MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

A. LACHENY
J. L. PETIT
E. TÉROUANNE

Vous avez dit proportionnelle ?

Mathématiques et sciences humaines, tome 94 (1986), p. 5-32
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1986__94__5_0>

Math. Sci. hum. (24[e] année, n°94, *1986*, p.5-32)

VOUS AVEZ DIT PROPORTIONNELLE?

A. Lacheny*, J.L. Petit**, E. Térouanne**

INTRODUCTION

Supposons que nous jouions au jeu suivant:
"Election d'une chambre de 571 députés"
avec les règles suivantes:
- Première règle: le nombre de sièges affectés à chaque département est *proportionnel* à sa population.
- Deuxième règle: dans chaque département, les listes en présence et les voix obtenues sont celles des élections européennes de 1984. La répartition des sièges se fait *proportionnellement* aux nombres de voix.

Rappelons que lors de ce scrutin il y avait quatorze listes en présence. Huit furent éliminées par le seuil des 5%, les six restantes étant:
PC, PS, UDF-RPR, ERE, VERTS, FN.

En appliquant trois méthodes *proportionnelles* raisonnables, on aboutit aux neuf chambres très différentes du tableau 1 (9=3x3: 3 choix pour appliquer la première règle, 3 pour la seconde; en réalité il existe une infinie variété de telles méthodes). La figure 1 illustre les trois premières chambres du tableau (pour ces trois chambres, le choix effectué pour appliquer la première règle correspond à celui de la loi électorale française).

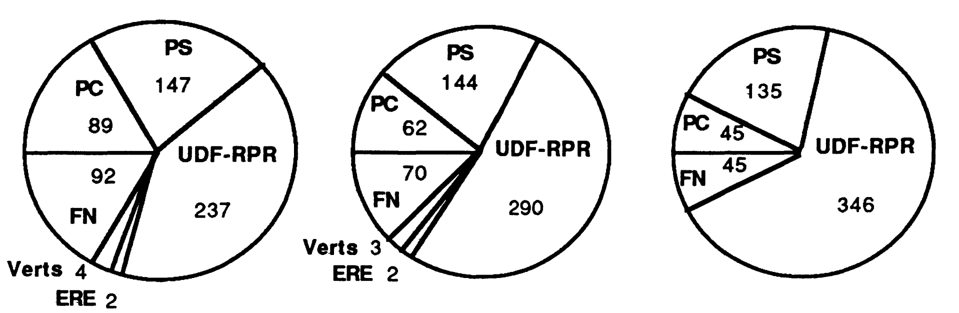


Figure 1 - Les trois premières solutions de notre jeu.

* Département d'Informatique, I.U.T., 99 Avenued'Occitanie, 34075 Montpellier Cedex
** U.E.R. Mathématiques, Université Paul Valéry, B.P. 5043, 34032 Montpellier Cedex

Tableau 1 - Neuf solutions pour le jeu proposé (on rappelle que la majorité absolue est à 286 sièges).

	PC	PS	UDF-RPR	ERE	FN	Verts
Chambre 1	89	147	237	2	92	4
Chambre 2	62	144	290	2	70	3
Chambre 3	45	135	346	0	45	0
Chambre 4	84	149	241	2	91	4
Chambre 5	60	146	291	2	69	3
Chambre 6	47	136	340	0	48	0
Chambre 7	82	150	242	2	91	4
Chambre 8	61	148	289	2	68	3
Chambre 9	47	137	339	0	48	0

Ceci pose donc un problème difficile: Quelle méthode choisir?

PRESENTATION DU PROBLEME

Tout le monde connait, ou croit connaître le système d'élections avec "représentation *proportionnelle* " (la R.P. pour les intimes). Ce qui est moins connu, c'est la complexité des choix qu'il a fallu faire pour en arriver là, la très grande variété des "représentations *proportionnelles* " possibles et des résultats qu'elles donnent.

