MÉMOIRES DE LA S. M. F.

IVAN CNOP

Un « Nullstellensatz » pour les fonctions holomorphes à croissance

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 101-104
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__101_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 101-104.

UN "NULLSTELLENSATZ" POUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES À CROISSANCE.

par

Ivan CNOP*

---

1. Le résultat qui suit fait appel à la théorie des espaces bornologiques. Il s'agit d'un théorème du type "Nullstellensatz" pour des systèmes bornés dans certaines algèbres de fonctions holomorphes à croissance. Dans le cas où le système borné se réduit à une seule fonction, ce théorème a été obtenu par J.J. Kelleher et B.A. Taylor [3] et L. Waelbroeck [6].

Dans ce qui suit, δ sera une fonction non négative, bornée et continue sur $\mathbb{C}^n$. Si E est un b-espace (espace bornologique convexe séparé complet), $\mathscr{C}(\delta, E)$ sera l'espace des fonctions f définies sur l'ouvert où δ diffère de 0, et qui satisfont à : il existe un entier N tel que $f.\delta^N$ reste borné dans E. $\mathscr{C}(\delta, E)$ est muni de la bornologie naturelle : un ensemble B de fonctions f de $\mathscr{C}(\delta, E)$ est borné si pour un certain entier N, l'ensemble des $f.\delta^N$, $f \in B$, reste borné dans E. $\mathscr{C}(\delta, E)$ est un b-espace. En particulier, le poids $\delta_o(s) = (1 + |s|^2)^{-1/2}$ pour s dans $\mathbb{C}^n$ indique une croissance polynomiale à l'infini.

$\mathcal{O}(\delta)$ est la sous-algèbre commutative de $\mathscr{C}(\delta, \mathbb{C})$ des fonctions holomorphes sur le domaine de définition, muni de la bornologie induite. $\mathcal{O}(\delta)$ est une b-algèbre : c'est un b-espace et le produit de deux bornés est borné.

THEOREME. - *Soit* δ *une fonction non négative, lipschitzienne sur* $\mathbb{C}^n$, *inférieure ou égale à* δ_o, *avec* $-\log \delta$ *plurisousharmonique, et* Λ *un ensemble quelconque d'indices. Soient* $f_{1,\lambda}, \ldots, f_{k,\lambda}$ *et* g_λ *des familles bornées d'éléments de* $\mathcal{O}(\delta)$ *pour* λ *dans* Λ. *Supposons qu'il existe un nombre positif* ε *et un nombre naturel* N *tels que pour tout* λ *dans* Λ :

$$(o) \qquad |f_{1,\lambda}| + \ldots + |f_{k,\lambda}| \geqslant \varepsilon\, \delta^N |g_\lambda| ,$$

partout sur $\mathbb{C}^n$. *Alors il existe un nombre naturel* m *tel que pour tout* λ *dans* Λ :

$$g_\lambda^m \in \mathrm{idl}\, (f_{1,\lambda}, \ldots, f_{k,\lambda} ; \mathcal{O}(\delta)) ,$$

les coefficients étant bornés dans $\mathcal{O}(\delta)$ *indépendamment de* λ *dans* Λ.

2. Soit A une b-algèbre commutative à unité, et α un b-idéal, c'est-à-dire un idéal de A muni de la structure d'un b-espace (pas nécessairement la structure induite), et tel que le produit d'un borné de α et d'un borné de A est

---
* Aspirant du "N. F. W. O." de Belgique.

