MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

C. LE CONTE DE POLY-BARBUT

Sur les treillis de Coxeter finis

Mathématiques et sciences humaines, tome 125 (1994), p. 41-57
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1994__125__41_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Math. Inf. Sci. hum., (32e année, n° 125, *1994*, p. 41-57).

SUR LES TREILLIS DE COXETER FINIS

C. LE CONTE de POLY-BARBUT[1]

RÉSUMÉ — *Björner (1984) a montré que l'ordre faible de Bruhat défini sur un groupe de Coxeter fini (Bourbaki 1969) est un treillis.*

Dans le cas du groupe symétrique Sn ce résultat (treillis permutoèdre) a été prouvé par Guilbaud - Rosenstiehl (1963).

Dans ce papier nous montrons que des propriétés connues des treillis permutoèdres peuvent s'étendre à tous les treillis de Coxeter finis et qu'inversement des propriétés démontrées sur tous les Coxeter finis ont des retombées intéressantes sur les permutoèdres.

En particulier, les Coxeter finis sont tous pseudo-complémentés et ont une congruence dont le quotient est une algèbre de Boole. Le résultat de Solomon sur une sous-algèbre de l'algèbre de groupe concerne cette même congruence.

Dans le cas du permutoèdre l'équivalence "même premier tableau de Young" est une sous-équivalence de celle associée à la congruence.

Nous montrons également que les treillis de Coxeter sont semi-distributifs.

SUMMARY — *On finite Coxeter lattices.*

Björner (1984) has pointed out that the weak Bruhat order of a finite Coxeter group (Bourbaki, 1969) is a lattice.

In the case of the symmetric group Sn, this result (permutohedron lattice) was proved by Guilbaud-Rosenstiehl (1963).

In this paper we show that several known properties of the permutohedron lattices hold for any Coxeter lattice.

Especially we will show that Coxeter lattices are pseudo complemented, so that any Coxeter lattice has a congruence whose quotient is a boolean algebra. Solomon's result (1976) on a subalgebra of the group algebra concerns the same congruence.

In the case of the permutohedron the equivalence "same first Young's tableau" is a subequivalence of that equivalence associated with the congruence

Using the pseudo complementation and an isomorphism property of intervals we will show that Coxeter lattices are semi distributive.

Properties that hold for every Coxeter lattice are especially interesting in the permutohedron case.

INTRODUCTION

Les groupes de Coxeter finis comportent quatre familles infinies et six groupes isolés.
La plus connue de ces familles infinies est celle des groupes symétriques finis S*n* ou groupes de permutations d'ensembles finis, avec pour système générateur les transpositions d'éléments adjacents dans $\{1,...,n\}$. Ces permutations peuvent être étudiées sous leur aspect ordinal et sous leur aspect théorie des groupes. c'est donc essentiellement l'objet permutoèdre qui est concerné ici. Cet objet, l'ensemble des ordres totaux avec une proximité qui se traduit entre autre par la distance de Kendall est justiciable d'une lecture combinatoire (structure d'ordre, de treillis) mais également d'une lecture algébrique.

[1] C.A.M.S. - 54, bd Raspail 75270 PARIS Cedex 06

Cette double lecture se retrouve pour tous les Coxeter finis et la confrontation des deux points de vue permet d'ailleurs d'obtenir quelques résultats. La possibilité d'application de ce genre de mathématique aux Sciences Sociales tient au fait que le permutoèdre est la structure sur laquelle viennent se situer "naturellement" des données organisées selon des ordres totaux : votes, choix selon plusieurs critères, ordres de préférence etc...

I - LES ORDRES SUR LES GROUPES DE COXETER

Ce paragraphe reprend des définitions et résultats figurant dans Bourbaki [5] et Björner et Wachs [4] Nous donnons quelques démonstrations qui ne sont pas toutes dans les ouvrages cités.

DÉFINITION 1
Un groupe de Coxeter (W,S) dont l'opération est notée multiplicativement et l'élément neutre e est défini par un système générateur S du groupe W et des relations entre générateurs vérifiant les conditions 1) et 2) :

1) tout élément s de S est d'ordre 2 :
$\forall\ s \in S,\ s^2 = e$

2) pour $s, s' \in S$ soit $m(s,s')$ l'ordre de ss' (si $m(s,s')$ est fini, c'est le plus petit entier tel que $(ss')^{m(s,s')} = e$). Soit I l'ensemble des couples de S tels que $m(s,s')$ soit fini. L'ensemble S et les relations $(ss')^{m(s,s')} = e$ pour (s,s') dans I forment une *présentation* du groupe W (cf. Bourbaki p.12). En d'autres termes W est quotient du groupe libre engendré par S, par l'équivalence définie par la donnée des $m(s,s')$. En particulier, S est un système générateur minimal.

DÉFINITION 2
La *longueur* $l(w)$ d'un élément w de W est le plus petit entier r tel que w soit le produit de r éléments de S.
Si $w = s_1 \ldots s_r$ avec $l(w) = r$
$s_1 \ldots s_r$ est dite *décomposition réduite* de w.

QUELQUES RAPPELS
- $l(w) = l(w^{-1})$ car si $s_1 \ldots s_r$ est une décomposition réduite de w, $s_r \ldots s_1$ est une décomposition réduite de w^{-1}.

- $l(w\,w') \leq l(w) + l(w')$:
si $s_1 \ldots s_r$ est décomposition réduite de w et $s'_1 \ldots s'_l$ une décomposition réduite de w'
$s_1 \ldots s_r\ s'_1 \ldots s'_l$ est égal à ww' mais n'est pas forcément une décomposition réduite.

- $\forall\ s \in S$ et $\forall\ w \in W\ \ l(sw) = l(w) \pm 1$
- Un *segment* d'un produit $s_1 \ldots s_r$ d'éléments de S est un produit d'éléments consécutifs $s_i\, s_{i+1} \ldots s_{i+j}$ de la suite $s_1, s_2, \ldots, s_r$.

Tout segment d'une décomposition réduite est une décomposition réduite.

Dans le cas fini, W admet un seul élément de longueur maximum, noté w_0. Cet élément est d'ordre 2 car $l(w_0) = l(w_0^{-1})$ et peut être caractérisé par :

$$\forall\ s \in S\ \ l(sw_0) = l(w_0) - 1$$

on a également :

$$l(w_0\, s) = l(w_0\, s)^{-1}) = l(s\, w_0) = l(w_0) - 1\ .$$

et : $\forall\ w \in W : l(ww_0) = l(w_0 w) = l(w_0) - l(w)$.

LA CONDITION D'ÉCHANGE

On désigne sous ce nom l'assertion :
Soient $w \in W$ et $s \in S$ tels que $l(s\,w) < l(w)$.
Pour toute décomposition réduite $s_1 ... s_r$ de w il existe un entier j tel que :
$1 \geq j \geq r$ et $s\, s_1 \ldots s_{j-1} = s_1 \ldots s_{j-1}\, s_j$ (Bourbaki, p.15).
Cette condition d'échange que nous utiliserons à plusieurs reprises est fondamentale car elle caractérise les groupes de Coxeter :

THÉORÈME 1 (Bourbaki p. 17)
Pour que (W,S) soit un système de Coxeter il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition d'échange.

Exemple d'utilisation de la condition d'échange
De toute décomposition réduite $s_1 \ldots s_r$ de w on peut extraire une décomposition réduite de sw, dans le cas $l(sw) < lw$.
$s\, s_1 \ldots s_r$ n'est pas une décomposition réduite de sw qui est de longueur r-1, mais $\exists\, j$:

$$s\, s_1 \ldots s_{j-1} = s_1 \ldots s_{j-1}\, s_j$$
$$s\, s\, s_1 \ldots s_{j-1} = s\, s_1 \ldots s_{j-1}\, s_j$$
$$\Rightarrow\ s_1 \ldots s_{j-1} = s\, s_1 \ldots s_j$$
$$sw = s\ s_1 \ldots s_j \ldots s_r = s_1 \ldots s_{j-1}\ s_{j+1} \ldots s_r$$

et $s_1 \ldots s_{j-1}\ s_{j+1} \ldots s_r$ (noté également $s_1 \ldots \widehat{s_j} \ldots s_r$, $\widehat{s_j}$ signifiant que le terme s_j est supprimé) est une décomposition réduite de sw extraite, par suppression de s_j de la décomposition réduite de w.