L'idée *proportionnaliste* vient d'être réintroduite en France pour les élections législatives et régionales. Pour illustrer nos propos, nous prendrons l'exemple des élections législatives. La France est divisée en 101 départements qui doivent élire 571 députés (96 départements métropolitains et 5 D.O.M.. Nous ne tiendrons pas compte des T.O.M. avec leurs six représentants). La loi électorale en vigueur est composée de deux étages *proportionnalistes* (correspondant à nos deux règles de l'introduction)

Le problème, dans les deux étages, est formellement le même. Mais dans la réalité, ces deux étages sont fortement différents. Nous pouvons établir une correspondance entre les deux étages:

1° étage	2° étage
Départements	Listes
Populations	Electeurs

Nous allons, pour le moment, nous installer au premier étage, et dans la suite de ce papier nous utiliserons son vocabulaire: départements, populations. Le deuxième étage est beaucoup plus compliqué à investir, car d'un studio à un appartement de 101 pièces,opération qui alourdit considérablement les charges. Notre seule incursion au deuxième étage sera pour préciser le "jeu" introductif des neuf chambres.

Le problème de la *proportionnelle* semble pourtant simple. Considérons le premier étage de notre exemple. Les populations utilisées sont celles du recensement de 1982. La population totale est de 55.586.725 habitants. Nous pouvons ainsi calculer le quotient électoral: q_e = 55.586.725 / 571 = 97.349.781 (c'est le nombre moyen d'habitants par siège).

Ainsi, l'Hérault avec 706.499 habitants recensés en 82, devrait recevoir: q_{34} = 706.499 / q_e = 7,257 députés.

Ce nombre q_{34} s'appelle le quota de l'Hérault.

La difficulté provient bien sûr de ce que les nombres ainsi obtenus ne sont pas des entiers. Or on s'interdit de couper les députés, ou même leurs sièges, en morceaux.

Quelle que soit la méthode qui vienne en premier à l'esprit pour "arrondir" ces nombres et en faire des entiers, elle a des inconvénients, et de farouches opposants. Il existe en effet beaucoup de méthodes. Et si faible que semble la différence entre deux méthodes, elle se traduit forcément elle aussi en nombres entiers. Or un siège de plus ou de moins, en cette matière, c'est quelque chose de très important. Surtout pour celui qui l'occupe, ou qui voudrait l'occuper.

A cet égard, l'histoire électorale des Etats-Unis d'Amérique constitue une mine d'informations et de débats: la représentation *proportionnelle* y est inscrite dans la constitution depuis 1791: "Representatives and direct taxes shall be apportioned among the several states ... according to their respective numbers". En deux cents ans, on y a procédé 20 fois à la répartition des sièges de représentants entre les états de l'Union; on a utilisé pour cela presque autant de méthodes différentes; et le débat sur le choix de la "meilleure" d'entre elles y est toujours ouvert.

En 1982, Michel L. Balinski et H. Peyton Young ont publié un livre passionnant qui raconte cette longue histoire et qui donne les premières bases d'une approche cohérente de toutes les méthodes de R.P. [1].

La famille des méthodes *proportionnelles* actuellement utilisées se partage en deux grandes sous-familles:

- les *méthodes à restes* (méthode des plus forts restes...),
- les *méthodes à diviseurs* (méthodes de Sainte-Lagüe, d'Hondt ,... ; ces méthodes ont chacune plusieurs noms).

Ces deux familles de méthodes seront explicitées plus loin.

Chaque problème de répartition *proportionnelle* peut être, et est en pratique le plus souvent, modifié par l'introduction de *seuils* :

Dans le cas d'une répartition de sièges entre des départements, les moins peuplés d'entre eux peuvent se retrouver sans aucun siège. Or il peut être jugé insupportable que certains habitants ne soient pas représentés. C'est pourquoi on assortit généralement la règle de

R.P. choisie d'une clause de représentation minimale: en France en 86, chaque département a au moins deux sièges à pourvoir, sauf Saint-Pierre-et-Miquelon qui, avec 6041 habitants et un quota de 0,06, n'en aura qu'un.

Dans le cas de la répartition de sièges entre des listes de candidats, on peut au contraire vouloir éviter un certain éparpillement et imposer pour ce faire un seuil au dessous duquel une liste ne peut pas obtenir de siège. En France en 86, une liste qui obtient moins de 5% des suffrages dans un département y est éliminée, même si ce département, ayant plus de 20 sièges, lui permettrait d'en espérer un au bénéfice de la répartition *proportionnelle* pure.

