

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

TH. DE DONDER

Application de la gravifique einsteinienne à l'électrodynamique des corps en mouvement

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 58 (1932)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1932__58__1_0

© Gauthier-Villars, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
 DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
 MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
 DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

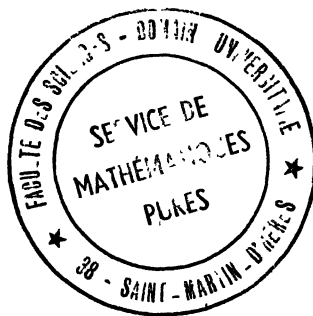
Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
 Professeur à la Sorbonne,
 Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE LVIII

**Application de la Gravifique einsteinienne
 à l'Électrodynamique des Corps en mouvement**

PAR M. TH. DE DONDER



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^e, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
 Quai des Grands-Augustins, 55.

1932

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.**

APPLICATION
DE LA
GRAVIFIQUE EINSTEINIENNE

A
L'ÉLECTRODYNAMIQUE DES CORPS EN MOUVEMENT

Par Th. DE DONDER

AVANT-PROPOS.

Le présent fascicule termine la synthèse gravifique qui a été développée dans les fascicules VIII, XIV et XLIII du *Mémorial des Sciences mathématiques*, parties de cette synthèse qui seront indiquées dans la suite par I, II ou III. On y verra traitées l'électrodynamique des corps en mouvement, l'électromagnétostriktion, les tensions de radiations, l'hystérèse, la thermodynamique relativiste. Cette méthode générale fournit immédiatement la relativité restreinte. Le dernier chapitre est consacré à la généralisation de la mécanique ondulatoire de Dirac. La table des matières qui figure à la fin de ce fascicule indique en détail le plan de cet ouvrage.

CHAPITRE I.

APPLICATION A L'ELECTROMAGNÉTOSTRICTION.

1. **Champ gravifique massique et électromagnétique.** — Nous avons vu (II, 8) que les dix équations fondamentales du champ gravifique pouvaient se déduire du principe variationnel

$$(1) \quad \frac{\delta(\mathcal{N}^g + \mathcal{N})}{\delta g^{ab}} = 0.$$

Posons, comme au (II, 9 et 10),

$$(2) \quad \mathfrak{E}_{\alpha\beta}^g \equiv \frac{\delta \mathfrak{N}^g}{\delta g^{\alpha\beta}},$$

$$(3) \quad \mathfrak{E}_{\alpha\beta} \equiv - \frac{\delta \mathfrak{N}}{\delta g^{\alpha\beta}}.$$

Nous savons que (II, 14)

$$(4) \quad \mathfrak{N}^g \equiv (a + b C) \sqrt{-g}.$$

D'autre part, nous poserons ici

$$(5) \quad \boxed{\mathfrak{N} \equiv - \mathcal{U} W + \mathfrak{N}_*{}^{(m)} + \mathfrak{N}_*{}^{(m,e)} + \mathfrak{N}_*{}^{(e)}}$$

où $\mathcal{U}$ est le facteur tensoriel massique, où

$$(6) \quad W = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1,$$

et où $\mathfrak{N}_*{}^{(m)}$, $\mathfrak{N}_*{}^{(m,e)}$, $\mathfrak{N}_*{}^{(e)}$ représentent respectivement les fonctions caractéristiques des phénomènes *massiques*, *massique-électromagnétiques* et purement *électromagnétiques*. Nous dirons aussi que $\mathfrak{N}_*{}^{(m,e)}$ caractérise les phénomènes d'*électromagnétostriction*, ou plus simplement la *striction*.

Dans le cas le plus général, nous définissons la *force électromagnétique* par le tenseur antisymétrique (II, 309)

$$(7) \quad \mathcal{H}^{\alpha\beta} \equiv \mathcal{H}^{\alpha\beta} - \mathcal{P}_{(e)}^{\alpha\beta}$$

et la *force électromagnétique adjointe* par le tenseur antisymétrique (II, 312)

$$(8) \quad \mathcal{H}_*{}^{\alpha\beta} \equiv \mathcal{H}_*{}^{\alpha\beta} - \mathcal{P}_{(m)}^{\alpha\beta},$$

où (II, 303)

$$(9) \quad \mathcal{H}_*{}^{\alpha\beta} \equiv H_{\alpha\beta}.$$

Nous avons proposé ⁽¹⁾ de prendre comme fonction caractéris-

(1) TH. DE DONDER, *The mathematical Theory of Relativity* (Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass. 1927).

On remarquera que cette fonction $\mathfrak{N}_*{}^{(e)}$ est légèrement différente de la fonction écrite à la seconde ligne de (II, 315).

tique $\mathcal{N}_*^{(e)}$, l'expression suivante

$$(10) \quad \boxed{\mathcal{N}_*^{(e)} \equiv \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} g^{ij} K_{\alpha i} \mathcal{K}_{\beta j}^{\overline{ij}}}$$

En vertu de (3) et de (5), nous aurons

$$(11) \quad \mathfrak{T}_{\alpha\beta} \equiv \mathcal{N} u_{\alpha} u_{\beta} + \mathfrak{T}_{\alpha\beta}^m + \mathfrak{T}_{\alpha\beta}^{(m,e)} + \mathfrak{T}_{\alpha\beta}^{(e)},$$

où l'on a posé

$$(12) \quad \mathfrak{T}_{\alpha\beta}^m \equiv - \frac{\partial \mathcal{N}_*^{(m)}}{\partial g^{\alpha\beta}},$$

$$(13) \quad \mathfrak{T}_{\alpha\beta}^{(m,e)} \equiv - \frac{\partial \mathcal{N}_*^{(m,e)}}{\partial g^{\alpha\beta}},$$

$$(14) \quad \mathfrak{T}_{\alpha\beta}^{(e)} \equiv - \frac{\partial \mathcal{N}_*^{(e)}}{\partial g^{\alpha\beta}}.$$

En utilisant (10), nous trouvons

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathfrak{T}_{\alpha\beta}^{(e)} \equiv & - \frac{\sqrt{-g}}{2} \sum_i \sum_j g^{ij} (K_{\alpha i} \mathcal{K}_{\beta j}^{\overline{ij}} + K_{\beta i} \mathcal{K}_{\alpha j}^{\overline{ij}}) \\ & + \frac{\sqrt{-g}}{4} g^{\alpha\beta} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l g^{kl} g^{ij} K_{ki} \mathcal{K}_{jl}^{\overline{ij}}. \end{aligned}$$

Nous poserons ici

$$(16) \quad P_{\alpha\beta} \equiv T_{\alpha\beta}^m + T_{\alpha\beta}^{(m,e)}.$$

Ce tenseur $P_{\alpha\beta}$ se rapporte donc aux actions massiques et de striction.

De (11), on déduit le tenseur mixte total

$$(17) \quad T_{\alpha}^{\beta} \equiv N u_{\alpha} u^{\beta} + P_{\alpha}^{\beta} + T_{\alpha}^{\beta(e)}$$

où figure le tenseur mixte électromagnétique

$$(18) \quad \begin{aligned} T_{\alpha}^{\beta(e)} \equiv & - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_{\nu} g^{ij} g^{\nu\beta} (K_{\alpha i} \mathcal{K}_{\nu}^{\overline{j}} + K_{\nu i} \mathcal{K}_{\alpha}^{\overline{j}}) \\ & + \frac{1}{4} \varepsilon_{\alpha}^{\beta} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l g^{kl} g^{ij} K_{ki} \mathcal{K}_{jl}^{\overline{ij}}. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$(19) \quad T \equiv \sum_{\alpha} T_{\alpha}^{\alpha} = N + P,$$

où

$$(20) \quad P = \sum_{\alpha} P_{\alpha}^{\alpha}.$$

2. Théorème de l'impulsion et de l'énergie. — Ce théorème peut s'écrire sous la forme (II, 319)

$$(21) \quad \mathcal{F}_{\alpha} \equiv \mathcal{H}_{\alpha} + \mathcal{T}_{\alpha} + \mathcal{F}_{\alpha}^{(e)} = 0$$

où l'on a posé, comme au (II, 320),

$$(22) \quad \mathcal{H}_{\alpha} \equiv \mathcal{H} \Lambda_{\alpha} + u_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial (\mathcal{H} u^{\beta})}{\partial x^{\beta}},$$

$$(23) \quad \mathcal{T}_{\alpha} \equiv \mathcal{T}_{\alpha}^{\beta}{}_{\beta} = \sum_{\beta} \left[\frac{\partial \mathcal{T}_{\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} - \frac{1}{2} \sum_{\gamma} \sum_{\varepsilon} g^{\beta\gamma} g_{\varepsilon\gamma, \alpha} \mathcal{T}_{\beta}^{\varepsilon} \right]$$

ainsi que

$$(24) \quad \mathcal{F}_{\alpha}^{(e)} \equiv \mathcal{F}_{\alpha}^{\beta(e)}{}_{\beta} = \sum_{\beta} \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha}^{\beta(e)}}{\partial x^{\beta}} - \frac{1}{2} \sum_{\gamma} \sum_{\varepsilon} g^{\beta\gamma} g_{\varepsilon\gamma, \alpha} \mathcal{F}_{\beta}^{(e)\varepsilon} \right]$$

On voit par (23) et (24) que $\mathcal{T}_{\alpha}$ et $\mathcal{F}_{\alpha}^{(e)}$ sont respectivement les divergences covariantes de $\mathcal{T}_{\alpha}^{\beta}$ et de $\mathcal{F}_{\alpha}^{\beta(e)}$.

On obtient, après quelques réductions,

$$(25) \quad \mathcal{F}_{\alpha}^{(e)} \equiv -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sqrt{-g} \sum_{\varepsilon} \sum_{\gamma} \sum_{\tau} g^{\varepsilon\gamma} g^{\tau i} (K_{\alpha\varepsilon} \mathcal{H}_{\tau}^{\varepsilon\gamma} + K_{\tau\varepsilon} \mathcal{H}_{\alpha}^{\varepsilon\gamma}) \right] \\ + \frac{1}{4} \sqrt{-g} \sum_{\kappa} \sum_l \sum_{\varepsilon} \sum_{\gamma} g^{\kappa l} g^{\varepsilon\gamma} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (K_{\kappa\varepsilon} \mathcal{H}_{\gamma}^{\varepsilon\gamma}).$$

Nous avons montré comment, en vertu de (II, 321), l'équation (II, 319) pouvait aussi se mettre sous la forme (II, 322); dans cette dernière équation le symbole $\mathcal{F}_{\alpha}^{(e)}$ a la valeur donnée par (24) ou (25).

3. Équations maxwelliennes généralisées. — Pour fixer les idées, supposons que x_1, x_2, x_3 représentent des *coordonnées rectangulaires dextrogyres*, et que x_4 représente le temps t . Au lieu de x_1, x_2, x_3 nous emploierons aussi la notation x, y, z . Il est commode d'employer les notations habituelles de l'électromagnétisme, en

posant

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{H}^{23} = c \mathcal{H}_1, & \mathcal{H}_*^{23} = c H_x^*, \\ \mathcal{H}^{31} = c \mathcal{H}_2, & \mathcal{H}_*^{31} = c H_y^*, \\ \mathcal{H}^{12} = c \mathcal{H}_3, & \mathcal{H}_*^{12} = c H_z^*, \\ \mathcal{H}^{14} = -B_x, & \mathcal{H}_*^{14} = \mathcal{B}_x, \\ \mathcal{H}^{24} = -B_y, & \mathcal{H}_*^{24} = \mathcal{B}_y, \\ \mathcal{H}^{34} = -B_z, & \mathcal{H}_*^{34} = \mathcal{B}_z. \end{array} \right.$$

Dans ces tableaux, les symboles ont la signification physique suivante :

$(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3) \equiv$ composantes de la *force magnétique*,
 $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) \equiv$ composantes de l'*induction magnétique*.

D'autre part, on a posé

$$(26') \quad H_x^* \equiv H_x - H_x^a; \quad H_y^* \equiv H_y - H_y^a; \quad H_z^* \equiv H_z - H_z^a$$

où

$(H_x, H_y, H_z) \equiv$ composantes de la *force électrique*,
 $(H_x^a, H_y^a, H_z^a) \equiv$ composantes de la *force électrique appliquée* (eingepägt).

Enfin

$(B_x, B_y, B_z) \equiv$ composantes de l'*induction électrique*.

Il est presque inutile d'ajouter que toutes ces expressions doivent être entendues dans un sens *généralisé*.

Retournons aux *équations du champ maxwellien généralisé* données par (II, 324 et 325); à savoir

$$(27) \quad \frac{d\mathcal{H}^{\alpha\beta}}{dx^\beta} = C^\alpha,$$

$$(28) \quad \frac{d\mathcal{H}_*^{\alpha\beta}}{dx^\beta} = C_*^\alpha.$$

On y a posé, pour les courants,

$$(29) \quad C^\alpha \equiv \sigma_{(e)} u^\alpha + \mathcal{L}_{(e)}^\alpha,$$

$$(30) \quad C_*^\alpha \equiv \sigma_{(\mu)} u^\alpha + \mathcal{L}_{(\mu)}^\alpha,$$

où l'indice (e) signifie *électrique*, et l'indice (μ) , *magnétique*.

De (27) et (28), on déduit respectivement

$$(30') \quad \frac{dC^\alpha}{dx^\alpha} = 0, \quad \frac{dC_*^\alpha}{dx^\alpha} = 0.$$

Grâce aux notations (26), les équations électromagnétiques (27) et (28) des corps en mouvement conservent la forme maxwellienne

$$(31) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = \sigma_{(e)} u^4 + \mathcal{L}_{(e)}^4, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \sigma_{(\mu)} u^4 + \mathcal{L}_{(\mu)}^4; \end{cases}$$

$$(32) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \sigma_{(e)} \mathbf{u} + \mathcal{L}_{(e)} \right), \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}^* = \frac{1}{c} \left(-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma_{(\mu)} \mathbf{u} + \mathcal{L}_{(\mu)} \right). \end{cases}$$

Les composantes rectangulaires de vecteur $\sigma_{(e)} \mathbf{u} + \mathcal{L}_{(e)}$ sont

$$\sigma_{(e)} u^i + \mathcal{L}^i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Il en sera de même pour le vecteur $\sigma_{(\mu)} \mathbf{u} + \mathcal{L}_{(\mu)}$.

4. **Hystérèse électromagnétique.** — Par définition ⁽¹⁾, l'*hystérèse électromagnétique* est un quadrivecteur $\mathcal{H}_\alpha^{(e)}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) donné par

$$(33) \quad \mathcal{H}_\alpha^{(e)} \equiv \mathcal{L}_\alpha - \mathcal{F}_\alpha^{(e)}$$

où nous avons posé

$$(33') \quad \mathcal{L}_\alpha \equiv \mathcal{H}_\alpha^{\beta\gamma} \frac{d\mathcal{H}_\beta^{\gamma\delta}}{dx^\delta} - \mathcal{H}_\alpha^{\beta\gamma} \frac{d\mathcal{H}_\beta^{\delta\gamma}}{dx^\delta}.$$

L'expression $\mathcal{L}_\alpha$ donnée par (33') est, en vertu de (II, 159), identique à $\mathcal{F}_\alpha^{(e)}$, dans les systèmes dépourvus de polarisation électrique et magnétique. Il en résulte que l'hystérèse $\mathcal{H}_\alpha^{(e)}$ est essentiellement due à ces polarisations.

En vertu des équations maxwelliennes (27) et (28), l'hystérèse définie par (33) peut aussi s'écrire

$$(34) \quad \mathcal{H}_\alpha^{(e)} \equiv [\mathcal{H}_\alpha^{\beta\gamma} C_\beta - \mathcal{H}_\alpha^{\beta\gamma} C_\gamma^\beta] - \mathcal{F}_\alpha^{(e)}.$$

En coordonnées rectangulaires, on aura les trois composantes spatiales

$$(35) \quad \mathcal{H}_i^{(e)} \equiv \mathcal{L}_i - \mathcal{F}_i^{(e)} \quad (i = 1, 2, 3).$$

⁽¹⁾ Th. DE DONDER, *La Thermodynamique relativiste des systèmes électromagnétiques en mouvement* (C. R. Acad. Sc., Paris, 2 juillet 1928, p. 28-30).

et la composante temporelle ($\alpha = 4$)

$$(36) \quad \mathcal{H}_i^{\alpha} \equiv \mathcal{L}_i - \mathcal{F}_i^{\alpha}.$$

En se reportant aux notations (27), on voit immédiatement que les trois composantes

$$(37) \quad \mathcal{L}_i \equiv \mathcal{H}_i^{\beta} C^{\beta} - \mathcal{H}_i^{\beta} C_i^{\beta} \quad (i = 1, 2, 3)$$

peuvent se mettre sous la forme *vectorielle*

$$(38) \quad \mathcal{L} = [C, \mathcal{B}] + c H^* C^{\dagger} + [C_*, B] - c \mathcal{H} C_*$$

où C est le *courant électrique* représenté dans (32) par

$$(39) \quad C = \sigma_{(e)} u + \mathcal{L}_{(e)},$$

et où C_* est le *courant magnétique* représenté dans (32) par

$$(40) \quad C_* = \sigma_{(u)} u + \mathcal{L}_{(u)}.$$

Enfin, on a posé, dans (38),

$$(41) \quad C^{\dagger} \equiv \sigma_{(e)} u^{\dagger} + \mathcal{L}_{(e)}^{\dagger},$$

$$(42) \quad C_*^{\dagger} \equiv \sigma_{(u)} u^{\dagger} + \mathcal{L}_{(u)}^{\dagger}.$$

En vertu de (II, 229 et 230), on a

$$(42') \quad \sigma_{(e)} u^{\dagger} = \rho; \quad \sigma_{(e)} u^i = \rho v^i \quad (i = 1, 2, 3).$$

L'expression (38) nous permet de dire que (37) représente les composantes de la *force de Lorentz* généralisée, multipliées par c .