En appliquant plusieurs fois la condition d'échange on obtient le résultat suivant : [Bourbaki, ex. 1, p. 36] *de toute décomposition non réduite $s_1 \ldots s_r$* d'un élément *w on peut extraire une décomposition réduite* $s_{j(1)} \ldots s_{j(k)}$ où $j(1),\ldots,j(k)$ est une suite croissante d'entiers compris entre 1 et r.

DÉMONSTRATION
Soit i le plus grand entier tel que $s_i\, s_{i+1} \ldots s_k$ soit non réduit. Alors
$l(s_i\, s_{i+1} \ldots s_k) < l(s_{i+1} \ldots s_k)$ et, par application de la condition d'échange, il existe j compris entre i+1 et k et $s_{i+1} \ldots \widehat{s_j} \ldots s_k$ est une décomposition réduite de $s_i\ s_{i+1} \ldots s_k$.
En itérant le procédé de droite à gauche on obtient le résultat.

LE GRAPHE DE CAYLEY DE (W,S)
C'est le graphe dont les sommets sont les éléments de W et les arêtes les couples (w,w') tels que $w' = sw$ pour un élément s de S.

(On remarque que l'on a également $sw' = w$ et que le graphe de Cayley n'est pas orienté).
On appellera *graphe étiqueté* le graphe de Cayley dont chaque arête (w,sw) est étiqueté par s.

Ce graphe de Cayley que l'on appellera graphe de Cayley à gauche admet un dual : le graphe de Cayley à droite dont les sommets sont également les éléments de W et les arêtes les couples (w,w') tels que $w' = ws$.

L'application qui à tout w fait correspondre w^{-1} est un isomorphisme entre les deux graphes de Cayley :

$$w' = sw \Leftrightarrow (w')^{-1} = w^{-1}s\ .$$

LES ORDRES FAIBLES DE BRUHAT SUR W

Sur W l'*ordre faible de Bruhat à gauche* $<_L$ est défini par :

$$w_1 <_L w_2 \Leftrightarrow \exists\, s_1,\dots, s_r \in S :$$
$$w_2 = s_r..s_1\, w_1$$

et
$$l(s_i...s_1\, w_1) = l(w_1) + i \quad \forall i,\ 1 \le i \le r$$

la relation de couverture $\prec$ de cet ordre :

$$w_1 \prec w_2 \Leftrightarrow \exists\, s \ \text{ et } \ w_2 = sw_1 \ \text{ avec } \ l(w_2) = l(w_1) + 1$$

coïncide avec le graphe de Cayley à gauche orienté par les longeurs croissantes. L'ordre faible de Bruhat à gauche est la fermeture transitive du graphe de Cayley à gauche orienté par les longueurs ; *le diagramme* ou graphe de couverture de $\prec$ coïncide donc avec le graphe de Cayley à gauche orienté.

Les arêtes du diagramme peuvent être étiquetées comme dans le graphe de Cayley. Dualement l'ordre de Bruhat à droite $<_R$ est défini par :

$$w_1 <_R w_2 \Rightarrow \exists\, s_1 \dots s_r \in S$$
$$w_2 = w_1\, s_1...s_r \quad \text{et} \quad l(\, w_1\, s_1...s_i) = l(w) + i\ \forall i,\ 1 \le i \le r.$$

Ici encore l'application $w \to w^{-1}$ est un isomorphisme entre $<_L$ et $<_R$.

Dans la suite nous entendrons, sauf précision, par ordre sur W l'ordre faible à gauche mais tout résultat sur $<_L$ est transférable en un résultat sur $<_R$ en raison de l'isomorphisme.

L'ORDRE FORT DE BRUHAT

Un troisième ordre que nous n'utiliserons pas dans cet article a été très étudié [3], [4], [14] :

$$\text{Soit } T = \{w\, s\, w^{-1},\ w \in W,\ s \in S\}.$$

T est l'ensemble des conjugués des éléments de S, noté encore ensemble des *réflections*.

L'ordre fort de Bruhat $<$ est défini par

$$w_1 < w_2 \ \Leftrightarrow\ \exists\, t_1,\dots,t_i \in T$$
$$w_2 = t_i \dots t_1 w_1 \quad \text{et} \quad \forall i,\ 1 \le i \le r$$
$$l(t_i\, t_{i-1}...t_1 w_1) > l(t_{i-1} \dots t_1 w_1).$$

L'ordre fort contient les deux ordres faibles.

Les trois ordres sont des ordres *gradués* (i.e. toutes les chaînes maximales entre deux éléments comparables ont même longueur), admettent e pour minimum et le rang d'un élément w, ou longueur des chaînes maximales entre e et w est égal à la longeur de w, pour les trois ordres.

LES INTERVALLES DANS L'ORDRE FAIBLE

Dans l'ensemble ordonné $(W,<_L)$ l'étude des intervalles se ramène entièrement à celle des intervalles de minimum e. Nous donnons une démonstration du résultat suivant (Bourbaki remarque p.10 et Bjorner et Wachs [3]) :

Soit $w_1 < w_2$ et $[w_1,w_2]$ *l'intervalle de minimum* w_1 *et de maximum* w_2. *La translation à droite* Tw_1^{-1} *qui à tout élément* w *de* $[w_1,w_2]$ *fait correspondre* $w\, w_1^{-1}$ *est un isomorphisme de* $[w_1,w_2]$ *dans* $[e, w_2w_1^{-1}]$.

Montrons que :

$$w_1 \leq u \leq v \leq w_2 \Rightarrow e \leq u\, w_1^{-1} \leq v\, w_1^{-1} \leq w_2\, w_1^{-1}$$

L'ordre $w_1 \leq u \leq v \leq w_2$ implique l'existence d'une décomposition réduite de w_2 "passant" par v, u, w_1 en ce sens que cette décomposition réduite est partitionnable en *segments* d_1, d_2, d_3, d_4 et $w_2 = d_1\, d_2\, d_3\, d_4$

$v = d_2\, d_3\, d_4$

$u = d_3\, d_4$

$w_1 = d_4$

Les translatés à droite par w_1^{-1} de ces quatre éléments, soit : $w_2 w_1^{-1}$, $v\, w_1^{-1}$, $u\, w_1^{-1}$ et e ont des décompositions $d_1\, d_2\, d_3$, $d_2\, d_3$, d_3, $\varnothing$ réduites, puisque segments de la décomposition réduite $d_1\, d_2\, d_3\, d_4$ donc :

$$e \leq u\, w_1^{-1} \leq v\, w_1^{-1} \leq w_2 w_1^{-1}$$

La translation Tw_1^{-1} est injective comme toute translation dans un groupe.
Il reste à montrer que $\forall\, a,b$: $\quad e \leq a \leq b \leq w_2 w_1^{-1} \Rightarrow w_1 \leq a\, w_1 \leq b\, w_1 \leq w_2$.

On considère une décomposition réduite de $w_2 w_1^{-1}$ et sa partition en segments d'_1, d'_2, d'_3 tels que : $b = d'_2\, d'_3 \qquad a = d'_3$.
Les deux décompositions réduites $d_1\, d_2\, d_3$ et $d'_1\, d'_2\, d'_3$ comportent le même nombre de termes de S, égal à la longueur de $w_2 w_1^{-1}$ et $w_2 = w_2 w_1^{-1} w_1 = d'_1\, d'_2\, d'_3\, d_4$ est une décomposition réduite de w_2 ;

donc : $w_1 = d_4 \leq a\, w_1 = d'_3\, d_4 \leq b\, w_1 = d'_2\, d'_3\, d'_4 \leq w_2 = d'_1\, d'_2\, d'_3\, d_4$
et Tw_1^{-1} dont la réciproque est Tw_1 est un isomorphisme de $[w_1, w_2]$ dans $[e, w_2 w_1^{-1}]$.