Les notions de seuil utilisées aux deux étages sont donc diamétralement opposées. Ce qui illustre bien la nature profondément différente de ces deux étages.

LES GRANDES PROPRIETES

Pour comparer entre elles toutes ces méthodes *proportionnelles*, nous allons utiliser trois grandes propriétés:
- la robustesse,
- le respect des quotas.
- le biais.

La robustesse

Cette propriété concerne le comportement des méthodes quand les données du problème de répartition évoluent dans le temps. Il y a trois sources de variation possibles, quis'appellent dans notre exemple:
-la taille de la chambre,
-la population,
-la liste des départements.

Pour chacune de ces sources de variation, on attend d'une "bonne" méthode *proportionnelle* un comportement précis: "monotonicité" vis à vis de la taille de la chambre et de la population, indépendance conditionnelle par rapport à une restriction de la liste des départements.

Une méthode est monotone par rapport à la taille de la chambre si, quand celle-ci augmente, le nombre des sièges attribués à chaque département ne diminue pas. La méthode des plus forts restes, par exemple, ne possède pas cette propriété. Une telle bizarrerie a été observée en 1870 par le bureau du recensement des U.S.A., qui avait calculé les répartitions des sièges entre les états avec cette méthode, pour des tailles de la chambre allant de 241 à 300 sièges: Il apparut que l'état de Rhodes Island, qui se voyait attribuer 2 sièges dans une chambre de 270 membres, n'en avait plus qu'un dans une chambre de 280.

Le fait était-il trop choquant pour qu'on accepte de le prendre en compte? toujours est-il qu'on n'en parla guère sur le coup. Dix ans plus tard on signale à nouveau ce "paradoxe" à l'occasion des calculs faits sur le recensement de 1880, et cette fois-ci à propos de l'Alabama. C'est sous le nom de cet état qu'il devint célèbre.

La monotonicité par rapport à la population est plus subtile: nous n'en connaissons actuellement que des définitions partielles ou insatisfaisantes.

Une restriction sur la liste des départements s'opère en supprimant en même temps un ou plusieurs départements de la liste, et les sièges qui leur étaient attribués. Une méthode est indépendante de cette restriction si la distribution des sièges restants entre les départements restants coïncide avec l'ancienne distribution.

Les trois principes de robustesse sont violés par les méthodes à restes. Par contre les méthodes à diviseur les respectent.

Le respect des quotas

Cette propriété veut que le nombre de sièges attribué à chaque département soit ou bien l'entier immédiatement supérieur à son quota (le "quota supérieur") ou bien l'entier immédiatement inférieur (le "quota inférieur"). Ainsi, par exemple, l'Hérault devrait obtenir 7 ou 8 sièges.

L'introduction de seuils oblige à modifier la notion de quotas. Dans notre exemple, les 13 départements dont le quota est compris entre 0,1 et 2 se voient attribuer un quota modifié de 2, et Saint-Pierre-et-Miquelon reçoit un quota modifié de 1. Les quotas modifiés des 87 autres départements sont calculés, *proportionnellement* à leurs populations, de manière à ce que la somme de tous les quotas modifiés reste 571. Bien sûr, il peut alors arriver que l'un de ces quotas modifiés soit inférieur au seuil, auquel cas il faut réitérer la procédure...

Les méthodes à reste, par définition, respectent les quotas. Par contre toutes les méthodes à diviseur les violent.

Le biais

La figure 1 illustre particulièrement bien cette notion: quand nous la lisons de gauche à droite, nous constatons que les petites listes perdent des sièges au bénéfice de la plus grosse. Il arrive ainsi qu'entre deux méthodes on puisse dire que l'une favorise davantage les gros départements que l'autre (qui, elle,favorise davantage les petits, car nous sommes dans un jeu de somme nulle!). C'est ce qu'on appelle le biais. Cette appellation est en partie impropre car on ne peut pas parler du biais absolu d'une méthode: cette notion permet seulement de comparer deux méthodes entre elles. C'est un ordre partiel.

LES METHODES A RESTES

Nous avons déja rencontré les deux notions suivantes:

- le quotient électoral $q_e = P / h$,
- les quotas $q_i = P_i / q_e$ (ou les quotas modifiés), où P = population totale, h = nombre de sièges, et P_i = population du département i.