Passons à

$$(43) \quad \mathcal{L}_4 \equiv [\mathcal{H}_*^{\beta} C^{\beta} - \mathcal{H}_*^{\beta} C_*^{\beta}],$$

qui figure dans (36). En se reportant aux notations (27), on voit immédiatement que cette expression (43) peut s'écrire *vectoriellement* comme suit

$$(44) \quad \mathcal{L}_4 \equiv -c(H^*, C) + c(\mathcal{H}, C_*).$$

Ce résultat nous permet de dire que (43) représente l'*effet Joule* généralisé, multiplié par c et changé de signe.

5. Théorème de l'impulsion et de l'énergie électromagnétique. —

En vertu de (24) et de (34), on a

$$(45) \quad \mathfrak{E}_\alpha^{\beta(e)} = [\mathcal{H}_\alpha^{\beta} C_\beta - \mathcal{H}_\alpha^{\beta} C_\beta] - \mathfrak{E}_\alpha^{(e)}.$$

Ces quatre équations expriment le *théorème de l'impulsion et de l'énergie électromagnétique*.

Reprenons les coordonnées rectangulaires dextrogyres utilisées ci-dessus, et reportons-nous à (24) que nous écrivons comme suit ⁽¹⁾ :

$$(46) \quad \mathfrak{E}_\alpha^{\beta(e)} \equiv \sum_{\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}_\alpha^{\beta(e)}}{\partial x^\beta} + \Theta_\alpha,$$

où l'on a posé

$$(46') \quad \Theta_\alpha \equiv -\frac{1}{2} g^{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} \mathfrak{E}_\beta^{\gamma(e)}$$

en sous-entendant les signes sommatoires.

Considérons d'abord les trois composantes rectangulaires spatiales; alors (45) et (46) nous donnent, pour $\mathfrak{E}_i^{(e)}$, les expressions

$$(47) \quad \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \mathfrak{E}_i^{\beta(e)}}{\partial x^\beta} + \Theta_i = \sum_{\beta} [\mathcal{H}_i^{\beta} C_\beta - \mathcal{H}_i^{\beta} C_\beta] - \mathfrak{E}_i^{(e)} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Multiplions les deux membres de (47) par

$$(48) \quad \delta v \equiv \delta x \delta y \delta z,$$

et intégrons au volume v pris dans le champ électromagnétique considéré; d'où, en désignant par σ la surface limitant ce volume, et par n la demi-normale extérieure à σ ,

$$(49) \quad \oint [\mathfrak{E}_i^{(e)} \cos(n, x) + \mathfrak{E}_i^{(e)} \cos(n, y) + \mathfrak{E}_i^{(e)} \cos(n, z)] d\sigma + \frac{d}{dt} \int \mathfrak{E}_i^{(e)} \delta v \\ = \int_v \{ [C \cdot \mathfrak{E}]_i + c H_i^* C^4 + [C_* \cdot B]_i - c \mathcal{H}_i C^4 - \mathfrak{E}_i^{(e)} - \Theta_i \} \delta v \\ (i = 1, 2, 3).$$

Nous appellerons

$$(49') \quad \int_v \mathfrak{E}_i^{(e)} \delta v$$

⁽¹⁾ Cf. TH. DE DONDER, *Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein* (Archives du Musée Teyler, 2^e série. t. III, p. 83).

les trois composantes des *quantités de mouvement (ou d'impulsion) du champ électromagnétique*, multipliées par c ; c'est le *vecteur de Max Abraham* généralisé, multiplié par c .

D'autre part, le tableau

$$(49'') \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_1^{1(e)}, & \mathfrak{T}_1^{2(e)}, & \mathfrak{T}_1^{3(e)}, \\ \mathfrak{T}_2^{1(e)}, & \mathfrak{T}_2^{2(e)}, & \mathfrak{T}_2^{3(e)}, \\ \mathfrak{T}_3^{1(e)}, & \mathfrak{T}_3^{2(e)}, & \mathfrak{T}_3^{3(e)} \end{pmatrix}$$

doit être considéré comme le *tenseur électromagnétique de Maxwell* généralisé, multiplié par c .

Passons à la quatrième composante ($\alpha = 4$); alors (45) nous fournit $\mathfrak{T}_4^{(e)}$; à savoir

$$(50) \quad \sum_{\beta=1}^4 \frac{\partial \mathfrak{T}_4^{\beta(e)}}{\partial x_{\beta}} + \Theta_4 = [\mathcal{H}_*^{\bar{\alpha}\beta} C_{\beta} - \mathcal{H}^{\bar{\alpha}\beta} C_*^{\beta}] - \mathcal{H}_4^{(e)}.$$

La relation (50) nous fournit *le bilan énergétique purement électromagnétique*.

Multiplions les deux membres de (50) par δv , et intégrons comme ci-dessus; d'où

$$(51) \quad \oint_{\sigma} [\mathfrak{T}_4^{1(e)} \cos(n, x) + \mathfrak{T}_4^{2(e)} \cos(n, y) + \mathfrak{T}_4^{3(e)} \cos(n, z)] \delta \sigma + \frac{d}{dt} \int_v \mathfrak{T}_4^{(e)} \delta v \\ = \int_v \{ -c(H^* \cdot C) + c(\mathcal{H} \cdot C_*) - \mathcal{H}_4^{(e)} - \Theta_4 \} \delta v.$$

Nous appellerons

$$(51') \quad \mathfrak{T}_1^{(e)}, \quad \mathfrak{T}_2^{(e)}, \quad \mathfrak{T}_4^{(e)}$$

les trois composantes du *vecteur radiant de Poynting* généralisé, multiplié par c .

D'autre part,

$$\mathfrak{T}_4^{4(e)}$$

s'appellera *la densité de l'énergie électromagnétique de Maxwell* généralisée, multipliée par c .

Rappelons que les dimensions des $\mathfrak{T}_{\alpha}^{\beta}$ ou $\sqrt{-g} T_{\alpha}^{\beta}$ ont été données pages 9 et 10 de II (fascicule XIV de ce *Mémorial*).

Remarque. — Il sera intéressant, au point de vue des interpréta-

tions mécanique et énergétique, de remplacer, dans (21), $\mathcal{F}_\alpha^{(c)}$ par ses valeurs données par (47) et (50).

6. **Équation de continuité.** — Retournons aux équations (21) et multiplions-les par u^α ; d'où, en vertu de (I, 210), l'équation de continuité

$$(52) \quad \frac{\partial(\mathcal{H}u^\alpha)}{\partial x^\alpha} + (\mathcal{T}_\alpha + \mathcal{F}_\alpha^{(c)})u^\alpha = 0.$$

En utilisant les notations de la théorie des invariants intégraux ⁽¹⁾, (52) pourra s'écrire

$$(52') \quad \frac{d}{ds}[\mathcal{H}\delta(x^1, \dots, x^4)] = -(\mathcal{T}_\alpha + \mathcal{F}_\alpha^{(c)})u^\alpha\delta(x^1, \dots, x^4).$$

Transformons l'équation (52); reportons-nous à (23) et (16), d'où

$$(53) \quad \frac{\partial(\mathcal{H}u^\alpha)}{\partial x^\alpha} + (\mathfrak{G}_{\alpha,\beta}^{\beta(m)} + \mathfrak{G}_{\alpha,\beta}^{\beta(m,e)} + \mathfrak{G}_{\alpha,\beta}^{\beta(c)})u^\alpha = 0.$$

On vérifiera aisément que

$$(54) \quad \mathfrak{G}_{\alpha,\beta}^{\beta(m)}u^\alpha \equiv \frac{\partial(\mathfrak{G}_\alpha^{\beta(m)}u^\alpha)}{\partial x_\beta} + \mathcal{H}^{(m)}$$

où

$$(55) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}^{(m)} \equiv & -\frac{1}{4}(\mathfrak{G}_\alpha^{\beta(m)} + \mathfrak{G}_\beta^{\alpha(m)})\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x_\alpha}\right) \\ & -\frac{1}{4}(\mathfrak{G}_\alpha^{\beta(m)} - \mathfrak{G}_\beta^{\alpha(m)})\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u^\beta}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{ds}\mathfrak{G}_{(m)}^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

On effectuera la même transformation pour les deux autres termes qui figurent dans (53), et l'on posera

$$(56) \quad \boxed{\begin{aligned} \mathcal{H}^{(m,e)} \equiv & -\frac{1}{4}(\mathfrak{G}_\alpha^{\beta(m,e)} + \mathfrak{G}_\beta^{\alpha(m,e)})\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x_\alpha}\right) \\ & -\frac{1}{4}(\mathfrak{G}_\alpha^{\beta(m,e)} - \mathfrak{G}_\beta^{\alpha(m,e)})\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u^\beta}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{ds}\mathfrak{G}_{(m,e)}^{\alpha\beta}. \end{aligned}}$$

⁽¹⁾ TH. DE DONDER, *Théorie des Invariants intégraux* (Gauthier-Villars, Paris, 1927; voir spécialement p. 32).

et

$$(57) \quad \mathcal{K}^{(e)} \equiv -\frac{1}{4} (\mathfrak{E}_\alpha^{\beta(e)} + \mathfrak{E}_\beta^{\alpha(e)}) \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x_\alpha} \right) \\ - \frac{1}{4} (\mathfrak{E}_\alpha^{\beta(e)} - \mathfrak{E}_\beta^{\alpha(e)}) \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u^\beta}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{1}{2} \frac{d g_{\alpha\beta}}{ds} \mathfrak{E}_\alpha^{\beta(e)}.$$

D'où, enfin, l'équation de continuité devient

$$(58) \quad \frac{\partial [\mathcal{H} u^\beta + (\mathfrak{E}_\alpha^{\beta(m)} + \mathfrak{E}_\alpha^{\beta(m,e)} + \mathfrak{E}_\alpha^{\beta(e)}) u^\alpha]}{\partial x_\beta} + \mathcal{K} = 0$$

où

$$(58') \quad \mathcal{K} \equiv \mathcal{K}^{(m)} + \mathcal{K}^{(m,e)} + \mathcal{K}^{(e)}.$$

Nous dirons que $\mathcal{K}$ est la *puissance totale* (par unité de volume) du système en (x, y, z, t) .

7. Puissance de striction et puissance d'hystérèse. — Nous dirons que $\mathcal{K}^{m,e}$ défini par (56) est la *puissance* (par unité de volume) *de la striction*. En généralisant une hypothèse de la théorie classique de l'électromagnétostriction, nous admettrons ⁽¹⁾ qu'on a

$$(59) \quad \boxed{\mathcal{K}^{(m,e)} = \mathcal{H}_\alpha^{(e)} u^\alpha}.$$

Autrement dit : la *puissance de striction est égale à la puissance d'hystérèse*.

8. Système électromagnétique au repos dans un champ de Minkowski. — En se reportant à (18) et à (26) on trouvera, dans le cas d'un *champ de Minkowski*, le tenseur électromagnétique

⁽¹⁾ Th. DE DONDER, *Thermodynamique relativiste des systèmes électromagnétiques en mouvement* (C. R. Acad. Sc., Paris, t. 187, 2 juillet 1928, p. 28-30).

suivant :

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} T_1^{1(e)} &= \frac{1}{2} [H_x^* B_x - H_y^* B_y - H_z^* B_z + \mathcal{H}_x \mathcal{B}_x - \mathcal{H}_y \mathcal{B}_y - \mathcal{H}_z \mathcal{B}_z], \\ T_2^{2(e)} &= \frac{1}{2} [H_y^* B_y - H_z^* B_z - H_x^* B_x + \mathcal{H}_y \mathcal{B}_y - \mathcal{H}_z \mathcal{B}_z - \mathcal{H}_x \mathcal{B}_x], \\ T_3^{3(e)} &= \frac{1}{2} [H_z^* B_z - H_x^* B_x - H_y^* B_y + \mathcal{H}_z \mathcal{B}_z - \mathcal{H}_x \mathcal{B}_x - \mathcal{H}_y \mathcal{B}_y], \\ T_4^{4(e)} &= \frac{1}{2} [(H^* \cdot B) + (\mathcal{H} \cdot \mathcal{B})], \\ T_1^{2(e)} = T_2^{1(e)} &= \frac{1}{2} [B_x H_y^* + B_y H_x^* + \mathcal{B}_x \mathcal{H}_y + \mathcal{B}_y \mathcal{H}_x], \\ T_1^{3(e)} = T_3^{1(e)} &= \frac{1}{2} [B_x H_z^* + B_z H_x^* + \mathcal{B}_x \mathcal{H}_z + \mathcal{B}_z \mathcal{H}_x], \\ T_2^{3(e)} = T_3^{2(e)} &= \frac{1}{2} [B_y H_z^* + B_z H_y^* + \mathcal{B}_y \mathcal{H}_z + \mathcal{B}_z \mathcal{H}_y], \\ T_1^{4(e)} &= -\frac{1}{c} T_1^{1(e)} = \frac{1}{2c} [H_y^* \mathcal{H}_y + B_z \mathcal{B}_y - H_z^* \mathcal{H}_x - \mathcal{B}_y \mathcal{B}_z], \\ T_2^{4(e)} &= -\frac{1}{c} T_2^{2(e)} = \frac{1}{2c} [H_x^* \mathcal{H}_z + B_z \mathcal{B}_z - H_z^* \mathcal{H}_x - \mathcal{B}_z \mathcal{B}_x], \\ T_3^{4(e)} &= -\frac{1}{c} T_3^{3(e)} = \frac{1}{2c} [H_x^* \mathcal{H}_x + B_y \mathcal{B}_y - H_x^* \mathcal{H}_y - \mathcal{B}_x \mathcal{B}_y]. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_x^{(e)} &= T_1^{1(e)} \cos(nx) + T_2^{2(e)} \cos(ny) + T_3^{3(e)} \cos(nz), \\ \theta_y^{(e)} &= T_1^{2(e)} \cos(nx) + T_2^{2(e)} \cos(ny) + T_3^{3(e)} \cos(nz), \\ \theta_z^{(e)} &= T_1^{3(e)} \cos(nx) + T_2^{3(e)} \cos(ny) + T_3^{3(e)} \cos(nz), \end{aligned} \right.$$

l'axe (n) étant la demi-normale à l'élément de surface auquel s'appliquent les tensions $T_i^{(e)}$. On vérifie alors aisément que $\theta^{(e)}$ donné par (61) peut se mettre sous la forme *vectorielle*

$$(62) \quad \theta^{(e)} = \frac{1}{2} \{ B \cdot (H \cdot N) + [B \cdot [H \cdot N]] + \mathcal{B}(\mathcal{H} \cdot N) + [\mathcal{B} \cdot [\mathcal{H} \cdot N]] \},$$

si l'on représente par N un vecteur dont l'alignement est la demi-normale (n) et dont la valeur algébrique est égale à 1.

Ainsi dans le cas où (n) coïncide avec l'axe des x , les composantes rectangulaires de θ seront précisément $T_1^{1(e)}$, $T_1^{2(e)}$, $T_1^{3(e)}$.