Dans l'étude des groupes de Coxeter, les ensembles W^s où
$W^s = \{w \in W, l(ws) = l(w) + 1\}$ jouent un rôle important. Nous démontrons le lemme suivant :

LEMME 1

$$s \leq w \Leftrightarrow w \notin W^s$$

DÉMONSTRATION

$\Rightarrow$

si $s \leq w$, il existe une décomposition réduite $s_1 \dots s_r\, s$ de w et $ws = s_1 \dots s_r\, s\, s = s_1 \dots s_r$ et $l(ws) = l(w)-1$ donc $w \notin W^s$.

$\Leftarrow$

si $w \notin W^s$, $l(ws) = l(w)-1$
et $l(ws)^{-1} = l(ws) = l(w)-1 = l(w^{-1})-1$
$(ws)^{-1} = sw^{-1}$ et la condition d'échange peut s'appliquerà w^{-1} et $s\, w^{-1}$:

si $s_r \dots s_1$ est une décomposition réduite de w^{-1}, sw^{-1} admet une décomposition réduite $s_r \dots \widehat{s_i} \dots s_1$ et $s\, s_r \dots \widehat{s_i} \dots s_1$ est une décomposition réduite de w_1^{-1} . D'où $s_1 \dots \widehat{s_i} \dots s_r\, s$ est une décomposition réduite de w et $w > s$.

De plus, la translation à droite par s est une bijection entre W^s et $W^s s$ et $W^s \cup W^s s = W$.
En effet : $w \in W^s \Rightarrow ws \notin W^s$ car $l(wss) = l(w) < l(ws)$
et d'après le lemme :
$w \notin W^s \Rightarrow w \geq s$ donc il existe une décomposition réduite $w = s_1 \dots s_r\, s$
et $ws = s_1 \dots s_r ss = s_1 \dots s_r$; $l(wss) = l(w) = l(ws)+1$ d'où $ws \in W^s$ et
$w \in W^s s$.

Nous en déduisons les résultats suivants :

LEMME 2
La translation à droite par s *est un isomorphisme entre le filtre* $W^s s = \{w, w \geq s\}$ *et l'idéal* $W^s = \{w, w \not\geq s\}$ *qui forment une partition de* W.

Lorsque W est fini $W^s s$ est l'intervalle $[s, w_0]$ et W^s l'intervalle $[e, w_0 s]$:

LEMME 2'
Dans le cas fini, pour tout élément s de S, W^s et $W^s s$ sont deux intervalles isomorphes qui forment une partition de W.

LEMME 3 (Bourbaki)
Si $w \in W^s$ et $s'w \notin W^s$ alors $s'w = ws$

DÉMONSTRATION
W^s contient $[e,w]$ donc $s'w \not\leq w$ et $s'w > w$. Il existe $w' \in W^s$ et $s'w = w's$.

Soit $s_1 \ldots s_r s$ une décomposition réduite de $s'w$. D'après la condition d'échange appliquée à $w = s'(s'w)$ il existe s_i et $w = s_1 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_r s$ et
$w \in W^s \Rightarrow w \geq s \Rightarrow \widehat{s_i} = s$
$w = s_1 \ldots s_r = w'$
$s'w = ws$.

LE TREILLIS FINI
Björner signale que *dans le cas fini, W est un treillis pour l'ordre faible de Bruhat* [3].

DÉMONSTRATION
a) Tout W, fini ou non est un inf-demi-treillis, i.e. tout couple d'éléments de W a un plus grand minorant commun pour l'ordre faible.

Tout d'abord tout intervalle $[e,w]$ est fini car w est de longueur finie et ses décompositions réduites sont en nombre fini. Soit w_1 et w_2 deux éléments non comparables ($w_1 \not\leq w_2$ et $w_2 \not\leq w_1$). $\mathrm{Min}(w_1, w_2) = \{w, w \leq w_1 \text{ et } w \leq w_2\}$, ensemble des minorants communs, est fini. C'est l'intersection des intervalles $[e, w_1]$ et $[e, w_2]$. Si w_1 et w_2 n'admettent pas de plus grand minorant commun ou *infimum*, l'ensemble $\mathrm{Min}(w_1, w_2)$ a plusieurs éléments maximaux. Soient m un élément de longueur maximum et m' un élément maximal quelconque dans $\mathrm{Min}(w_1, w_2)$. Nous montrons que $m' = m$ ce qui implique $w_1 \wedge w_2 = m$.

Supposons $m' \neq m$ et dans l'ensemble Min (m,m') soit v un élément de longueur maximum. On a $v \neq m$ et $v \neq m'$. La translation à droite par v^{-1} est un isomorphisme entre $[v,w_1]$ et $[e,w_1 v^{-1}]$ et entre $[v,w_2]$ et $[e,w_2 v^{-1}]$.

La démonstration se fera sur les translatés par v^{-1} et une translation à droite par v donnera le résultat cherché.

Si v est de longueur maximum dans $\mathrm{Min}(m,m')$ alors l'infimum de $m v^{-1}$ et $m' v^{-1}$ est e :
(A) $m v^{-1} \wedge m' v^{-1} = e$, car si un élément l, avec $l \neq e$, appartenait à $\mathrm{Min}(m v^{-1}, m' v^{-1})$, son translaté à droite par v, soit lv, serait élément de $\mathrm{Min}(m,m')$ et strictement plus grand que v, ce qui contredirait l'hypothèse selon laquelle v est de longueur maximum.

Soient des décompositions réduites :
$w_1 v^{-1} = s_1 \ldots s_r s_{r+1} \ldots s_l s$ avec $m v^{-1} = s_{r+1} \ldots s_l s$
$w_2 v^{-1} = s'_1 \ldots s'_j s'_{j+1} \ldots s'_k s'$ avec $m' v^{-1} = s'_{j+1} \ldots s'_k s'$ $s \neq s'$ en raison de (A)
donc $m v^{-1} \in W^{s'}$ et $m' v^{-1} \in W^s$

par contre $w_1 v^{-1} \notin W^{s'}$ car $s' \leq m' v^{-1} \leq w_1 v^{-1}$ et $w_2 v^{-1} \notin W^s$ car $s \leq m v^{-1} \leq w_2 v^{-1}$
il existe donc un plus grand indice i, $1 \leq i \leq r-1$
tel que $s_i \dots s_r s_{r+1} \dots s_l s \notin W^{s'}$ et $u = s_{i+1} \dots s_r s_{r+1} \dots s_l s \in W^{s'}$.
On est dans le cas $s_i u \notin W^{s'}$ et $u \in W^{s'}$
donc (Lemme 3) $s_i u = u s'$ et :
$w_1 v^{-1} \geq u s' \geq m v^{-1} s'$, avec $l(m v^{-1} s') = l(m v^{-1}) + 1$
$m v^{-1} s'$ est donc un minorant de $w_1 v^{-1}$, de longueur supérieure à celle de $m v^{-1}$. On démontre, de la même façon, que $m v^{-1} s'$ est un minorant de $w_2 v^{-1}$, en utilisant une décomposition réduite $s''_1 \dots s''_k s_{r+1} \dots s_l s$ de $w_2 v^{-1}$, avec $s \neq s'$. En translatant tout à droite par v, on obtient $m v^{-1} s' v$, élément de $\mathrm{Min}(w_1, w_2)$ de longueur supérieure à celle de m ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle m est de longueur maximum donc
$m = m' = w_1 \wedge w_2$.

b) Dans le cas fini W est un treillis.
Montrons que la translation à droite par w_0 est un anti automorphisme.

