des considérations analogues à celles ayant servi pour le calcul de $\bar{w}_1(x)$ et $\bar{w}_2(x)$ permettent de déterminer l'apport $\bar{w}_m(x)$ des molécules venant de la paroi mobile

$$\bar{w}_m(x) = \frac{B}{2} \int_1^\infty e^{-\frac{k(h-x)}{l}} \frac{dk}{k^2}.$$

L'apport analogue de la paroi immobile est nul.

Nous écrirons malgré cela l'équation intégrale définitive sous une forme plus générale :

$$\begin{aligned} w(x) = & \frac{1}{2l} \int_0^h w(u) du \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{k|x-u|}{l}}}{k} dk + \frac{\beta w(0)}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{kx}{l}}}{k^2} dk \\ & + \frac{\beta w(h)}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{k(h-x)}{l}}}{k^2} dk + \frac{B(1-\beta)}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{k(h-x)}{l}}}{k^2} dk. \end{aligned}$$

Le paramètre β peut être interprété comme action de la couche gazeuse très mince adhérente aux parois et jouant le rôle d'une *paroi* gazeuse.

Deux cas particuliers extrêmes sont à considérer :

1° $\beta = 0$; l'équation (1) prend la forme

$$(2) \quad w(x) = \frac{1}{2l} \int_0^h w(u) du \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{k|x-u|}{l}}}{k} dk + \frac{B}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{k(h-x)}{l}}}{k^2} dk.$$

2° $\beta = 1$; l'équation (1) prend la forme

$$\begin{aligned} (3) \quad w(x) = & \frac{1}{2l} \int_0^h w(u) du \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{k|x-u|}{l}}}{k} dk \\ & + \frac{w(0)}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{kx}{l}}}{k^2} dk + \frac{w(h)}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{k(h-x)}{l}}}{k^2} dx. \end{aligned}$$

Posons pour simplifier

$$\frac{1}{l} = \sigma, \quad u_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-kx}}{k^{n+1}} dk.$$

On peut appeler le paramètre σ résistance à la pénétration. Les

équations (1), (2), (3) deviennent

$$(1') \quad \begin{aligned} \omega(x) = & \frac{\sigma}{2} \int_0^h \omega(u) u_0(\sigma | x - u |) du + \frac{\beta \omega(0)}{2} u_1(\sigma x) \\ & + \frac{\beta \omega(h)}{2} u_1(\sigma h - \sigma x) + \frac{B(1-\beta)}{2} u_1(\sigma h - \sigma x), \end{aligned}$$

$$(2') \quad \omega(x) = \frac{\sigma}{2} \int_0^h \omega(u) u_0(\sigma | x - u |) du + \frac{B}{2} u_1(\sigma h - \sigma x),$$

$$(3') \quad \begin{aligned} \omega(x) = & \frac{\sigma}{2} \int_0^h \omega(u) u_0(\sigma | x - u |) du \\ & + \frac{\omega(0)}{2} u_1(\sigma x) + \frac{\omega(h)}{2} u_1(\sigma h - \sigma x). \end{aligned}$$

L'équation (1) ou (1') correspond au cas étudié par M. Smoluchowski [34]. L'équation (2') diffère de celle obtenue par MM. Kundt et Warburg [25]

$$(4) \quad \omega(x) = \frac{B}{2} u_1(\sigma x) + \frac{\sigma}{2} \int_0^\infty u_0(\sigma | x - u |) \omega(u) du$$

en ce que ces auteurs supposaient $h = \infty$ et étudiaient les phénomènes qui ont lieu dans le voisinage de la paroi mobile. Dans leur idée la résolution de cette équation devrait être plus facile que celle de (2'). En fait, cette simplification n'est qu'apparente parce que l'intervalle infini comporte des difficultés d'ordre analytique.

2. Point de vue macroscopique. — Si l'on part des considérations macroscopiques habituelles [20], on doit appliquer à ce problème les équations hydrodynamiques de Navier. Soient $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ les composantes de vitesse du gaz au régime stationnaire. Il est facile de voir que

$$u(x, y, z) = v(x, y, z) = 0,$$

et la troisième composante w ne dépend que de x . Le champ extérieur est nul. La pression p , la densité ρ sont les fonctions de x . Dans ces conditions les équations de Navier se ramènent à

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

ce qui donne pour w la loi linéaire

$$w = ax + b = \frac{Bx}{h}.$$

Les expériences de MM. P. P. Lasareff [26] et A. Timiriazeff [35] montrent une allure toute différente de la courbe. La vitesse $w(0)$ du gaz au voisinage immédiat de la paroi immobile n'est pas du tout nulle; de même la vitesse $w(h)$ est toujours inférieure à B. La courbe expérimentale a les droites $x = 0$ et $x = h$ comme tangentes, de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow 0} w'(x) \sim \infty, \quad \lim_{x \rightarrow h} w'(x) \sim \infty.$$

Le point $x = \frac{h}{2}$ est un point de flexion de la courbe. Ces propriétés n'appartiennent pas à la loi linéaire; au contraire on les retrouve dans les solutions des équations (1) et (2). On verra d'autre part que la limite de $w(x)$ pour $\sigma \rightarrow \infty$, c'est-à-dire pour un gaz très dense, est égale à $\frac{B}{h}$. Donc, les équations du mouvement des fluides visqueux ne sont valables que dans le cas de parcours libre moyen très petit.