Nous allons utiliser la décomposition suivante:

$q_i = \lfloor q_i \rfloor + r_i$

où $\lfloor q_i \rfloor$ est la partie entière de q_i, c'est à dire le plus grand entier inférieur ou égal à q_i, r_i étant donc le reste. Par exemple:

$q_{34} = 7.13 = 7 + 0.13$

$q_{75} = 21.97 = 21 + 0.97$

$q_{105} = 1.00 = 1 + 0.00$

Les méthodes à restes sont basées sur les quotas: on commence par accorder à chaque département la partie entière de son quota. Puis on répartit les sièges non attribués en fonction des restes.

La méthode la plus employée est celle des plus forts restes, ou méthode de Hamilton: les k sièges restants sont attribués aux k plus grands restes. (L'histoire électorale est très confuse et ce flou se traduit en partie dans la grande diversité des noms portés par une même méthode. Nous suivrons les appellations de Balinski et Young, en signalant au passage quelques synonymes).

On peut aussi utiliser, à la place des restes absolus r_i, les restes relatifs r_i/q_i. Cette méthode porte le nom de Lowndes. Elle favorise davantage les petits départements que la méthode de Hamilton. Le tableau 2 donne les résultats de ces deux méthodes sur l'exemple des départements français.

Nous allons montrer que ces méthodes ne possèdent pas la propriété de robustesse.

Monotonicité par rapport à la taille de la chambre: l'Alabama et le Loir-et-Cher

Le tableau 3 résume les résultats obtenus quand on réalise la même expérience que le bureau américain des recensements: on a calculé la répartition des sièges entre les 101 départements français par la méthode de Hamilton quand la taille de la chambre augmente de 300 à 700 sièges. Pour chaque nouveau siège, ou bien un seul département gagne un siège, et Alabama ne se produit pas, ou bien il se produit et un département perd un siège tandis que deux autres en gagnent un.

Tableau 2 - Répartition des 571 sièges par deux méthodes à restes pour une population totale de 55 586 725 habitants.

	Départements	Population	Quotas modifiés	Nombres de sièges par Hamilton	Lowndes
59	Nord	2520526	25,45	26	25
75	Paris	2176243	21,97	22	21
13	Bouches-du-Rhône	1724199	17,41	17	17
69	Rhône	1445208	14,59	15	14
62	Pas-de-Calais	1412413	14,26	14	
92	Hauts-de-Seine	1387039	14,00		
93	Seine-Saint-Denis	1324301	13,37	13	13
78	Yvelines	1196111	12,08	12	12
94	Val-de-Marne	1193655	12,05		
76	Seine-Maritime	1193039	12;05		
33	Gironde	1127546	11,38	11	11
57	Moselle	1007189	10,17	10	10
44	Loire-Atlantique	995498	10,05		
91	Essonne	988000	9,98		
38	Isère	936771	9,46		9
95	Val-d'Oise	920598	9,29	9	
67	Bas-Rhin	915676	9,25		
77	Seine-et-Marne	887112	8,96		
6	Alpes-Maritimes	881198	8,90		
29	Finistère	828364	8,36	8	8
31	Haute-Garonne	824501	8,32		
35	Ille-et-Vilaine	749764	7,57		7
42	Loire	739521	7,47		
54	Meurthe-et-Moselle	716846	7,24	7	
83	Var	708331	7,15		
34	Hérault	706499	7,13		
49	Maine-et-Loire	675321	6,89		
60	Oise	662781	6,68		
68	Haut-Rhin	650372	6,57		6
63	Puy-de-Dôme	594365	6,00	6	
56	Morbihan	590889	5,97		
14	Calvados	589559	5,95		
71	Saône-et-Loire	571852	5,77		
64	Pyrénées-Atlantiques	555696	5,61		
80	Somme	544570	5,50		5
51	Marne	543627	5,49		
22	Côtes-du-Nord	538869	5,44	5	
45	Loiret	535669	5,41		
2	Aisne	533970	5,39		
30	Gard	530478	5,36		
104	Réunion	515814	5,21		
17	Charente-Maritime	513220	5,18		
37	Indre-et-Loire	506097	5,11		
72	Sarthe	504768	5,10		
74	Haute-Savoie	484505	4,99		
85	Vendée	483027	4,88		
25	Doubs	477163	4,82		
21	Côte-d'Or	473548	4;78		
50	Manche	465948	4,70		
27	Eure	462323	4,67		