On a vu que l'unique élément de longueur maximale est $w_0 = w_0^{-1}$, que $l(sw_0) = l(w_0)-1$, $sw_0 < w_0$ $\forall$ $s \in S$, et $l(w\, w_0) = l(w_0) - l(w)$.

La translation à droite Tw_0 est une bijection et c'est une involution : $Tw_0 \circ Tw_0$ = identité car w_0 est un élément d'ordre 2. Il reste à montrer :

$$w_1 < w_2 \Rightarrow w_2 w_0 < w_1 w_0 .$$

Soit une décomposition réduite de w_0 "passant" par w_2 et w_1 :
$w_0 = s_1 \dots s_r s_{r+1} \dots s_j s_{j+1} \dots s_k$
avec $w_2 = s_{r+1} \dots s_j s_{j+1} \dots s_k$
et $w_2 = s_{j+1} \dots s_k$.
$w_0 = w_0^{-1} = s_k \dots s_{j+1} s_j \dots s_{r+1} s_r \dots s_1$
$w_1 w_0 = w_1 w_0^{-1} = s_j \dots s_{r+1} s_r \dots s_1$
$w_2 w_0 = w_2 w_0^{-1} = s_r \dots s_1$.

Ces deux dernières décompositions sont réduites et :

$$w_2 w_0 < w_1 w_0.$$

La translation à droite par w_0 est donc un anti automorphisme (transforme l'ordre < en ordre >) et transforme l'infimum de deux éléments en supremum de ses translatés à droite par w_0. On a donc :
$w_1 \vee w_2 = (w_1 w_0 \wedge w_2 w_0)\, w_0$ et W est un treillis de minimum e, de maximum w_0 et autodual c'est-à-dire isomorphe à son ordre dual.

L'application $w \rightarrow w_0 w w_0$ est un automorphisme de la structure d'ordre [2] en même temps qu'un automorphisme interne pour la structure de groupe. La composée de cet automorphisme par la translation à droite par w_0 est la translation à gauche par w_0 qui est donc également un anti automorphisme pour l'ordre.

II - L'ALGÈBRE DE BOOLE D'INTERVALLES

Dans ce paragraphe nous démontrons que dans W fini les supremum d'atomes et les infimum de coatomes, avec e et w_0, constituent deux sous algèbres de Boole du treillis et qu'une famille d'intervalles forme une partition de W, dont la relation d'équivalence associée est une congruence pour la structure de treillis. Le treillis quotient est une algèbre de Boole isomorphe à

l'algèbre des supremum d'atomes et à celle des infimum de coatomes, et isomorphe à l'algèbre de Boole $\mathcal{P}(S)$ des parties de l'ensemble S. Les treillis qui ont ces propriétés sont dits pseudo-complémentés cf. Chameni-Nembua et Monjardet [6].

La partition de W en deux intervalles isomorphes $[s,w_0]$ et $[e,w_0 s]$ induit le résultat :

(B) $w > s \Leftrightarrow w \nleq w_0 s$

Dans W, l'atome (ou élément de longueur 1) s est inférieur à tous les coatomes (ou éléments de longueur $l(w_0)$ -1) sauf au coatome $w_0 s$, car les coatomes autres que $w_0 s$ ne peuvent être dans l'intervalle $[e,w_0 s]$ et sont dans l'intervalle $[s,w_0]$, donc sont supérieurs à s.

De (B) on déduit que w_0 est le supremum des atomes (aucun élément inférieur à w_0 ne peut être le supremum des atomes puisque chaque coatome $w_0 s$ n'est pas supérieur à l'atome s).

De (B) on peut également déduire qu'un élément w est supérieur aux seuls atomes s_j $s_j \in J \subset S$ si et seulement si il n'est pas inférieur aux seuls coatomes $w_0 s_j$, $s_j \in$ J, et donc si et seulement si il est inférieur aux seuls coatomes $w_0 s_i$, $s_i \in$ S-J.

Nous noterons w_J le supremum des atomes d'une partie J de S

et : $\bigvee_{s_j \in J} s_j \leq w \leq \bigwedge_{s_i \in S-J} w_0 s_i$ avec $\bigwedge_{s_i \in S-J} w_0 s_i = w_0 \left(\bigvee_{s_i \in S-J} s_i \right) = w_0 w_{S-J}$

l'intervalle $\left[\bigvee_{s_j \in J} s_j , \bigwedge_{s_i \in S-J} w_0 s_i \right] = [w_J, w_0 w_{S-J}]$

est égal à $\left(\bigcap_{s_j \in J} W^{s_j} s_j \right) \cap \left(\bigcap_{s_i \in S-J} W^{s_i} \right)$

car $\bigcap_{s_j \in J} W^{s_j} s_j$ est l'ensemble des éléments supérieurs aux s_j , $s_j \in$ J, donc supérieurs à $\bigvee_{s_j \in J} s_j$, c'est l'intervalle $\left[\bigvee_{s_j \in J} s_j, w_0 \right]$ et $\bigcap_{s_i \in S-J} W^{s_i}$ est l'ensemble des éléments qui sont inférieurs aux coatomes $w_0 s_i$, $s_i \in$ S-J, donc inférieurs à $\bigwedge_{s_i \in S-J} w_0 s_i$. C'est l'intervalle $\left[e, \bigwedge_{s_i \in S-J} w_0 s_i \right]$ et l'intersection de ces deux intervalles est l'intervalle

$$\left[\bigvee_{s_j \in J} s_j , \bigwedge_{s_i \in S-J} w_0 s_j \right] = [w_J, w_0 w_{S-J}].$$

L'ensemble $\bigcap_{s \in J} W^s$ est souvent noté W^J [4] et défini par $W^J = \{ w, l(ws) = l(w) + 1,$ pour tout $s \in J \}$. W^J est appelé quotient à gauche de W par J et noté W/J. Il est connu (cf. Bourbaki ex.3 p.37) que chaque classe de Lagrange à gauche de W par le sous-groupe W_J de W engendré par J a un seul élément de longueur minimum et que cet élément est un élément de W^J.

Réciproquement tout élément de W^J est élément de longueur minimum d'une classe de Lagrange à gauche, d'où le nom de quotient donné à W^J.

Nous noterons $\mathcal{I}_J$ l'intervalle $[w_J, w_0 w_{S-J}]$; ces intervalles peuvent encore être définis par :

$$\mathcal{I}_J = \{w \in W \mid l(ws) = l(w) - 1 \quad \forall\, s \in J \text{ et } l(ws) = l(w) + 1 \quad \forall\, s \in S\text{-}J\}$$

Par construction tout élément de W appartient à l'un de ces 2^n intervalles ($|S| = n$).

Montrons que ces 2^n intervalles sont disjoints et tous différents du vide.
On sait (Bourbaki, corollaire 4 p. 20) que les *sous-groupes paraboliques* notés W_I ou sous-groupes engendrés par une partie I de S ont les propriétés suivantes :
$W_I \cap W_{I'} = W_{I \cap I'}$ $\forall$ I, I' $\supseteq$ S et W_I est un groupe de Coxeter.

DÉMONSTRATION
Si pour $I \neq I'$, on avait $W_I = W_{I'} = W_{I \cap I'}$, I ou I' ne serait pas système générateur minimal et W_I ne serait pas un groupe de Coxeter.

Nous démontrons que les sous-groupes paraboliques sont des intervalles de W.

Soit w_I le plus grand élément du groupe W_I. On sait [5] que la longueur de w_I dans W_I est égale à la longueur de w_I dans W.

$w_I \in W_I$ implique l'existence d'une décomposition réduite de w_I dont tous les éléments sont dans I.