3. Étude du noyau. — Le noyau

$$K(x, t) = \frac{\sigma}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma|x-t|} dk}{k}$$

est une variété du logarithme intégral. On sait que cette fonction a pour $x = t$ une singularité logarithmique; il est donc nécessaire de former le noyau itéré

$$\begin{aligned} K_2(x, t) = & \frac{\sigma}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma|x-t|}}{k^2} \log \frac{k+1}{k-1} dk \\ & - \frac{\sigma}{4} \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{d\tau dk}{ak(a+k)} [e^{-k\sigma x - a\sigma t} + e^{-k\sigma(h-x) - a\sigma(h-t)}]. \end{aligned}$$

C'est une fonction bornée, et l'on a

$$K_2(x, t) \leq \sigma \log 2 - \frac{\sigma}{2} \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{h\sigma(a+k)}{2}} d\tau dk}{ak(a+k)} = \sigma A\left(\frac{h\sigma}{2}\right),$$

Posons

$$\alpha(\sigma x) = \int_0^h K(x, t) dt = 1 - \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma x} dk}{k^2} - \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(h-x)} dk}{k^2}.$$

On voit facilement que

$$K_n(x, t) \leq \sigma A\left(\frac{h\sigma}{2}\right) \left[\alpha\left(\frac{h\sigma}{2}\right)\right]^{n-3} \alpha(\sigma x) \leq \sigma A\left(\frac{h\sigma}{2}\right) \left[\alpha\left(\frac{h\sigma}{2}\right)\right]^{n-2}.$$

On obtient ainsi pour la série résolvante

$$R(\lambda; x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t),$$

la fonction majorante

$$R(\lambda; x, t) \leq K(x, t) + \lambda K_2(x, t) + \lambda^2 \sigma \frac{A\left(\frac{h\sigma}{2}\right) \sqrt{\alpha(\sigma x) \alpha(\sigma t)}}{1 - \lambda \alpha\left(\frac{h\sigma}{2}\right)}.$$

Par conséquent, la série résolvante converge si l'on a

$$|\lambda| < \frac{1}{\alpha\left(\frac{h\sigma}{2}\right)}.$$

Il est évident que la première valeur fondamentale vérifie l'inégalité

$$|\lambda_1| > \frac{1}{\alpha\left(\frac{h\sigma}{2}\right)} > 1.$$

Or, dans les équations (1), (2), (3), $\lambda = 1$; il est donc possible de se servir de la méthode d'approximations successives.

Démontrons encore une propriété générale du noyau résolvant [19]. Soit $K(|x - t|)$ un noyau qui ne dépend que de la distance de deux points. Écrivons les équations intégrales du noyau résolvant

$$R(\lambda; x, z) = K(|x - z|) + \lambda \int_0^h K(|x - t|) R(\lambda; t, z) dt,$$

$$R(\lambda; x, z) = K(|x - z|) + \lambda \int_0^h R(\lambda; x, t) K(|t - z|) dt.$$

On voit immédiatement que

$$R(\lambda; h - x, h - z) = R(\lambda; x, z)$$

D'autre part, en différentiant la première de ces équations par rapport à x on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\lambda; x, z)}{\partial x} &= \frac{\partial K(|x - z|)}{\partial x} - \lambda K(h - x) R(\lambda; h, z) + \lambda K(x) R(\lambda; 0, z) \\ &\quad + \lambda \int_0^h K(|x - t|) \frac{\partial R(\lambda; t, z)}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Différentions ensuite la même équation par rapport à z :

$$\frac{\partial R(\lambda; x, z)}{\partial z} = \frac{\partial K(|x - z|)}{\partial z} + \lambda \int_0^h K(|x - t|) \frac{\partial R(\lambda; t, z)}{\partial z} dt.$$

En ajoutant ces formules on trouve l'équation intégrale

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R(\lambda; x, z)}{\partial x} + \frac{\partial R(\lambda; x, z)}{\partial z} \\ &= -\lambda K(h, x) R(\lambda; h, z) + \lambda K(0, x) R(\lambda; 0, z) \\ &+ \lambda \int_0^h K(|x - t|) \left[\frac{\partial R(\lambda; t, z)}{\partial t} + \frac{\partial R(\lambda; t, z)}{\partial z} \right] dt, \end{aligned}$$

dont la résolution par rapport à $\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}$ donne l'équation fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} (5) \quad & \frac{\partial R(\lambda; x, z)}{\partial x} + \frac{\partial R(\lambda; x, z)}{\partial z} \\ &= \lambda R(\lambda; x, 0) R(\lambda; z, 0) - \lambda R(\lambda; x, h) R(\lambda; z, h). \end{aligned}$$

Il est utile de connaître les valeurs asymptotiques des fonctions et des valeurs fondamentales [22]. Composons dans ce but le noyau $K(x, t)$ avec les fonctions trigonométriques, on voit aisément que

$$\begin{aligned} \sin \mu x &= \frac{\mu}{\sigma \operatorname{arc tang} \frac{\mu}{\sigma}} \int_0^h K(x, t) \sin \mu t dt \\ &+ \frac{\mu^2}{2 \operatorname{arc tang} \frac{\mu}{\sigma}} \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma x} dk}{k(\mu^2 + \sigma^2 k^2)} \\ &- \frac{\mu}{2 \operatorname{arc tang} \frac{\mu}{\sigma}} \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(h-x)} (k\sigma \sin \mu h + \mu \cos \mu h)}{k(\mu^2 + \sigma^2 k^2)} dk, \\ \cos \mu x &= \frac{\mu}{\sigma \operatorname{arc tang} \frac{\mu}{\sigma}} \int_0^h K(x, t) \cos \mu t dt \\ &- \frac{\mu\sigma}{2 \operatorname{arc tang} \frac{\mu}{\sigma}} \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma x} dk}{\mu^2 + \sigma^2 k^2} \\ &+ \frac{\mu}{2 \operatorname{arc tang} \frac{\mu}{\sigma}} \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(h-x)} (k\sigma \cos \mu h - \mu \sin \mu h)}{k(\mu^2 + \sigma^2 k^2)} dk. \end{aligned}$$

Posons $\sin \mu h = 0$, $\mu = \frac{n\pi}{h}$ dans la dernière de ces formules. Les deux derniers termes de la partie droite tendent vers zéro pour $n \rightarrow \infty$. On obtient donc pour n suffisamment grand

$$\lambda_n \sim \frac{n\pi}{\sigma h \operatorname{arc tang} \frac{n\pi}{\sigma h}}, \quad \varphi_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{h}} \cos \frac{n\pi x}{h}.$$

On voit ainsi que pour $h \rightarrow \infty$ l'équation (1) appartient bien au type d'équations intégrales singulières de Lalesco.