En vertu de la définition (24) de $\mathcal{F}_x^{(e)}$ et de ce que $g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$, on

aura ici $F_{\alpha}^{(e)}$ sous forme de divergence

$$(63) \quad F_{\alpha}^{(e)} = \sum_{\beta} \frac{\partial T_{\alpha}^{\beta(e)}}{\partial x_{\beta}}.$$

Calculons maintenant les quatre composantes de l'hystérèse électromagnétique $\mathcal{H}_{\alpha}^{(e)}$. Reportons-nous à (33); d'où, en utilisant la valeur de $F_{\alpha}^{(e)}$ donnée par (63),

$$(64) \quad H_i^{(e)} \equiv - \sum_j \frac{\partial T_i^{j(e)}}{\partial x_j} - \frac{\partial T_i^{1(e)}}{\partial t} + L_i$$

et

$$(65) \quad H_i^{(e)} \equiv - \sum_j \frac{\partial T_i^{j(e)}}{\partial x_j} - \frac{\partial T_i^{1(e)}}{\partial t} + L_i \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Quant aux valeurs de L_i et de L_4 , elles sont données par (38) et (44); rappelons qu'ici $\mathcal{L}_{\alpha} \equiv cL_{\alpha}$. Nous donnerons plus loin [voir (71)] une autre forme importante de $H_i^{(e)}$.

La première équation (64) peut s'écrire, en vertu de (38),

$$(66) \quad H_i^{(e)} \equiv - \sum_j \frac{\partial T_i^{j(e)}}{\partial x_j} - \frac{\partial T_i^{1(e)}}{\partial t} + \frac{1}{c} [C. \mathcal{B}]_x + H_x^* C_i + \frac{1}{c} [C_* . B]_x - \mathcal{H}_x . C_i$$

ou encore, en utilisant (60),

$$(67) \quad H_i^{(e)} \equiv \frac{1}{c} \left[\left(H^* \frac{\partial B}{\partial x} \right) - \left(B \frac{\partial H^*}{\partial x} \right) + \left(\mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} \right) - \left(\mathcal{B} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right) \right] \\ + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} ([H^* . \mathcal{H}]_x - [B . \mathcal{B}]_x) \\ + \frac{1}{2} \text{rot}_x ([\mathcal{H} . \mathcal{B}] + [H^* . B]).$$

On aura deux expressions analogues pour $H_2^{(e)}$ et $H_3^{(e)}$; à savoir

$$(68) \quad H_2^{(e)} \equiv \frac{1}{c} \left[\left(H^* \frac{\partial B}{\partial y} \right) - \left(B \frac{\partial H^*}{\partial y} \right) + \left(\mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} \right) - \left(\mathcal{B} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \right) \right] \\ + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} ([H^* . \mathcal{H}]_y - [B . \mathcal{B}]_y) \\ + \frac{1}{2} \text{rot}_y ([\mathcal{H} . \mathcal{B}] + [H^* . B])$$

et

$$(69) \quad \begin{aligned} H_i^{(e)} \equiv & \frac{1}{2} \left[\left(H^* \frac{\partial B}{\partial z} \right) - \left(B \frac{\partial H^*}{\partial z} \right) + \left(\mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} \right) - \left(\mathcal{B} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} ([H^* \cdot \mathcal{H}] - [B \cdot \mathcal{B}]_z) \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{rot}_z ([\mathcal{H} \cdot \mathcal{B}] + [H^* \cdot B]). \end{aligned}$$

De même la relation (65) peut s'écrire

$$(70) \quad H_i^{(e)} = - \sum_j \frac{\partial T_{ij}^{(e)}}{\partial x_j} - \frac{\partial T_i^{(e)}}{\partial t} - (H^* \cdot C) + (\mathcal{H} \cdot C_*).$$

En utilisant (60), on trouve enfin

$$(71) \quad \begin{aligned} H_i^{(e)} \equiv & \frac{1}{2} \left[\left(H^* \frac{\partial B}{\partial t} \right) - \left(B \frac{\partial H^*}{\partial t} \right) + \left(\mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right) - \left(\mathcal{B} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right) \right] \\ & + \frac{c}{2} \operatorname{div} ([H^* \cdot \mathcal{H}] - [B \cdot \mathcal{B}]). \end{aligned}$$

Retournons maintenant au principe fondamental de l'électromagnétostriktion (59), et écrivons-le sous la forme

$$(72) \quad K^{(m,e)} = H_i^{(e)} u^i + H_i^{(e)} u^i$$

ou encore, en vertu de (I, 185),

$$(73) \quad K^{(m,e)} = (H_i^{(e)} v^i + H_i^{(e)}) u^i \quad (i = 1, 2, 3).$$

En remplaçant, en première approximation, u^i par c^{-1} , et en intégrant à un volume v , on aura

$$(74) \quad \int_v K^{(m,e)} \delta v = \frac{1}{c} \int_v (H_i^{(e)} v^i + H_i^{(e)}) \delta v.$$

On voit aisément que dans le cas de déformations oscillantes du corps considéré, on pourra supposer qu'on a

$$(75) \quad H_i^{(e)} v^i + \frac{c}{2} \operatorname{div} ([H^* \cdot \mathcal{H}] - [B \cdot \mathcal{B}]) = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Nous pourrions écrire, en vertu de (71),

$$(76) \quad \int_v K^{(m,e)} \delta v = \frac{1}{2c} \int_v \left[\left(H^* \frac{\partial B}{\partial t} \right) - \left(B \frac{\partial H^*}{\partial t} \right) + \left(\mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right) - \left(\mathcal{B} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right) \right] \delta v.$$

Rappelons que (I, 185)

$$(77) \quad u^\alpha = \frac{dx_\alpha}{ds} = \frac{dx_\alpha}{dt} u^t = v^\alpha u^t \quad \text{où} \quad v^t = 1 \quad \text{et} \quad u^t \sim \frac{1}{c}.$$

Posons ensuite

$$(78) \quad x_i = x_i^0 + \lambda_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0; t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

où λ_i représente le déplacement infiniment petit à partir du point initial x_i^0 ($i = 1, 2, 3$); pour $t = 0$, on a $x_i = x_i^0$.

Il en résulte que

$$(79) \quad v^t = \frac{\partial \lambda_i}{\partial t}.$$

Posons $\frac{d\lambda_i}{dt} \equiv \dot{\lambda}_i$; d'où $v^t \equiv \dot{\lambda}_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Adoptons aussi les notations classiques

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_x = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^0}; \quad y_x = \frac{\partial \lambda_2}{\partial y^0}; \quad z_x = \frac{\partial \lambda_3}{\partial z^0}; \\ x_y = y_x = \frac{\partial \lambda_1}{\partial y^0} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^0}; \\ x_z = z_x = \frac{\partial \lambda_1}{\partial z^0} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^0}; \\ y_z = z_y = \frac{\partial \lambda_2}{\partial z^0} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial y^0}, \end{array} \right.$$

et

$$(80') \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega^1 = \omega_x = \frac{\partial \lambda_3}{\partial y^0} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial z^0}; \\ \omega^2 = \omega_y = \frac{\partial \lambda_1}{\partial z^0} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^0}; \\ \omega^3 = \omega_z = \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^0} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial y^0}. \end{array} \right.$$

Il est bon de se rappeler, qu'à un infiniment petit près, on peut identifier x_i^0 avec x_i ($i = 1, 2, 3$); nous pouvons donc, dans (80) et (80'), remplacer les x_i^0 par les x_i . Il en résulte que les expressions qui figurent dans (56) deviennent

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v^1}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{\lambda}_1}{\partial x} = \dot{x}_1; \quad \frac{\partial v^2}{\partial x_1} = \dot{x}_2; \quad \frac{\partial v^3}{\partial x_1} = \dot{x}_3; \\ \frac{\partial v^1}{\partial x_2} + \frac{\partial v^2}{\partial x_1} = \dot{x}_1; \quad \frac{\partial v^1}{\partial x_3} + \frac{\partial v^3}{\partial x_1} = \dot{x}_2; \quad \frac{\partial v^2}{\partial x_3} + \frac{\partial v^3}{\partial x_2} = \dot{x}_3 \end{array} \right.$$

et

$$(81') \quad \dot{\omega}_x = \frac{\partial v^3}{\partial y} - \frac{\partial v^2}{\partial z}; \quad \dot{\omega}_y = \frac{\partial v^1}{\partial z} - \frac{\partial v^3}{\partial x}; \quad \dot{\omega}_z = \frac{\partial v^2}{\partial x} - \frac{\partial v^1}{\partial y},$$

le point au-dessus des $x, y, z, \dots$ indiquant une dérivée partielle par rapport à t .

La puissance de striction $K^{(m,e)}$ peut donc s'écrire, (56), dans cette même approximation (77),

$$(82) \quad \begin{aligned} {}^e K^{(m,e)} \equiv & -\frac{1}{c} \left[T_1^{(m,e)} \dot{x}_x + T_2^{(m,e)} \dot{y}_y + T_3^{(m,e)} \dot{z}_z \right. \\ & + \frac{1}{2} (T_1^{(m,e)} + T_2^{(m,e)}) \dot{x}_y + \frac{1}{2} (T_2^{(m,e)} + T_1^{(m,e)}) \dot{y}_x \\ & + \frac{1}{2} (T_1^{(m,e)} + T_3^{(m,e)}) \dot{z}_x - \frac{1}{2} (T_2^{(m,e)} - T_3^{(m,e)}) \dot{\omega}_z \\ & - \frac{1}{2} (T_2^{(m,e)} - T_3^{(m,e)}) \dot{\omega}_x - \frac{1}{2} (T_3^{(m,e)} - T_1^{(m,e)}) \dot{\omega}_y \\ & \left. + T_1^{(m,e)} \dot{x}_t + T_2^{(m,e)} \dot{y}_t + T_3^{(m,e)} \dot{z}_t \right]. \end{aligned}$$

Retournons au second membre de (76), et admettons qu'on ait

$$(83) \quad H_i = \sum_j \varepsilon'_{ij} B_j; \quad \mathcal{H}_i = \sum_j \mu'_{ij} \mathcal{B}_j.$$

Posons

$$(84) \quad W \equiv T_4^{(e)}.$$

Donc W représente la densité de l'énergie électromagnétique localisée, définie par (60), et l'on aura pour l'énergie localisée dans le volume ν

$$(85) \quad \begin{aligned} \int_\nu W \delta \nu & \equiv \frac{1}{2} \int_\nu [(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) + (\mathcal{H} \cdot \mathcal{B})] \delta \nu \\ & = \frac{1}{2} \int_\nu \sum_i \sum_j (\varepsilon'_{ij} B_i B_j + \mu'_{ij} \mathcal{B}_i \mathcal{B}_j) \delta \nu. \end{aligned}$$

Le second membre de (76) pourra donc s'écrire

$$(86) \quad -\frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{\mathbf{B}, \mathcal{B}} \delta \nu$$

où les indices $\mathbf{B}, \mathcal{B}$ servent à rappeler que la dérivée partielle par rapport à t se fait en laissant les B_i et les $\mathcal{B}_i$ ($i = 1, 2, 3$) constants;

on aura donc

$$(87) \quad -\frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{B, \mathfrak{A}} \delta v = -\frac{1}{2c} \int \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial \varepsilon'_{ij}}{\partial t} B_i B_j + \frac{\partial \mu'_{ij}}{\partial t} \mathfrak{B}_i \mathfrak{B}_j \right) \delta v.$$

Supposons que les coefficients ε'_{ij} et μ'_{ij} soient des fonctions des *déformations linéaires et angulaires* $x_x, \dots, z_z$ des rotations ω^i et des vitesses v^i . Autrement dit la densité W de l'énergie électromagnétique dépend explicitement de

$$(88) \quad \begin{cases} x_x, x_y, x_z; x_j, y_j, z_x, \\ \omega_x, \omega_y, \omega_z; x_t, y_t, z_t. \end{cases}$$

Le second membre de (76) pourra donc s'écrire

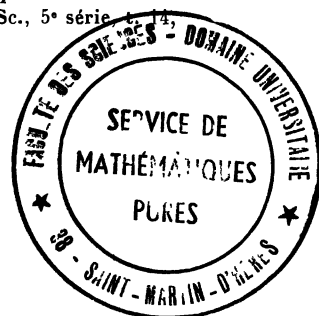
$$(89) \quad -\frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{B, \mathfrak{A}} \delta v \\ \equiv -\frac{1}{c} \int \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\partial W}{\partial x_x} \right)_{B, \mathfrak{A}} \dot{x}_x + \left(\frac{\partial W}{\partial y_y} \right)_{B, \mathfrak{A}} \dot{y}_y + \left(\frac{\partial W}{\partial z_z} \right)_{B, \mathfrak{A}} \dot{z}_z \\ & + \left(\frac{\partial W}{\partial x_y} \right)_{B, \mathfrak{A}} \dot{x}_y + \left(\frac{\partial W}{\partial y_z} \right)_{B, \mathfrak{A}} \dot{y}_z + \left(\frac{\partial W}{\partial z_x} \right)_{B, \mathfrak{A}} \dot{z}_x \\ & + \left(\frac{\partial W}{\partial \omega_x} \right)_{B, \mathfrak{A}} \dot{\omega}_x + \left(\frac{\partial W}{\partial \omega_y} \right)_{B, \mathfrak{A}} \dot{\omega}_y + \left(\frac{\partial W}{\partial \omega_z} \right)_{B, \mathfrak{A}} \dot{\omega}_z \\ & + \left(\frac{\partial W}{\partial x_t} \right)_{B, \mathfrak{A}} \dot{x}_t + \left(\frac{\partial W}{\partial y_t} \right)_{B, \mathfrak{A}} \dot{y}_t + \left(\frac{\partial W}{\partial z_t} \right)_{B, \mathfrak{A}} \dot{z}_t \end{aligned} \right] \delta v.$$

Cette quantité représente la valeur de la *puissance de l'hystérèse électromagnétique*.

Le principe fondamental (76) de l'électrostriction fournit alors immédiatement, par identification de (82) et (89), le tenseur de l'électrostriction ⁽¹⁾

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} T_1^{(m, e)} &= \left(\frac{\partial W}{\partial x_x} \right)_{B, \mathfrak{A}}, \\ T_2^{(m, e)} &= \left(\frac{\partial W}{\partial y_y} \right)_{B, \mathfrak{A}}, \\ T_3^{(m, e)} &= \left(\frac{\partial W}{\partial z_z} \right)_{B, \mathfrak{A}} \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ Th. DE DONDER, *L'électrostriction déduite de la Gravifique einsteinienne* (seconde communication) (*Bull. de l'Ac. Roy. de Belg.*, Cl. des Sc., 5^e série t. ¹⁹²⁴ 44, 21 avril 1928, p. 206-210).



et

$$(91) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} (T_1^{2(m,e)} + T_2^{1(m,e)}) = \left(\frac{\partial W}{\partial x_y} \right)_{B, \omega}, \\ \frac{1}{2} (T_3^{1(m,e)} + T_4^{2(m,e)}) = \left(\frac{\partial W}{\partial y_z} \right)_{B, \omega}, \\ \frac{1}{2} (T_3^{1(m,e)} + T_1^{3(m,e)}) = \left(\frac{\partial W}{\partial z_x} \right)_{B, \omega}; \end{cases}$$

$$(92) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} (T_1^{2(m,e)} - T_3^{1(m,e)}) = - \left(\frac{\partial W}{\partial \omega_z} \right)_{B, \omega}, \\ \frac{1}{2} (T_3^{1(m,e)} - T_2^{2(m,e)}) = - \left(\frac{\partial W}{\partial \omega_x} \right)_{B, \omega}, \\ \frac{1}{2} (T_3^{1(m,e)} - T_1^{3(m,e)}) = - \left(\frac{\partial W}{\partial \omega_y} \right)_{B, \omega}; \end{cases}$$

$$(93) \quad \begin{cases} T_1^{1(m,e)} = \left(\frac{\partial W}{\partial x_t} \right)_{B, \omega}, \\ T_2^{1(m,e)} = \left(\frac{\partial W}{\partial y_t} \right)_{B, \omega}, \\ T_3^{1(m,e)} = \left(\frac{\partial W}{\partial z_t} \right)_{B, \omega}. \end{cases}$$

Dans ces tableaux, ne figurent pas encore

$$(94) \quad T_4^{1(m,e)}, T_2^{3(m,e)}, T_3^{3(m,e)}, T_4^{3(m,e)}$$

Cependant, remarquons que l'on a d'une façon générale,

$$(95) \quad T_{(m,e)}^{\alpha\beta} \equiv T_{(m,e)}^{\beta\alpha} \equiv \sum_{\gamma} g^{\gamma\beta} T_{\gamma}^{\alpha(m,e)} \equiv \sum_{\gamma} g^{\gamma\alpha} T_{\gamma}^{\beta(m,e)}$$

Dans un champ de Minkowski, ces relations deviennent

$$(96) \quad \begin{cases} T_{(m,e)}^{ab} \equiv T_{(m,e)}^{ba} \equiv - T_b^{a(m,e)} = - T_a^{b(m,e)} & (a, b = 1, 2, 3), \\ T_{(m,e)}^{a4} \equiv T_{(m,e)}^{4a} = \frac{1}{c^2} T_4^{a(m,e)} = - T_a^{4(m,e)}, \\ T_{(m,e)}^{44} \equiv \frac{1}{c^2} T_4^{4(m,e)}. \end{cases}$$

Il résulte de (96) qu'ici les $T_a^{b(m,e)}$ sont symétriques ($a, b = 1, 2, 3$); donc, en vertu de (92), la fonction W ne renfermera pas $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ explicitement. Il résulte de (96), que les $T_4^{a(m,e)}$ ne diffèrent de $T_a^{4(m,e)}$ fournis par (93), que par le facteur $(-c^2)$.

