

MICHEL SERFATI

**Quasi-ensembles d'ordre  $r$  et approximations de répartitions ordonnées**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 143 (1998), p. 5-26

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1998\\_\\_143\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1998__143__5_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## QUASI-ENSEMBLES D'ORDRE $r$ ET APPROXIMATIONS DE RÉPARTITIONS ORDONNÉES

Michel SERFATI<sup>1</sup>

**RÉSUMÉ** — *Sur le plan mathématique, la théorie des  $r$ -répartitions ordonnées traite d'une extension du concept d' "ensemble des parties d'un ensemble", sous la forme d'un treillis distributif complet. Quant à l'interprétation, on peut considérer chaque  $r$ -répartition comme la distribution exhaustive à tous les éléments d'un ensemble  $\Omega$ , d'un certain caractère (ou qualité), selon  $r$  points de vue, les points de vue formant un ensemble totalement ordonné. Cet article traite exclusivement de l'établissement d'une distance  $d$  sur l'ensemble  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  de toutes les  $r$ -répartitions de  $\Omega$ , et de l'approximation, au sens de la métrique  $d$ , d'une  $r$ -répartition quelconque  $P$  par ceux des sous-ensembles qui lui sont le plus proches. On peut alors considérer que l'un quelconque de ceux-ci est susceptible de venir remplacer  $P$ , et on interprète ce remplacement comme le résultat d'une procédure décisionnelle terminale.*

**SUMMARY** — Quasi-sets and approximations of  $r$ -ordered partitions.

*From a mathematical viewpoint, the theory of  $r$ -ordered partitions deals with some extension of the concept of "power set", by the mean of a complete distributive lattice. As to interpretation, one may consider each  $r$ -partition as the exhaustive distribution of some character (or quality) to all the elements of some set  $\Omega$ , according to  $r$  viewpoints, the viewpoints forming a chain (linearly ordered set). This paper deals uniquely with the establishing of some distance  $d$  on the set  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  of all the  $r$ -partitions of  $\Omega$ , and also of the approximation of any given  $r$ -ordered partition  $P$  by the subsets of  $\Omega$  which are the nearest to  $P$ , according to the metric  $d$ . Any of these subsets may then be considered as convenient for replacing  $P$ , and one may interpret this replacement as the result of some terminal decision.*

### 1°) INTRODUCTION.

Cet article, qui fait suite à un texte à paraître dans *Discrete Mathematics*<sup>2</sup>, traite essentiellement de répartitions ordonnées d'ordre  $r$  ( $r \in \mathbb{N}$  ;  $r \geq 2$ ) d'un certain

---

<sup>1</sup> L.I.A.F.A., Université Paris VII et C.N.R.S (ERS 586) Case 7014. 2, place Jussieu, 75251.Paris Cedex 05. e-mail : serfati@cicrp.jussieu.fr. Une partie du contenu de cet article a fait l'objet d'un rapport interne au LIAFA : Rapport LITP/IBP 95-34.

<sup>2</sup> Cf. [8], «The lattice theory of  $r$ -ordered partitions». Notre titre anglais se réfère à des (ordered) «partitions», terminologie que nous avons utilisée jusqu'alors, en topologie notamment. Deux conceptions d'une «partition» (famille ou partie?) semblent cependant s'opposer quant à l'acceptation ou au rejet des classes vides. Pour tenir compte des observations des rapporteurs du présent article, nous avons donc décidé d'utiliser ici le terme «répartition», qui correspond bien par ailleurs à ce concept de l'affectation d'un caractère aux éléments d'une population, certaines des classes  $P_i^1$  pouvant alors être vides.

ensemble  $\Omega$ , c'est-à-dire (cf. § 2.3) des  $r$ -uples  $P = (P^0, \dots, P^{r-1})$  de parties de  $\Omega$  telles que :

$$\bigcup_{0 \leq i \leq r-1} P^i = \Omega \quad \text{et} \quad P^i \cap P^j = \emptyset \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

L'ensemble  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  de toutes les  $r$ -répartitions ordonnées est muni d'une relation d'ordre qui le constitue en treillis distributif (avec une structure postienne<sup>3</sup> supplémentaire), les sous-ensembles usuels de  $\Omega$  apparaissant alors comme des cas particuliers ("quasi-ensembles" ; cf. § 2.3) des  $r$ -répartitions. Sur le plan mathématique, la présente théorie apporte donc une extension du concept fondamental de "sous-ensemble", en même temps que celui d'ensemble des parties d'un ensemble.

D'un autre côté, on peut, de façon intuitive, proposer un (des) jeu(x) d'interprétation de cette structure abstraite. Ainsi, chaque  $r$ -répartition ordonnée  $P$  de  $\Omega$  pourra être interprétée comme une classification d'ordre  $r$ , c'est-à-dire la réalisation d'une distribution explicite et exhaustive, à tous les éléments de  $\Omega$ , d'un certain caractère (ou qualité) spécifique, en fonction de  $r$  points de vue ( $r \geq 2$ ), les points de vue formant un ensemble totalement ordonné : les éléments de  $P$  qui sont de classe  $(k+1)$  (appartenant donc à  $P^{k+1}$ ) pourront par exemple être regardés comme "meilleurs" que ceux de la classe  $k$ . Dans les exemples mathématiques, ce caractère pourra être par exemple, le degré d'appartenance (ensembles<sup>4</sup>), ou de descendance (graphes<sup>5</sup>), le cas  $r = 2$  correspondant au cas usuel de l'appartenance ou de la non appartenance. Dans cette perspective, un sous-ensemble usuel de  $\Omega$  s'interprète alors comme une certaine  $r$ -classification particulière, à la fois "binaire", mais aussi extrême, du caractère concerné : les seules classes effectivement présentes (non vides) sont en effet au nombre de deux au plus : la "meilleure" (de classe  $(r-1)$ ) et la "pire" (de classe nulle). C'est une situation qu'on rencontre aussi dans nombre d'exemples quotidiens, où les éléments d'une population sont par exemple classés en "exceptionnels", "excellents", "très bons", etc..., "médiocres", "inacceptables", de sorte que chaque individu appartienne à une classe et à une seulement. On observera aussi que si l'ensemble des points de vue n'est pas naturellement totalement ordonné, il est toujours possible de le faire en décrétant *a posteriori*

Le contenu du présent article ainsi que celui de *Discrete Mathematics* a été exposé pour partie aux colloques *Universal Algebras and Lattice Theory*, à Szeged (Hongrie) de juillet 1996 et août 1998, et aussi au symposium *Americal Mathematical Society-Benelux*, à Anvers (mai 1996).

<sup>3</sup> La présente théorie s'inscrit en effet dans le cadre des algèbres de Post, que nous n'avons pas jugé utile de développer ici. Les algèbres de Post (cf. bibliographie EPSTEIN [2] et SERFATI [5], en fin d'article) sont les structures algébriques destinées à rendre compte des logiques à plusieurs valeurs ( $r \geq 3$ ) au sens de Post, de la même façon que les algèbres de Boole quant à la logique binaire. L'ensemble  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  de toutes les  $r$ -répartitions ordonnées est un exemplaire "concret" d'une  $r$ -algèbre de Post abstraite. Dans [6] et [7], nous avons, pour notre part, développé diverses techniques de calcul postien en logique à plusieurs valeurs : résolution des systèmes de  $p$  équations et  $q$  inéquations à  $n$  inconnues, équations et inéquations matricielles, etc...

<sup>4</sup> Le degré d'appartenance de l'élément  $x$  de  $\Omega$  à la  $r$ -répartition  $P$  est (cf. § 2.3) l'unique  $i$  ( $= i_P(x)$ ) tel que  $x \in P^i$ .

<sup>5</sup> Nous consacrerons un prochain article à cette extension du concept de graphe orienté (" $r$ -graphe de Post"). Si  $G = (\Omega, \Gamma)$  est un tel  $r$ -graphe, pour tout couple  $(x, y)$  de sommets, il existe exactement un  $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$  tel que  $y \in \Gamma^i(x)$  ( $i$  est le degré de descendance de  $y$  à partir de  $x$  selon  $G$ ).

un ordre total. C'était en vérité là le voeu profond de Descartes<sup>6</sup> : supposer de l'ordre partout, même s'il n'en est pas d'apparent. On peut ainsi, dans tous les cas, retrouver le schéma précédent, au prix cependant de l'adjonction d'une hypothèse supplémentaire artificielle. Rappelons néanmoins que, comme à l'ordinaire, il sera toujours possible de fournir à la structure mathématique  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  ainsi construite, bien d'autres interprétations que celle qu'on vient de proposer.