4. Résolution de l'équation (1). — Démontrons d'abord que

$$(6) \quad w(x) + w(h-x) = B.$$

On a en effet

$$\begin{aligned} w(h-x) &= \frac{\sigma}{2} \int_0^h w(h-u) u_0(\sigma|x-u|) du \\ &\quad + \frac{\beta w(0)}{2} u_1(\sigma h - \sigma x) + \frac{\beta w(h)}{2} u_1(\sigma x) + \frac{B(1-\beta)}{2} u_1(\sigma x). \end{aligned}$$

En ajoutant cette équation à (1) on trouve

$$\begin{aligned} w(h-x) + w(x) &= \frac{\sigma}{2} \int_0^h u_0(\sigma|x-u|) [w(h-u) + w(u)] du \\ &\quad + \frac{1}{2} [u_1(\sigma h - \sigma x) + u_1(\sigma x)] \\ &\quad \times [\beta w(0) + \beta w(h) + B(1-\beta)]. \end{aligned}$$

Remplaçons $w(h-x) + w(x)$ et $w(h) + w(0)$ par B ; on a

$$B = B - \frac{B}{2} [u_1(\sigma h - \sigma x) + u_1(\sigma x)] + \frac{B}{2} [u_1(\sigma h - \sigma x) + u_1(\sigma x)].$$

La propriété (6) est démontrée.

La différentiation de l'équation (1) nous donne, en tenant compte de (6),

$$(7) \quad w'(x) = \int_0^h K(x, t) w'(t) dt + (1-\beta) w(0) [K(x, 0) + K(x, h)].$$

La résolution de cette équation intégrale est facile; on a

$$\omega'(x) = (1 - \beta) \omega(0) [R(1; x, 0) + R(1; x, h)].$$

Donc

$$\omega(x) = \omega(0) + \omega(0)(1 - \beta) \left[\int_0^x R(1; t, 0) dt + \int_0^x R(1; t, h) dt \right].$$

Pour $x = \frac{h}{2}$,

$$\omega\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{B}{2} = \omega(0) + \omega(0)(1 - \beta) \int_0^h R(1; t, 0) dt.$$

Donc

$$(8) \quad \omega(0) = \frac{B}{2 \left[1 + (1 - \beta) \int_0^h R(1; t, 0) dt \right]},$$

et la solution prend la forme

$$(9) \quad \omega(x) = \frac{B}{2} \frac{1 + (1 - \beta) \int_0^x R(1; t, 0) dt + (1 - \beta) \int_0^x R(1; t, h) dt}{1 + (1 - \beta) \int_0^h R(1; t, 0) dt},$$

$$(10) \quad \omega'(x) = \frac{B(1 - \beta) [R(1; x, 0) + R(1; x, h)]}{2 \left[1 + (1 - \beta) \int_0^h R(1; t, 0) dt \right]}.$$

Ces formules permettent de montrer que la fonction calculée $\omega(x)$ jouit des mêmes propriétés que la fonction expérimentale :

1° $\omega(x)$ est symétrique par rapport au point $\left(\frac{h}{2}, \frac{B}{2}\right)$;

2° $\omega(x)$ est une fonction croissante;

3° les droites $x = 0$, $x = h$ sont tangentes à cette courbe;

4° le point $\left(\frac{h}{2}, \frac{B}{2}\right)$ est un point de flexion;

5° la vitesse de la couche de gaz dans le voisinage immédiat des parois diffère de la vitesse des parois

$$\omega(0) > 0, \quad \omega(h) < B.$$

Il y a donc un glissement d'origine moléculaire que la théorie

hydrodynamique ne laissait pas prévoir. Ainsi du point de vue qualitatif il y a un accord parfait entre la théorie et l'expérience.

Considérons encore deux cas particuliers. Posons dans les équations précédentes $\beta = 0$ et désignons par $\varphi(x)$ la valeur correspondante de $w(x)$. Les formules (8), (9), (10) deviennent

$$(11) \quad \varphi(0) = \frac{B}{2 \left[1 + \int_0^h R(1; t, 0) dt \right]},$$

$$(12) \quad \varphi(x) = \frac{B}{2} \frac{1 + \int_0^x R(1; t, 0) dt + \int_0^x R(1; t, h) dt}{1 + \int_0^h R(1; t, 0) dt},$$

$$(13) \quad \varphi'(x) = \frac{B}{2} \frac{R(1; x, 0) + R(1; h, 0)}{1 + \int_0^h R(1; t, 0) dt}.$$

La fonction $\varphi(x)$ a les mêmes propriétés que $w(x)$, et il est possible d'exprimer $w(x)$ par $\varphi(x)$:

$$(14) \quad w(x) = \frac{B\beta\varphi(0) + B(1-\beta)\varphi(x)}{B(1-\beta) + 2\beta\varphi(0)},$$

$$(15) \quad \dot{w}(0) = \frac{B\varphi(0)}{B - \beta[\varphi(h) - \varphi(0)]}.$$

Cette dernière formule montre que le glissement du gaz au voisinage de la paroi immobile augmente avec l'accroissement de β , et pour $\beta = 1$ ce glissement est égal à $\frac{B}{2}$; la formule (9) montre que dans ce cas $w(x)$ est constant et égal à $\frac{B}{2}$.