	Départements	Population	Quotas modifiés	Nombres de sièges par Hamilton	Lowndes
84	Vaucluse	427343	4,31	4	4
1	Ain	418516	4,23		
88	Vosges	395769	4,00		
26	Drôme	389781	3,94		
24	Dordogne	377356	3,81		
86	Vienne	371428	3,75		
3	Allier	369580	3,73		
28	Eure-et-Loir	362813	3,66		
87	Haute-Vienne	355737	3,59		
79	Deux-Sèvres	342812	3,46		
16	Charente	340770	3,44	3	
81	Tarn	339345	3,43		
66	Pyrénées-Orientales	334557	3,38		
101	Martinique	328566	3,32		
102	Guadeloupe	328400	3,32		
73	Savoie	323675	3,27		3
18	Cher	320174	3,23		
89	Yonne	311019	3,14		
8	Ardennes	302338	3;05		
47	Lot-et-Garonne	298522	3,01		
40	Landes	297424	3,00		
41	Loir-et-cher	296220	2,99		
61	Orne	295472	2,98		
10	Aube	289300	2,92		
11	Aude	280686	2,83		
12	Aveyron	278654	2,81		
53	Mayenne	271784	2,74		
7	Ardèche	267970	2,71		
36	Indre	243191	2,46		
39	Jura	252925	2,45		
19	Corrèze	241448	2,44	2	
58	Nièvre	239635	2,42		
70	Haute-Saône	231962	2,34		
65	Hautes-Pyrénées	227922	2,30		
52	Haute-Marne	210670	2,13		2
43	Haute-Loire	205895	2,08		
55	Meuse	200101	2,02		
82	Tarn-et-Garonne	190485	2,00		
32	Gers	174154	2,00		
15	Cantal	162838	2,00		
46	Lot	154533	2,00		
23	Creuse	139968	2,00		
9	Ariège	135725	2,00		
90	Territoire-de-Belfort	131999	2,00		
2B	Haute-Corse	131574	2,00		
4	Alpes de Haute-Provence	119068	2,00		
2A	Corse du Sud	108604	2,00		
5	Hautes-Alpes	105070	2,00		
48	Lozère	74294	2,00		
103	Guyane	73022	2,00		
105	Saint-Pierre-et-Miquelon	6041	1,00	1	1

Tableau 3 - Effets "Alabama" observés en appliquant la méthode de Hamilton au recensement de 1982, entre 300 et 700 sièges.

Entre 311 et 312 sièges, Alabama en Charente-Maritime
Entre 338 et 339 sièges, Alabama en Manche
Entre 345 et 346 sièges, Alabama en Vaucluse
Entre 384 et 385 sièges, Alabama en Dordogne
Entre 385 et 386 sièges, Alabama en Gard
Entre 391 et 392 sièges, Alabama en Maine-et-Loire
Entre 405 et 406 sièges, Alabama en Sarthe
Entre 423 et 424 sièges, Alabama en Tarn
Entre 429 et 430 sièges, Alabama en Pyrénées-Orientales
Entre 465 et 466 sièges, Alabama en Vaucluse
Entre 473 et 474 sièges, Alabama en Lot-et-Garonne
Entre 481 et 482 sièges, Alabama en Loir-et-Cher
Entre 487 et 488 sièges, Alabama en Loir-et-Cher
Entre 523 et 524 sièges, Alabama en Dordogne
Entre 528 et 529 sièges, Alabama en Ardèche
Entre 536 et 537 sièges, Alabama en Vienne
Entre 574 et 575 sièges, Alabama en Charente
Entre 591 et 592 sièges, Alabama en Nièvre
Entre 609 et 610 sièges, Alabama en Ain
Entre 634 et 635 sièges, Alabama en Ille-et-Vilaine
Entre 635 et 636 sièges, Alabama en Vosges
Entre 657 et 658 sièges, Alabama en Lot-et-Garonne
Entre 679 et 680 sièges, Alabama en Aube
Entre 683 et 684 sièges, Alabama en Aube

Nous voyons sur cet exemple qu'il est "facile" de produire cet "effet Hamiltonien", parfois même à répétition comme l'illustre le Loir-et-Cher (figure 2).