Cet article est exclusivement consacré aux propriétés *métriques* de l'ensemble  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ , la distance étant obtenue à partir d'une mesure sur l'ensemble  $\Omega$  (ici supposé fini pour simplifier) : les cas particuliers usuels sont ceux où  $m(A)$  s'interprète comme  $\text{Prob.}(A)$  (où  $\text{Prob.}$  est une certaine probabilité sur  $\mathcal{P}(\Omega)$ ) ; aussi  $m(A) = \text{Card}(A)$ . Ce dernier cas conduit, sur l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(\Omega)$ , à la distance usuelle de la différence symétrique :  $\delta(A, B) = \text{Card}(A \oplus B)$ , où  $A$  et  $B$  sont deux sous ensembles quelconques de  $\Omega$ . L'extension à l'ensemble des  $r$ -répartitions ordonnées de  $\Omega$  que nous proposons est alors (théorème 3) :

$$d(P, Q) = \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq i \leq r-1} \text{Card}(P_i \oplus Q_i)$$

où  $P$  et  $Q$  sont deux  $r$ -répartitions ordonnées quelconques de  $\Omega$ , et où  $P_i$  et  $Q_i$  désignent ce qu'on appelle ci-dessous les suites de leurs composantes *monotones* respectives. Le centre (cf. § 2.1) de  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ , est alors isométrique à  $\mathcal{P}(\Omega)$ , de sorte qu'on pourra confondre un "vrai" sous-ensemble de  $\Omega$ , avec le quasi-ensemble 'A' (qui est une  $r$ -répartition particulière), non seulement au sens des treillis, mais aussi à celui de la métrique. On examine ensuite le diamètre de  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  (théorème 4)<sup>7</sup>.

Pour cette distance, on résout d'abord le problème d'*approximation* d'une  $r$ -répartition par ceux des quasi-ensembles qui lui sont les plus proches : c'est le théorème fondamental 6, dont la démonstration est relativement longue. Ainsi, une classification quelconque correspondant à une répartition en un éventail de  $r$  classes, pourra-t-elle être approchée, et le cas échéant remplacée, par une classification de type binaire-extrême. Remplacer une classification quelconque par une binaire peut s'interpréter, à notre sens, comme le résultat d'un processus décisionnel terminal : après que la complexité de divers phénomènes "réels" ait été reconnue et prise en compte, au moyen de  $r$ -classifications véritables, tout au long du calcul<sup>8</sup> il faudra néanmoins se résoudre finalement à trancher,

6

Cette doctrine cartésienne est exposée par son auteur dans *les Règles utiles et claires pour la Direction de l'Esprit, et la Recherche de la Vérité*. On pourra consulter l'édition avec traduction selon le lexique cartésien et annotation conceptuelle par Jean-Luc Marion. Avec de notes mathématiques de Pierre Costabel. Martinus NIJHOFF. La Haye. 1977.

7

Ainsi aura-t-on doublement construit une extension de l'ensemble des parties d'un ensemble : d'abord sur le plan des treillis (le treillis distributif complet  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  est une extension de l'algèbre de Boole complète  $\mathcal{P}(\Omega)$ ), mais aussi sur le plan de la distance. Cette technique de construction d'un objet mathématique par extension à partir d'une structure existante, est conforme à une méta-procédure épistémologique, usuelle à notre sens en mathématiques, que nous avons décrite dans notre thèse de philosophie sous le nom de "principe de prolongement". (Cf. *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Thèse de doctorat de Philosophie. Université Paris I. (1997). Voir en particulier le chapitre XIV: Formes sans significations, §14.3.4: Prolongements: principe et méthodologie, 343-344).

8

Avec cette interprétation, il peut donc apparaître "légitime" d'effectuer la résolution d'un système d'équation en logique ternaire par exemple, puis de remplacer ultimement les solutions par leurs approximations "binaires".

c'est-à-dire se placer, à propos de chaque élément de  $\Omega$ , devant cette situation d'acceptation ou de rejet, qui s'incarne, à notre sens, dans un quasi-ensemble. On donne à la suite diverses applications, telle la caractérisation (cf.§5 ; théorème 7) des partitions les plus éloignées du centre (*i.e* les "moins ensemblistes"), et aussi la détermination de la distance d'une  $r$ -répartition quelconque à son intérieur et à sa fermeture ensemblistes (cf.§5 ; théorème 8).

## 2°) DEFINITIONS ET RAPPELS.

Dans cette section, on rappelle d'abord quelques définitions générales relatives aux treillis distributifs, puis certains résultats en provenance de l'article cité de *Discrete Mathematics* qui seront ici utiles.

### 2.1. Centre d'un treillis distributif.

On rappelle qu'un treillis  $T$  est dit *borné* s'il admet un plus grand et un plus petit élément, notés respectivement 1 et 0, et qu'il est dit *complet* si toute famille  $(x_i)_{i \in I}$  admet dans  $T$  une borne supérieure  $(\bigvee_{i \in I} x_i)$  et une borne inférieure  $(\bigwedge_{i \in I} x_i)$ . On appelle

*centre* d'un treillis distributif borné l'ensemble de tous ses éléments complémentés, c'est-à-dire de tous les éléments  $x$  de  $T$  tels qu'il existe  $\bar{x}$  dans  $T$  tels que  $x \vee \bar{x} = 1$  et  $x \wedge \bar{x} = 0$  ( $\bar{x}$  est alors unique). On montre simplement que le centre de tout treillis distributif est une algèbre de Boole (le résultat est du même type que celui qui établit que dans un demi-groupe avec élément neutre, l'ensemble des éléments symétrisables forme un groupe ; les algèbres de Boole jouent ici, relativement aux treillis distributifs bornés, le rôle de "structure-mère").

### 2.2. Sous-diagonale.

Etant donné un ensemble  $\Omega$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ , on définit la *sous-diagonale d'ordre  $k$*  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  (notée  $\mathbf{k}(\Omega)$ ), comme l'ensemble des suites décroissantes de  $k$  sous-ensembles de  $\Omega$ , c'est-à-dire :

$$\mathbf{k}(\Omega) = \{ P = (P_1, \dots, P_k) \in [\mathcal{P}(\Omega)]^k / P_j \supset P_{j+1} ; 1 \leq j \leq k-1 \} \quad 9$$

On montre facilement<sup>10</sup> que, muni de l'ordre composante à composante,  $\mathbf{k}(\Omega)$  est un treillis distributif borné complet, dont le centre  $\Delta_k(\Omega)$  est booléennement isomorphe à  $\mathcal{P}(\Omega)$  : l'application  $\mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \Delta_k(\Omega) : A \rightarrow "A" = (A, A, \dots, A)$  est l'isomorphisme requis.

### 2.3. Répartitions ordonnées.

DEFINITION <sup>11</sup>. Soit  $\Omega$  un ensemble et  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $r \geq 2$ .

On appelle *r-répartition ordonnée* de  $\Omega$  tout  $r$ -uplet  $P = (P^0, \dots, P^{r-1})$  de sous-ensembles

de  $\Omega$  tel que : 
$$\bigcup_{0 \leq i \leq r-1} P^i = \Omega \quad \text{et} \quad P^i \cap P^j = \emptyset \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

9

$\supset$  dénote l'inclusion au sens large :  $A \supset B$  équivaut à  $(x \in B \Rightarrow x \in A)$

10

[8], théorème 1.1.

11

*Idem*, définition 2.1.

Pour tout  $x$  de  $\Omega$ , il existe donc exactement un  $i$  ( $= i_P(x)$ ) tel que  $x \in P^i$  ( $i$  est le *degré* de  $x$  dans  $P$ ). Les  $P^i$  sont dénommées les composantes *disjonctives* de  $P$  (elles sont au nombre de  $r$ ). Par exemple, avec  $r = 3$ , et  $P = (P^0, P^1, P^2)$ , on a :

$$P^0 \cup P^1 \cup P^2 = \Omega \quad \text{et} \quad P^0 \cap P^1 = P^1 \cap P^2 = P^0 \cap P^2 = \emptyset.$$

Un cas particulier important est celui où tous les ensembles intermédiaires ( $P^i$ ;  $1 \leq i \leq r-2$ ) sont vides. Une telle  $r$ -répartition ordonnée est alors de la forme :

$$(\bar{A}, \emptyset, \dots, \emptyset, A) = 'A'$$

pour un certain sous-ensemble  $A$  de  $\Omega$ . (' $A$ ' se lit : «quasi- $A$ » ou : «presque  $A$ »). ' $A$ ' est un *quasi-ensemble* (d'ordre  $r$ ). Une  $r$ -répartition qui n'est pas un quasi-ensemble est dite *véritable* (*actual*). Une  $r$ -répartition  $P$  telle que  $P^0 = \emptyset = P^{r-1}$  est dite *purement non-ensembliste* (ses composantes non vides sont toutes intermédiaires).