5. Approximations linéaires. — Revenons à l'équation (2') :

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{2} \int_0^h \varphi(u) u_0(\sigma|x-u|) du + \frac{B}{2} u_1(\sigma h - \sigma x)$$

et remplaçons la fonction $\varphi(x)$ par l'expression

$$\varphi(x) = \frac{B[1 + m\sigma x + mL_m(x)]}{h\sigma m + 2}.$$

La fonction $L_m(x)$ vérifie l'équation intégrale

$$L_m(x) = \int_0^h K(x, t) L_m(t) dt + \frac{1}{2} \left[u_2(\sigma x) - u_2(\sigma h - \sigma x) - \frac{u_1(\sigma x)}{m} + \frac{u_1(\sigma h - \sigma x)}{m} \right].$$

On peut indiquer deux valeurs m_1 et m_2 telles que pour

$$m_1 < m < m_2,$$

la fonction $L_m(x)$ vérifie des inégalités importantes

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(m - m_1)(\sigma h - 2\sigma x)}{m(h\sigma m_1 + 2)} \leq L_m(x) \leq \frac{(m_2 - m)(2\sigma x - \sigma h)}{m(h\sigma m_2 + 2)} \quad \left(\frac{h}{2} \leq x \leq h \right), \\ \frac{(m_2 - m)(2\sigma x - \sigma h)}{m(h\sigma m_2 + 2)} \leq L_m(x) \leq \frac{(m - m_1)(\sigma h - 2\sigma x)}{m(h\sigma m_1 + 2)} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{h}{2} \right). \end{array} \right.$$

En revenant à $\varphi(x)$ on a

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{B(1 + \sigma m_1 x)}{h\sigma m_1 + 2} \leq \varphi(x) \leq \frac{B(1 + \sigma m_2 x)}{h\sigma m_2 + 2} \quad \left(\frac{h}{2} \leq x \leq h \right), \\ \frac{B(1 + \sigma m_2 x)}{h\sigma m_2 + 2} \leq \varphi(x) \leq \frac{B(1 + \sigma m_1 x)}{h\sigma m_1 + 2} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{h}{2} \right). \end{array} \right.$$

Ces inégalités montrent que la courbe $y = \varphi(x)$ est toujours contenue entre les droites

$$y = \frac{B(1 + \sigma m_1 x)}{h\sigma m_1 + 2} \quad \text{et} \quad y = \frac{B(1 + \sigma m_2 x)}{h\sigma m_2 + 2}.$$

Les nombres en question

$$m_1 = \frac{u_0(\sigma h)}{u_1(\sigma h)} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{1 - u_1(\sigma h)}{0,5 - u_2(\sigma h)}$$

ont les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{llll} m_2 > m_1, & m_1 \geq 1, & m_2 \geq 2; \\ \lim_{h\sigma \rightarrow \infty} m_1 = 1, & \lim_{h\sigma \rightarrow \infty} m_2 = 2, & \lim_{h\sigma \rightarrow 0} m_1 = \infty, & \lim_{h\sigma \rightarrow 0} m_2 = \infty, \\ \lim_{h\sigma \rightarrow 0} h\sigma m_1 = 0, & \lim_{h\sigma \rightarrow 0} h\sigma m_2 = 0. \end{array}$$

Il en résulte que pour les gaz très raréfiés

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \varphi(x) = \frac{B}{2}$$

et pour les gaz très denses

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \varphi(x) = \frac{Bx}{h}.$$

Les inégalités (16), (17) permettent d'élucider une question très délicate et qui a suscité des controverses assez vives : c'est celle de l'existence d'une fonction fondamentale pour $h \rightarrow \infty$ et $\lambda = 1$. Supposons que la fonction $N_m(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} L_m(x)$ existe. Les inégalités (16) montrent que $N_m(x)$ vérifie les inégalités suivantes :

$$1 - \frac{2}{m} \leq N_m(x) \leq 1 - \frac{1}{m}.$$

C'est donc une fonction bornée. D'autre part $N_m(x)$ doit vérifier l'équation intégrale

$$N_m(x) = \int_0^\infty K(x, t) N_m(t) dt + \frac{1}{2} u_2(\sigma x) - \frac{1}{2m} u_1(\sigma x),$$

mais cette équation a une solution presque évidente

$$M_m(x) = -\frac{1}{m} - \sigma x$$

qui n'est pas du tout bornée; il en résulte que l'équation homogène

$$\varphi(x) = \int_0^\infty K(x, t) \varphi(t) dt$$

a une solution non identiquement nulle et que par conséquent (1)

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \lambda_1 = 1.$$

6. Résolution approchée de l'équation (2). — On peut construire un algorithme très avantageux d'approximations successives en

(1) La première démonstration de ce théorème appartient à M. K. Schwarzschild [33]. Dans un Mémoire publié en 1926 j'ai donné la démonstration ci-dessus [22]. Beaucoup plus tard MM. Freundlich, Hopf et Wegner [17] dans une Note des *Monthly Notices*, m'ont attribué à tort l'affirmation contraire et n'ont jamais voulu rectifier leur erreur. J'ai mis les choses au point dans un Mémoire publié en russe [23].

remplaçant le noyau $K(x, t)$ par la fonction

$$K_a(x, t) = \frac{\sigma}{2} e^{-\sigma|x-t|},$$

et la fonction connue par $\frac{B}{2} e^{-\sigma(h-x)}$. Dans ces conditions l'équation intégrale (2) prend la forme

$$(18) \quad \varphi_a(x) = \frac{\sigma}{2} \int_0^h e^{-\sigma|x-t|} \varphi_a(t) dt + \frac{B}{2} e^{-\sigma(h-x)}.$$

Le noyau $K_a(x, t)$ n'a pas de nombres fondamentaux ≤ 1 ;

Le noyau résolvant est particulièrement simple pour $\lambda = 1$:

$$(19) \quad \begin{cases} R_a(1; x, t) = \frac{\sigma(1 + \sigma h - \sigma x)(1 + \sigma t)}{h\sigma + 2} & (x \geq t), \\ R_a(1; x, t) = \frac{\sigma(1 + \sigma x)(1 + \sigma h - \sigma t)}{h\sigma + 2} & (x \leq t). \end{cases}$$

La solution de l'équation (18)

$$(20) \quad \varphi_a(x) = \frac{B(1 + \sigma x)}{h\sigma + 2} = \frac{B}{\sigma} R_a(1; x, h)$$

traduit assez bien l'allure de la courbe expérimentale.