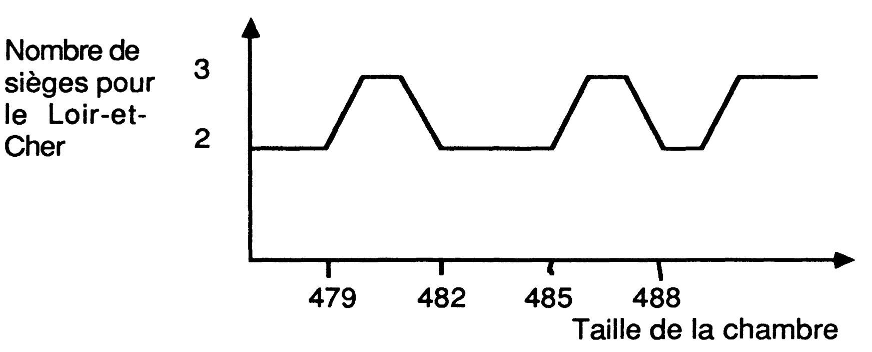


Figure 2 - L'étrange comportement du Loir-et-Cher sous l'"effet Hamiltonien".

Indépendance par rapport à une restriction

La région Rhone-Alpes est composée de huit départements. En utilisant les deux méthodes à restes, nous allons comparer (tableau 4) les résultats obtenus dans les deux situations suivantes:

- F = France entière

-F-RA : France moins région Rhône-Alpes.
(Dans la situation F-RA, nous avons appliqué la méthode de Hamilton avec h = 519 car la région RA recoit 52 sièges par cette méthode, et la méthode de Lowndes avec h = 522 car RA recoit 49 sièges par cette méthode).

Tableau 4 - Illustrations du viol de l'indépendance par les méthodes à restes.

Départements	Sièges (F)	Sièges (F-RA)
Charente	3	4
Nord	26	25
Méthode de Hamilton		

Départements	Sièges (F)	Sièges (F-RA)
Paris	21	22
Martinique	4	3
Méthode de Lowndes		

LES METHODES A DIVISEURS

Manquer de robustesse est un défaut très important pour une méthode proportionnelle. Nous allons maintenant considérer une classe de méthodes qui possèdent cette propriété: les méthodes à diviseurs.

Elles sont basées sur la recherche d'un diviseur commun, q, du même ordre de grandeur que q_e mais généralement différent de lui. Voici comment on procède:

Partons par exemple de l'idée maximaliste suivante: si l'on pouvait donner à chaque département le nombre de sièges immédiatement supérieur à son quota q_i, tout le monde serait content. L'ennui est que le total des sièges attribués dépasserait h. Alors cherchons un diviseur q, plus grand que q_e, tels que les entiers immédiatement supérieurs aux quotients P_i/q aient exactement pour somme h. Telle est la méthode de Adams.

On pouvait tout aussi bien partir de l'idée plus minimaliste qu'il faudrait assurer à chaque département au moins le nombre entier de sièges immédiatement inférieur à son quota. Mais la somme de ces entiers serait inférieure à h. Alors on cherche un diviseur q, plus petit que q_e, tel que la somme des entiers immédiatement inférieurs aux P_i/q soit exactement h. C'est la méthode de Jefferson.

Mais on pourrait préférer à l'une et l'autre de ces méthodes celle qui part du principe qu'il vaut mieux arrondir les quotas à l'entier le plus proche: l'entier supérieur si la partie décimale est supérieure à 0.5, l'entier inférieur sinon. Là encore, les entiers ainsi obtenus n'ont généralement pas pour somme h, et on cherche un diviseur q tel que la somme des entiers les plus proches des P_i/q soit exactement h. C'est la méthode de Webster. (Nous avons: Méthode de Jefferson = Méthode d'Hondt = Méthode de Hagenbach-Bischoff = Méthode des plus fortes moyennes = ...; Méthode de Webster = Méthode de Sainte-Lagüe = Méthode des nombres impairs = ...)