Dans un champ de Minkowski, nous avons donc calculé toutes

les composantes du tenseur $T_{\alpha}^{(\beta, m, e)}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, 4$), sauf $T_4^{(4, m, e)}$; on sait que $T_4^{(4, m, e)}$ a les dimensions de l'énergie par unité de volume; il y aura donc lieu de l'égaliser à la densité de l'énergie élastique (de déformation). On pourrait aussi reprendre toutes ces théories *dans l'espace temps*, grâce aux *corps parfaits* définis en (II, 328).

9. Tensions de radiation. — Envisageons avec Léon Brillouin ⁽¹⁾ le cas d'une *onde électromagnétique* se propageant suivant l'axe des x ; soient H , (ou H_z) le champ électrique, $\mathcal{H}$ le champ magnétique. On aura, en vertu de (84), et de la définition d'une onde électromagnétique ⁽²⁾

$$(97) \quad W = B.H = \alpha.B.\mathcal{H}.$$

La vitesse de l'onde sera donc

$$(98) \quad V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

où ε et μ sont respectivement le *pouvoir inducteur spécifique* et la *perméabilité magnétique* du système considéré. On pourra donc écrire

$$B = \varepsilon H \quad \text{et} \quad \alpha B = \mu \mathcal{H}.$$

D'autre part, on a, pour la matière,

$$(99) \quad \frac{\partial \log D}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} (x_r + y_j + z_z),$$

où D représente la densité massique; d'où, pour un corps isotrope, on aura, en vertu de (90),

$$(100) \quad T_4^{(4, m, e)} = T_2^{(2, m, e)} = T_3^{(3, m, e)} = \left(\frac{\partial W}{\partial x_r} \right)_{B, \alpha} = \left(\frac{\partial W}{\partial y_j} \right)_{B, \alpha} = \left(\frac{\partial W}{\partial z_z} \right)_{B, \alpha} \\ = \left(\frac{\partial W}{\partial (x_r + y_j + z_z)} \right)_{B, \alpha} = - \left(\frac{\partial W}{\partial \log D} \right)_{B, \alpha}$$

⁽¹⁾ LÉON BRILLOUIN, *Les tensions de radiation; leur interprétation en mécanique classique et en relativité* (Journ. de Phys., 6^e série, t. VI, n° 11, p. 337-353).

⁽²⁾ Ici l'énergie électrique est égale à l'énergie magnétique, ou $\frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\alpha\mathcal{H}$

En vertu de (97) et (98), on obtient aisément

$$(101) \quad = -W \left(\frac{\partial \log \mathbf{V}}{\partial \log D} \right)_{B, \mathfrak{A}}.$$

En formant, grâce à (60) et (90) à (93), le tenseur, à la fois, électromagnétique et de striction,

$$(102) \quad \parallel T_{\alpha}^{\beta(e)} + T_{\alpha}^{\beta(m,e)} \parallel$$

et, en passant de là, grâce aux formules (96) et (101), au tenseur deux fois contravariant,

$$(103) \quad \parallel T^{\alpha\beta(e)} + T^{\alpha\beta(m,e)} \parallel$$

on obtient (1) enfin, en se reportant à (60) et aux hypothèses énoncées au début du présent paragraphe, le *tenseur de L. Brillouin complété* :

(1) Ce passage de la théorie générale de Th. De Donder à celle de L. Brillouin a été effectué par Jean Pelseeneer (*Bull. Ac. Roy. Belg.*, Cl. des Sc., 5^e série, t. XIV, le 7 juillet 1928).

ADDENDA.

—

La théorie générale qui vient d'être exposée au paragraphe 8, et qui nous a fourni le tenseur $T_{\alpha}^{\beta(m,e)}$ d'électromagnetostriction, peut être remplacée par une théorie entièrement relativiste, c'est-à-dire conservant la forme invariante dans l'espace temps; cette théorie est basée sur la Thermodynamique relativiste développée plus loin, au Chapitre II de ce fascicule. Pour plus de détails on se reportera à la note intitulée *Théorie relativiste de l'électromagnétostriction*, par M^{lle} Y. DUPONT et Th. DE DONDER (*Bull. Ac. R. Belgique*, Cl. des Sciences, séance du 2 août 1932).

(104)

$$-W - W \frac{\partial \log V}{\partial \log D}$$
$$0$$
$$0$$

$$\left[\frac{1 + \left(\frac{c}{V}\right)^2}{2} \right] + \left(\frac{\partial W}{\partial x_t} \right)_{B, \mathfrak{A}}$$
$$-\frac{VW}{c^2}$$
$$0$$
$$-\frac{1}{2} [W + T_4^{(m, e)}]$$

[10. Application au champ de Minkowski. Formule de Helmholtz-Lippmann. — Reprenons le théorème de l'impulsion et de l'énergie, (21),

$$(105) \quad F_{\alpha} \equiv N_{\alpha} + P_{\alpha} + F_{\alpha}^{(e)} = 0,$$

dans le cas du champ de Minkowski.

Nous avons alors, (22) et (23),

$$(106) \quad N_{\alpha} = N_{\alpha} + u_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial (Nu^{\beta})}{\partial x^{\beta}},$$

$$(107) \quad P_{\alpha} \equiv \sum_{\beta} \frac{\partial P_{\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\beta}},$$

où l'on a posé, (16),

$$(108) \quad P_{\alpha}^{\beta} \equiv T_{\alpha}^{\beta(m)} + T_{\alpha}^{\beta(m,e)}.$$

Il en résulte

$$(109) \quad P_{\alpha} \equiv \sum_{\beta} \left(\frac{\partial T_{\alpha}^{\beta(m)}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial T_{\alpha}^{\beta(m,e)}}{\partial x^{\beta}} \right).$$

Considérons le cas de corps massiques parfaits *isotropes* et *au repos*, et supposons *négligeables les variations de la densité massique dans le temps*, ainsi que les *tensions de Maxwell*. Il résulte alors des dernières hypothèses, en vertu de (22) et de (24), que

$$(110) \quad N_{\alpha} = 0, \quad F_{\alpha}^{(e)} = 0.$$

Le fluide massique étant supposé parfait, nous poserons, en vertu de (II, 66),

$$(111) \quad T_{\alpha}^{\beta(m)} = -\delta_{\alpha}^{\beta} p,$$

où δ_{α}^{β} vaut un ou zéro suivant que α est égal à β , ou différent de β .

D'autre part, reportons-nous aux valeurs (100) que nous avons trouvées pour le tenseur de l'électrostriction dans le cas de corps isotropes. En introduisant dans P_{α} les valeurs de $T_{\alpha}^{\beta(m)}$ et $T_{\alpha}^{\beta(m,e)}$ on trouve immédiatement, en coordonnées rectangulaires,

$$(112) \quad -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \log D} \right)_{B, \alpha} \right] = 0$$

et deux analogues par rapport aux axes y et z .

La grandeur W qui figure dans ces formules est égale à la somme des densités des énergies électrique et magnétique; à savoir, (85),

$$(113) \quad W = W_e + W_\mu,$$

où l'on a

$$(114) \quad W_e = \frac{1}{2} B \cdot H \quad \text{et} \quad W_\mu = \frac{1}{2} \mathcal{B} \cdot \mathcal{H},$$

avec

$$(115) \quad B = \varepsilon H, \quad \mathcal{B} = \mu \mathcal{H},$$

ε et μ étant respectivement la constante diélectrique et la perméabilité magnétique. Les formules ci-dessus peuvent alors s'écrire

$$(116) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[W_e \frac{\partial \log \varepsilon}{\partial \log D} + W_\mu \frac{\partial \log \mu}{\partial \log D} - p \right] = 0, \quad \dots, \quad \dots$$

En intégrant, on obtient

$$(117) \quad W_e \frac{\partial \log \varepsilon}{\partial \log D} + W_\mu \frac{\partial \log \mu}{\partial \log D} - p = -p_0.$$

où p_0 représente la valeur du premier membre en un point où l'électromagnétostriktion est nulle.

Soit $f(D)$ l'expression de la pression en fonction de la densité. En développant en série de Taylor, on a approximativement

$$(118) \quad p - p_0 = \left[\frac{\partial f(D)}{\partial D} \right]_0 (D - D_0).$$

En comparant les équations (117) et (118), on obtient la *formule de Helmholtz-Lippmann*

$$(119) \quad \boxed{\left(\frac{\partial f(D)}{\partial D} \right)_0 (D - D_0) = W_e \frac{\partial \log \varepsilon}{\partial \log D} + W_\mu \frac{\partial \log \mu}{\partial \log D}}$$

11. Système électromagnétique au repos. — Nous avons montré au paragraphe 3 comment, grâce au tableau (26), on pouvait écrire les équations (27) et (28) sous forme maxwellienne. Retournons aux tenseurs antisymétriques $\mathfrak{T}_{(e)}^{\alpha\beta}$ et $\mathfrak{T}_{(m)}^{\alpha\beta}$ que nous avons introduits en (7) et (8). Ces tenseurs ont été appelés (II, p. 50) *forces de polarisation électrique et magnétique* et ils ont été définis par les expres-

sions :

$$(120) \quad \mathcal{P}_{(e)}^{\alpha\beta} = \mathcal{P}_{(e)}^{\alpha} u^{\beta} - \mathcal{P}_{(e)}^{\beta} u^{\alpha}$$

et

$$(121) \quad \mathcal{P}_{(\mu)}^{\alpha\beta} = \mathcal{P}_{(\mu)}^{\alpha} u^{\beta} - \mathcal{P}_{(\mu)}^{\beta} u^{\alpha},$$

où $\mathcal{P}_{(e)}^{\alpha}$ et $\mathcal{P}_{(\mu)}^{\alpha}$ sont respectivement les quatre composantes des *intensités de polarisation électrique et magnétique*.

En chaque point où se trouve de la masse, nous aurons, puisque le système est supposé au repos,

$$(122) \quad u^1 = u^2 = u^3 = 0$$

et

$$(123) \quad u^4 = (g_{44})^{-\frac{1}{2}}.$$

Il résulte de ceci que

$$(124) \quad P_{(e)}^{\prime j} = 0,$$

$$(125) \quad P_{(e)}^{i4} = P_{(e)}^i u^4,$$

et de même

$$(126) \quad P_{(\mu)}^{\prime j} = 0,$$

$$(127) \quad P_{(\mu)}^{i4} = P_{(\mu)}^i u^4.$$

En identifiant les formules (7) et (8) avec les formules classiques

$$(128) \quad B = H + P,$$

$$(129) \quad \mathcal{B} = \mathcal{H} + \mathcal{P},$$

on doit poser

$$(130) \quad \begin{cases} \mathcal{H}^{ij} = \mathcal{K}^{ij}, \\ \mathcal{H}_*^{ij} = \mathcal{K}_*^{ij} \end{cases}$$

et

$$(131) \quad \begin{cases} \mathcal{H}^{14} = -H_x, & \mathcal{H}_*^{14} = \mathcal{H}_x, \\ \mathcal{H}^{24} = -H_y, & \mathcal{H}_*^{24} = \mathcal{H}_y, \\ \mathcal{H}^{34} = -H_z, & \mathcal{H}_*^{34} = \mathcal{H}_z, \end{cases}$$

et, en outre, pour les composantes des polarisations électriques et

magnétiques P et $\mathcal{Q}$,

$$(132) \quad \begin{cases} P_x = \mathcal{E}_{(e)}^1 u^1, & \mathcal{Q}_x = \mathcal{E}_{(\mu)}^1 u^1, \\ P_y = \mathcal{E}_{(e)}^2 u^1, & \mathcal{Q}_y = \mathcal{E}_{(\mu)}^2 u^1, \\ P_z = \mathcal{E}_{(e)}^3 u^1, & \mathcal{Q}_z = \mathcal{E}_{(\mu)}^3 u^1, \end{cases}$$

En résumé, on a donc le *système d'équations maxwelliennes* suivant [(31), (32), (7) et (8)]

$$(133) \quad \operatorname{div} B = \sigma_{(e)} u^4 + \mathcal{E}_{(e)}^4, \quad \operatorname{rot} \mathcal{C} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \sigma_{(e)} u + \mathcal{E}_{(e)} \right),$$

$$(134) \quad -\operatorname{div} \mathcal{B} = \sigma_{(\mu)} u^4 + \mathcal{E}_{(\mu)}^4, \quad \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \left(-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \sigma_{(\mu)} u + \mathcal{E}_{(\mu)} \right),$$

où

$$(135) \quad \begin{cases} B = H + P, \\ \mathcal{B} = \mathcal{H} + \mathcal{Q}. \end{cases}$$

Extension. — Les conditions (130) expriment que

$$(136) \quad \mathcal{E}_{(e)}^{ij} = \mathcal{E}_{(\mu)}^{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Si celles-ci sont remplies, on pourra, pour un système *en mouvement* dans un champ gravifique quelconque, conserver les interprétations (131) et (133 à 135) où

$$(137) \quad P \begin{cases} P_x \equiv \mathcal{E}_{(e)}^1 u^4 - \mathcal{E}_{(e)}^1 u^1, \\ \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots, \end{cases} \quad \mathcal{Q} \begin{cases} \mathcal{Q}_x \equiv \mathcal{E}_{(\mu)}^1 u^4 - \mathcal{E}_{(\mu)}^1 u^1, \\ \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Rappelons que dans les systèmes considérés ici, les forces électriques et magnétiques *appliquées* (eingepragt) sont supposées *nulles*.

CHAPITRE II.

APPLICATION A LA THERMODYNAMIQUE.

12. Premier principe de la Thermodynamique relativiste. — En se reportant aux équations (52) à (58') on peut écrire le *premier*

principe sous la forme (1)

$$(138) \quad \frac{d}{ds} [\mathfrak{U} \delta(x_1 \dots x_i)] = \mathfrak{Q} \delta(x_1 \dots x_i) - \mathfrak{K} \delta(x_1 \dots x_i),$$

ou encore sous la forme équivalente

$$(139) \quad \sum_a \frac{\partial(\mathfrak{U} u^a)}{\partial x_a} = \mathfrak{Q} - \mathfrak{K}.$$

Utilisons les coordonnées rectangulaires dextrogyres. La relation (139) s'écrira :

$$(140) \quad \sum_{\alpha} \frac{\partial(\mathfrak{U} V^{-1} v^{\alpha})}{\partial x_{\alpha}} = \mathfrak{Q} - \mathfrak{K},$$

où

$$(141) \quad v^{\alpha} \equiv \frac{dx^{\alpha}}{dt} \quad \text{et} \quad V \equiv \frac{ds}{dt}.$$

Multiplions les deux membres de (140) par δv défini par (48), d'où, en vertu de la théorie des invariants intégraux,

$$(142) \quad \frac{d}{dt} \int_{\nu} \mathfrak{U} V^{-1} \delta v = \int_{\nu} \mathfrak{Q} \delta v - \int_{\nu} \mathfrak{K} \delta v.$$

Posons

$$(143) \quad \overline{V^{-1}} \int_{\nu} \mathfrak{U} \delta v \equiv \int_{\nu} \mathfrak{U} V^{-1} \delta v,$$

où $\overline{V^{-1}}$ représente la moyenne de V^{-1} prise dans tout le système considéré, ainsi que

$$(144) \quad U \equiv \frac{1}{c} \int_{\nu} \mathfrak{U} \delta v,$$

$$(145) \quad \frac{dQ}{dt} \equiv \int_{\nu} \frac{V}{c} \mathfrak{Q} \delta v \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{V}}{c} \int_{\nu} \mathfrak{Q} \delta v,$$

(1) TH. DE DONDER, *Comptes rendus, Ac. des Sc.*, Paris, t. 186, p. 1599-1601, et t. 187, p. 28-30.

Nous donnons ci-dessous les dimensions respectives des grandeurs utilisées, à savoir :

$$\mathfrak{Q} \delta x \delta y \delta z \delta t \equiv \text{énergie}$$

$$\mathfrak{K} \delta x \delta y \delta z \delta t \equiv \text{énergie}$$

$$\mathfrak{U} \delta x \delta y \delta z \delta t \equiv \text{énergie} \times \text{longueur}$$

en représentant par $\bar{V}$ la moyenne de V prise dans le système considéré.

