MÉMOIRES DE LA S. M. F.

CLAUDIO BAIOCCHI

Sur une équation différentielle abstraite à domaine variable ; applications aux problèmes mixtes, du type Cauchy-mêlé, pour l'équation de la chaleur

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 31-33

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__31_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 31-33.

SUR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE ABSTRAITE A DOMAINE VARIABLE ; APPLICATIONS AUX PROBLEMES MIXTES, DU TYPE CAUCHY-MELE, POUR L'EQUATION DE LA CHALEUR.

par

Claudio BAIOCCHI

On se donne K, H, $V(t)$, $a(t,u,v)$, u_o, $f(t)$ avec :

(1) $\begin{cases} \text{K, H sont des espaces de Hilbert séparables ; K est inclus dans H avec injec-} \\ \text{tion continue et image dense ;} \end{cases}$

(2) $V(t)$ est une famille de sous-espaces fermés de $K (t \in \mathbb{R}^+ =]\, o, +\infty\, [)$;

(3) $\begin{cases} \{u,v\} \to a(,u,v) \text{ est une famille, dépendant de } t \text{ de façon mesurable et bornée,} \\ \text{de formes bilinéaires continues sur } K \text{, coërcives sur } V(t) \end{cases}$

(4) $u_o \in H$; $f(t) \in L^2(\mathbb{R}^+ ; K^*)$

(K^* = espace dual de K). On cherche $u(t)$ qui, dans un sens convenable, satisfait :

(5) $\begin{cases} u(t) \text{ est une fonction "régulière" à valeurs dans } K\text{, avec :} \\ \text{(i) } u(t) \in V(t) \text{ ; (ii) } u(o) = u_o \text{ ; (iii) } \dfrac{du}{dt} + A(t)\, u(t) = f(t) \end{cases}$

$A(t) \in \mathcal{L}(K,K^*)$ étant l'opérateur associé à la forme $a(t,u,v)$.

Par exemple si l'on se donne Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Σ_o sous-ensemble de $\Sigma = \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$, et si l'on pose : $H = L^2(\Omega)$; $K = H^1(\Omega)$; $V(t) = \{ v \in H^1(\Omega) ; v_{|\Gamma(t)} = o\}$ où $\Gamma(t) = \{ x \in \partial\Omega ; (x,t) \in \overline{\Sigma_o} \}$;
$a(t,u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx$, on peut étudier

sous la forme (5) le problème mixte, du type Cauchy-mêlé, pour l'équation de la chaleur :

$$
(6) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x,t) & \text{pour } x \in \Omega,\ t > o \\ u(x,o) = u_o(x) & \text{pour } x \in \Omega \\ u(x,t) = o \text{ sur } \overline{\Sigma_o} \ ; \ \dfrac{\partial u}{\partial \gamma} = o & \text{sur } \Sigma - \overline{\Sigma_o} \end{cases}
$$

(γ étant la normale à $\partial\Omega$).

Malheureusement, dans les nombreuses formulations jusqu'ici proposées pour l'étude de (5) (cf. p.ex. [3] , [4] ; cf. aussi [2] pour une formulation plus générale où rentre aussi le cas des opérateurs $A(t)$ monotones), interviennent des hypothèses sur la variabilité du domaine $V(t)$ de $A(t)$ qui, traduites dans le cas concret du problème (6), imposent des restrictions sur Σ_o. On va exposer ici une nouvelle formulation de (5) qui, appliquée au cas concret (6), donne un théorème d'existence et unicité <u>sans aucune hypothèse sur l'ensemble</u> Σ_o <u>portant la donnée de Dirichlet</u> (pour les détails, la définition précise des espaces employés, et pour une bibliographie plus étendue on renvoie à [1] ; ici on expose les idées essentielles).

Pour fixer la régularité de $t \to u(t)$ et pour imposer la condition (i) de (5) on suppose :

(7) $\quad u(t) \in L^2(\mathbb{R}^+ ; V(t)) \cap H^{1/2} (\mathbb{R}^+ ; H)$

(à savoir $t \to u(t)$ est de carré sommable à valeurs dans K, avec $u(t) \in V(t)$ p.p.; et une "demie dérivée" de u est de carré sommable à valeurs dans H).

Il ne s'agit pas de fonctions continues ; il faut donc préciser le point (ii) de (5). A ce propos on introduit un "relèvement" $u_o \to u_o(t)$ qui à tout $u_o \in H$ fait correspondre une fonction $u_o(t)$ régulière et telle que $u_o(0) = u_o$; ce relèvement étant fixé, on traduit (ii) en imposant :

(8) $$u(t) - u_o(t) \in H^{1/2}_{oo} (\mathbb{R}^+ ; H)$$

($H^{1/2}_{oo} (\mathbb{R}^+ ; H) = \{v \in H^{1/2} (\mathbb{R}^+ ; H) ; \int_o^{+\infty} \frac{1}{t} \| v(t)\|^2_H \, dt < +\infty\}$; donc les éléments de $H^{1/2}_{oo} (\mathbb{R}^+ ; H)$ sont, en quelque sorte, "nuls à l'origine" ; dès que $u_o(0) = u_o$ (8) est donc une "formulation faible" de (ii)).

On rappelle maintenant que l'opérateur de dérivation $u \to u'$ opére de $H^{1/2}(\mathbb{R}^+ ; H)$ dans le dual de $H^{1/2}_{oo}(\mathbb{R}^+ ; H)$; pour $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+ ; H)$ et $v \in H^{1/2}_{oo} (\mathbb{R}^+ ; H)$ a donc un sens le crochet $< u', v >$; ceci posé on traduit (iii) de (5) en imposant :

$$(9) \quad \begin{cases} \underline{\text{pour tout}} \quad v \in L^2(\mathbb{R}^+ ; v(t)) \cap H^{1/2}_{oo} (\mathbb{R}^+ ; H) \ \underline{\text{on a}} : \\ < u', v > + \int_{\mathbb{R}^+} a(t,u(t),v(t)) \, dt = \int_{\mathbb{R}^+} {}_{K*}< f(t),v(t) >_K \, dt \end{cases}$$

On a alors le théorème :

<u>Théorème</u> - <u>Sous les hypothèses</u> (1), (2), (3), (4), <u>et si</u> :

(10) $\quad H^{1/2}(\mathbb{R}^+ ; H) \subset L^2(\mathbb{R}^+ ; V(t)) + H^1(\mathbb{R}^+ ; K^*)$

<u>il existe une et une seule</u> u <u>satisfaisant</u> (7), (8), (9).

L'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (6) en découlent : En effet,avec le choix de K, H, $V(t)$ indiqué plus haut, (10) est remplie pour n'importe lequel sous-ensemble Σ_o de Σ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BAIOCCHI - Problemi misti per l'equazione del calore - Rend. Sem. Mat. e Fis. Milano XLI (1971) p. 3-38.

[2] R. W. CARROLL, J.M. COOPER -Remarks on some variable Domain Problems in Abstract Evolution Equations. Math. Annalen CLXXXVIII (1970) p. 143-160.

[3] T. KATO, H. TANABE - On abstract evolution Equation. Osaka Math. J. XIV (1962) p. 107-133.

[4] J. L. LIONS - Equations différentielles opérationnelles dans les espaces de Hilbert - Cours CIME 1963, éd. Cremonese.

Istituto di Matematica
Università - PAVIA (Italie)