#### 2.4. Structure de treillis de $\mathcal{P}_r(\Omega)$ .

On munit ensuite l'ensemble de toutes les  $r$ -répartitions ordonnées de  $\Omega$  d'une structure de treillis. Soient en effet  $P = (P^i)_{0 \leq i \leq r-1}$  et  $Q = (Q^i)_{0 \leq i \leq r-1}$  deux  $r$ -répartitions ordonnées de  $\Omega$  quelconques.

Si on définit  $P \leq Q$  par :

$$(\forall i \in \{0, 1, \dots, r-1\}) \quad P^i \subset \bigcup_{j=i}^{j=r-1} Q^j$$

alors  $\leq$  est une relation d'ordre<sup>12</sup> sur  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ . Ainsi, avec cette définition, une répartition  $P$  est donc inférieure à  $Q$  si, pour tout  $x$  de  $\Omega$ , le degré de  $x$  dans  $Q$  est au moins égal à celui de  $x$  dans  $P$ . On montre alors que  $(\mathcal{P}_r(\Omega), \leq)$  est un treillis distributif borné et complet<sup>13</sup>: pour tout couple  $P = (P^i)_{0 \leq i \leq r-1}$  et  $Q = (Q^i)_{0 \leq i \leq r-1}$  d'éléments de  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ , on a pour  $P \vee Q$  et  $P \wedge Q$  les valeurs<sup>14</sup>:

$$[P \vee Q]^i = \left[ P^i \cap \bigcup_{j=0}^{j=i} Q^j \right] \cup \left[ Q^i \cap \bigcup_{j=0}^{j=i} P^j \right] \quad i = 0, 1, 2, \dots, r-1$$

$$[P \wedge Q]^i = \left[ P^i \cap \bigcup_{j=i}^{j=r-1} Q^j \right] \cup \left[ Q^i \cap \bigcup_{j=i}^{j=r-1} P^j \right] \quad i = 0, 1, 2, \dots, r-1$$

En d'autres termes, un élément  $x$  de  $\Omega$  est de degré  $i$  dans  $P \vee Q$  si et seulement si, ou bien il est de degré  $i$  dans  $P$  et de degré au plus égal à  $i$  dans  $Q$ , ou bien il est de degré  $i$  dans  $Q$  et de degré au plus égal à  $i$  dans  $P$ . On montre alors qu'une  $r$ -répartition ordonnée est complémentée dans  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  si et seulement si c'est un quasi-ensemble. Le centre

<sup>12</sup> *Idem*, théorème 2.1.

<sup>13</sup> *Idem*, théorème 2.3.

<sup>14</sup> *Idem*, théorème 2.3.

$\Delta_r(\Omega)$  de  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  est alors booléennement isomorphe à  $\mathcal{P}(\Omega)$  par l'isomorphisme :  $A \rightarrow 'A'$ . Ainsi pourra-t-on identifier, au sens des treillis, un "vrai" sous-ensemble  $A$  et le quasi-ensemble  $'A'$  : le *sup* et le *inf*, restreints aux quasi-ensembles, coïncident, à un isomorphisme de treillis près, avec réunion et intersection ensemblistes. On définit ensuite pour chaque  $r$ -répartition ordonnée  $P = (P_i)_{0 \leq i \leq r-1}$  de  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ , la suite de ses  $(r-1)$  composantes *monotones*.  $(P_i; 1 \leq i \leq r-1)$ . A chaque  $P$ , on associe en effet :

$$\mathbf{D}(P) = (P_1, P_2, \dots, P_{r-1}) \in [\mathcal{P}(\Omega)]^{r-1} \text{ par :}$$

$$P_i = \bigcup_{j=i}^{r-1} P_j \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r-1$$

On montre que  $\mathbf{D}$  est un isomorphisme de treillis entre  $(\mathcal{P}_r(\Omega), \leq)$  et

$((r-1)(\Omega), \leq)$ , la bijection réciproque  $\mathbf{D}^{-1}$  étant définie par :

$$P^0 = \overline{P_1} ; P^j = P_j \cap \overline{P_{j+1}} \text{ pour } 1 \leq j \leq r-2 ; P^{r-1} = P_{r-1}$$

La partie "bijection" de la démonstration est d'un type usuel en calcul des probabilités et en théorie de la mesure : à chaque ensemble de  $r$  événements deux à deux disjoints, on associe bijectivement une suite monotone de  $(r-1)$  sous-ensembles. Par exemple avec  $r=3$ , et  $P = (P^0, P^1, P^2)$ , on a :

$$\mathbf{D}(P) = (P^1 \cup P^2, P^2) = (P_1, P_2),$$

et réciproquement, avec  $P_1 \supset P_2$ , on trouve :

$$\mathbf{D}^{-1}(P_1, P_2) = (\overline{P_1}, P_1 \cap \overline{P_2}, P_2) = (P^0, P^1, P^2).$$

La restriction  $\mathbf{D}_1$  de  $\mathbf{D}$  aux centres respectifs des deux treillis est un isomorphisme booléen des deux centres  $c_r(\Omega)$  et  $\Delta_r(\Omega)$ . Il vient alors :  $\mathbf{D}('A') = 'A'$  pour chaque  $A \subset \Omega$ .

## 2.5. Dualité sur $\mathcal{P}_r(\Omega)$ .

On peut munir  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ , d'une dualité involutive de treillis, en associant, à chaque  $P = (P_i)_{0 \leq i \leq r-1}$  appartenant à  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ , le  $r$ -uplet  $\Delta(P)$  défini par :

$$(\Delta(P))_i = P_{r-1-i} \text{ pour } 0 \leq i \leq r-1.$$

(on a inversé l'ordre des composantes, donc l'importance des degrés).

$\Delta(P)$  est appelée la *duale* de  $P$ .

## 2.6. Pseudo-compléments sur $\mathcal{P}_r(\Omega)$ .

On montre <sup>16</sup> que  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  est une algèbre de Heyting, c'est-à-dire que, pour chaque  $(P, Q) \in [\mathcal{P}_r(\Omega)]^2$ , l'inéquation  $P \wedge X \leq Q$  admet une plus grande

<sup>15</sup>

*Idem*, théorème 2.4. Rappelons que par dualité involutive d'un treillis  $T$ , on désigne toute application  $\Delta$  de  $T$  dans  $T$  telle que  $\Delta^2 = \text{Id}$  et  $\Delta(x \vee y) = \Delta(x) \wedge \Delta(y)$  et

$\Delta(x \wedge y) = \Delta(x) \vee \Delta(y)$  pour tous  $x$  et  $y$  dans  $T$ . Il en résulte l'équivalence logique :

$x \leq y \Leftrightarrow \Delta(x) \geq \Delta(y)$ . Sur  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ , les propriétés vont ainsi par paires duales.

<sup>16</sup>

[8], théorème 2.5.

solution dans  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ , notée  $(Q|P)$ , dénommée *inf-pseudo-complément relatif*<sup>17</sup> de  $Q$  par rapport à  $P$ . Duale, on montre l'existence et l'unicité du sup-pseudo-complément relatif, c'est-à-dire la plus petite solution de  $P \vee X \geq Q$ . On en conclut<sup>18</sup> que, pour chaque  $P$  dans  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  l'équation  $P \wedge X = 0$  admet une plus grande solution  $P^*$ , qui est simplement l'élément complémenté :  $P^* = 'P^0'$ . L'application  $P \rightarrow P^*$  est alors une dualité de treillis, telle que  $P = 0 \Leftrightarrow P^* = 1$ .