Donnons maintenant la forme suivante à l'équation (2) :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^h K_a(x, z) \varphi(z) dz \\ &+ \int_0^h [K(x, z) - K_a(x, z)] \varphi(z) dz + \frac{B}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(h-x)} dk}{k^2} \end{aligned}$$

et définissons l'algorithme approché

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \int_0^h K_a(x, z) \varphi_n(z) dz \\ &+ \int_0^h [K(x, z) - K_a(x, z)] \varphi_{n-1}(z) dz + \frac{B}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(h-x)} dk}{k^2}. \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned} (21) \quad \varphi_n(x) &= \frac{B}{2} u_1(\sigma h - \sigma x) - \frac{B}{2} u_3(\sigma h - \sigma x) \\ &+ \frac{B(1 + \sigma x)}{3(h\sigma + 2)} - \frac{B\sigma(h - 2x)}{2(h\sigma + 2)} [u_2(\sigma h) - u_3(\sigma h)] \\ &+ \int_0^h L(x, z) \varphi_{n-1}(z) dz \end{aligned}$$

en désignant par $L(x, z)$ la fonction

$$L(x, z) = \frac{\sigma}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma|x-z|} dk}{k} - \frac{\sigma}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma|x-z|} dk}{k^3} - \frac{\sigma^2(h-2x)}{2(h\sigma+2)} \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma z}}{k^2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) dk.$$

Formons la différence

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) = \int_0^h L(x, z) [\varphi_{n-1}(z) - \varphi_{n-2}(z)] dz.$$

Soit M_n la limite supérieure de $|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)|$.

Comme la fonction $L(x, z)$ n'est jamais négative, on a

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq M_{n-1} \int_0^h L(x, z) dz.$$

Or,

$$\int_0^h L(x, z) dz \leq \left[\frac{2}{3} + \frac{h\sigma}{12(h\sigma+2)} \right] \leq \frac{3}{4}.$$

Donc

$$M_n \leq \frac{3}{4} M_{n-1}.$$

La suite $\{\varphi_n\}$ est convergente et la convergence est même assez rapide. En choisissant la fonction (20) comme première approximation on améliore sensiblement l'approximation, mais on peut faire mieux en établissant deux suites convergentes de fonctions $\{\psi_k\}$ et $\{\Psi_k\}$ telles que

$$\psi_1(x) \leq \psi_2(x) \leq \dots \leq \varphi(x) \leq \dots \leq \Psi_2(x) \leq \Psi_1(x) \quad \left(\frac{h}{2} < x < h\right),$$

$$\psi_1(x) \geq \psi_2(x) \geq \dots \geq \varphi(x) \geq \dots \geq \Psi_2(x) \geq \Psi_1(x) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{h}{2}\right).$$

On peut se servir dans ce but de la propriété suivante des approximations (21) : Si, dans l'un des deux intervalles $\left(0, \frac{h}{2}\right)$, $\left(\frac{h}{2}, h\right)$ on a $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$, les approximations suivantes vont en décroissant :

$$\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \geq \dots \geq \varphi(x).$$

Choisissons les fonctions ψ_1 et Ψ_1 de la façon suivante :

$$\psi_1(x) = \frac{B(1+m_1\sigma x)}{h\sigma m_1+2}, \quad \Psi_1(x) = \frac{B(1+m_2\sigma x)}{h\sigma m_2+2}.$$

On peut montrer que l'on a

$$\begin{aligned} \psi_1(x) \leq \psi_2(x) \quad \text{et} \quad \Psi_2(x) \leq \Psi_1(x) \quad \left(\frac{h}{2} \leq x \leq h \right), \\ \psi_1(x) \geq \psi_2(x) \quad \text{et} \quad \Psi_2(x) \geq \Psi_1(x) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{h}{2} \right); \end{aligned}$$

donc les suites $\{\psi_k\}$, $\{\Psi_k\}$ jouissent de propriétés assurant une convergence rapide. D'ailleurs, pour les gaz raréfiés ($\sigma \leq 1$) la différence $|\Psi_2 - \psi_2| \leq \frac{1}{500}$, ce qui est bien suffisant pour tous les buts pratiques.

7. Résultats empiriques. — La thèse de M. P. Lasareff [26] sur la discontinuité de température au passage d'une paroi solide à un gaz contient quelques séries d'observations sur la distribution des températures dans une couche de gaz contenue entre deux parois à températures constantes mais différentes. Ce problème est analogue au problème mécanique considéré plus haut et se ramène aux mêmes équations intégrales. Donc, il est possible de comparer les résultats de M. P. Lasareff avec ce que donne la formule (9).

B, la différence de température entre les parois, est connu; $\sigma = \frac{1}{\gamma}$ est connu parce que la température, la pression et la nature du gaz sont données. Par conséquent, on peut calculer la fonction $\varphi(x)$. Cette fonction traduit très mal la fonction expérimentale $\omega(x)$ de M. Lasareff. L'utilisation de la formule

$$\beta = \frac{B[\varphi(x) - \omega(x)]}{2\varphi(0)\omega(x) - B\omega(x) + B\varphi(x) - B\varphi(0)}$$

permet d'apprécier la concordance entre la théorie et l'expérience. Les observations de M. P. Lasareff portent sur l'air atmosphérique et sur l'hydrogène. Les calculs donnent la valeur de $\beta \sim 0,6$ assez bien soutenue et la concordance est très bonne partout sauf dans le voisinage immédiat des parois où des divergences considérables peuvent être constatées. On peut attribuer ces divergences soit à l'imperfection de la théorie, soit aux difficultés que présente la mesure des températures près des parois. Il serait intéressant de reprendre ces expériences en y apportant la technique perfectionnée moderne.