Alors l'équation (142) s'écrit

$$(146) \quad \frac{d}{dt} [c \bar{V}^{-1} U] = \frac{dQ}{dt} \frac{c}{\bar{V}} - \int_v \mathcal{K} \delta v.$$

Nous dirons que U est l'énergie intense du corps à l'instant t et que dQ est la chaleur reçue par ce corps pendant dt .

Étudions maintenant le terme $\int_v \mathcal{K} \delta v$ qui figure dans (146), en nous limitant au cas du *fluide parfait* de pression (positive) p . En nous reportant à (58') ainsi qu'à (II, 66), nous aurons :

$$(147) \quad \mathcal{K} \sim - \sum_{\alpha} \mathfrak{E}_{\alpha}^{\alpha} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \quad \text{ou} \quad + cp \sum_{\alpha} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}},$$

en négligeant les dérivées des $g_{\alpha\beta}$ par rapport à s .

Substituons (147) dans (146) : d'où

$$(148) \quad \frac{d}{dt} [c \bar{V}^{-1} U] = \frac{dQ}{dt} \frac{c}{\bar{V}} - c \bar{p} \int_v \sum_{\alpha} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \delta v$$

où $\bar{p}$ est la valeur moyenne de p dans le volume v à l'instant t considéré.

En intégrant

$$(149) \quad \int_v \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u^i}{\partial x_i} \delta v \quad \text{ou} \quad \int_v \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (V^{-1} v^i)}{\partial x_i} \delta v,$$

on aura, pour (148),

$$(150) \quad \frac{d}{dt} [c \bar{V}^{-1} U] = \frac{dQ}{dt} \frac{c}{\bar{V}} - \bar{p} c \bar{V}^{-1} \oint_{\sigma} v_v \delta \sigma + cp \frac{\partial u^k}{\partial t} dv,$$

où v_v représente la composante suivant la demi normale v *extérieure* au corps en un point de l'élément $\delta \sigma$ pris sur la surface fermée σ limitant ce corps.

Or, on a

$$(151) \quad \oint_{\sigma} v_v \delta \sigma \equiv \frac{dv}{dt}.$$

Donc (150) fournit, en première approximation, le premier prin-

cipe de la thermodynamique *classique* :

$$(152) \quad dU = dQ - \bar{p} dv.$$

13. Deuxième principe de la Thermodynamique. — En relativité générale, nous écrirons ce second principe comme suit :

$$(153) \quad \boxed{\frac{d}{ds} [\mathcal{S} \delta(x^1 \dots x^4)] = \frac{\mathcal{Q} + \mathcal{Q}^*}{T^*} \delta(x_1 \dots x^4),}$$

où $\mathcal{S}$ est le facteur de densité *entropique*; où $\mathcal{Q}^*$ est le facteur (positif) d'apport de chaleur *non compensée* (ou de viscosité physico-chimique); où enfin, T^* est le scalaire (positif) *thermique*.

De (153), on déduit que (1)

$$(154) \quad \sum_{\alpha} \frac{\partial (\mathcal{S} u^{\alpha})}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\mathcal{Q} + \mathcal{Q}^*}{T^*}.$$

Retournons à l'image euclidienne; on aura, comme au (142),

$$(155) \quad \frac{d}{dt} \int_{\nu} \mathcal{S} V^{-1} \delta \nu = \frac{1}{T^*} \int_{\nu} (\mathcal{Q} + \mathcal{Q}^*) \delta \nu,$$

où $\overline{T^*}$ est la moyenne de T^* dans le système considéré.

Posons maintenant

$$(156) \quad S \equiv \int_{\nu} \mathcal{S} V^{-1} \delta \nu,$$

et, comme au (145).

$$(157) \quad \frac{dQ^*}{dt} \equiv \frac{\bar{V}}{c} \int_{\nu} \mathcal{Q}^* \delta \nu.$$

Alors l'équation (155) deviendra

$$(158) \quad dS = \frac{c}{\overline{T^*} \bar{V}} (dQ + dQ^*).$$

Posons

$$(159) \quad T \equiv T^* \frac{\bar{V}}{c},$$

(1) Dans le cas où le système est isolé ($\mathcal{Q} = 0$), on retrouve ainsi l'équation de Tolman (*Proc. Nat. Ac. Washington*, t. 14, 1928, p. 368 à 372).

d'où l'équation différentielle exprimant le *second principe* de la thermodynamique *classique*

$$(160) \quad dS = \frac{dQ + dQ^*}{T}.$$

14. Thermodynamique des systèmes électromagnétiques doués d'hystérèse et animés d'un mouvement quelconque. — Utilisons le premier principe de la Thermodynamique en substituant (58') dans (138) et en tenant compte de (59); d'où

$$(161) \quad \frac{d}{ds} [\mathfrak{U} \delta(x^1 \dots x^4)] = \mathfrak{Q} \delta(x^1 \dots x^4) - [\mathcal{H}^{(m)} + \mathcal{H}_\alpha^{(e)} u^\alpha + \mathcal{H}^{(e)}] \delta(x^1 \dots x^4).$$

Utilisons maintenant le second principe de la Thermodynamique en substituant (161) dans (153), d'où

$$(162) \quad \frac{d}{ds} [\mathfrak{U} \delta(x^1 \dots x^4)] - T^* \frac{d}{ds} [\mathfrak{S} \delta(x^1 \dots x^4)] = -[\mathcal{H}^{(m)} + \mathcal{H}_\alpha^{(e)} u^\alpha + \mathcal{H}^{(e)}] \delta(x^1 \dots x^4) - \mathfrak{Q}^* \delta(x^1 \dots x^4).$$

On pourra faire apparaître, dans cette relation, la fonction $U - T^* S$ qui généraliserait l'*énergie libre*.

CHAPITRE III.

LA RELATIVITÉ RESTREINTE.

15. La transformation de Voigt-Lorentz. — Nous avons montré (I, 58) comment on pouvait obtenir la transformation de Voigt-Lorentz qui se trouve à la base de la Relativité restreinte, à savoir

$$(163) \quad x = \beta(x' + v t'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \beta\left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right),$$

où nous avons posé

$$(164) \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

On sait que cette transformation laisse invariante la forme quadratique de Minkowski

$$(165) \quad \delta s^2 \equiv -\delta x^2 - \delta y^2 - \delta z^2 + c^2 \delta t^2,$$

autrement dit, on aura

$$(166) \quad \delta s' \equiv \delta s'^2 \equiv -\delta x'^2 - \delta y'^2 - \delta z'^2 + c^2 \delta t'^2.$$

Rappelons que le jacobien de ces transformations vaut 1 ; on aura donc

$$(167) \quad \frac{\partial(x)}{\partial(x')} = \frac{\partial(x')}{\partial(x)} = 1.$$

Il en résulte qu'ici il n'y aura pas de différence entre un multiplicateur et un invariant, ou entre les composantes tensorielles d'un tenseur (lettres rondes) et les composantes ordinaires.

16. Variance d'un élément de volume. — Considérons avec le spectateur S , à l'instant t , un élément de volume

$$\delta v = \delta x \delta y \delta z$$

avec

$$(168) \quad \delta t = 0.$$

En vertu de (163), on aura

$$(169) \quad \delta x' = \beta \delta x, \quad \delta y' = \delta y, \quad \delta z' = \delta z,$$

ce qui donne, pour l'élément de volume, exprimé en variable de S'

$$\delta v \equiv \beta^{-1} \delta x' \delta y' \delta z'.$$

Posons, avec S' ,

$$(170) \quad \delta v' \equiv \delta x' \delta y' \delta z';$$

d'où

$$(171) \quad \boxed{\delta v = \beta^{-1} \delta v'}$$

On a ici $\delta t' = -\frac{\beta v}{c^2} \delta x$, ce qui est, en général, différent de zéro.

Mais si les points (x', y', z') et $(x' + \delta x', y' + \delta y', z' + \delta z')$ considérés sont *au repos* par rapport à S' , cela permet de considérer $\delta v'$ comme le volume *géométrique* étudié par S' (à l'instant t) et correspondant à celui étudié par S (à l'instant t).

17. Covariances et contravariances. — Nous allons montrer, dans ce paragraphe, comment se transforment successivement les composantes d'un vecteur quadridimensionnel, d'un tenseur deux fois covariant ou contravariant et enfin d'un tenseur mixte, lorsqu'on applique la transformation de Lorentz (163).

Composantes contravariantes d'un vecteur et ses transformées :

$$(172) \quad \begin{cases} A^1 = \beta(A'^1 + v A'^4), \\ A^2 = A'^2, \\ A^3 = A'^3, \\ A^4 = \beta\left(A'^4 + \frac{v}{c^2} A'^1\right). \end{cases}$$

Composantes covariantes d'un vecteur et ses transformées :

$$(173) \quad \begin{cases} A_1 = \beta\left(A'_1 - \frac{v}{c^2} A'_4\right), \\ A_2 = A'_2, \\ A_3 = A'_3, \\ A_4 = \beta(A'_4 - v A'_1). \end{cases}$$

Composantes d'un tenseur antisymétrique doublement covariant $B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}$, et ses transformées :

$$(174) \quad \begin{cases} B_{12} = \beta\left(B'_{12} + \frac{v}{c^2} B'_{24}\right), \\ B_{13} = \beta\left(B'_{13} + \frac{v}{c^2} B'_{34}\right), \\ B_{14} = B'_{14}, \\ B_{23} = B'_{23}, \\ B_{24} = \beta(B'_{24} - v B'_{21}), \\ B_{34} = \beta(B'_{34} - v B'_{31}). \end{cases}$$

Composantes d'un tenseur antisymétrique doublement contra-variant $B^{\alpha\beta} \equiv -B^{\beta\alpha}$, *et ses transformées :*

$$(175) \quad \left\{ \begin{array}{l} B^{1'} = \beta(B'^{10} + v B'^{40}), \\ B^{13} = \beta(B'^{13} + v B'^{43}), \\ B^{14} = B'^{14}, \\ B^{23} = B'^{23}, \\ B^{24} = \beta\left(B'^{24} + \frac{v}{c^2} B'^{21}\right), \\ B^{34} = \beta\left(B'^{34} + \frac{v}{c^2} B'^{31}\right). \end{array} \right.$$

Composantes d'un tenseur mixte :

$$(176) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1^1 = \beta^2 \left(T'^1 - \frac{v^2}{c^2} T'^4 - 2 \frac{v}{c^2} T'^1 \right), \\ T_2^2 = T'^2, \\ T_3^3 = T'^3, \\ T_4^4 = \beta^2 \left(-\frac{v^2}{c^2} T'^1 + T'^4 + 2 \frac{v}{c^2} T'^1 \right), \\ T_1^2 = T_2^1 = \beta \left(T'^2 - \frac{v}{c^2} T'^2 \right), \\ T_1^3 = T_3^1 = \beta \left(T'^3 - \frac{v}{c^2} T'^3 \right), \\ T_2^3 = T_3^2 = T'^3, \\ T_1^4 = -\frac{1}{c^2} T_4^1 = \beta^2 \left[T'^1 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v}{c^2} (T'^4 - T'^1) \right], \\ T_2^4 = -\frac{1}{c^2} T_4^2 = \beta \left[T'^4 + \frac{v}{c^2} T'^1 \right], \\ T_3^4 = -\frac{1}{c^2} T_4^3 = \beta \left[T'^4 + \frac{v}{c^2} T'^1 \right]. \end{array} \right.$$

18. Variances de la force électrique, de la force magnétique, et de la densité électrique. — Appliquons le tableau (175) aux tenseurs $\mathcal{H}'^{14}$, $\mathcal{H}'^{24}$, $\mathcal{H}'^{34}$ et $\mathcal{H}'^{14}$, $\mathcal{H}'^{24}$, $\mathcal{H}'^{34}$, et tenons compte de (130) et des notations (131) et (26); nous trouvons les covariances :

$$(177) \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_x = H'_x, & \mathcal{H}_x = \mathcal{H}'_x, \\ H_y = \beta \left(H'_y + \frac{v}{c} \mathcal{H}'_z \right), & \mathcal{H}_y = \beta \left(\mathcal{H}'_y - \frac{v}{c} H'_z \right), \\ H_z = \beta \left(H'_z - \frac{v}{c} \mathcal{H}'_y \right), & \mathcal{H}_z = \beta \left(\mathcal{H}'_z + \frac{v}{c} H'_y \right). \end{array} \right.$$

Passons maintenant à la covariance de la densité électrique. Nous avons posé (II, 230), pour la densité électrique,

$$(178) \quad \rho = \frac{\sigma}{V} = \sigma u^4.$$

Rappelons que σ est un multiplicateur (II, 170); nous aurons donc ici, en passant de S' à S ,

$$(179) \quad \sigma = \sigma'.$$

Le tableau (172) nous donne immédiatement la variance de u^4 ; à savoir

$$(180) \quad u'^4 = \beta \left(u^4 - \frac{v}{c^2} u^1 \right) = \beta u^4 \left(1 - \frac{v}{c} \frac{dx}{dt} \right).$$

Nous aurons donc

$$(181) \quad \rho' = \sigma' u'^4 = \sigma u^4 \beta \left(1 - \frac{v}{c} \frac{dx}{dt} \right),$$

ou encore

$$(182) \quad \boxed{\rho' = \rho \beta \left(1 - \frac{v}{c} \frac{dx}{dt} \right).}$$

Remarquons que $\frac{dx}{dt}$ qui figure dans (181) est la vitesse suivant x , de l'électricité considérée par S .

19. Invariance de la charge électrique. — Il résulte immédiatement des formules (182) et (171) l'invariance de la charge électrique. Si nous considérons, en effet, une charge au repos par rapport à S' nous devons poser

$$(183) \quad \frac{dx}{dt} = v;$$

(182) devient donc

$$(183) \quad \rho = \rho' \beta.$$

En multipliant (183) et (171) membre à membre, on obtient

$$\rho \delta v = \rho' \delta v',$$

ou encore

$$(184) \quad \delta e = \delta e',$$

ce qui exprime l'invariance de la charge électrique.

20. **Phénomène de Doppler et aberration des fixes.** — Considérons avec Einstein un système d'ondes planes de fréquence ν , dans le système *fixe* ($O; x, y, z$); ce champ électromagnétique sera défini par

$$(185) \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_x = H_x^0 \sin \theta, & \mathcal{H}_x = \mathcal{H}_x^0 \sin \theta, \\ H_y = H_y^0 \sin \theta, & \mathcal{H}_y = \mathcal{H}_y^0 \sin \theta, \\ H_z = H_z^0 \sin \theta, & \mathcal{H}_z = \mathcal{H}_z^0 \sin \theta, \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$(186) \quad \theta \equiv 2\pi\nu \left[t - \frac{1}{c}(x \cos n x + y \cos n y + z \cos n z) \right].$$

Le symbole n représente la demi-normale au plan de l'onde

$$(187) \quad x \cos n x + y \cos n y + z \cos n z = \text{const.},$$

cette demi-normale étant tracée *dans le sens de la propagation de l'onde*.

Passons au système ($O'; x', y', z'$); les transformées de (185) seront, (175),

$$(188) \quad \left\{ \begin{array}{ll} H'_{x'} = H_x^0 \sin \theta, & \mathcal{H}'_{x'} = \mathcal{H}_x^0 \sin \theta, \\ H'_{y'} = \beta \left(H_y^0 - \frac{\nu}{c} \mathcal{H}_z^0 \right) \sin \theta, & \mathcal{H}'_{y'} = \beta \left(\mathcal{H}_y^0 + \frac{\nu}{c} H_z^0 \right) \sin \theta, \\ H'_{z'} = \beta \left(H_z^0 + \frac{\nu}{c} \mathcal{H}_y^0 \right) \sin \theta, & \mathcal{H}'_{z'} = \beta \left(\mathcal{H}_z^0 - \frac{\nu}{c} H_y^0 \right) \sin \theta. \end{array} \right.$$

Dans le système mobile, le spectateur S' écrira pour l'onde plane observée, des relations analogues à (185)

$$(189) \quad \left\{ \begin{array}{ll} H'_{x'} = H'_{x'} \sin \theta', & \mathcal{H}'_{x'} = \mathcal{H}'_{x'} \sin \theta', \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

où

$$(190) \quad \theta' \equiv 2\pi\nu' \left[t' - \frac{1}{c}(x' \cos n' x' + y' \cos n' y' + z' \cos n' z') \right].$$

En vertu de (185) et de (188), on aura $H_x = H'_{x'}$; d'où en vertu de (185) et de (189)

$$(191) \quad \theta' = \theta.$$

Dans (186) remplaçons x, y, z et t par leurs valeurs tirées de la

transformation de Lorentz (163). De là, résultent les quatre relations

$$(192) \quad \boxed{\nu' = \nu \beta \left(1 - \frac{v}{c} \cos nx \right)},$$

$$(193) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos n' x' = \frac{\cos nx - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos nx}, \\ \cos n' y' = \frac{\cos ny}{\beta \left(1 - \frac{v}{c} \cos nx \right)}, \\ \cos n' z' = \frac{\cos nz}{\beta \left(1 - \frac{v}{c} \cos nx \right)}. \end{array} \right.$$

La relation (192) exprime la loi du *phénomène de Doppler* (aussi connu sous le nom de *principe de Doppler-Fizeau*).