## 2.7. Chaîne fondamentale dans $\mathcal{P}_r(\Omega)$ .

On met en évidence<sup>19</sup> dans  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  ce que nous avons appelé une *chaîne fondamentale* ainsi définie :

soit  $(E_0, E_1, \dots, E_{r-1})$  le  $r$ -uplet d'éléments de  $[\mathcal{P}(\Omega)]^k$  obtenus, pour  $0 \leq i \leq r-1$ , par :

$$(E_i)_j = \Omega \text{ si } i=j \text{ et } (E_i)_j = \emptyset \text{ sinon.}$$

Alors chaque  $E_i$  est une  $r$ -répartition ordonnée et, pour l'ordre défini dans  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ , les  $E_i$  forment une chaîne<sup>20</sup> à  $r$  éléments :

$$0 = E_0 < E_1 < \dots < E_{r-1} = 1$$

## 2.8. Fonctions caractéristiques.

Soit  $\langle r \rangle$  une chaîne quelconque à  $r$  éléments :

$$\langle r \rangle = \{a_0 < a_1 < \dots < a_{r-1}\}$$

A chaque  $P = (P^i)_{0 \leq i \leq r-1} \in \mathcal{P}_r(\Omega)$ , on associe  $\mathcal{K}(P) \in \langle r \rangle^\Omega$  par :

$$(\forall t \in \Omega) \mathcal{K}(P)(t) = a_j \Leftrightarrow t \in P^j.$$

$\mathcal{K}(P)$  est la *fonction caractéristique* de  $P$ . On montre<sup>21</sup> que  $\mathcal{K}(P)$  est bien défini sur  $\Omega$ , et aussi que l'application

$\mathcal{K} : \mathcal{P}_r(\Omega) \rightarrow \langle r \rangle^\Omega$  est un isomorphisme de treillis. Pour tout ensemble  $\Omega$  et tout entier  $r \geq 2$ ,  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  est donc isomorphe comme treillis à  $\langle r \rangle^\Omega$ . En conséquence,  $\text{Card}(\mathcal{P}_r(\Omega)) = r^{\text{Card } \Omega} = \text{Card}[(r-1)(\Omega)]$ . En particulier, dans le cas fini, si  $\text{Card}(\Omega) = n$ , alors  $\text{Card}(\mathcal{P}_r(\Omega)) = r^n$ .

<sup>17</sup> Cf. BIRKHOFF, *op.cit.*[1], page 45. Aussi MONJARDET B. et CHAMENI NEMBUA C., *op.cit.*, [4]. Cet article contient une large bibliographie sur les treillis finis et la pseudo-complémentation.

<sup>18</sup> [8], théorème 2.6.

<sup>19</sup> *Idem*, théorème 2.7.

<sup>20</sup> On en déduit, pour chaque  $r$ -répartition  $P$ , deux modes fondamentaux de représentations : monotone et disjonctive. Ces résultats ([8], théorèmes 2.8 et 2.9) sont essentiels dans certaines applications. Ils permettent en effet l'écriture et la recherche de  $r$ -répartitions satisfaisant à des conditions données. Ils ne nous sont pas utiles dans le présent article.

<sup>21</sup> [8], théorème 2.10.



### 3°) PROPRIETES METRIQUES DE $\mathcal{P}_r(\Omega)$ .

Dans la suite,  $\Omega$  est un ensemble fini, et  $m$  une mesure positive quelconque sur  $\mathcal{P}(\Omega)$ , c'est à dire une fonction additive d'ensemble à valeurs réelles positives, qui ne vaut zéro que pour l'ensemble vide. Si  $\oplus$  désigne la différence symétrique sur  $\mathcal{P}(\Omega)$ , il est bien connu <sup>22</sup> qu'au moyen de  $m$ , on peut définir une métrique  $d$  sur  $\mathcal{P}(\Omega)$ . On a en effet le :

THEOREME 1 : Pour tout couple  $(A, B)$  de sous ensembles de  $\Omega$ , soit

$$\delta(A, B) = m(A \oplus B).$$

Alors  $(\mathcal{P}(\Omega), \delta)$  est un espace métrique.

---

THEOREME 2 : Soit  $m$  une mesure positive quelconque sur  $\mathcal{P}(\Omega)$  et  $r \in \mathbb{N}$  ;  $r \geq 2$ . A tout couple  $A = (A_1, A_2, \dots, A_{r-1})$  et  $B = (B_1, B_2, \dots, B_{r-1})$  de suites de  $(r-1)$  éléments de  $\mathcal{P}(\Omega)$ , on associe :

$$\delta_1(A, B) = \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq i \leq r-1} \delta(A_i, B_i) = \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq i \leq r-1} m(A_i \oplus B_i)$$

Alors  $([\mathcal{P}(\Omega)]^{r-1}, \delta_1)$  est un espace métrique. La sous-diagonale  $(r-1)(\Omega)$  en est un sous espace métrique, dont le centre  $(\Delta_{r-1}(\Omega), \delta_1)$  est isométrique à  $(\mathcal{P}(\Omega), \delta)$ .

---

**Preuve :** Par le théorème 1, il est clair que pour chaque composante de rang  $i$ ,  $m(A_i \oplus B_i)$  définit la métrique  $\delta(A_i, B_i)$  : il en résulte immédiatement que  $\delta_1$  est une distance (distance produit) :  $([\mathcal{P}(\Omega)]^{r-1}, \delta_1)$  est donc un espace métrique, dont  $((r-1)(\Omega), d_1)$  est évidemment un sous espace métrique (et aussi un sous-treillis). Soient alors "E" et "F" deux éléments complémentés quelconques dans  $(r-1)(\Omega)$ . On a :

$$\delta_1("E", "F") = \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq i \leq r-1} \delta(E, F) = \delta(E, F).$$

En sorte que l'application  $A \rightarrow "A"$  est une isométrie de  $(\mathcal{P}(\Omega), \delta)$  sur  $(\Delta_{r-1}(\Omega), \delta_1)$ .

---

THEOREME 3 : Soit  $m$  une mesure positive sur  $\mathcal{P}(\Omega)$  et  $r \in \mathbb{N}$  ;  $r \geq 2$ . On se donne deux  $r$ -répartitions ordonnées quelconques de  $\Omega$ , soit  $P$  et  $Q$ , et soient  $\mathbf{D}(P) = (P_i)$  et  $\mathbf{D}(Q) = (Q_i) \in (r-1)(\Omega)$  les deux suites de leurs composantes monotones respectives. On définit

$$d(P, Q) = \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq i \leq r-1} \delta(P_i, Q_i) = \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq i \leq r-1} m(P_i \oplus Q_i)$$

Alors  $(\mathcal{P}_r(\Omega), d)$  est un espace métrique dont le centre est isométrique à  $(\mathcal{P}(\Omega), \delta)$ .

**Preuve :** La démonstration est immédiate par "transport de structures". La définition proposée pour  $d$  est en effet clairement équivalente à :

$$d(P, Q) = \delta_1(\mathcal{D}(P), \mathcal{D}(Q))$$

D'un côté,  $\delta_1$  est une métrique sur  $(r-1)(\Omega)$  ; d'un autre côté,  $\mathcal{D}$  est une bijection de  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  sur  $(r-1)(\Omega)$  : il en résulte que  $d$  est une métrique sur  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ . Pour la question des centres, on observe que ' $A$ ' étant un quasi-ensemble, on a ' $A$ ' <sub>$i$</sub>  =  $A$  pour tout  $i$ . Donc

$$d('A', 'B') = \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq i \leq r-1} \delta(A, B) = \delta(A, B)$$

de sorte que l'application  $A \rightarrow 'A'$  est une isométrie de  $\mathcal{P}(\Omega)$  sur le centre de  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ .

**THEOREME 4 :** Le diamètre de  $\mathcal{P}_r(\Omega)$  :

$$\hat{d}(\Omega) = \sup_{(P, Q) \in (\mathcal{P}_r(\Omega))^2} d(P, Q)$$

est égal à  $m(\Omega)$ . La borne supérieure est atteinte si et seulement si on a  $Q = 'A'$  et  $P = '\bar{A}'$  pour un sous-ensemble  $A$  de  $\Omega$ .

**Preuve :** Pour tout couple  $(P, Q)$  de  $r$ -répartitions ordonnées, on a :

$$d(P, Q) = \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq i \leq r-1} m(P_i \oplus Q_i)$$

$$\text{Donc } d(P, Q) \leq \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq i \leq r-1} m(\Omega) = m(\Omega)$$

D'un autre côté, pour tout  $i \geq 1$ :  $(E_0)_i = \emptyset$  et  $(E_{r-1})_i = \Omega$ ,

en sorte que  $(E_0)_i \oplus (E_{r-1})_i = \Omega$ .

Donc  $d(E_0, E_{r-1}) = m(\Omega)$ , en sorte que la borne supérieure est atteinte.