8. Diffusion de la lumière. — On retrouve le même noyau dans un autre problème physique étudié par MM. O. Chwolson [5] et

E. Lommel [27]. Supposons qu'une lame semi-transparente d'épaisseur h soit éclairée par une lumière qui tombe normalement sur une des faces. On peut admettre que la semi-transparence dépend de la présence de particules sphériques opaques distribuées uniformément dans la lame. Soient λ l'albédo des particules, σ le coefficient de transparence de la matière, $\psi(x)$ l'intensité de la lumière à distance x de la face éclairée. Dans ces conditions $\psi(x)$ vérifie l'équation intégrale

$$(22) \quad \psi(x) = A e^{-\sigma x} + \lambda \int_0^h K(x, t) \psi(t) dt.$$

Il faut remarquer qu'en établissant cette équation on a négligé la réflexion de la lumière par les faces de la lame. Dans mon Mémoire déjà mentionné qui doit paraître prochainement, il est tenu compte de ce phénomène. De même que dans le cas de l'équation (1), on peut donner à la solution une forme plus avantageuse pour les calculs [20, 22] :

$$\begin{aligned} \psi(x) = & A e^{-\sigma x} \left[1 + \lambda \int_0^h R(\lambda; z, 0) e^{-\sigma z} dz \right] \\ & \times \left[1 + \lambda \int_0^x R(\lambda; t, 0) e^{-\sigma t} dt \right] \\ & - \lambda A e^{-\sigma x} \left[1 + \lambda \int_0^h R(\lambda; z, 0) e^{-\sigma z} dz \right] \int_{h-x}^h R(\lambda; t, 0) e^{-\sigma t} dt. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \psi'(x) = & -\sigma \psi(x) + A \lambda \left[1 + \lambda \int_0^h R(\lambda; z, 0) e^{-\sigma z} dz \right] R(\lambda; x, 0) \\ & - \lambda A e^{-\sigma h} \left[1 + \lambda \int_0^h R(\lambda; z, 0) e^{-\sigma z} dz \right] R(\lambda; x, h). \end{aligned}$$

Donc $\psi'(0) \sim +\infty$, $\psi'(h) \sim -\infty$, ce qui veut dire que la fonction $\psi(x)$ passe par un maximum dans l'intervalle $(0, h)$. D'autre part $\psi(0) > \psi(h)$. Ces propriétés sont suffisantes pour caractériser l'allure de la fonction $\psi(x)$. Cette fonction n'a rien de commun avec la loi exponentielle d'absorption que l'on obtient pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire pour les particules qui absorbent entièrement la lumière.

On peut obtenir une solution approchée de l'équation (22) en suivant la même méthode que nous avons appliquée à l'équation (2).

V. — RAYONNEMENT DES ÉTOILES.

1. C'est à Schwarzschild [33] que l'on doit la mise en équation du problème du rayonnement des étoiles, et c'est lui qui a donné la première étude mathématique de l'équation intégrale de Kundt et Warburg. On peut assimiler les couches extérieures de l'atmosphère d'une étoile à une couche gazeuse plane contenue entre deux « parois » planes ou bien limitée unilatéralement par une paroi solide. Certes, cette assimilation n'est possible qu'à condition d'accrocs innombrables à la réalité. La densité de la couche gazeuse dans le problème de Kundt et Warburg est constante; la densité d'une étoile ne l'est pas. Il est donc nécessaire de remplacer la variable x , l'épaisseur d'une couche ou la distance d'un point à une paroi, par l'épaisseur optique

$$z = \int_0^x \rho(x) k(x) dx$$

ou bien par la masse spécifique

$$y = \int_0^x \rho(x) dx,$$

$\rho(x)$ étant la densité et $k(x)$ le coefficient d'absorption d'un gaz. Dans le cas où l'une ou l'autre de ces intégrales reste finie pour $x \rightarrow \infty$ la couche reçoit une deuxième « paroi », mais en faisant cette transformation on oublie que les trajectoires, soit des particules, soit des rayons, se trouvent également transformées et de rectilignes deviennent courbes. Or, dans les problèmes physiques considérés, ces trajectoires étaient rectilignes, ce qui avait son importance, car avec les trajectoires curvilignes on obtiendrait bien en fin de compte une équation intégrale mais qui ne serait plus l'équation (IV, 2). Les propriétés topologiques de la solution seraient conservées, mais toute vérification numérique deviendrait impossible. Or, le but de ces applications astrophysiques est justement l'obtention de deux colonnes de chiffres : observé, calculé.

Le choix de la « paroi » intérieure comporte aussi un élément arbitraire. Les propriétés de cette surface de séparation, même dans le cas le plus favorable, ne sont plus celles d'une paroi solide comme dans les expériences de M. P. Lasareff et de M. A. Timiriazeff.

D'autre part le schéma d'une surface intérieure rayonnante comme un corps noir et d'une atmosphère extérieure servant de mécanisme de transmission ne répond certainement pas à la réalité.