Dans le cas particulier où l'angle $nx = 0$, on a

$$(194) \quad \nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Le spectateur S' , animé de la vitesse v , observera la fréquence ν' , si v est positif, ce spectateur *fuit* la lumière; dans ce cas, la fréquence ν' ainsi observée est *plus petite* que la fréquence ν observée par le spectateur immobile S .

Les trois relations (193) expriment le phénomène de l'*aberration des fixes*. Dans le cas particulier où $nx = \frac{\pi}{2}$, on a

$$(195) \quad \cos n' x' = -\frac{v}{c},$$

donc si v est positif, l'angle $n'x'$ observé par S' sera *un peu plus grand* que $\frac{\pi}{2}$.

21. Variance de l'énergie lumineuse. — L'amplitude variable (au carré) de la force électrique observée par S est (185)

$$(196) \quad H^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2,$$

l'amplitude maximum (au carré) de cette force électrique est

$$(197) \quad H^0 = H_x^0{}^2 + H_y^0{}^2 + H_z^0{}^2.$$

On peut écrire des relations analogues pour la force magnétique $\mathcal{H}$. On aura, en outre,

$$(198) \quad H^0 = \mathcal{H}^0.$$

Utilisons la covariance (176)

$$(199) \quad T_2^3 = T_3^2;$$

en remplaçant cette composante du tenseur asymétrique par sa valeur (60) écrite dans le cas où $B = H$ et $\beta = \mathcal{H}$, on aura, en utilisant les relations (185),

$$\left(\frac{H^0}{H'^0} \right)^2 = \frac{\cos n' y' \cos n' z'}{\cos n y \cos n z}.$$

Reportons-nous aux deux dernières covariances (193), d'où

$$(200) \quad \boxed{\frac{H'^0}{H^0} = \beta \left(1 - \frac{v}{c} \cos n x \right),}$$

ou, en vertu de (192),

$$(201) \quad \frac{H'^0}{H^0} = \frac{v'}{v}.$$

La relation (200) exprime la *covariance de l'amplitude de la force électrique*. On aura la même covariance pour la *covariance de l'amplitude de la force magnétique*.

Remarquons (60), que l'on a ici

$$(202) \quad T_4^{1(e)} = \frac{1}{2} (H^0 + \mathcal{H}^2) = H_0^2 \sin^2 \theta.$$

Il en résulte que, (191),

$$(203) \quad \boxed{\frac{T_4'^{1(e)}}{T_4^{1(e)}} = \left(\frac{H_0'}{H_0} \right)^2 = \left(\frac{v'}{v} \right)^2.}$$

Rattachons ces diverses covariances (192 à 203) à la covariance

$$(204) \quad \frac{dt'}{dt} = \beta \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right),$$

où $\frac{dx}{dt}$ représente ici la composante, suivant Ox , de la vitesse de l'énergie électromagnétique; on aura donc

$$(205) \quad \frac{dx}{dt} = c \cos nx,$$

c représentant la vitesse de la lumière.

Il en résulte que

$$(206) \quad \frac{dt'}{dt} = \beta \left(1 - \frac{v}{c} \cos nx \right),$$

ou, en vertu de (192),

$$(207) \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{v'}{v},$$

covariance remarquable parce qu'elle montre le lien qui existe entre la mesure du temps au moyen de la lumière et celle de sa fréquence, mesures effectuées respectivement par les spectateurs S' et S .

22. Thermodynamique des corps en mouvement rectiligne et uniforme. — Il résulte immédiatement de (167) que, lors d'une transformation de Lorentz, on aura

$$(208) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}', \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}',$$

$$(209) \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}', \quad \mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}^{*'}, \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}',$$

$$(210) \quad T^* = T^{*'},$$

ce qui montre donc, pour deux observateurs animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement rectiligne et uniforme, l'invariance des facteurs d'apports calorifiques, de chaleur non compensée et du facteur de densité entropique.

Proposons-nous maintenant d'établir la variance de l'énergie, de la chaleur et de l'entropie (156). Pour cela rappelons-nous la covariance (171); il résulte alors des définitions de dQ , dQ^* et E que l'on a

$$(211) \quad dQ = \beta^{-1} dQ', \quad dQ^* = \beta^{-1} dQ^{*'}, \quad E = \beta^{-1} E',$$

Retournons maintenant aux définitions (159) de l'entropie S et de la température T .

En vertu du tableau (172), nous pouvons écrire pour la variance

de u^4

$$(212) \quad u^4 = \beta u'^4.$$

On aura donc, en vertu de (156), (159),

$$(213) \quad S = S', \quad T = \beta^{-1} T'.$$

Nous obtenons donc ainsi, de façon tout à fait synthétique, la variance de toutes les fonctions thermodynamiques, et en particulier, l'invariance de l'entropie.

23. Électromagnétostriktion des corps en mouvement rectiligne et uniforme. — Cette application résulte immédiatement de notre théorie générale de l'électromagnétostriktion (Chap. I) et des tableaux de variances (172 à 176). Reportons-nous aux définitions et interprétations électromagnétiques (130 à 135) relatives aux corps considérés au repos; donc tous ces symboles doivent être affectés d'un *accent*. Passons maintenant au système en mouvement rectiligne et uniforme de vitesse v par rapport au spectateur S' . Grâce aux tableaux de variances (172 à 176), on pourra calculer les $\mathcal{H}^{\alpha\beta}$, $\mathcal{H}_*^{\alpha\beta}$, $\mathcal{E}^{\alpha\beta}$, $\mathcal{E}_*^{\alpha\beta}$, $\mathcal{F}_{(e)}^{\alpha\beta}$, $\mathcal{F}_{(\mu)}^{\alpha\beta}$, etc., relatifs à ce système.

En particulier, les corps *purs* que nous avons définis au (II, 328) nous donnent ici

$$(214) \quad \mathcal{H}^{\alpha\beta} = \mathcal{E}^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}^{\alpha\beta},$$

où nous avons posé

$$(215) \quad \varphi_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \equiv \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - p_{(e)\mu}^\alpha u_\nu u^\beta + p_{(e)\mu}^\beta u_\nu u^\alpha \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4).$$

Rappelons que $\delta_\mu^\alpha = \text{zéro}$ ou un suivant que μ est différent ou non de α .

Remarquons, en outre, que les $\varphi_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ sont covariants par rapport à μ et ν et contravariants par rapport à α et β ; on trouvera ainsi leur transformée.

Dans le *champ de Minkowski*, et pour des corps au repos, les relations (214) deviennent

$$(216) \quad \mathcal{H}'^{ij} = \mathcal{E}'^{ij},$$

$$(217) \quad \mathcal{H}'^{4i} = \mathcal{E}'^{4j} \epsilon_j^i$$

en posant

$$(218) \quad \varepsilon_j^i = \delta_j^i - p_j^i \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

L'interprétation des formules (217) est immédiate. Il suffit de retourner aux tableaux (26) et (131). Ces formules s'écrivent alors

$$(219) \quad B_i = H_j \varepsilon_j^i,$$

ε_j^i est la généralisation de la constante *diélectrique*.

Grâce aux formules (175), passons du spectateur S' au spectateur S en exprimant $\mathcal{H}^{\alpha i}$ et $\mathcal{H}^{\alpha j}$ en fonction de $\mathcal{H}^{\alpha\beta}$ et $\mathcal{H}^{\alpha\beta}$ dans la formule (217). En identifiant alors le résultat obtenu avec (214), on peut établir très facilement les relations qui unissent les $\varphi_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ et les ε_j^i . On trouvera ainsi

$$(220) \quad \begin{cases} \varphi_{41}^{\alpha 1} = \varepsilon_1^1 = \varphi_{41}^{\alpha 1}, \\ \varphi_{42}^{\alpha 1} = \beta \varepsilon_2^1 = \beta \varphi_{42}^{\alpha 1}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

En reprenant le même raisonnement à partir des formules

$$(221) \quad \mathcal{H}_*^{\alpha\beta} = \mathcal{H}_*^{\mu\nu} \Psi_{\mu\nu}^{\alpha\beta},$$

on trouve les $\psi_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ des corps en mouvement en fonction du tenseur μ_j^i de la perméabilité *magnétique* des corps au repos.

24. Invariance de la constante universelle h de Planck. — Reportons-nous à la variance (211) de l'énergie et assimilons E et E' à des quanta d'énergie; à savoir

$$(222) \quad E = h\nu, \quad E' = h'\nu'.$$

Reportons-nous, d'autre part, à la formule (I, 61). D'où

$$(223) \quad \nu = \beta^{-1} \nu',$$

En comparant (211) et (223) et en tenant compte de (222), on obtient ⁽¹⁾

$$(224) \quad \boxed{h = h'}.$$

⁽¹⁾ On peut aussi obtenir cette invariance dans le cas de la relativité *générale* (Th. DE DONDER, *Bull. Ac. R. Belg.*, Cl. des Sciences, 5^e série, t. XVI, séance du 8 nov. 1930, p. 1184-1187).

25. Réflexion sur un miroir parfait en mouvement rectiligne et uniforme. — Nous ne reprendrons pas ici ce problème, qui a été traité complètement par nous dans la Gravifique Einsteinienne ⁽¹⁾.

26. Quantité de mouvement et énergie d'un électron de Lorentz en mouvement rectiligne et uniforme. — Nous avons donné précédemment (III, § 16) la théorie de l'électron de Lorentz à l'état de repos, c'est-à-dire qu'on aura en tous points de cet électron

$$(225) \quad \frac{dx'}{dt'} = 0.$$

Calculons avec S les composantes rectangulaires G_x, G_y, G_z des quantités de mouvement définies

$$(226) \quad G_x = \int_{\nu} T_{11}^{(e)} \delta \nu, \quad \dots, \quad \dots$$

En tenant compte des covariances (176) et (171) et de (60), on trouvera facilement

$$(227) \quad G_x = \frac{\beta \nu}{c^2} \int (H_y'^2 + H_z'^2) \delta \nu',$$

la force magnétique $\mathcal{H}'$ étant identiquement nulle dans le cas d'un électron immobile. On démontre facilement que les deux autres composantes sont nulles, à cause de la symétrie sphérique qui règne dans l'électron immobile dans le système S' .

La quantité de mouvement de l'électron de Lorentz animé d'un mouvement de translation de vitesse ν et observé par le spectateur S a pour valeur

$$(228) \quad G = \frac{\beta \nu}{c^2} \int (H_y'^2 + H_z'^2) \delta \nu'.$$

Remarquons que l'énergie électromagnétique contenue dans une couche sphérique *extérieure* à l'électron immobile pour S' et prise dans le champ de celui-ci vaut

$$(229) \quad E' = \frac{1}{2} \int (H_x'^2 + H_y'^2 + H_z'^2) \delta \nu',$$

⁽¹⁾ Paris, Gauthier-Villars, 1921 (voir § 79, p. 131). — A. EINSTEIN, *Ann der Physik*, t. 17, 1905.

l'intégrale étant étendue à la couche ν' , c'est à-dire à l'espace compris entre deux sphères concentriques à l'électron.

A cause de la symétrie sphérique de cet électron, on aura

$$(230) \quad \int H_x'^2 \delta\nu' = \int H_y'^2 \delta\nu' = \int H_z'^2 \delta\nu' = \frac{2}{3} E'.$$

En substituant cette valeur (364) dans (362), on a

$$(231) \quad G = \frac{4}{3} \frac{E'}{c} \beta \nu.$$

Rappelons que E' désigne l'énergie qui *entoure* l'électron au repos. Or nous avons trouvé pour cette énergie (III, 222)

$$(232) \quad E' = \frac{e'^2}{8\pi A'},$$

e' et A' désignant respectivement la charge et le rayon de l'électron. Nous trouvons donc pour la quantité de mouvement G (228)

$$(233) \quad G = \frac{1}{c^2} \frac{e'^2}{6\pi A'} \beta \nu.$$

27. Variance de la masse. — Reportons-nous à (II, 100) ainsi qu'au cas particulier du champ de Minkowski (II, 102 et 103). Nous avons vu que δm^* est la masse $\delta m'$ au repos, d'où

$$(234) \quad \delta m = \beta \delta m'.$$

28. Masse longitudinale et masse transversale. — Retournons d'abord aux équations (II, 263 et 262) et appliquons-les à une particule chargée en mouvement rectiligne; elles peuvent s'écrire, en vertu des notations (131) et de (II, 169) et en se rappelant que $\nu^1 = \nu$, $\nu^2 = 0$, $\nu^3 = 0$, $\nu^4 = 1$,

$$(235) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{m' \nu^1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{c}\right)^2}} \right) = e' H_x, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m' \nu^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{c}\right)^2}} \right) = e' \left(H_y - \frac{\nu}{c} \mathcal{H}_z \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m' \nu^3}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{c}\right)^2}} \right) = e' \left(H_z + \frac{\nu}{c} \mathcal{H}_y \right), \end{cases}$$

et enfin

$$(236) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m' c^0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) = e' v H_x.$$

Après les dérivations par rapport à t , on aura soin de remplacer v^2 et v^3 par *zéro*; v^1 par v .

Par définition, la quantité de mouvement de m' a pour composantes (235)

$$(237) \quad \frac{m' v^i}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Remarquons aussi que (236) peut s'écrire (184 et 234)

$$(238) \quad \frac{d}{dt} (m c^0) = e v H_x.$$

Cette relation représente une transformation d'énergie par unité de temps.

Les équations (235) et (236) peuvent se mettre sous une forme remarquable, analogue à celle par laquelle Galilée exprime la relation entre la force mécanique d'une part, la masse et l'accélération d'autre part.

Portons (236) dans (235), d'où

$$(239) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{e' (v)^0 H_x}{c^2} + \beta m' \frac{d^2 x}{dt^2} = e' H_x, \\ \beta m' \frac{d^2 y}{dt^2} = e' \left(H_y - \frac{v}{c} \mathfrak{H}_z \right), \\ \beta m' \frac{d^2 z}{dt^2} = e' \left(H_z + \frac{v}{c} \mathfrak{H}_y \right). \end{array} \right.$$

Ces trois équations peuvent s'écrire, grâce à (177),

$$(240) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta^3 m' \frac{d^1 x}{dt^1} = e' H'_x, \\ \beta^0 m' \frac{d^1 y}{dt^1} = e' H'_y, \\ \beta^0 m' \frac{d^1 z}{dt^1} = e' H'_z, \end{array} \right.$$

ces équations se rapportent à un instant t .

En nous inspirant de la force mécanique définie par Galilée, nous dirons, avec Einstein ⁽¹⁾, que $\beta^3 m'$ est la *masse longitudinale* de la particule chargée considérée et que $\beta^2 m'$ est sa *masse transversale*. En vertu de (234) on pourra dire aussi que $\beta^2 m$ est sa masse longitudinale et que βm est sa masse transversale.

En utilisant (163) on voit immédiatement que les équations (240) peuvent aussi s'écrire

$$(241) \quad \begin{cases} m' \frac{d'x'}{dt'^2} = e' H'_x, \\ m' \frac{d'y'}{dt'^2} = e' H'_y, \\ m' \frac{dz'}{dt'^2} = e' H'_z, \end{cases}$$

ces équations ont la forme galiléenne.

CHAPITRE IV

APPLICATION A LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DE DIRAC GÉNÉRALISÉE.

29. Équations gravifiques et électroniques. — Présentons sous une forme tout à fait synthétique l'étude des systèmes électromagnétiques les plus généraux que nous avons considérés au Chapitre I du présent fascicule. A cet effet, rappelons d'abord *les dix équations gravifiques* (1); à savoir

$$(242) \quad \frac{\partial(\mathfrak{N}^g - \mathfrak{N} W^g + \mathfrak{N}_*^{(m)} + \mathfrak{N}_*^{(m,e)} + \mathfrak{N}_*^{(e)})}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0,$$

où les fonctions caractéristiques $\mathfrak{N}^g$ et $\mathfrak{N}$ ont été définies par (4) et (5).