En sens inverse, pour que l'on ait :

$$d(P, Q) = \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq i \leq r-1} m(P_i \oplus Q_i) = m(\Omega)$$

il faut et il suffit que  $m(P_i \oplus Q_i) = m(\Omega)$  pour tout  $i$ . Puisque  $m$  est une mesure positive, il en résulte  $P_i \oplus Q_i = \Omega$ , soit  $Q_i = \bar{P}_i$  pour tout  $i$ . D'un autre côté les conditions:

$$P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_{r-1} \text{ et } Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_{r-1}$$

impliquent :

$$\overline{P_1} \subset \overline{P_2} \subset \dots \subset \overline{P_{r-1}} \text{ soit } Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_{r-1}$$

Donc  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_{r-1} (=A)$  et  $P_1 = P_2 = \dots = P_{r-1} (=A)$ .

Finalement :  $Q = 'A'$  et  $P = 'A'$ .

THEOREME 5 : Soient  $P$  et  $Q$  deux  $r$ -répartitions ordonnées quelconques de  $\Omega$ . On a :

$$d(P, P \vee Q) + d(Q, P \vee Q) = d(P, Q).$$

**Preuve :** Utilisons les composantes monotones de  $P$  et de  $P \vee Q$ .

$$\begin{aligned} [P \oplus (P \vee Q)]_i &= P_i \oplus (P \vee Q)_i = P_i \oplus (P_i \vee Q_i) = \\ &= [\overline{P_i} \cap (P_i \cup Q_i)] \cup [P_i \cap (\overline{P_i} \cap \overline{Q_i})] = [\overline{P_i} \cap Q_i] \cup \emptyset = \overline{P_i} \cap Q_i \end{aligned}$$

De même  $[Q \oplus (P \vee Q)]_i = Q_i \cap P_i$

En conclusion :

$$\begin{aligned} d(P, P \vee Q) + d(Q, P \vee Q) &= \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq i \leq r-1} m(\overline{Q_i} \cap P_i) + m(\overline{P_i} \cap Q_i) \\ &= \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq i \leq r-1} m(P_i \oplus Q_i) = d(P, Q) \end{aligned}$$

#### 4°) APPROXIMATION DES $r$ -REPARTITIONS PAR DES QUASI-ENSEMBLES.

Etant donnée une  $r$ -répartition ordonnée quelconque  $P$ , quelle est sa distance au centre de  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ , c'est-à-dire au treillis booléen de tous les quasi-ensembles? Quels sont les quasi-ensembles dont  $P$  est le plus proche au sens de la métrique choisie? Répondant à ces deux questions, qui sont autant de problèmes d'approximation, le théorème qui suit est alors essentiel au regard des motivations développées en introduction. Les quasi-ensembles trouvés seront ainsi les meilleures *approximations ensemblistes* de  $P$ .

THEOREME 6 (fondamental) : Soit  $(\mathcal{P}_r(\Omega), d)$  l'espace métrique ci-dessus défini, et  $P$  une  $r$ -répartition ordonnée quelconque de  $\Omega$ . La plus courte distance de  $P$  au centre de  $\mathcal{P}_r(\Omega)$ , c'est-à-dire :

$$d(P, c_r(\Omega)) = \inf_{E \in \mathcal{P}(\Omega)} d(P, 'E')$$

est égale à :

$$\frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor} \left[ \sum_{k \leq j \leq r-1-k} m(P^j) \right] \quad (4.1) \quad 23$$

De plus, ce minimum est atteint :

- si  $r$  est pair, pour  $E = P_{\frac{r}{2}}$ , seule solution. (4.2)
- si  $r$  est impair, pour tout  $E$  tel que

$$P_{\frac{r+1}{2}} \subset E \subset P_{\frac{r-1}{2}} \quad (4.3)$$

(les  $P_j$  sont les composantes monotones de  $P$ ).

**Preuve :** Observons d'abord que, pour  $i = 1, 2, \dots, r-1$ , on a :

$$P_i = \bigcup_{j=i}^{j=r-1} P^j. \text{ Donc } \overline{P_i} = \bigcup_{j=0}^{j=i-1} P^j.$$

Pour tout sous-ensemble  $E$  de  $\Omega$ , il vient :

$$\begin{aligned} P_i \oplus E &= (P_i \cap \overline{E}) \cup (\overline{P_i} \cap E) \\ &= \bigcup_{j=i}^{j=r-1} (P^j \cap \overline{E}) \cup \bigcup_{j=0}^{j=i-1} (P^j \cap E) \end{aligned}$$

Les éléments dans la réunion sont deux à deux disjoints ; on a donc :

$$m(P_i \oplus E) = \sum_{j=i}^{j=r-1} m(P^j \cap \overline{E}) \cup \sum_{j=0}^{j=i-1} m(P^j \cap E).$$

$$\begin{aligned} \text{Posons } \varphi(E) &= \sum_{1 \leq i \leq r-1} m(P_i \oplus E) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r-1} \left[ \sum_{j=i}^{j=r-1} m(P^j \cap \overline{E}) + \sum_{j=0}^{j=i-1} m(P^j \cap E) \right] = \sum_{1 \leq i \leq r-1} (S_i + T_i) \end{aligned}$$

En retenant dans  $S_i$  ( resp.  $T_i$  ) tous les termes en  $m(P^{r-1} \cap \overline{E})$  ( resp. en  $m(P^0 \cap E)$  ), on obtient alors :

$$\varphi(E) = (r-1) m(P^{r-1} \cap \overline{E}) + (r-1) m(P^0 \cap E) + \alpha_1 \quad (4.4)$$

$$\text{avec } \alpha_1 = \sum_{1 \leq j \leq r-2} j \cdot m(P^j \cap \overline{E}) + \sum_{1 \leq j \leq r-2} (r-1-j) m(P^j \cap E) \quad (\text{relation 4.5})$$

Le lecteur pourra suivre pas à pas les calculs relativement complexes qui suivent, d'un façon plus visuelle, sur la figure 1 ci-dessous, correspondant au cas  $r = 7$ .

En combinant les deux sommes dans  $\alpha_1$ , on applique d'abord

$m(P_j \cap \bar{E}) + m(P_j \cap E) = m(P_j)$  pour  $j = 1, 2, \dots, r-2$ . Après quoi, on choisit dans chaque somme restante le seul terme qui n'a pas de contrepartie dans l'autre. On obtient :

$$\alpha_1 = \sum_{1 \leq j \leq r-2} m(P^j) + (r-3) m(P^{r-2} \cap \bar{E}) + (r-3) m(P^1 \cap E) + \alpha_2$$

Où  $\alpha_2$  est égal à :

$$\alpha_2 = \sum_{2 \leq j \leq r-3} (j-1) m(P^j \cap \bar{E}) + \sum_{2 \leq j \leq r-3} (r-2-j) m(P^j \cap E).$$

Avec la même procédure, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \sum_{2 \leq j \leq r-3} m(P^j) + \sum_{2 \leq j \leq r-3} (j-2) m(P^j \cap \bar{E}) \\ &+ \sum_{2 \leq j \leq r-3} (r-3-j) m(P^j \cap E). \\ &= \sum_{2 \leq j \leq r-3} m(P^j) + \sum_{3 \leq j \leq r-4} (j-2) m(P^j \cap \bar{E}) \\ &+ \sum_{3 \leq j \leq r-4} (r-3-j) m(P^j \cap E) \\ &+ (r-5) m(P^{r-3} \cap \bar{E}) + (r-5) m(P^2 \cap E). \end{aligned}$$

Pour chaque  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $2k \leq r-1$ , on définit ainsi  $\alpha_k$  par la relation (4.6.k) *infra* :

$$\alpha_k = \sum_{k \leq j \leq r-1-k} (j+1-k) m(P^j \cap \bar{E}) + \sum_{k \leq j \leq r-1-k} (r-k-j) m(P^j \cap E) \quad (4.6.k)$$

Tant que cela sera possible, on recommence à effectuer sur  $\alpha_k$  une suite de deux opérations. D'abord, en combinant comme plus haut les deux sommes, on applique :

$$m(P_j \cap \bar{E}) + m(P_j \cap E) = m(P_j)$$

pour  $j = k, k+1, \dots, r-1-k$ .