2. Étudions d'abord l'économie énergétique de la couche extérieure d'une étoile. Soient h l'épaisseur réduite de la couche; x la « distance » optique d'un point quelconque à la face extérieure de la couche, si cette face existe; σ le coefficient de dispersion; $E(x)$ le rayonnement (par exemple, la fonction de Kirchhoff); $d\tau$ l'élément de masse à « distance » x ; i l'angle que fait le rayonnement avec l'axe x ($0 \leq i \leq 90$); $d\omega$ l'angle solide; ds l'élément de surface normal au rayon; $a(x, i) d\omega ds$ le rayonnement dirigé de l'extérieur à l'intérieur de l'étoile; k le coefficient d'absorption. On suppose que la surface intérieure de la couche rayonne à la façon d'un corps noir. Cela posé, un rayon « descendant » du niveau x au niveau $x + dx$ perd $ka(x, i) \sec i dx$ par voie d'absorption et $\sigma a(x, i) dx \sec i$ par voie de dispersion. D'autre part, le rayonnement dispersé par l'élément de volume $d\tau$ est égal à

$$\sigma d\tau \left[\int a(x, i) d\omega + \int b(x, i) d\omega \right],$$

l'intégration étant étendue pour chaque intégrale à une hémisphère correspondante. Donc, le rayonnement dispersé par l'unité de masse est égal à

$$(1) \quad 2\pi\sigma A = 2\pi\sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} a(x, i) \sin i di + 2\pi\sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} b(x, i) \sin i di.$$

En supposant le rayonnement uniforme le cône $d\omega$ en reçoit pour sa part $d\tau d\omega \frac{\sigma A}{2}$. Donc, l'énergie totale quittant l'élément $d\tau$ par l'ouverture $d\omega$ égale

$$d\tau d\omega \left[\frac{\sigma A}{2} + kE \right] = I d\tau d\omega,$$

en posant

$$(2) \quad I = kE + \frac{\sigma A}{2}.$$

Il est facile de voir d'autre part que les fonctions a et b vérifient les

équations différentielles simples

$$\cos i \frac{da}{dx} = -(k + \sigma)a + I,$$

$$\cos i \frac{db}{dx} = (k + \sigma)b - I,$$

avec des conditions à la frontière $a = 0$ pour $x = 0$, $b = B$ pour $x = h$, B , étant une fonction indépendante de i et définie par la loi de Kirchhoff. En intégrant ces équations on trouve

$$(3) \quad \begin{cases} a(x, i) = \int_0^x I(t) e^{(k+\sigma)(t-x)} \sec i \sec i dt, \\ b(x, i) = B e^{(k+\sigma)(x-h)} \sec i + \int_x^h I(t) e^{(k+\sigma)(x-t)} \sec i \sec i dt. \end{cases}$$

En éliminant $a(x, i)$, $b(x, i)$ et A entre les équations (1), (2), (3) et en exécutant des transformations de variables on obtient l'équation intégrale

$$(4) \quad I(x) = \frac{\sigma}{\sigma + k} \int_0^h K(x, t) I(t) dt + k E(x) + \frac{B}{2} \int_1^\infty \frac{du}{u^2} e^{-(k+\sigma)u(h-t)},$$

où l'on pose

$$(5) \quad K(x, t) = \frac{\sigma + k}{2} \int_1^\infty \frac{du}{u} e^{-(k+\sigma)u|x-t|}.$$

Ce noyau ne diffère de celui du chapitre précédent que par la présence du paramètre $(\sigma + k)$ au lieu de σ . La fonction connue se compose de deux parties :

1° Le terme $\frac{B}{2} \int_0^\infty e^{-(k+\sigma)u(h-t)} \frac{du}{u^2}$ de même nature que la fonction connue de l'équation (IV, 2).

2° Le terme $kE(x)$ (fonction de Kirchhoff) qu'il est facile de calculer quand les températures du gaz en chaque point de la couche sont données.

Enfin, le paramètre de Fredholm $\frac{\sigma}{\sigma + k}$ est manifestement < 1 ; donc, on peut appliquer à l'équation (4) la méthode des approximations successives.

Deux cas limites sont de nature à nous intéresser :

1° La dispersion est petite en comparaison avec l'absorption;

l'équation (4) se réduit à

$$I(x) = k E_k(x).$$

2° L'absorption est petite en comparaison avec la dispersion ; l'équation (4) se réduit à l'équation (IV, 2) déjà considérée.

3. Nous ne nous occupons pas de la première éventualité et tâcherons de voir ce qui arrive lorsque la deuxième face de la couche (face rayonnante comme un corps noir) s'éloigne à l'infini. L'inégalité (IV, 17) montre que dans ce cas

$$\lim_{h \rightarrow \infty} I(x) = 0.$$

Il est pourtant possible que B tende vers l'infini pour $h \rightarrow \infty$ de telle façon que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{B}{h} = \text{const.} = C.$$

Dans ce cas, d'après l'inégalité (IV, 17),

$$C \left(\frac{1}{2\sigma} + x \right) \leq \lim_{h \rightarrow \infty} h I(x) \leq C \left(\frac{1}{\sigma} + x \right).$$

Donc, en admettant la proportionnalité de B à h on obtient la proportionnalité de $I(x)$ à x pour x suffisamment grand. Comme on a d'autre part

$$B = I(0) + I(h),$$

on voit que les deux hypothèses sont équivalentes.

Résumons : Pour une atmosphère suffisamment épaisse la fonction $I(x)$ est sensiblement linéaire sauf dans la proximité immédiate des « faces » ; la face extérieure est tout à fait fictive ; la face intérieure est conventionnelle ; donc, en fin de compte, l'analyse mathématique nous autorise en quelque sorte à admettre la formule approchée

$$I(x) = \frac{Bx}{h},$$

ce qu'on aurait pu faire directement, avant toute analyse : un bel exemple du fétichisme mathématique [28].