Passons ensuite aux *quatre équations électroniques* ou *maxwelliennes* dont nous avons indiqué la généralisation dans (27) et (28)

⁽¹⁾ EINSTEIN, *Ann. der Physik*, Bd XVII, 1905. — Einstein suppose que l'accélération est *faible*. Alors la particule demeure *approximativement* au repos dans le système entraîné S'.

et supposons qu'il n'y ait pas de courant magnétique ⁽¹⁾, c'est-à-dire que $C_*^\alpha = 0$. Dans ce cas, on pourra poser (II, 330),

$$(243) \quad \mathcal{K}_*^{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha,\beta} - \Phi_{\beta,\alpha}.$$

Autrement dit ces quantités dérivent d'un potentiel vecteur électromagnétique $(\Phi_1 \dots \Phi_4)$. Nous allons aussi écrire ces équations maxwelliennes sous forme de dérivée variationnelle; à savoir

$$(244) \quad \frac{\delta(\mathcal{N}g - \mathcal{N}W^0 + \mathcal{N}^{(n)} + \mathcal{N}_*^{(n,e)} + \mathcal{N}_*^{(e)})}{\delta\Phi_\alpha} = 0.$$

Précisons la manière dont la dérivée variationnelle par rapport à Φ_α doit être prise dans (244) pour qu'on obtienne les équations (27) et (28) susmentionnées. Pour cela, reportons-nous à $\mathcal{N}_*^{(e)}$ dont la valeur est explicitement donnée en (10). Dans cette expression nous considérons les $K_{\alpha i}$ comme fonctions *uniquement* ⁽²⁾ de $x_1 \dots x_4$ (et non de Φ_α), et les variations de ces fonctions par rapport aux Φ_α seront donc *nulles*.

Retournons à (244). Nous savons que $\mathcal{N}g$, $\mathcal{N}W^2$, $\mathcal{N}_*^{(m)}$ ne dépendent pas des Φ_α . Posons

$$(245) \quad \frac{\delta\mathcal{N}^{(m,e)}}{\delta\Phi_\alpha} \equiv C_{(e)}^\alpha \quad (\alpha = 1 \dots 4),$$

où $C_{(e)}^\alpha$ représente le courant électrique (total).

Les dix équations gravifiques (242) peuvent alors s'écrire explicitement (II, 15)

$$(246) \quad -\frac{1}{2}(a + bC)g_{\alpha\beta} + bG_{\alpha\beta} = Nu_\alpha u_\beta + P_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}^{(e)}$$

et les quatre équations maxwelliennes s'écriront explicitement, grâce à (245),

$$(247) \quad \frac{\partial \mathcal{K}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = C_{(e)}^\alpha.$$

⁽¹⁾ On peut se passer de cette hypothèse restrictive, en introduisant le potentiel vecteur adjoint Φ_α (voir, à ce sujet, la note de Jules Géhéniau (*Bull. Ac. R. Belg.*, Cl. des Sciences, 5^e série, t. XVII, séance du 4 juillet 1931, p. 921-926).

⁽²⁾ Il serait aisé de faire disparaître cette restriction ou cette convention, en modifiant, au (245), la définition du courant $C_{(e)}^\alpha$.

30. **Équations gravifiques, électroniques et photoniques.** — Introduisons maintenant la fonction caractéristique ou universelle

$$(248) \quad \mathcal{N}g + \mathcal{N}_*^{(e)} + \mathcal{N}^{(ph)};$$

l'indice (ph) se lira *photonique*. Si nous comparons cette fonction à celle qui figure dans (242) et (244), on voit qu'on a remplacé dans cette dernière tous les termes massiques $[-\partial \mathcal{U} W^2 + \mathcal{N}_*^{(m)} + \mathcal{N}_*^{(m,e)}]$ par le seul terme photonique $\mathcal{N}^{(ph)}$.

Nous allons maintenant définir la fonction $\mathcal{N}^{(ph)}$ au moyen des *potentiels photoniques* P_μ et Q_μ et des *potentiels électromagnétiques* Φ_α . Nous écrirons, pour simplifier,

$$(249) \quad \zeta_\mu = \frac{2\pi i e c}{h} \Phi_\mu \quad (\mu = 1 \dots 4),$$

où $i \equiv \sqrt{-1}$.

Introduisons les notations

$$(250) \quad P_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial P_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial P_\mu}{\partial x_\nu}, \quad A_{\mu\nu} \equiv \zeta_\nu P_\mu - \zeta_\mu P_\nu,$$

$$(251) \quad Q_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial Q_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\nu}, \quad B_{\mu\nu} \equiv \zeta_\nu Q_\mu - \zeta_\mu Q_\nu,$$

ainsi que

$$(252) \quad \alpha \mathcal{S} \equiv \frac{\partial \mathcal{S}^\mu}{\partial x_\mu} - \zeta_\mu \mathcal{S}^\mu,$$

$$(253) \quad \alpha \mathcal{B} \equiv \frac{\partial \mathcal{B}^\mu}{\partial x_\mu} - \zeta_\mu \mathcal{B}^\mu,$$

où

$$(254) \quad \alpha = \frac{2\pi i}{h} m c^2.$$

Posons, en outre,

$$(255) \quad \alpha U_{\mu\nu} = (P_{\mu\nu} + A_{\mu\nu}) + (Q_{\mu\nu}^* + B_{\mu\nu}^*);$$

il en résulte que

$$(256) \quad \alpha U_{\mu\nu}^* = (P_{\mu\nu}^* + A_{\mu\nu}^*) - (Q_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}).$$

Les astérisques qui figurent dans $P_{\mu\nu}^*$, $Q_{\mu\nu}^*$, $A_{\mu\nu}^*$, $B_{\mu\nu}^*$ indiquent qu'il faut prendre la *dualistique* des quantités qui en sont affectées; autrement dit, on aura, par exemple, (II, 303),

$$(257) \quad \alpha U_{\mu\nu}^* \equiv U_{\mu\nu}^*.$$

Grâce aux notations (249) à (256), nous sommes en mesure maintenant de définir la fonction caractéristique $\mathcal{N}^{(ph)}$ de J.-M. Whittaker ⁽¹⁾; à savoir

$$(258) \quad \boxed{\mathcal{N}^{(ph)} \equiv [U^{\mu\nu} U_{\mu\nu}^\times + 2(SS^\times - BB^\times) - 2(P^\mu P_\mu^\times - Q^\mu Q_\mu^\times)] \sqrt{-g}},$$

les *croix obliques* qui figurent dans $U_{\mu\nu}^\times$, $S^\times$, $B^\times$, etc., indiquant qu'il faut prendre l'imaginaire conjuguée de l'expression qui en est affectée.

Prenons les dérivées variationnelles de $\mathcal{N}g + \mathcal{N}_*^{(e)} + \mathcal{N}^{(ph)}$ par rapport à $g^{\alpha\beta}$, à Φ_α et aux potentiels photoniques P_μ , Q_μ , $P_\mu^\times$, $Q_\mu^\times$. Nous aurons alors les *équations gravifiques de la mécanique ondulatoire*

$$(259) \quad \frac{\delta(\mathcal{N}g + \mathcal{N}_*^{(e)} + \mathcal{N}^{(ph)})}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0,$$

les *équations électroniques ou maxwelliennes*

$$(260) \quad \frac{\delta(\mathcal{N}g + \mathcal{N}_*^{(e)} + \mathcal{N}^{(ph)})}{\delta \Phi_\alpha} = 0$$

et enfin les *équations photoniques*

$$(261) \quad \frac{\delta(\mathcal{N}g + \mathcal{N}_*^{(e)} + \mathcal{N}^{(ph)})}{\delta P_\mu^\times} = 0, \quad \frac{\delta(\mathcal{N}g + \mathcal{N}_*^{(e)} + \mathcal{N}^{(ph)})}{\delta Q_\mu^\times} = 0,$$

$$(262) \quad \frac{\delta(\mathcal{N}g + \mathcal{N}_*^{(e)} + \mathcal{N}^{(ph)})}{\delta P_\mu} = 0, \quad \frac{\delta(\mathcal{N}g + \mathcal{N}_*^{(e)} + \mathcal{N}^{(ph)})}{\delta Q_\mu} = 0.$$

En effectuant les calculs indiqués dans (259), nous obtenons explicitement

$$(263) \quad -\frac{1}{2}(\alpha + bC)g^{\mu\nu} + bG^{\mu\nu} = T_{(e)}^{\mu\nu} + M^{\mu\nu},$$

où $T_{(e)}^{\mu\nu}$ est l'expression contravariante de (15) et où l'on a posé

$$(264) \quad \begin{aligned} M^{\mu\nu} \equiv & -2L^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{2}L - P^\alpha P_\alpha^\times + Q^\alpha Q_\alpha^\times\right)g^{\mu\nu} \\ & + 2N^{\mu\nu} - 2O^{\mu\nu} + 2P^\mu P^\nu - 2Q^\mu Q^\nu. \end{aligned}$$

Dans cette expression les symboles $L^{\mu\nu}$, L , $N^{\mu\nu}$, $O^{\mu\nu}$ sont définis par

⁽¹⁾ J.-M. WHITTAKER, *Proc. of the Royal Soc.*, séries A, vol. 121, n° A.788, p. 543 557.

les relations suivantes :

$$(265) \quad g L^{\alpha\lambda\beta} \equiv \frac{h'}{4\pi' m' c^4} \left[- \left(\frac{\partial P_\delta}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial P_\gamma}{\partial x_\delta} - \zeta_\gamma P_\delta + \zeta_\delta P_\gamma \right) \right. \\ \times \left(\frac{\partial P_\nu^\times}{\partial x_\mu} - \frac{\partial P_\mu^\times}{\partial x_\nu} + \zeta_\mu P_\nu^\times - \zeta_\nu P_\mu^\times \right) \\ + \left(\frac{\partial Q_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial Q_\mu}{\partial x_\nu} - \zeta_\mu Q_\nu + \zeta_\nu Q_\mu \right) \\ \left. \times \left(\frac{\partial Q_\delta^\times}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial Q_\gamma^\times}{\partial x_\delta} + \zeta_\gamma Q_\delta^\times - \zeta_\delta Q_\gamma^\times \right) \right],$$

$$(266) \quad L^{\mu\nu} = g \zeta_\sigma L^{\mu\nu\sigma}, \quad L = g_{\mu\nu} L^{\mu\nu},$$

$$(267) \quad N^{\mu\nu} \equiv \left(\frac{1}{2} P^{\times\alpha} g^{\mu\nu} - P^{\times\nu} g^{\mu\alpha} \right) \left(\frac{h'}{2\pi i m c^2} \frac{\partial S}{\partial x_\alpha} - \frac{e}{mc} \Phi_\alpha S \right) \\ + \text{conjuguée} - \frac{1}{2} S S^\times g^{\mu\nu},$$

$$(268) \quad O^{\mu\nu} \equiv \left(\frac{1}{2} Q^{\times\alpha} g^{\mu\nu} - Q^{\times\nu} g^{\mu\alpha} \right) \left(\frac{h}{2\pi i m c^2} \frac{\partial B}{\partial x_\alpha} - \frac{e}{mc} \Phi_\alpha B \right) \\ + \text{conjuguée} - \frac{1}{2} B B^\times g^{\mu\nu}.$$

En effectuant les calculs indiqués dans (260) par rapport à Φ_μ , nous obtenons explicitement

$$(269) \quad \frac{\partial \mathcal{H}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = - \frac{e \sqrt{-g}}{m c^3} \{ U^{\mu\nu} P_\nu^\times + U_*^{\mu\nu} Q_\nu^\times + S P^{\times\mu} - B Q^{\times\mu} + \text{conjuguée} \}.$$

Enfin, en effectuant les calculs indiqués dans (261), nous obtenons explicitement

$$(270) \quad \boxed{\frac{\partial \mathcal{U}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = C_{(ph)}^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{U}_*^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = C_{*(ph)}^\mu,}$$

où l'on a posé

$$(271) \quad C_{(ph)}^\mu = \zeta_\nu \mathcal{U}^{\mu\nu} - \zeta^\mu \mathcal{S} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_\nu} - \kappa \mathcal{P}^\mu,$$

$$(272) \quad C_{*(ph)}^\mu = - \zeta_\nu \mathcal{U}_*^{\mu\nu} + \zeta^\mu \mathcal{B} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x_\nu} - \kappa \mathcal{Q}^\mu.$$

La dérivée variationnelle (262) par rapport à P_μ et Q_μ donne deux équations conjuguées aux précédentes. On voit que les équations photoniques (270) ont la forme maxwellienne.

On appelle $C_{(\text{ph})}^\mu$ et $C_{*(\text{ph})}^\mu$ les *courants photoniques* ⁽¹⁾. Remarquons, d'après (270), qu'on a les *théorèmes de conservation photonique*

$$(273) \quad \sum_{\mu} \frac{\partial C_{(\text{ph})}^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad \sum_{\mu} \frac{\partial C_{*(\text{ph})}^\mu}{\partial x^\mu} = 0.$$

31. Principe de correspondance ⁽²⁾. — *Identifions* les seconds membres de (263) et de (246) mis sous forme contravariante. Nous obtenons alors

$$(274) \quad N u^\alpha u^\beta + P^\alpha \beta = M^{\alpha\beta},$$

où $M^{\alpha\beta}$ est donné par (264).

Identifions ensuite le second membre de (269) avec celui de (247). Nous obtenons de même

$$(275) \quad C_{(e)}^\mu = -\frac{e\sqrt{-g}}{mc^3} \{ U^{\mu\nu} P_\nu^\times + U_{\nu}^{\mu\nu} Q_\nu^\times + S P^\times{}_\mu - B Q^\times{}_\mu + \text{conjuguée} \}.$$

On voit que grâce à notre principe de correspondance, il est possible d'*exprimer les termes massiques* $N u^\alpha u^\beta + P^\alpha \beta$ *et les courants électriques* $C_{(e)}^\alpha$ *en fonction des potentiels électromagnétiques et photoniques.*

32. Théorème de la conservation de l'électricité et théorème de l'impulsion et de l'énergie, exprimés au moyen des potentiels photoniques. — Reportons-nous à (269) et remarquons que l'on a identiquement

$$(276) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0.$$

On aura donc le *théorème de la conservation de l'électricité*

$$(277) \quad \frac{\partial C_{(e)}^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0,$$

⁽¹⁾ DE DONDER, *Bull. Ac. Roy. Belg.*, Cl. des Sc., 5^e série, t. XIII, n^{os} 8-9, 2 août 1927, p. 507-509; t. XIV, n^o 6, 2 juin 1928, p. 307-312. — R. FERRIER, *Revue gén. de l'Électr.*, t. XXI, 11 juin 1927. — L. DE BROGLIE, *Ondes et Mouvements*. Paris, 1926 (voir p. 70).

⁽²⁾ Th. DE DONDER, *Bull. Ac. Roy. Belg.*, Cl. des Sc., 5^e série, t. XIII, n^{os} 8-9, 2 août 1927, p. 507-509; t. XV, n^o 2, 2 février 1929, p. 116-119. — Oskar KLEIN, *Z. f. Ph.*, Bd XLI, Heft 6 7, 1927 [voir éq. (18), p. 414].

où $\mathcal{C}_{(e)}^\alpha$ est exprimé grâce à (275) *en fonction des potentiels électromagnétiques et des potentiels photoniques*. Ce théorème est le *correspondant* du théorème (30').

D'autre part, en appliquant les identités de Hilbert à la fonction $\mathcal{M}^s$, on obtient (II, 22 et 23)

$$(278) \quad \left[-\frac{1}{2}(a + bC)g^{\mu\nu} + bG^{\mu\nu} \right]_{,\nu} = 0,$$

le symbole. ν indiquant la dérivée covariante de l'expression entre crochets par rapport à x_ν . On aura donc, en vertu de (263), *le théorème de l'impulsion et de l'énergie*

$$(279) \quad (T_{(e)}^{\mu\nu} + M^{\mu\nu})_{,\nu} = 0;$$

où $T_{(e)}^{\mu\nu}$ et $M^{\mu\nu}$ sont donnés respectivement en (15) et (264). On voit que ce théorème est *exprimé au moyen des potentiels électromagnétiques et des potentiels photoniques*.

Le théorème (279) est le *correspondant* du théorème (21).

33. Théorème de compatibilité. — A cause des relations (30') et (21), ainsi que du principe de correspondance, il faut qu'on ait (277) et (279). Nous avons démontré dans le paragraphe précédent que *ces conditions sont satisfaites en vertu des seules équations gravifiques, électromagnétiques et photoniques* (263, 269 et 270), autrement dit, *sans faire appel au principe de correspondance* (1).