borné dans α . Le spectre d'éléments $a_1, \ldots, a_n$ dans A modulo α , $\Delta(a_1, \ldots, a_n ; A|\alpha)$ est l'ensemble des fonctions φ sur $\mathbb{C}^n$ pour lesquelles on a une décomposition de 1 :

$$1 = \varphi(s)\, u_o(s) + \sum_1^n (a_i - s_i)\, u_i(s) + v(s)$$

où s_i est la ième projection coordonnée sur $\mathbb{C}^n$, s la variable de $\mathbb{C}^n$, les coefficients $u_o, u_1, \ldots, u_n$ dans $\mathcal{C}(\delta_o , A)$ et v dans $\mathcal{C}(\delta_o , \alpha)$. Cette notion de spectre généralise en un certain sens le spectre-joint de quelques éléments d'une algèbre de Banach commutative à unité. La connaissance de fonctions spectrales permet d'appliquer le calcul fonctionnel holomorphe : si δ est lipschitzien, $\leqslant \delta_o$ et spectral pour $a_1, \ldots, a_n$ dans A mod α , on obtient un homomorphisme $\Theta(\delta) \to A$, défini modulo α , qui envoie 1 sur 1 et la ième projection coordonnée sur a_i .

Sous les hypothèses du théorème (δ lipschitz, $\leqslant \delta_o$ et $-\log \delta$ plurisousharmonique), δ appartient au spectre des projections coordonnées dans $\Theta(\delta)$ [1] (avec démonstration dans [2]).

3. L'existence de fonctions spectrales permet encore de démontrer le lemme suivant :

LEMME. - Soit A une b-algèbre commutative avec 1, α un b-idéal et $a_1, \ldots, a_n$, a des éléments de A .

Si

$$\delta \in \Delta(a_1, \ldots, a_n ; A|\alpha)$$

et

$$a \in \mathrm{idl}(a_1 - s_1, \ldots, a_n - s_n ; \mathcal{C}(\delta, A)) + \mathcal{C}(\delta, \alpha) ,$$

alors

$$a \in \mathrm{idl}(a_1 - s_1, \ldots, a_n - s_n ; \mathcal{C}(\delta_o , A)) + \mathcal{C}(\delta_o , \alpha) .$$

On obtient donc un contrôle plus précis de la croissance des coefficients. La démonstration est immédiate : si δ est spectral, δ^N l'est aussi pour tout N naturel et :

$$1 = \delta^N(s)\, u_o(s) + \sum_1^n (a_i - s_i)\, u_i(s,z) + v(s)$$

avec $u_o, u_1, \ldots, u_n$ dans $\mathcal{C}(\delta_o , A)$ et v dans $\mathcal{C}(\delta_o , \alpha)$. On multiplie cette expression avec :

$$a = \sum_1^n (a_i - s_i)\, U_i(s) + V(s)$$

avec $U_1 ,\dots, U_n$ dans $\mathcal{C}(\delta,A)$ et V dans $\mathcal{C}(\delta,\alpha)$.
Un regroupement dans le membre de droite fournit alors des coefficients avec les bonnes majorations pour N suffisamment grand.

Un théorème spectral de L. Waelbroeck [4] [5] affirme que la fonction identiquement zéro ne peut jamais être spectrale, sauf dans le cas trivial où α est toute l'algèbre. Grâce à ce théorème, on peut déduire de la conclusion du lemme précédent que a est nilpotent modulo α [6].

4. On va appliquer ces résultats pour obtenir le "Nullstellensatz". L'algèbre qui nous intéresse est l'algèbre $\mathcal{O}(\delta)_\Lambda$ des systèmes, indexés par Λ et bornés dans $\mathcal{O}(\delta)$. Nous serons amenés ici à introduire deux variables dans C^n, s et z, et on précisera δ_s ou δ_z suivant qu'on contrôle la croissance en s ou z.