Soit w un élément de W tel que $e < w < w_I$. Il existe une décomposition réduite de $w_I = s_1 \ldots s_r \; s'_1 \ldots s'_l$ avec $w = s'_1, \ldots, s'_l$. Or toutes les décompositions réduites d'un élément contiennent exactement les mêmes éléments de S [5]. Donc $s'_1, \ldots, s'_l \in$ I et $w \in W_I$. W_I est bien un intervalle de W, $W_I = [e, w_I]$. et $I \neq I' \Rightarrow w_I = \bigvee_{s_i \in I} s_i \neq \bigvee_{s_i \in I'} s_i$.
Les 2^n bornes inférieures des intervalles $\mathcal{I}$ sont donc différentes et ces 2^n intervalles sont tous non vides, d'intersection vide deux à deux et constituent une partition de W en 2^n intervalles.

Nous démontrons le résultat suivant :

LEMME 4
Les supremum d'atomes, avec e, constituent un sous-treillis de W *isomorphe à l'algèbre de Boole (ou hypercube),* $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap)$ *des* 2^n *parties de* S *avec l'union pour supremum et l'intersection pour infimum.*

A chaque partie I de S associons, par l'application $\mathfrak{F}$, l'élément $\bigvee_{s_i \in I} s_i = w_I$ de W et à $\emptyset$ associons e.

$$I \xmapsto{\mathfrak{F}} \bigvee_{s_i \in I} s_i$$

$\mathfrak{F}(I \cup I') = \bigvee_{s_i \in I \cup I'} s_i = \left(\bigvee_I s_i\right) \vee \left(\bigvee_{I'} s_i\right)$ car le $\vee$ est une opération associative

$\mathfrak{F}(I \cap I') = \left(\bigvee_I s_i\right) \wedge \left(\bigvee_{I'} s_i\right)$ car $\bigvee_{I \cap I'} s_i$ est le plus grand élément du groupe de Coxeter $W_{I \cap I'}$

or $W_{I \cap I'} = W_I \cap W_{I'}$, et le plus grand élément de l'intervalle $W_{I \cap I'}$, qui est sous-treillis de W_I et de $W_{I'}$ est l'infimum de w_I et de $w_{I'}$.

Les $\vee$ d'atomes, avec e, constituent bien un sous-treillis de W, isomorphe à $\mathcal{P}(S)$. C'est donc un hypercube à 2^n éléments et le complémentaire de $\bigvee_I s_i$ est $\bigvee_{s_i \in S-I} s_i$.

Par l'anti-automorphisme $w \to w\, w_0$ les $\vee$ d'atomes sont transformés en $\wedge$ de coatomes qui constituent avec w_0 une algèbre de Boole.

L'application f de W dans l'algèbre des $\vee$ d'atomes définie par :

$$f(w) = \vee \text{ des atomes supérieurs à } w$$

est un morphisme surjectif de treillis et la partition W/f est la partition en intervalles $\mathfrak{I}_I$.

LEMME 5

L'application f de W *dans l'algèbre de Boole des supremum d'atomes définie par :*
$f(w)$ = supremum des atomes inférieurs à w est un morphisme de treillis surjectif et la partition W/f *est la partition en intervalles* $\mathfrak{I}_I$.

La relation d'équivalence $\sim$ (être dans le même intervalle $\mathfrak{I}_I$) est une *congruence* pour la structure de treillis :

$$w \in \mathfrak{I}_I \text{ et } w' \in \mathfrak{I}_J \implies w \vee w' \in \mathfrak{I}_{I \cup J}$$
$$w \wedge w' \in \mathfrak{I}_{I \cap J}$$

$w \vee w'$ est supérieur aux seuls atomes de $I \cup J$ et inférieur aux seuls coatomes $w_0 s_i$, $s_i \in S - (I \cup J)$ tandis que $w \wedge w'$ est supérieur aux seuls atomes de $I \cap J$ et inférieur aux seuls coatomes $w_0 s_i$, $s_i \in S - (I \cap J)$.

La relation d'équivalence $\sim$ peut s'exprimer de nombreuses façons dans ces treillis dits pseudo complémentés [6] :

$w_1 \sim w_2 \iff w_1$ et w_2 sont supérieurs aux mêmes atomes.
$\iff w_1$ et w_2 sont inférieurs aux mêmes coatomes.
$\iff w_1$ et w_2 ont un complémentaire commun.
$\iff w_1$ et w_2 ont mêmes complémentaires.

Dans ces treillis $\mathfrak{I}_I$ et $\mathfrak{I}_{S-I}$ sont mutuellement complémentaires.

Nous étudions maintenant quelques propriétés supplémentaires de cette congruence dans les Coxeter finis.

Partitionnons les arêtes d'adjacence de $<_L$ (les arêtes du diagramme de $<_L$) en deux classes,
la classe A_1 des arêtes de $<_L$ seul et la classe A_2 des arêtes qui sont arêtes d'adjacence à la fois dans $<_L$ et dans $<_R$.

LEMME 6

a) *Les classes connexes du graphes* (W,A_1) *coïncident avec les intervalles* $\mathfrak{I}_J$
b) *Toute arête de* A_2 *est arête d'adjacence entre deux éléments de* W *appartenant à deux intervalles* $\mathfrak{I}_J$ et $\mathfrak{I}_K$ *distincts.*

En d'autres termes, les arêtes de A_1 sont les arêtes intra-classe de la congruence et chaque classe est connexe en tant qu'intervalle dans $<_L$; les arêtes de A_2 sont les arêtes inter-classes.

Notation : nous noterons indifférement $\mathfrak{I}_I$ ou $\mathfrak{I}_w$ un intervalle, classe de la congruence dont w_I ou w est un élément.

Démontrons le résultat équivalent :

w' et w adjacents dans $<_L$ et $\mathcal{I}_w \neq \mathcal{I}_{w'} \Leftrightarrow w'$ et w adjacents dans $<_L$ et $<_R$ soit $l(w') = l(w) + 1$.

$\Rightarrow$

$\exists\, s' \in S : w' = s'w$ et $l(w') = l(w)+1$

$\mathcal{I}_w \neq \mathcal{I}_{w'} \Rightarrow \exists\, s \in S\,;\, w' \geq s$ et $w \not\geq s$.

Il existe une décomposition réduite $s_1 \dots s_r s$ de w' et d'après le lemme d'échange :

$w' = s's_1 \dots \widehat{s_i} \dots s_r s = s_1 \dots s_r s$

$s_1 \dots \widehat{s_i} \dots s$ est une décomposition réduite de w

$w \not\geq s \Rightarrow s_i = s$

$w = s_1 \dots s_r$ est une décomposition réduite de w

$w' = ws$ avec $l(w') = l(w)+1$

et $w <_R w'$

$\Leftarrow$

w et w' adjacents dans $<_L$ et $<_R$ avec $w < w' \Rightarrow \exists\, s,s'$, $w' = sw = ws'$

alors $s' \not\leq w$, sinon il y aurait une décomposition réduite $w = s_1 \dots s_r s'$ et $w' = s_1 \dots s_r s's' = s_1 \dots s_r$ et on aurait $w' <_R w$ contrairement aux hypothèses donc $s' \not\leq w$ et $\mathcal{I}_w \neq \mathcal{I}_{w'}$.

Corollaire

Tout couple d'éléments d'un intervalle $\mathcal{I}_J$ peut être relié par un chemin fini dont les arêtes sont dans le graphe d'adjacence de $<_L$ seul.

Exemple. Pour le groupe symétrique S_n, groupe de permutations de $\{1,2,\dots,n\}$ avec pour système générateur S les n-1 transpositions $(i,i+1)$ $i \in \{1,\dots,n-1\}$ et pour l'ordre $<_R$, un intervalle $\mathcal{I}_I$ correspond à l'ensemble des permutations dont les montées et descentes sont associées à I ; le Corollaire traduit le fait que si deux permutations p_1 et p_2 on la même séquence de montées et descentes, on peut passer de p_1 à p_2 par une succession d'échanges de termes $i, i+1$, voisins dans l'ordre $1 < 2 < \dots < n$ mais non adjacents dans les ordres associés aux permutations concernées.