34. Équations quantiques de Dirac. — Nous allons appliquer les équations générales (270) ci-dessus au cas particulier d'un *champ de Minkowski* et nous choisirons les variables de telle façon que le ds^2 définissant celui-ci soit de la forme

$$(280) \quad ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Au lieu du potentiel vecteur Φ_α que nous avons utilisé ci-dessus, nous utiliserons avec Whittaker le potentiel $\bar{\Phi}_\nu$ lié au précédent par

(1) Th. DE DONDER, *Bull. Ac. R. Belg., Cl. des Sc.*, 5^e série, t. X, séance du 5 avril 1924, p. 188-201.

la relation

$$(281) \quad \bar{\Phi}_\alpha = \frac{1}{c^2} \Phi_\alpha.$$

En utilisant les notations que nous avons définies précédemment, nous aurons

$$(282) \quad \bar{\Phi}_1 = -\frac{1}{c^2} A_x, \quad \bar{\Phi}_2 = -\frac{1}{c^2} A_y, \quad \bar{\Phi}_3 = -\frac{1}{c} A_z, \quad \bar{\Phi}_4 = 0 V.$$

Nous poserons de même

$$(282') \quad X_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{\Phi}_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\Phi}_\mu}{\partial x_\nu},$$

ce qui donne donc, en vertu de (243),

$$(283) \quad X_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \right) = -\frac{1}{c^2} \mathcal{H}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}.$$

Nous supposons dans ce paragraphe qu'il n'y a ni polarisation électrique, ni polarisation magnétique, de sorte que nous pourrions écrire

$$(284) \quad X_{\mu\nu} = -\frac{1}{c^2} H_{\mu\nu}.$$

Remarquons que chez Whittaker, les indices μ, ν , etc. varient de 0 à 3 au lieu de 1 à 4. Pour plus d'uniformité, nous utiliserons ici cette manière de procéder et choisirons 0, 1, 2, 3 comme permutation fondamentale.

Grâce à (280) nous pouvons déduire très facilement de (284) les composantes $H^{\mu\nu}$; à savoir

$$(285) \quad X^{\mu\nu} = -c^2 H^{\mu\nu}.$$

En reprenant les notations (131), nous pourrions donc écrire

$$(286) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X_{01} = \frac{1}{c^2} H_{14} = \frac{1}{c} H_x, & X_{03} = -\frac{1}{c^2} \mathcal{H}_{23} = -\frac{1}{c^2} \mathcal{H}_x, \\ X_{02} = \frac{1}{c^2} H_{24} = \frac{1}{c} H_y, & X_{31} = -\frac{1}{c^2} \mathcal{H}_{31} = -\frac{1}{c^2} \mathcal{H}_y, \\ X_{03} = \frac{1}{c^2} H_{34} = \frac{1}{c} H_z, & X_{12} = -\frac{1}{c^2} \mathcal{H}_{12} = -\frac{1}{c^2} \mathcal{H}_z. \end{array} \right.$$

Il en résulte, (285), que

$$(287) \quad \begin{cases} X^{01} = -c H_x, & X^{23} = \mathcal{H}_1, \\ X^{02} = -c H_y, & X^{31} = \mathcal{H}_2, \\ X^{03} = -c H_z, & X^{12} = \mathcal{H}_3. \end{cases}$$

Posons encore avec Whittaker

$$(288) \quad P_0 \equiv P_t, \quad P_1 \equiv -\frac{1}{c} P_x, \quad P_2 \equiv -\frac{1}{c} P_y, \quad P_3 \equiv -\frac{1}{c} P_z,$$

et

$$(289) \quad Q_0 \equiv Q_t, \quad Q_1 \equiv -\frac{1}{c} Q_x, \quad Q_2 \equiv -\frac{1}{c} Q_y, \quad Q_3 \equiv -\frac{1}{c} Q_z.$$

Nous aurons donc, grâce à (280),

$$(290) \quad P^0 = P_t, \quad P^1 = -c P_x, \quad P^2 = -c P_y, \quad P^3 = -c P_z$$

et

$$(291) \quad Q^0 = Q_t, \quad Q^1 = -c Q_x, \quad Q^2 = -c Q_y, \quad Q^3 = -c Q_z.$$

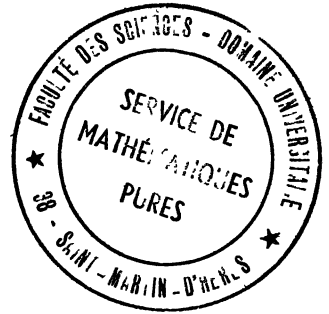
Il nous reste enfin à nous occuper des $U_{\mu\nu}$. Nous poserons

$$(292) \quad \begin{cases} U_{01} = \frac{1}{c} s_x, & U_{23} = \frac{1}{c} b_x, \\ U_{02} = \frac{1}{c} s_y, & U_{31} = \frac{1}{c} b_y, \\ U_{03} = \frac{1}{c} s_z, & U_{12} = \frac{1}{c^2} b_z, \end{cases}$$

ce qui donne immédiatement

$$(293) \quad \begin{cases} U^{01} = -c s_x, & U^{23} = c^2 b_x, \\ U^{02} = -c s_y, & U^{31} = c^2 b_y, \\ U^{03} = -c s_z, & U^{12} = c^2 b_z. \end{cases}$$

Introduisons les notations (281) à (293) dans les équations générales (270), en se rappelant que les seconds membres de ces équations



tions sont définis par (271) et (272). Nous obtenons :

$$(294) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{c} \left[\frac{\partial s}{\partial t} \right] - [\text{rot } b] = \frac{2\pi i}{h} mc P + [\text{grad } S], \\ [\text{div } s] = \frac{2\pi i}{h} mc P_t - \frac{1}{c} \left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]; \\ -\frac{1}{c} \left[\frac{\partial b}{\partial t} \right] + [\text{rot } s] = \frac{2\pi i}{h} mc Q - [\text{grad } B], \\ [\text{div } b] = \frac{2\pi i}{h} mc Q_t - \frac{1}{c} \left[\frac{\partial B}{\partial t} \right]. \end{array} \right.$$

Les crochets qui figurent dans les équations précédentes servent à rappeler que les opérations $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial x}$ doivent être remplacées respectivement par $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2\pi ie}{hc} V$ et $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2\pi ie}{hc} A_1$, etc. Dans le cas où toutes les composantes du potentiel vecteur sont nulles, les opérations ci-dessus se réduisent donc aux opérations ordinaires.

Dans les équations (294) les symboles P, Q désignent les vecteurs ordinaires dont les composantes sont respectivement (P_x, P_y, P_z) , (Q_x, Q_y, Q_z) . Les scalaires S et B et les vecteurs $b(b_x, b_y, b_z)$ et $s(s_x, s_y, s_z)$ sont définis par les relations (255) et (256) qui deviennent ici :

$$(295) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi i}{h} mc b = -[\text{rot } P] - \frac{1}{c} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} \right] - [\text{grad } Q_t], \\ \frac{2\pi i}{h} mc s = [\text{rot } Q] - \frac{1}{c} \left[\frac{\partial P}{\partial t} \right] - [\text{grad } P_t], \\ \frac{2\pi i}{h} mc S = [\text{div } P] + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial P_t}{\partial t} \right], \\ \frac{2\pi i}{h} mc B = [\text{div } Q] + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial Q_t}{\partial t} \right]. \end{array} \right.$$

A titre d'exemple, montrons ce que devient la première équation vectorielle (294) quand on effectue les opérations indiquées par les crochets; nous obtenons

$$(296) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial s}{\partial t} - \text{rot } b - \text{grad } S + \frac{2\pi i}{hc} \{ V \cdot s - [A \cdot b] - A \cdot S \} = \frac{2\pi i}{h} mc P.$$

Les équations (294) ainsi explicitées peuvent être considérées comme les équations ondulatoires, les équations (295) donnant la valeur des vecteurs b et s et des scalaires B et S. Introduisons ces valeurs dans

les équations (294). Nous obtenons, (286) et (287),

$$(297) \quad \left\{ \begin{array}{l} DP + \frac{2\pi ie}{hc} \{ -[\mathcal{H}.P] + H.P_t - [H.Q] - \mathcal{H}.Q_t \} = 0, \\ DP_t + \frac{2\pi ie}{hc} \{ (H.P) - (\mathcal{H}.Q) \} = 0, \\ DQ + \frac{2\pi ie}{hc} \{ -[\mathcal{H}.Q] + H.Q_t + [H.P] + \mathcal{H}.P_t \} = 0, \\ DQ_t + \frac{2\pi ie}{hc} \{ (H.Q) + (\mathcal{H}.P) \} = 0, \end{array} \right.$$

où D est l'opérateur

$$(298) \quad D = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ + \frac{4\pi ie}{hc} \left(V \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ - \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{h^2} + \frac{4\pi^2 e^2}{h^2 c^2} (V^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2),$$

et où H et $\mathcal{H}$ sont les forces électriques et magnétiques.

Posons

$$(299) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \psi_1 = P_z + iQ_t, & \psi_2 = P_x + iP_y, \\ \psi_3 = -P_t - iQ_z, & \psi_4 = Q_y - iQ_x, \\ \omega_1 = -P_x + iP_y, & \omega_2 = P_z - iQ_t, \\ \omega_3 = Q_y + iQ_x, & \omega_4 = P_t - iQ_z. \end{array} \right.$$

Grâce à ces notations les équations (297) sont équivalentes au système

$$(300) \quad \left\{ \begin{array}{l} D\psi_1 + \frac{2\pi ie}{hc} (i\mathcal{H}_x\psi_2 + \mathcal{H}_y\psi_2 + i\mathcal{H}_z\psi_1 - H_x\psi_4 + iH_y\psi_4 - H_z\psi_3) = 0, \\ D\psi_2 + \frac{2\pi ie}{hc} (i\mathcal{H}_x\psi_1 - \mathcal{H}_y\psi_1 - i\mathcal{H}_z\psi_2 - H_x\psi_3 - iH_y\psi_3 + H_z\psi_4) = 0, \\ D\psi_3 + \frac{2\pi ie}{hc} (i\mathcal{H}_x\psi_4 + \mathcal{H}_y\psi_4 + i\mathcal{H}_z\psi_3 - H_x\psi_2 + iH_y\psi_2 - H_z\psi_1) = 0, \\ D\psi_4 + \frac{2\pi ie}{hc} (i\mathcal{H}_x\psi_3 - \mathcal{H}_y\psi_3 - i\mathcal{H}_z\psi_4 - H_x\psi_1 - iH_y\psi_1 + H_z\psi_2) = 0. \end{array} \right.$$

auquel il faut ajouter un système équivalent mais où l'on a remplacé les ψ par des ω . Les équations (300) sont les équations du second ordre auxquelles satisfont les fonctions de Dirac $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$.

Si l'on pose

$$(301) \quad \begin{cases} \alpha_1 = -s_x + iB, & \alpha_2 = -s_y - is_z, \\ \alpha_3 = -ib_z + S, & \alpha_4 = b_y - ib_x, \\ \beta_1 = s_x - is_z, & \beta_2 = -s_y - iB, \\ \beta_3 = ib_x + b_y, & \beta_4 = -ib_z - S. \end{cases}$$

les équations (294) et (295) sont équivalentes à quatre systèmes de quatre équations; le premier a la forme suivante :

$$(302) \quad \begin{cases} p_0 \psi_1 + (p_1 - ip_2) \psi_4 + p_3 \psi_3 = -mc \alpha_1, \\ p_0 \psi_2 + (p_1 + ip_2) \psi_3 - p_3 \psi_4 = -mc \alpha_2, \\ p_0 \psi_3 + (p_1 - ip_2) \psi_2 + p_3 \psi_4 = mc \alpha_3, \\ p_0 \psi_4 + (p_1 + ip_2) \psi_1 - p_3 \psi_2 = mc \alpha_4, \end{cases}$$

où

$$(303) \quad p_0 = -\frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{e}{c} V, \quad p_1 = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x, \quad \dots$$

Pour obtenir le second système, il suffit de permuter ψ et α ; à savoir

$$(304) \quad \begin{cases} p_0 \alpha_1 + (p_1 - ip_2) \alpha_4 + p_3 \alpha_3 = -mc \psi_1, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Pour obtenir le troisième système, il suffit, dans (302), de remplacer ψ par ω et α par β , et enfin pour le quatrième de permuter ω et β dans le troisième système.

Il en résulte que, si $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ est une solution des équations de Dirac,

$$(305) \quad \alpha_\mu = \beta_\mu = \omega_\mu = \psi_\mu \quad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

constitue une solution de (295) et de (297).

Examinons ce que deviennent ici les composantes

$$C_{(e)}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} C_{(e)}^\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3)$$

du courant électrique (275). Nous poserons

$$(306) \quad C_{(e)}^1 = \rho, \quad C^1 = j_x, \quad C^2 = j_y, \quad C^3 = j_z.$$

En introduisant dans (275) les notations (281) à (293) on obtient

$$(307) \quad \rho = -\frac{1}{2} (\psi_1 \alpha_1^\times + \psi_2 \alpha_2^\times + \psi_3 \alpha_3^\times + \psi_4 \alpha_4^\times \\ + \omega_1 \beta_1^\times + \omega_2 \beta_2^\times + \omega_3 \beta_3^\times + \omega_4 \beta_4^\times + \text{conjuguée}),$$

$$(308) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_x = \frac{c}{2} (\psi_1 \alpha_4^\times + \psi_2 \alpha_3^\times + \psi_3 \alpha_2^\times + \psi_4 \alpha_1^\times \\ \quad + \omega_1 \beta_4^\times + \omega_2 \beta_3^\times + \omega_3 \beta_2^\times + \omega_4 \beta_1^\times + \text{conjuguée}), \\ j_y = \dots\dots\dots, \\ j_z = \dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

de sorte que pour une solution de la forme (305), on obtient

$$(309) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = -2 (\psi_1 \psi_1^\times + \psi_2 \psi_2^\times + \psi_3 \psi_3^\times + \psi_4 \psi_4^\times), \\ j_x = 2c (\psi_1 \psi_4^\times + \psi_2 \psi_3^\times + \psi_3 \psi_2^\times + \psi_4 \psi_1^\times), \\ \dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

qui sont précisément les expressions trouvées par Darwin ⁽¹⁾, conformément à la théorie de Dirac.

(¹) DARWIN, *Proc. Roy. Soc.*, série A, vol. 118, n° A.780, p. 660, éq. (3.3),



TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

APPLICATION A L'ÉLECTROMAGNÉTOSTRICION.

	Pages.
1. Champ gravifique massique et électromagnétique.....	1
2. Théorème de l'impulsion et de l'énergie.....	4
3. Équations maxwelliennes généralisées.....	4
4. Hystérèse électromagnétique.....	6
5. Théorème de l'impulsion et de l'énergie électromagnétique.....	7
6. Équation de continuité.....	10
7. Puissance de striction et puissance d'hystérèse.....	11
8. Système électromagnétique dans un champ de Minkowski.....	11
9. Tensions de radiation.....	19
10. Application au champ de Minkowski.....	22
11. Système électromagnétique au repos.....	23

CHAPITRE II.

APPLICATION A LA THERMODYNAMIQUE.

12. Premier principe de la thermodynamique relativiste.....	25
13. Deuxième principe de la thermodynamique.....	28
14. Thermodynamique des systèmes électromagnétiques doués d'hystérèse et animés d'un mouvement quelconque.....	29

CHAPITRE III.

LA RELATIVITÉ RESTREINTE.

15. La transformation de Voigt-Lorentz.....	29
16. Variance d'un élément de volume.....	30
17. Covariances et contravariances.....	31
18. Variances de la force électrique, de la force magnétique et de la densité électrique.....	32
19. Invariance de la charge électrique.....	33

	Pages.
20. Phénomène de Doppler et aberration des fixes.....	34
21. Variance de l'énergie lumineuse.....	35
22. Thermodynamique des corps en mouvement rectiligne et uniforme.....	37
23. Électromagnétostriktion des corps en mouvement rectiligne et uniforme.	38
24. Invariance de la constante universelle h de Planck.....	39
25. Réflexion sur un miroir parfait en mouvement rectiligne et uniforme....	40
26. Quantité de mouvement et énergie d'un électron de Lorentz en mouve ment rectiligne et uniforme.....	40
27. Variance de la masse.....	41
28. Masse longitudinale et masse transversale.....	41

CHAPITRE IV.

APPLICATION A LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DE DIRAC GÉNÉRALISÉE.

29. Équations gravifiques et électroniques.....	43
30. Équations gravifiques, électroniques et photoniques.....	45
31. Principe de correspondance.....	48
32. Théorème de la conservation de l'électricité et théorème de l'impulsion et de l'énergie, exprimés au moyen des potentiels photoniques.....	48
33. Théorème de compatibilité.....	49
34. Équations quantiques de Dirac.....	49
TABLE DES MATIÈRES.....	57