Nous savons que

$$\delta \in \Delta(z_1 ,\dots, z_n \,;\, \mathcal{O}(\delta_z)) ,$$

et en recopiant cette expression un nombre suffisant de fois :

$$\begin{aligned}\delta &\in \Delta(z_1 ,\dots, z_n \,;\, \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda)\\ &\subset \Delta(z_1 ,\dots, z_n \,;\, \mathcal{O}(\delta_s \otimes \delta_z)_\Lambda)\end{aligned}$$

où $\delta_s \otimes \delta_z$ est le poids défini sur $\mathbb{C}^{2n}$ par δ sur les premières et dernières n composantes. Cela nous permet d'appliquer le calcul fonctionnel holomorphe modulo l'idéal α engendré dans $\mathcal{O}(\delta_s \otimes \delta_z)_\Lambda$ par les fonctions $z_1 - s_1 ,\dots, z_n - s_n$ (chaque fonction étant prise la puissance de Λ fois). On obtient que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant k$:

$$\begin{aligned}&(f_{i,\lambda}(z) - f_{i,\lambda}(s))_\lambda \in \alpha\\ &\subset \mathrm{idl}(z_1 - s_1 ,\dots, z_n - s_n \,;\, \mathcal{C}(\delta_s \,;\, \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda))\end{aligned}$$

et de même pour g :

$$\begin{aligned}&(g_\lambda(z) - g_\lambda(s))_\lambda\\ &\in \mathrm{idl}(z_1 - s_1 ,\dots, z_n - s_n \,;\, \mathcal{C}(\delta_s \,;\, \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda)) .\end{aligned}$$

De l'hypothèse (°) :

$$\begin{aligned}&(g_\lambda(s))_\lambda \in \mathrm{idl}((f_{1,\lambda}(s))_\lambda ,\dots, (f_{k,\lambda}(s))_\lambda \,;\, \mathcal{C}(\delta_s)_\Lambda)\\ &\subset \mathrm{idl}((f_{1,\lambda}(s))_\lambda ,\dots, (f_{k,\lambda}(s))_\lambda \,;\, \mathcal{C}(\delta_s \,;\, \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda)) .\end{aligned}$$

Donc :

$$(g_\lambda(z))_\lambda \in (g_\lambda(s))_\lambda + \mathrm{idl}(z_1 - s_1, \dots, z_n - s_n ; \mathcal{C}(\delta_s ; \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda)),$$

$$\subset \mathrm{idl}((f_{1,\lambda}(s))_\lambda, \dots, (f_{k,\lambda}(s))_\lambda ; z_1-s_1, \dots, z_n-s_n ; \mathcal{C}(\delta_s ; \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda))$$

$$\subset \mathrm{idl}((f_{1,\lambda}(z))_\lambda, \dots, (f_{k,\lambda}(z))_\lambda ; z_1-s_1, \dots, z_n-s_n ; \mathcal{C}(\delta_s ; \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda))$$

$$\subset \mathrm{idl}(z_1 - s_1, \dots, z_n - s_n ; \mathcal{C}(\delta_s ; \mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda) + \mathcal{C}(\delta_s, \beta)$$

où β est l'idéal engendré par $(f_{1,\lambda}(z))_\lambda, \dots, (f_{k,\lambda}(z))_\lambda$ dans $\mathcal{O}(\delta_z)_\Lambda$. On applique ensuite la conclusion du n° 3 pour trouver un naturel m pour lequel

$$(g_\lambda^m)_\lambda \in \beta$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CNOP (I.). - Un problème de spectre dans certaines algèbres de fonctions holomorphes à croissance tempérée. C. R. Acad. Sci. Paris A 270, 1970, 1690-1691.

[2] CNOP (I.). - A theorem concerning holomorphic functions with bounded growth. Thèse. Université Libre de Bruxelles, 1970. A paraître.

[3] KELLEHER (J.J.) and TAYLOR (B.A.). - Finitely generated ideals in rings of analytic functions. Math. Ann. 193, 1971, 225-237.

[4] WAELBROECK (L.). - Etude spectrale des algèbres complètes. Acad. Roy. Belgique, Mém. Cl. des Sci., 1960.

[5] WAELBROECK (L.). - About a spectral theorem. Function algebras, Scott, Foresman & Co., 1965, 310-321.

[6] WAELBROECK (L.). - Un "Nullstellensatz" pour les fonctions holomorphes à croissance, 1970. Multigraphié.

83, Avenue P. Curie
B 1050 BRUXELLES
(Belgique)