En particulier les transpositions de Knuth [10] (transpositions qui laissent fixe le deuxième tableau de Young associé à une permutation) sont des transpositions du type précédent et la partition en classes de Knuth est une sous partition de la partition en intervalles $\mathcal{I}_J$.

Pour le permutoèdre, c'est-à-dire S_n avec l'ordre $<_L$, un intervalle $\mathcal{I}_J$ est composé de l'ensemble des inverses des permutations figurant dans $\mathcal{I}_J$ pour $<_R$ et ce sont les premiers tableaux de Young qu'il faut considérer.

On déduit de ce résultat un algorithme simple de construction de toutes les permutations ayant une séquence de montées-descentes donnée (cf. § IV).

Les classes descendantes [4] D_I^J définies par : $I \subseteq J \subseteq S$

$D_I^J = \{w \in W,\ l(ws) = l(w)\text{-}1\ \ \forall s \in I$ et $l(ws) = l(w)+1\ \ \forall s \in S\text{-}J\}$

sont des unions d'intervalles $\mathcal{I}_K$.

D_I^J est un intervalle du treillis : $D_I^J = \bigcup_{I \subseteq K \subseteq J} \mathcal{I}_K = \left[\bigvee_{s \in I} s,\ \bigwedge_{s \in S\text{-}J} w_o s \right]$

dans le quotient booléen les classes $\mathcal{J}_K$, $I \subseteq K \subseteq J$ forment un intervalle de $\mathcal{P}(S)$ isomorphe à $\mathcal{P}(J\text{-}I)$.

Les intervalles $W^J = [e, w_0 w_J]$ sont des cas particuliers de classes descendantes : $W^J = D_{\varnothing}^{S-J}$.

Les intervalles $\mathcal{J}_I$, $I \subseteq S$ jouent un rôle particulier dans l'algèbre du groupe W [15], [13]. Ils constituent une sous algèbre de l'algèbre du groupe. Ce résultat signifie que si un élément d'une classe $\mathcal{J}_K$ est produit de C_{ijk} façons d'un élément d'une classe $\mathcal{J}_I$ par un élément d'une classe $\mathcal{J}_J$ alors tout élément de $\mathcal{J}_K$ est également C_{ijk} fois produit d'un élément de $\mathcal{J}_I$ par un élément de $\mathcal{J}_J$.

Dans l'algèbre du groupe on a l'égalité :

$$\text{(C)} \qquad \mathcal{J}_I \times \mathcal{J}_J = \sum_{K \subseteq S} C_{ijk}\, \mathcal{J}_K$$

Dans le groupe symétrique S_n, et pour l'ordre à droite, $\mathcal{J}_K$ est l'ensemble des permutations ayant une séquence de montées-descentes associée à K et (C) traduit le fait que toute permutation de montées-descentes associées à K est produit du même nombre C_{ijk} (éventuellement nul) d'une permutation de montées-descentes associée à I par une permutation de montées-descentes associée à J.

Dans les Coxeter finis les intervalles complémentaires $\mathcal{J}_I$ et $\mathcal{J}_{S-I}$ sont anti-isomorphes.

III - LA SEMI-DISTRIBUTIVITÉ DES TEILLIS DE COXETER FINIS

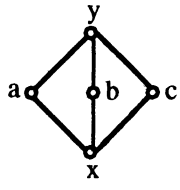
Nous étendons ce résultat (la semi-distributivité), démontré dans le cas du groupe symétrique [7], à tous les Coxeter finis.

Rappelons [1] qu'un treillis T est distributif si :

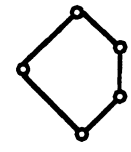
$$\forall x,y,z \in T : \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Chacune des deux égalités précédentes implique l'autre.

On sait également qu'un treillis est distributif si et seulement si il n'admet aucun sous treillis du type I ou II :



I



II

Les treillis de Coxeter associés aux groupes (W,S) tels que $m(s,s') = 2$ pour tout couple $s,s' \in S$ sont des algèbres de Boole ou hypercubes dont il est bien connu qu'ils sont distributifs.

Nous montrons le résultat suivant :

LEMME 7
Les hypercubes ou algèbres de Boole sont les seuls treillis de Coxeter distributifs. En effet si il existe au moins un couple (s,s') d'éléments de S tels que $m(s,s') > 2$, le sous groupe parabolique engendré par s et s' est un sous groupe diédral et son treillis associé, sous treillis du treillis W est un polygone à $2m(s,s')$ sommets, planté en e et gradué. Ce treillis admet des sous-treillis de type II et n'est pas distributif. W ne l'est donc pas non plus.
Par contre :

LEMME 8
Les treillis finis de Coxeter n'admettent aucun sous treillis du type I.

En effet si W admettait un sous treillis du type I les translatés à droite par x^{-1} des sommets de ce sous treillis seraient un sous treillis isomorphe, de maximum yx^{-1}, de minimum e et de sommets intermédiaires ax^{-1}, bx^{-1} et cx^{-1}.

On ne peut avoir deux de ces cinq sommets dans le même intervalle $\mathfrak{I}$ de la congruence, e étant le seul de sa classe.

Si ces cinq sommets sont dans cinq classes distinctes la restriction à ces cinq classes du treillis booléen quotient serait un sous treillis du type I ce qui est impossible dans un treillis booléen.

Il n'y a donc pas dans W de sous treillis de type I.

Les treillis de Coxeter ne sont donc pas distributifs à l'exception des hypercubes mais ne contiennent pas de sous treillis du type I. En fait :

LEMME 9
Les treillis de Coxeter finis sont semi distributifs.

Nous démontrons la $\wedge$ distributivité, à savoir :

$$x \wedge a = x \wedge b \Rightarrow x \wedge (a \vee b) = x \wedge a = x \wedge b.$$

Supposons $x \wedge a = x \wedge b$.

L'intervalle $I = [x \wedge a, x \vee a \vee b]$
avec $x \wedge a = x \wedge b = x \wedge a \wedge b$, est isomorphe à son translaté à droite I' par $(x \wedge a)^{-1}$:

$$I' = [e, (x \vee a \vee b)(x \wedge a)^{-1}]$$

Notons u' le translaté à droite par $(x \wedge a)^{-1}$ de tout $u \in I$

$$I' = [e, x' \vee a' \vee b']$$

a et $b \in I \Rightarrow a', b' \in I'$
et $x' \wedge a' = x' \wedge b' = e$

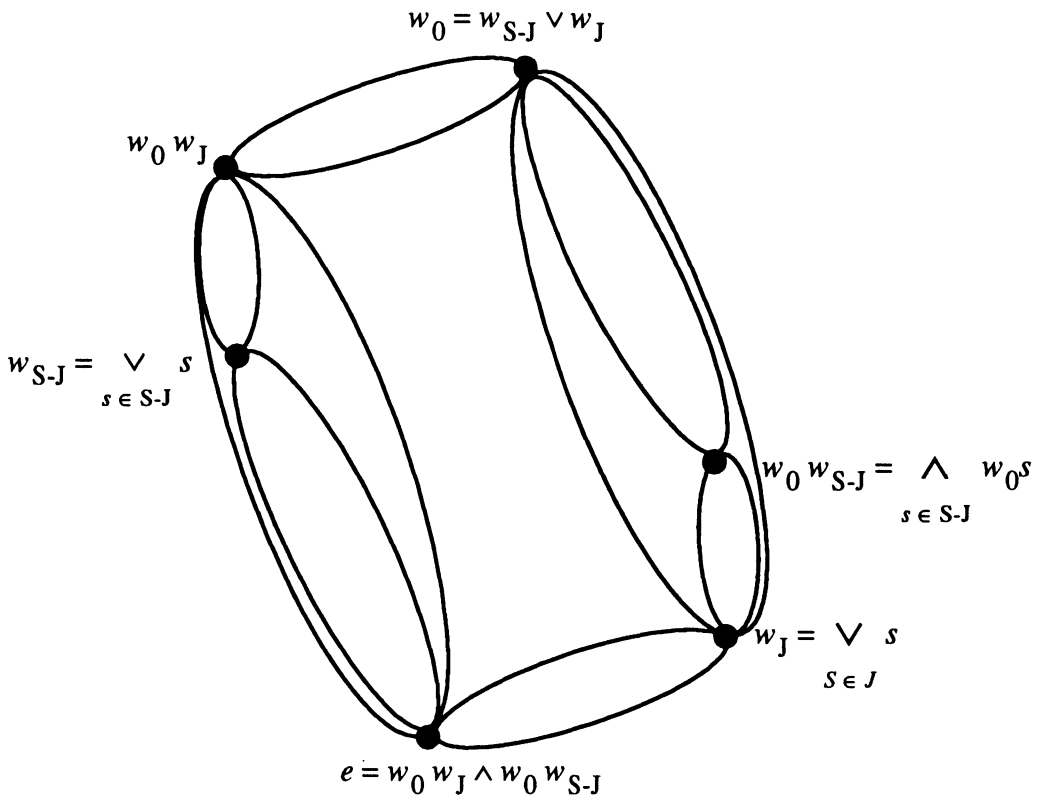
si $x' \in \mathfrak{I}_J$, l'ensemble des éléments de W dont l'infimum avec x' est e est l'intervalle

$$[e, w_0 w_J]$$

a' et b' appartiennent à cet intervalle donc $a' \vee b'$ également et $x' \wedge (a' \vee b') = e$ et en translatant à droite par $x \wedge a$ on obtient :

$$x \wedge (a \vee b) = x \wedge a.$$

La $\vee$ semi distributivité se démontre aisément grâce à l'anti-automorphisme de W.



Un schéma du treillis W avec les intervalles :

$[e,w_J] = W_J$ isomorphe à $[w_0 w_j, w_0]$

$[e,w_0 w_J] = W^J$ isomorphe à $[w_J,w_0]$

$[w_J,w_0 w_{S-J}] = \mathfrak{I}_J$ anti isomorphe à $\mathfrak{I}_{S-J} = [w_{S-J},w_0 w_J]$

$[e,w_0 w_{S-J}] = W^{S-J}$ isomorphe à $[w_{S-J},w_0]$

$[e,w_{S-J}] = W_{S-J}$ isomorphe à $[w_0 w_{S-J}, w_0]$

IV - CAS DU PERMUTOÈDRE

Le schéma précédent, avec ses isomorphismes et anti-isomorphismes d'intervalles est naturellemnt valable dans le cas particulier du permutoèdre où W est le groupe Sn des permutations de $\{1,2,...,n\}$ avec pour système générateur S les n-1 transpositions :

$$S = \{(1\ 2),(2\ 3),...,(n-1\ n)\}.$$

Pour tout choix de $J \subset S$, W_J est isomorphe à un produit direct de groupes symétriques et son ordre latticiel : $[e,w_J]$ est isomorphe au produit direct des permutoèdres associés.

Par exemple si $J = \{(12),(23),...,(r-1\ r)\}$ W_J est isomorphe à Sr et son treillis est isomorphe au permutoèdre Pr.

L'identité e est la permutation $12...n$ et $w_0 = n\ n-1....1$, $w_J = r\ \ r-1\ ...1\ \ r+1...n$,
$w_0 w_J$ est la permutation "miroir" de w_J :
$w_0 w_J = n...r+1\ \ 1\ ...r-1\ \ r$
$w_{J-S} = 12\ ..\ r-1\ \ n\ \ n-1\ ...r$
et $w_0 w_{S-J}$ est la permutation miroir de w_{S-J}.

En outre, comme dans dans tout Coxeter fini, par le jeu des translations à droite, tout intervalle $[w_1,w_2]$, avec $w_1 < w_2$ est isomorphe à l'intervalle. $[e, w_2\ w_1^{-1}]$, de plus petit élément e et à l'intervalle $[w_1\ w_2^{-1}\ w_0,w_0]$ de plus grand élément w_0.

Le calcul de tout intervalle d'un permutoèdre peut donc se ramener à celui d'un intervalle "accroché" au maximum du treillis et d'un intervalle "accroché" au minimum.

De même toute *partie convexe* définie dans le graphe de Cayley non orienté par deux éléments quelconques w_1, w_2, c'est-à-dire l'ensemble des permutations sur les chemins de longueur minimum allant de w_1 àw_2 est isomorphe à la partie convexe obtenue par translation à droite pour tout w et en particulier isomorphe aux intervalles non orientés

$$[e, w_2\, w_1^{-1}], [e, w_1\, w_2^{-1}]\ \ [w_2\, w_1^{-1}\, w_0, w_0] \text{ et } [w_1\, w_2^{-1}\, w_0, w_0].$$

LES INTERVALLES $\mathfrak{I}_J$

Les intervalles $\mathfrak{I}_J$ dans le permutoèdre (ordre $<_L$) se calculent aisément à partir de n'importe quelle permutation p de l'intervalle en n'utilisant que les arêtes d'adjacence dans $<_L$ qui ne sont pas arêtes d'adjacence dans $<_R$, c'est-à-dire en échangeant deux termes adjacents dans p à condition que ces termes ne soient pas consécutifs dans l'ordre $1 < 2 ... < n$. En particulier les transpositions de Knuth (même premier tableau de Young) sont de ce type et les classes de Knuth partitionnent l'intervalle$\mathfrak{I}_J$.

La figure A est l'intervalle $\mathfrak{I}_{(12)\,(34)}$ dans le permutoèdre P_5, les traits pleins figurant les classes de Knuth. La figure B est l'intervalle $\mathfrak{I}_{(12)\,(34)}$ dans l'ordre $<_R$ et est composé de l'ensemble des permutations inverses de celles de $\mathfrak{I}_{(12)\,(34)}$, dans le groupe S_n. C'est également l'ensemble des permutations dont les descentes sont associées à (12) (34), donc dont la séquence de montées-descentes est - + - +. Les classes de Knuth (pour le 2e tableau de Young) sont également en trait plein.

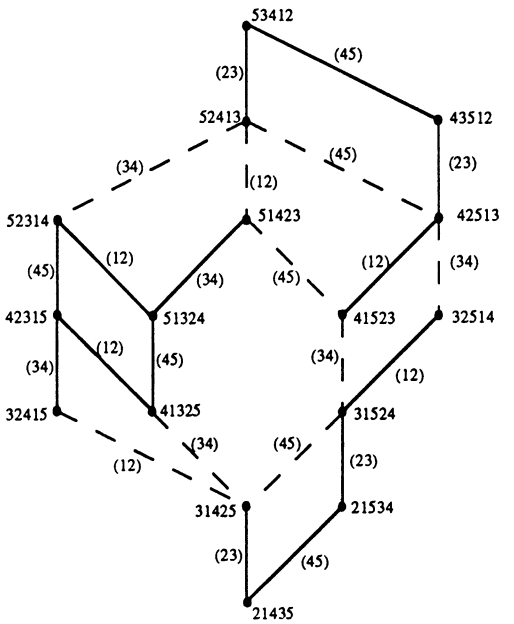


Figure A
Intervalle $\mathfrak{I}_{(12)\,(34)}$ dans $<_L$ (permutoèdre)

Les arêtes en traits pleins correspondent aux transpositions de Knuth (même premier tableau de Young)