4. Généralisation. — Supposons qu'il y a deux couches gazeuses à caractéristiques différentes :

1° Couche A_1 contenue entre la paroi 0 et le plan s ;

2° Couche A_2 contenue entre le plan s et la paroi h . Par une généralisation des procédés du chapitre précédent on obtient l'équation intégrale suivante :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega(x) = \frac{\sigma_1}{2} \int_0^s \omega(u) du \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma_1 k |x-u|} dk}{k} \\ \quad + \frac{\sigma_2}{2} \int_s^h \omega(u) du \int_1^\infty \frac{dk}{k} e^{-\sigma_1 k(s-x) - \sigma_2 k(u-s)} \\ \quad + \frac{B}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma_1 k(s-r) - \sigma_2 k(h-s)} dk}{k^2} \\ \quad \quad \quad (0 \leq x \leq s), \\ \omega(x) = \frac{\sigma_2}{2} \int_s^h \omega(u) du \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma_2 k |x-u|} dk}{k} \\ \quad + \frac{\sigma_1}{2} \int_0^s \omega(u) du \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma_1 k(s-u) - \sigma_2 k(x-s)} dk}{k} \\ \quad + \frac{B}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma_2 k(h-x)} dk}{k^2} \\ \quad \quad \quad (s < x < h). \end{array} \right.$$

En établissant cette équation on a supposé que les trajectoires des particules ou des rayons restent rectilignes au passage du plan s . On peut également recourir à l'hypothèse de réfraction cartésienne, ce qui conduit aux équations intégrales qui ne diffèrent de (6) que par les exposants des fonctions exponentielles sous le signe de l'intégrale. Des hypothèses plus compliquées sur les trajectoires modifieraient essentiellement les noyaux. Quant au cas de plusieurs couches successives, les équations intégrales ne différeraient pas de l'équation (6).

Le système (6) présente des difficultés analytiques considérables. Ce qui est surtout intéressant, c'est le fait évident de la continuité de $\omega(x)$ au passage du plan s . On voit sans peine que

$$\omega(s+0) = \omega(s-0).$$

Il n'y a pas de difficulté à représenter une étoile sous forme d'une succession de couches gazeuses qui simultanément émettent et transmettent l'énergie. Ce schéma pourrait utilement remplacer celui proposé par Schwarzschild. En ce qui concerne le noyau, la fonction (5) très peu maniable peut céder la place au noyau exponentiel.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. BATEMAN (H.). — *Report 80th Meeting Brit. Ass.*, 1910, p. 345-424.
2. BERGER (A.). — *Skand. Aktuar. Tidsk.*, 1929, p. 197-217.
3. BRILLOUIN (M.). — *C. R. Acad. Sc.*, t. 186, 1928, p. 553-557.
4. BROWNE (P.). — *C. R. Acad. Sc.*, t. 138, 1914, p. 1562-1565.
5. CHWOLSON (O.). — *Bull. Acad. Petr.*, t. 13, 1885.
6. DETSCH (G.). — *Math. Z.*, t. 24, 1926, p. 785-788.
7. ENSKOG (D.). — *Math. Z.*, t. 24, 1925, p. 670-683.
8. ENSKOG (D.). — *Math. Z.*, t. 25, 1926, p. 299-304.
9. FOCK (V. A.). — *Rec. Math. Moscou*, t. 31, 1923, p. 519-528.
10. FOCK (V. A.). — *Math. Z.*, t. 21, 1924, p. 161-173.
11. FREDHOLM (I.). — *Overs. Vet. Ak. Stockh.*, n° 57, 1900.
12. GRONWALL (T. H.). — *C. R. Acad. Sc.*, t. 162, 1916, p. 415-418.
13. HECKE (E.). — *M. A.*, t. 78, 1918, p. 398-404.
14. HECKE (E.). — *Math. Z.*, t. 12, 1922, p. 274-286.
15. HILBERT (D.). — *M. A.*, t. 72, 1912, p. 562-577.
16. HILBERT (D.). — *Grundzüge*, 1912 (Leipzig, B. G. T.).
17. HOPF, WEGNER, FREUNDLICH. — *M. N.*, t. 88, n° 2, 1928.
18. HOPF (E.). — *Math. Z.*, t. 33, 1931, p. 109-128.
19. KOSTITZIN (V. A.). — *Rec. Math.*, t. 31, 1922, p. 78-85, 185-187.
20. KOSTITZIN (V. A.). — *Rec. Math.*, t. 31, 1923, p. 188-207.
21. KOSTITZIN (V. A.). — *Publ. Observ. Astroph. R.*, t. 2, 1922, p. 1-6.
22. KOSTITZIN (V. A.). — *Publ. Inst. Math. Moscou*, 1926.
23. KOSTITZIN (V. A.). — *Journ. Astr. Russe*, t. 5, 1928, p. 112-131.
24. KRAT (W.). — *Astr. Nachr.*, t. 245, 1932, p. 5 8.
25. KUNDT und WARBURG. — *Ann. der Ph. u. Ch.*, 1875.
26. LASAREFF (P.). — *Thèse*, 1910 (Moscou).
27. LOMMEL (E.). — *Ann. der Ph. u. Ch.*, 1889.
28. MILNE (E. A.). — *Handbuch der Astrophysik*, Bd, III, 1930, p. 109.
29. MOSER (Ch.). — *Mitt. Ver. schweiz. Versich. Math.*, n° 21, 1926.
30. MOSER (Ch.). — *Congrès Actuaire Stockholm*, 1930.
31. RISSER (R.). — *C. R. Acad. Sc.*, t. 171, 1920, p. 845-847.
32. RISSER (R.). — *Applications*, etc., 1932 (Paris, Gauthier-Villars).
33. SCHWARZSCHILD (K.). — *Sitz. Ber. Berlin*, 1919.
34. SMOLUCHOWSKI (M.). — *Bull. Cracovie*, 1911, p. 432-453.
35. TIMIRIAZEFF (A.). — *Thèse*, 1914 (Moscou).
36. VOLTERRA (V.). — *Leçons sur les fonctions de lignes*, 1913.
37. ZWINGGI (E.). — *Festgabe Moser*, 1931, p. 127-162.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages
I. INTRODUCTION.....	I
II. Renouvellement.....	3
III. Théorie cinétique des gaz.....	11
IV. Équation intégrale de Kundt et Warburg.....	26
V. Rayonnement des étoiles.....	43
BIBLIOGRAPHIE.....	48