Alors  $\alpha_k =$

$$\sum_{k \leq j \leq r-1-k} (j-k) m(P^j \cap \bar{E}) + \sum_{k \leq j \leq r-1-k} (r-k-j-1) m(P^j \cap E) \\ + \sum_{k \leq j \leq r-1-k} m(P^j).$$

Après quoi, dans une seconde étape (valable seulement si  $k$  vérifie :  $2k \leq r-3$ ), on choisit dans chacune des deux sommes restantes le seul terme sans contrepartie dans l'autre. On obtient ainsi:

$$\alpha_k = \sum_{k \leq j \leq r-1-k} m(P^j) + \\ + (r-2k-1) m(P^k \cap E) + (r-2k-1) m(P^{r-1-k} \cap \bar{E}) \\ + \sum_{k+1 \leq j \leq r-2-k} (j-k) m(P^j \cap \bar{E}) \\ + \sum_{k+1 \leq j \leq r-2-k} (r-k-j-1) m(P^j \cap E)$$

D'où la relation (4.7.k), valide pour tous les  $k$  tels que  $2k \leq r-3$ :

$$\alpha_k = \sum_{k \leq j \leq r-1-k} m(P^j) + (r-2k-1) [m(P^k \cap E) + m(P^{r-1-k} \cap \bar{E})] + \alpha_{k+1} \quad (4.7.k)$$

La fin du calcul dépend alors évidemment de la parité de  $r$ .

Cas  $r = 2q + 1$

Dans ce cas, (4.6.k) est valide pour  $1 \leq k \leq q$ , et (4.7.k) pour  $1 \leq k \leq q-1$ . Donc :

$$\varphi(E) = 2q m(P^{2q} \cap \bar{E}) + 2q m(P^0 \cap E) + \alpha_1 \\ \alpha_1 = (2q-2) [m(P^{2q-1} \cap \bar{E}) + m(P^1 \cap E)] \\ + \sum_{1 \leq j \leq 2q-1} m(P^j) + \alpha_2. \\ \alpha_2 = (2q-4) [m(P^{2q-2} \cap \bar{E}) + m(P^2 \cap E)] \\ + \sum_{2 \leq j \leq 2q-2} m(P^j) + \alpha_3. \\ \dots\dots\dots$$

$$\alpha_{q-1} = 2 \left[ m(P^{q+1} \cap \bar{E}) + m(P^{q-1} \cap E) \right] + \sum_{q-1 \leq j \leq q+1} m(P^j) + \alpha_q$$

Utilisant (4.6.q) pour un calcul direct de  $\alpha_q$ , on obtient :

$\alpha_q = m(P^q)$ . De sorte que :

$$\phi(E) = M + k(E), \text{ où :}$$

$$M = \sum_{1 \leq k \leq q} \left[ \sum_{k \leq j \leq 2q-k} m(P^j) \right] \text{ et } k(E) =$$

$$2q \left[ m(P^{2q} \cap \bar{E}) + m(P^0 \cap E) \right] + (2q-2) \left[ m(P^{2q-1} \cap \bar{E}) + m(P^1 \cap E) \right] + (2q-4) \left[ m(P^{2q-2} \cap \bar{E}) + m(P^2 \cap E) \right] + \dots \\ \dots + 2 \left[ m(P^{q+1} \cap \bar{E}) + m(P^{q-1} \cap E) \right].$$

De sorte que pour que  $\phi(E)$  soit minimum, il suffit que  $k(E)$  soit nul, ce qui est équivalent à :

$$m(P^j \cap \bar{E}) = 0 \text{ pour } q+1 \leq j \leq 2q$$

$$\text{et } m(P^j \cap E) = 0, \text{ pour } 0 \leq j \leq q-1 \quad (\text{conditions (4.7)})$$

Comme  $m$  est une mesure positive,  $k(E) = 0$

est alors équivalente à la condition (4.8) :

$$P^j \cap \bar{E} = \emptyset \text{ pour } q+1 \leq j \leq 2q \text{ et } P^j \cap E = \emptyset \text{ pour } 0 \leq j \leq q-1$$

(4.8) sera donc effectivement possible, à condition de choisir  $E$  de telle

sorte que, d'un côté :  $P^{q+1} \subset E$ , etc...,  $P^{2q} \subset E$ ,

c'est-à-dire :  $P^{q+1} \cup \dots \cup P^{2q} \subset E$

et, d'un autre côté :

$$E \subset \overline{P^0} \text{ etc } \dots E \subset \overline{P^{q-1}}, \text{ de sorte que :}$$

$$E \subset \overline{P^0 \cap \dots \cap P^{q-1}} = \overline{P^0 \cup \dots \cup P^{q-1}} = \overline{P^q \cup P^{q+1} \dots \cup P^{2q}}$$

En conséquence, pour que  $\phi(E)$  soit minimum, il faut et il suffit que

$$P^{q+1} \cup \dots \cup P^{2q} \subset E \subset \overline{P^q \cup P^{q+1} \dots \cup P^{2q}}$$

C'est-à-dire, avec des composantes monotones :

$$P_{q+1} \subset E \subset P_q, \text{ ou bien encore } P_{\frac{r+1}{2}} \subset E \subset P_{\frac{r-1}{2}}.$$

C'est-à-dire (4.3). La valeur de  $\phi(E)$  au minimum est alors :

$$\sum_{1 \leq k \leq q} \left[ \sum_{k \leq j \leq 2q-k} m(P^j) \right] \quad (4.9)$$

Avec  $2q = r-1$  et  $q = \frac{r-1}{2} = \left\lceil \frac{r-1}{2} \right\rceil$ , on obtient bien (4.1)

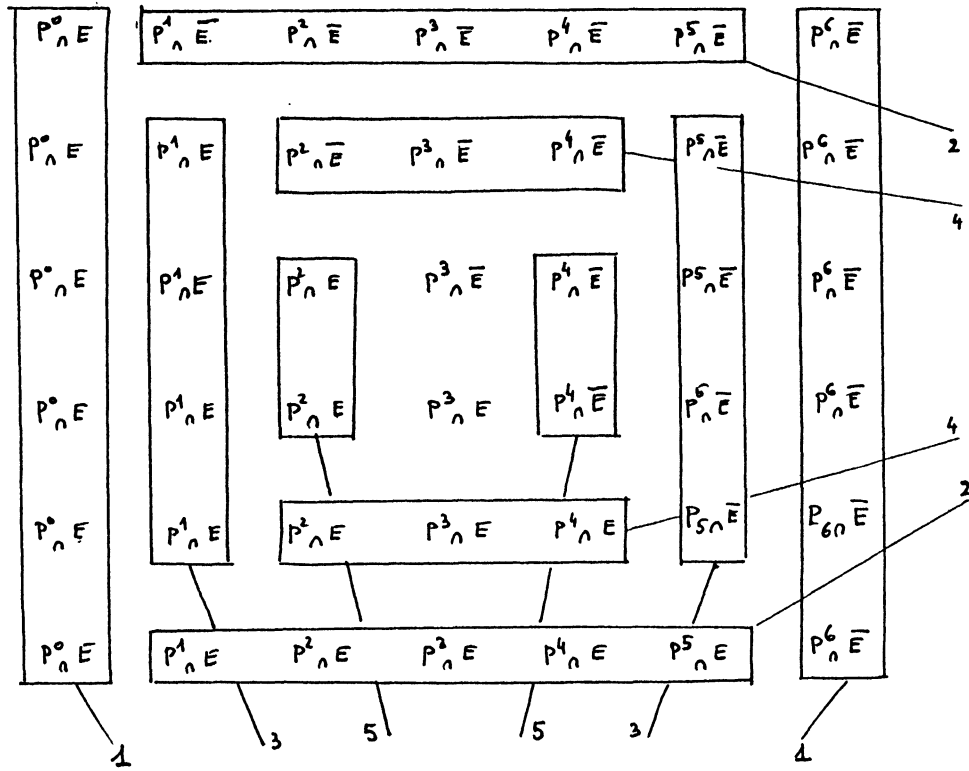
dans le cas où  $r$  est impair (il y a  $q^2$  termes dans la somme).

**Exemple de calcul pour  $r = 7$ .**

Le schéma ci-dessous permet de visualiser les diverses étapes du calcul qui sont numérotées (pour faire court, on a noté  $P^i \cap E$  au lieu de  $(m(P^i \cap E))$ ). Deux stratégies "orthogonales" de simplification, sur le mode "mah-jong", sont utilisées : d'une part, pour les blocs verticaux de termes identiques entre eux, dépendant de  $E$  ou de  $\bar{E}$ , et que l'on met de côté (ils constitueront la partie  $k(E)$ ) : c'est par exemple le cas (1). Ensuite, les blocs horizontaux dont les termes sont associés deux par deux, en utilisant

$$m(P^j \cap E) + m(P^j \cap \bar{E}) = m(P^j) \quad (\text{par exemple le cas (2)}).$$

Figure 1. Visualisation de la stratégie de simplification dans le cas  $r = 7$ .