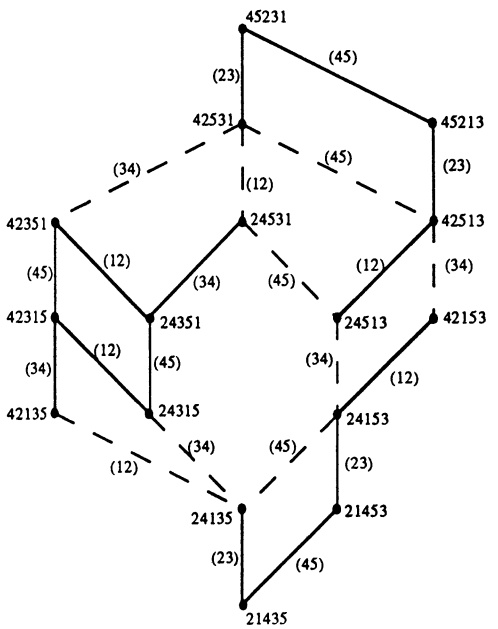


Figure B
Intervalle $\mathfrak{I}_{(12)\,(34)}$ dans $<_R$ = ensemble des permutations de même séquence - + - + de montés descentes

Les arêtes en traits pleins = même 2ème tableau de Young

Nous indiquons, sur un exemple
Un algorithme de construction de l'ensemble des permutations de séquence de montées descentes donnée, c'est-à-dire d'un intervalle $\mathfrak{I}_J$ dans $<_R$
exemple : $n = 9$ $J = \{(12),(23),(45),(56),(67),(89)\}$

$\mathfrak{I}_J$ est l'intervalle, dans $<_R$ des permutations dont les séquences de montées descentes est :
- - + - - - + -.

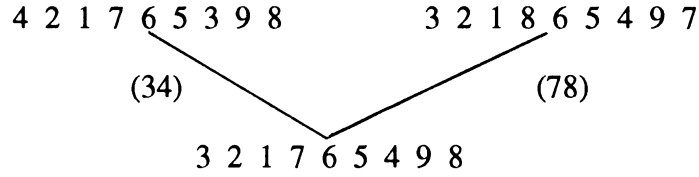
Pour construire le plus petit élément m_J de $\mathfrak{I}_J$:
- écrire la séquence : - - + - - - + -
- les éléments de 1 à 9 : 1 2 3 | 4 5 6 7 | 8 9
- sectionner en segments au niveau des + et prendre l'ordre inverse sur chaque segment soit m_J = 3 2 1 7 6 5 4 9 8.

Dualement pour obtenir le plus grand élément M_J de $\mathfrak{I}_J$ écrire les éléments de 9 à 1 sectionner au niveau des - et prendre l'ordre inverse sur chaque segement :

- - + - - - + -
9 | 8 | 7 6 | 5 | 4 | 3 2 | 1

Soit M_J = 9 8 6 7 5 4 2 3 1.

Puis construire $\mathfrak{I}_J$, à partir de m_J par exemple. Les permutations de $\mathfrak{I}_J$ "juste au dessus" de m_J s'obtiennent à partir de m_J en échangeant les éléments i, i+1 non adjacents dans m_J et tels que i soit avant i+1, on obtient ainsi :



en itérant le procédé on est assuré d'obtenir tout l'intervalle qui est une partie connexe de $<_R$ - $<_L$. Là encore on peut repérer les classes de Knuth (2ème tableau).

L'ensemble des minimums m_J, $J \subset S$, des intervalles $\mathfrak{I}_J$, constitue la sous-algèbre de Boole des $\vee$ d'atomes (dans $<_L$ et $<_R$ car ce sont des involutions) et les M_J la sous-algèbre de Boole des $\wedge$ de coatomes dans$<_R$. L'ensemble des inverses des M_J, dans le groupe S_n, est la sous algèbre de Boole des $\wedge$ de coatomes dans $<_L$.

Les ordres *blackiens* par rapport à l'ordre 1 2...m qui forment un *sous treillis distributif* à 2^{n-1} éléments dans le permutoèdre constituent, pour $<_R$ un *système de représentants* des 2^{n-1} classes $\mathfrak{I}_I$ et un *sous treillis booléen* dans $<_R$. L'ensemble des ordres *blackiens* est l'union des intervalles

$$\mathfrak{I}_{(12)\,(23)\ldots(n\text{-}1\ \ n)},\ \mathfrak{I}_{(23)\,(34)\ldots(n\text{-}1\ \ n)},\ldots\ \mathfrak{I}_{(n\text{-}1\ \ n)},\ \mathfrak{I}_{\varnothing}\,.$$

Le premier de ces intervalles est réduit à la permutation $w_0 = n\ \ n$ - 1... 1 et le dernier à la permutation identité e = 12...n. Les inverses, dans le groupe, des blackiens, les *ordres unimodaux* (constitués d'une séquence croissante suivie d'une séquence décroissante) forment un sous treillis distributif pour $<_R$ et un système de représentants pour les classes $\mathfrak{I}_I$ ainsi qu'un sous treillis booléen pour $<_L$ (même remarque pour les ordres unimodaux constitués d'une séquence décroissante suivie d'une séquence croissante et pour leurs inverses dans le groupe qui sont les ordres *coblackiens*).

REMERCIEMENTS

Le contenu de ce papier a fait l'objet d'exposés au cours du séminaire (de 1987 à 1990 à la Sorbonne) du Professeur André Lentin que je remercie pour ses conseils éclairés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENNETT M.K. et BIRKHOFF G., "Two families of Newman lattices", preprint, 1991.
[2] BIRKHOFF G., *Lattice theory*, 3e éd., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.
[3] BJÖRNER A., "Orderings of Coxeter groups", *Contemp. Math.*, vol.34, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1984, 175-195.
[4] BJÖRNER A. and WACHS M., *Generalized quotients in Coxeter groups*, trans. of the Amer. Math. Soc., 308, 1, juillet 1988.
[5] BOURBAKI N., *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4,5,6, éléments de mathématiques, fasc. 34, Hermann, Paris, 1968.
[6] CHAMENI-NEMBUA C. et MONJARDET B., "Les treillis pseudo-complémentés finis", *European Journal of Combinatorics*, vol.13, n°2, 1992, 89-107.
[7] DUQUENNE V. and CHERFOUH A., *On the permutation lattice*, preprint du C.A.M.S., n° P077, décembre 1991.
[8] GUILBAUD G.Th. et ROSENSTIEHL P., "Analyse algébrique d'un scrutin", *Math. Sci. hum.*, 4, 1963, 9-33.
[9] HEYDEMANN M.C., *Réseaux modélisés par des graphes de Cayley*, Notes de cours LRI UA 410 CNRS, Université Paris-Sud Orsay, 1991.
[10]KNUTH D.E., "Sorting and searching", *The Art of Computer Programming*, vol.3, Reading Mass., Addison Wesley, 1973.
[11] LE CONTE de POLY-BARBUT C., "Automorphismes du permutoèdre et votes de Condorcet", *Math. Inf. Sci. hum.*, 111, 1990, 73-82.
[12] LE CONTE de POLY-BARBUT C., "Le diagramme du treillis permutoèdre est intersection des diagrammes de deux produits directs d'ordres totaux", *Math. Inf. Sci. hum.*, 112, 1990, 49-53.
[13] MOSZKOWSKI P., "Généralisation d'une formule de Solomon relative à l'anneau de groupe d'un groupe de Coxeter", *C.R. Acad. Sci.*, 309, série I, Paris, 1989, 539-541.
[14] STANLEY R.P., "Weyl group, the hard Lefschetz theorem and the Sperner property", *J. Algebraic and Discrete Methods*, 1, SIAM, 1981, 168-184.
[15] SOLOMON L., "A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group", *Journal of Algebra*, 41, 1976, 255-264.
[16] YANAGIMOTO T. et OKAMOTO M., "Partial orderings of permutations and monotonicity of a rank correlation statistic", *Ann. Inst. Statist. Math.*, 21, 1969, 489-506.