On obtient ainsi dans cet exemple :

$$\begin{aligned} \phi(E) = & 6.m(P^0 \cap E) + 6.m(P^0 \cap \bar{E}) + (m(P^1) + m(P^2) + m(P^3) + m(P^4) + m(P^5)) \\ & + 4.m(P^1 \cap E) + 4.m(P^5 \cap \bar{E}) + (m(P^2) + m(P^3) + m(P^4)) \\ & + 2.m(P^2 \cap E) + 2.m(P^4 \cap \bar{E}) + m(P^3) \end{aligned}$$

où l'on voit apparaître  $M$  et  $k(E)$ .

Cas  $r = 2q$

(4.6.k) est alors valide pour  $1 \leq k \leq q-1$ , et (4.7.k) l'est pour  $1 \leq k \leq q-2$ . On a ainsi, d'après (4.4) et (4.5) :

$$\varphi(E) = (2q-1) m(P^{2q-1} \cap \bar{E}) + (2q-1) m(P^0 \cap E) + \alpha_1$$



$$\alpha_1 = (2q - 3) \left[ m(P^{2q-2} \cap \bar{E}) + m(P^1 \cap E) \right] + \sum_{1 \leq j \leq 2q-2} m(P^j) + \alpha_2.$$

$$\alpha_2 = (2q - 5) \left[ m(P^{2q-3} \cap \bar{E}) + m(P^2 \cap E) \right] + \sum_{2 \leq j \leq 2q-3} m(P^j) + \alpha_3.$$

.....

.....

$$\alpha_{q-2} = 3 \left[ m(P^{q+1} \cap \bar{E}) + m(P^{q-2} \cap E) \right] + \sum_{q-2 \leq j \leq q+1} m(P^j) + \alpha_{q-1}.$$

Utilisant (4.6.q-1), on calcule directement  $\alpha_{q-1}$  :

$$\alpha_{q-1} = \sum_{q-1 \leq j \leq q} (j+2-q) m(P^j \cap \bar{E}) + \sum_{q-1 \leq j \leq q} (q+1-j) m(P^j \cap E)$$

$$\alpha_{q-1} = m(P^{q-1} \cap \bar{E}) + 2m(P^q \cap \bar{E}) + 2m(P^{q-1} \cap E) + m(P^q \cap E).$$

$$\alpha_{q-1} = m(P^{q-1}) + m(P^q) + m(P^q \cap \bar{E}) + m(P^{q-1} \cap E).$$

Il en résulte :  $\phi(E) = M + k(E)$ , où

$$M = \sum_{1 \leq j \leq 2q-2} m(P^j) + \sum_{2 \leq j \leq 2q-3} m(P^j)$$

$$+ \dots + \sum_{q-2 \leq j \leq q+1} m(P^j) + m(P^{q-1}) + m(P^q).$$

$$\text{c'est-à-dire : } M = \sum_{1 \leq k \leq q-1} \sum_{k \leq j \leq 2q-1-k} m(P^j) \quad (4.10)$$

et :

$$\begin{aligned} k(E) = & (2q-1) \left[ m(P^{2q-1} \cap \bar{E}) + m(P^0 \cap E) \right] + \\ & (2q-3) \left[ m(P^{2q-2} \cap \bar{E}) + m(P^1 \cap E) \right] + \\ & (2q-5) \left[ m(P^{2q-3} \cap \bar{E}) + m(P^2 \cap E) \right] + \dots + \\ & 3 \left[ m(P^{q+1} \cap \bar{E}) + m(P^{q-2} \cap E) \right] + \left[ m(P^q \cap \bar{E}) + m(P^{q-1} \cap E) \right] \end{aligned}$$

De la même façon que plus haut, on montre que  $k(E)$  peut être rendu égal à zéro si et seulement si on choisit  $E$  tel que, d'un côté :

$$P^q \subset E, \text{ etc...}, P^{2q-1} \subset E, \text{ de sorte que}$$

$$P^q \cup P^{q+1} \cup \dots \cup P^{2q-1} \subset E$$

de l'autre côté :  $E \subset P^0$ , etc...,  $E \subset P^{q-1}$ , de sorte que :

$$E \subset P^0 \cap \dots \cap P^{q-1} = P^0 \cup \dots \cup P^{q-1} = P^q \cup P^{q+1} \dots \cup P^{2q-1}$$

Il existe donc dans ce cas exactement un ensemble  $E$  tel que  $k(E)$  soit nul :

$$E = P^q \cup P^{q+1} \cup \dots \cup P^{2q-1} = P_q$$

On a ainsi montré (4.2). La valeur au minimum est fournie par (4.10) :

$$M = \sum_{1 \leq k \leq q-1} \sum_{k \leq j \leq 2q-1-k} m(P^j)$$

( il y a ici  $q(q-1)$  termes dans la somme)

$$\text{On a } 2q-1 = r-1, \text{ et donc } \left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor q - \frac{1}{2} \right\rfloor = q-1,$$

de sorte qu'on obtient encore (4.1) dans le cas où  $r$  est pair.

**Remarque :** On peut donner d'autres expressions, encore valides pour la valeur de la distance au centre

$$\inf_{E \in \mathcal{P}(\Omega)} d(P, E) :$$

\* si  $r$  est impair ( $r = 2q + 1$ ), on obtient en développant :

$$\frac{1}{r-1} [m(P^1) + 2m(P^2) + \dots + (q-1)m(P^{q-1}) + qm(P^q) + (q-1)m(P^{q+1}) + \dots + m(P^{2q-1})]$$

c'est-à-dire :

$$= \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq k \leq q} k m(P^k) + \frac{1}{r-1} \sum_{q+1 \leq k \leq 2q-1} (2q-k) m(P^k)$$

(relation (4.11))

\* si  $r$  est pair ( $r = 2q$ ) :

$$\frac{1}{r-1} [m(P^1) + 2m(P^2) + \dots + (q-1)m(P^{q-1}) + (q-1)m(P^q) + (q-2)m(P^{q+1}) + \dots + m(P^{2q-2})]$$

c'est-à-dire :

$$= \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq k \leq q-1} k m(P^k) + \frac{q-1}{r-1} m(P^q) + \frac{1}{r-1} \sum_{q+1 \leq k \leq 2q-2} (2q-1-k) m(P^k).$$

(relation (4.12))

Introduisant une notation "sommatoire" nouvelle, on reformule alors ces diverses expressions.

**Définition :** On appelle *somme triangulaire* d'une famille finie  $(a_1, \dots, a_n)$  de  $n$  réels le réel

$$\chi(a_1, \dots, a_n) = \sum_{1 \leq k \leq n} k a_k$$

Le résultat du théorème fondamental peut alors ainsi se reformuler :

la distance au centre  $\inf_{E \in \mathcal{P}(\Omega)} d(P, 'E')$  est égale à :

\* si  $r$  est impair ( $r = 2q + 1$ ) :

$$= \frac{1}{r-1} \chi(m(P^1), m(P^2), \dots, m(P^q)) + \frac{1}{r-1} \chi(m(P^{2q-1}), \dots, m(P^{q+1}))$$

\* si  $r$  est pair ( $r = 2q$ ) :

$$= \frac{1}{r-1} \chi(m(P^1), \dots, m(P^{q-1})) + \frac{q-1}{r-1} m(P^q) \\ + \frac{1}{r-1} \chi(m(P^{2q-2}), \dots, m(P^{q+1}))$$

##### 5° ) REPARTITIONS LES PLUS ELOIGNEES DU CENTRE. DISTANCE A L'INTERIEUR ET A LA FERMETURE.

Le paragraphe précédent a décrit la recherche des quasi-ensembles les plus proches d'une  $r$ -répartition donnée quelconque. Le résultat qui suit caractérise au contraire les  $r$ -répartitions les plus éloignées du centre, c'est-à-dire les "moins ensemblistes".

**THEOREME 7 :** Si  $r$  est impair,  $E_{\frac{r-1}{2}}$  est l'unique répartition la plus éloignée du centre, et la distance maximum vaut  $\frac{1}{2} m(\Omega)$ .

Si  $r$  est pair, toute  $r$ -répartition  $P$  telle que  $P_{\frac{r-1}{2}} \cup P_{\frac{r}{2}} = \Omega$  est la plus éloignée du centre et la distance maximum vaut  $\frac{r-2}{2(r-1)} m(\Omega)$ .

**Preuve :** Si  $r$  est impair, il y a un seul terme dans (4.11) pourvu de la plus forte pondération (à savoir :  $q$ ) : c'est  $m(P^q)$ . En conséquence, la distance au centre sera maximum si et seulement si  $P^q = \Omega$ , donc  $P^k = \emptyset$  pour tout  $k \neq q$ , c'est-à-dire

$P = E_q = E_{\frac{r-1}{2}}$ . La distance maximum vaudra alors  $\frac{q m(\Omega)}{r-1} = \frac{1}{2} m(\Omega)$ .

Si  $r$  est pair, il y a deux termes dans (4.12) tous deux pourvus de la plus forte pondération (à savoir :  $q-1$ ) :  $m(P^{q-1})$  et  $m(P^q)$ . En conséquence, la

distance au centre sera maximum si et seulement si  $P^k = \emptyset$  pour tout  $k \notin \{q-1, q\}$  c'est-à-dire si  $P$  est telle que  $P^{q-1} \cup P^q = \Omega$ . La distance maximum vaudra dans ce cas :

$$\frac{(q-1)m(\Omega)}{r-1} = \frac{\left(\frac{r}{2}-1\right)}{r-1} m(\Omega) = \frac{(r-2)}{2(r-1)} m(\Omega)$$

Dans [8], on a également traité les questions suivantes : étant donnée une  $r$ -répartition ordonnée  $P$  quelconque, que dire des quasi-ensembles qu'elle contient? Que dire de ceux dans lesquels elle est contenue? Les résultats obtenus sont <sup>24</sup> :

THEOREME 8 :

Soit  $P$  une  $r$ -répartition ordonnée quelconque de  $\Omega$ . Il existe :

a) un plus petit  $r$ -quasi ensemble ' $E$ ' de  $\Omega$  tel que

$$P \leq 'E',$$

à savoir :  $\widehat{P} = \overline{'P^0'}$ , appelé quasi-ensemble *fermeture* de  $P$ .

b) un plus grand  $r$ -quasi ensemble ' $E$ ' de  $\Omega$  tel que

$$'E' \leq P,$$

à savoir  $\overset{0}{P} = 'P^{r-1}'$ , appelé quasi-ensemble *intérieur* de  $P$ .

**Remarques :** On a évidemment  $\overset{0}{P} \subset P \subset \widehat{P}$ . On peut ensuite établir diverses propriétés, tant sur le plan "quasi-topologique", comme l'idempotence des deux opérateurs de fermeture et d'intérieur, que sur celui de la cardinalité<sup>25</sup>. En cherchant à relier ces résultats aux propriétés de la métrique définie dans cet article, on établit alors les deux théorèmes suivants :

THEOREME 9 : Soit  $P$  une  $r$ -répartition ordonnée quelconque de  $\Omega$ .

La distance de  $P$  à sa fermeture ensembliste  $\widehat{P}$  est égale à :

$$d(P, \widehat{P}) = \frac{1}{r-1} \chi(m(P^{r-2}), \dots, m(P^1))$$

**Preuve :** On a :

$$d(P, \widehat{P}) = d(P, \overline{'P^0'}) = \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq i \leq r-1} m(P_i \oplus (\widehat{P})_i)$$

avec  $(\widehat{P})_i = \overline{'P^0'}$  pour tout  $i$ , puisque  $\widehat{P}$  est un quasi-ensemble.

Et  $\overline{'P^0'} = \bigcup_{1 \leq j \leq r-1} P^j$ . Pour  $i = 1$  :

<sup>24</sup>

[8], théorème 3.1.

<sup>25</sup>

*Idem*, théorèmes 3.2, 3.3 et 3.4.

$$P_1 \oplus \overline{P^0} = \left[ \bigcup_{1 \leq j \leq r-1} P^j \right] \oplus \left[ \bigcup_{1 \leq j \leq r-1} P^j \right] = \emptyset$$

Pour  $2 \leq i \leq r-1$  :

$$P_i \oplus \overline{P^0} = \left[ \bigcup_{i \leq j \leq r-1} P^j \right] \oplus \left[ \bigcup_{1 \leq j \leq r-1} P^j \right]$$

$$\text{Avec } Z = \bigcup_{i \leq j \leq r-1} P^j \text{ et } T = \bigcup_{1 \leq j \leq i-1} P^j, \text{ il vient :}$$

$$P_i \oplus \overline{P^0} = Z \oplus [T \cup Z]$$

$$\text{Or : } Z \oplus (Z \cup T) = [\overline{Z} \cap (Z \cup T)] \cup [Z \cap \overline{Z} \cap \overline{T}] = \overline{Z} \cap T.$$

$$\text{Et } \overline{Z} \cap T = \left[ \bigcup_{0 \leq j \leq i-1} P^j \right] \cap \left[ \bigcup_{1 \leq j \leq i-1} P^j \right] = T = \bigcup_{1 \leq j \leq i-1} P^j$$

$$\text{Donc : } m(P_i \oplus \overline{P^0}) = \sum_{1 \leq j \leq i-1} m(P^j) \text{ pour } i \geq 2.$$

$$\text{Et } d(P, \hat{P}) = \frac{1}{r-1} \sum_{2 \leq i \leq r-1} \sum_{1 \leq j \leq i-1} m(P^j)$$

$$\text{Donc : } d(P, \hat{P}) = \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq k \leq r-2} (r-1-k) \cdot m(P^k)$$

On reconnaît au numérateur une certaine somme triangulaire d'ensembles intermédiaires :

$$\chi(m(P^{r-2}), \dots, m(P^1))$$

D'où le résultat. Cette somme est évidemment nulle si et seulement si  $P$  est lui-même un quasi-ensemble.

**Remarque.** L'expression obtenue pour  $d(P, \hat{P})$  montre que cette distance est maximum si et seulement si  $P^1 = \Omega$ , donc  $P = E_1$ , qui est ainsi la  $r$ -répartition la plus éloignée de sa fermeture. Le maximum de la distance vaut alors

$$d(P, E_1) = \frac{r-2}{r-1} m(\Omega).$$

De la même façon que ci-dessus, on démontre le :

THEOREME 10 : Soit  $P$  une  $r$ -répartition ordonnée quelconque de  $\Omega$ . La distance de  $P$  à son intérieur ensembliste  $\overset{0}{P}$  est égale à :

$$d(P, \overset{0}{P}) = \frac{1}{r-1} \chi(m(P^1), \dots, m(P^{r-2}))$$

$$\text{c'est-à-dire : } d(P, \overset{0}{P}) = \frac{1}{r-1} \sum_{1 \leq k \leq r-2} k.m(P^k)$$

**Remarque 1.** L'expression obtenue pour  $d(P, \overset{0}{P})$  montre que cette distance est cette fois maximum si et seulement si  $P^{r-2} = \Omega$ , donc  $P = E_{r-2}$ , qui est ainsi la  $r$ -répartition la plus éloignée de son intérieur. Le maximum de la distance vaut alors

$$d(P, E_{r-2}) = \frac{r-2}{r-1} m(\Omega).$$

**Remarque 2.** Pour toute  $r$ -répartition  $P$ , on a

$$d(P, \hat{P}) + d(P, \overset{0}{P}) = \sum_{1 \leq k \leq r-2} m(P^k)$$

Cette somme est donc maximum si et seulement si  $P^0 = P^{r-1} = \emptyset$ , autrement dit si et seulement si  $P$  est purement non-ensembliste. La valeur au maximum est alors  $m(\Omega)$ .

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKHOFF G., *Lattice theory*, Providence, American Mathematical Society Colloquium Publications, XXV, 1940 (Edition 1967).

[2] EPSTEIN G., «The lattice theory of Post algebras», *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95, (1960), 300-317.

[3] HALMOS P., *Measure Theory*, Berlin, Springer-Verlag, 1974.

[4] MONJARDET B. et CHAMENI NEMBUA C., «Les treillis pseudo-complémentés finis», *European J. of Combinatorics*, 13, 1992, 89-107.

[5] SERFATI M., «Introduction aux Algèbres de Post et à leurs applications (logiques à  $r$  valeurs - équations postienennes-graphoïdes orientés)», Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle. Université Paris VI. Série Recherche, 21, (1973).

- [6] SERFATI M., «On postian algebraic equations», *Discrete Mathematics*, 152,(1996) 269-285.
- [7] SERFATI M., «A note on postian matrix theory», *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2), (1997), 161-179.
- [8] SERFATI M., «The lattice theory of r-ordered partitions», à paraître (1998) dans *Discrete Mathematics*.