Ce qui différencie les méthodes à diviseur les unes des autres est donc la façon dont on y "arrondit" les nombres décimaux: à l'entier supérieur, à l'entier inférieur, à l'entier le plus proche... Il existe une grande variété de telles méthodes, potentiellement une infinité. Chacune est caractérisée par une fonction d, associant à chaque entier n le plus grand nombre réel d(n) qui sera arrondi à n. On suppose d(n) compris entre n et n+1, et la règle d'arrondi associée à d est la suivante: le nombre x est arrondi à n si et seulement si x est compris entre d(n-1) et d(n).

Nous pouvons schématiser ces différentes méthodes d'arrondi par la figure 3:

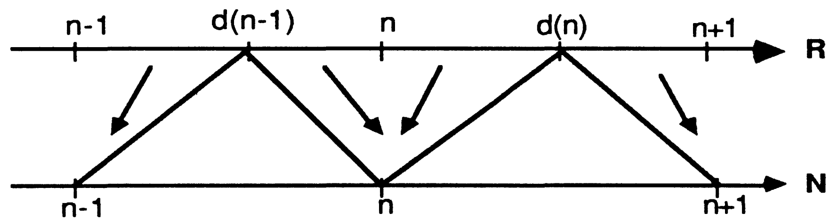


Figure 3 - fonction d'arrondi.

Les fonctions d correspondant aux méthodes de Adams, Jefferson et Webster sont respectivement:

$d_A(n) = n$; $d_J(n) = n+1$; $d_W(n) = n+1/2$.

Ces trois fonctions correspondent aux trois méthodes d'arrondi suivantes:

$|x|$ = plus grand entier inférieur ou égal à x (Jefferson)

$|x|$ = plus petit entier supérieur ou égal à x (Adams)

$|x|$ = entier le plus proche de x (Webster)

Le tableau 5 illustre les différents comportements de ces méthodes sur les quotas de trois départements.

Tableau 5 - Effets de diverses méthodes d'arrondi.

Départements	q_i	$\lfloor q_i \rfloor$	$\lceil q_i \rceil$	$[q_i]$
34 Hérault	7.13	7	8	7
75 Seine	21.97	21	22	22
105 Saint-Pierre-et-Miquelon	1.00	1	1	1

Ces trois fonctions appartiennent à la famille des moyennes généralisées:

$d_r(n) = ((n^r+(n+1)^r)/2)^{1/r}$, pour r non nul, et

$d_0(n) = (n(n+1))^{1/2}$.

Historiquement, au moins deux autres méthodes de cette famille ont été proposées:

- la méthode de Dean avec la moyenne harmonique (r=-1):

$d_D(n) = n(n+1)/(n+1/2)$;

- la méthode de Hill avec la moyenne géométrique (r=0):

$d_H(n) = (n(n+1))^{1/2}$.

On peut s'étonner que personne n'ait jamais proposé dans ce cadre une moyenne aussi honorablement connue que la moyenne quadratique:

$d_2(n) = (n^2+n+1/2)^{1/2}$.

Soulignons enfin que les moyennes généralisées ne sont pas les seules fonctions utilisables pour définir des méthodes à diviseur. En particulier, rien n'empêche de s'affranchir de la contrainte "d(n) compris entre n et n+1" et de la remplacer par "d croissante". La classe de méthodes à diviseurs généralisées ainsi obtenue possède des propriétés intéressantes.

Le tableau 6 donne la répartition des sièges entre les départements pour cinq méthodes à diviseurs: Adams, Dean, Hill, Webster et Jefferson (la méthode basée sur la moyenne quadratique donne, dans le cas présent, les mêmes résultats que la méthode de Webster).

La loi électorale française a consisté à prendre la méthode d'Adams.

Il ne faut pas confondre la notion de diviseur et la notion de quotient électoral. Le diviseur de la méthode d'Adams est 108.000 mais l'expression "un siège par tranche de 108.000 habitants" n'est pas correcte, comme le montre le simple calcul: 108.000 x 571 = 61.668.000 habitants. Ce nombre est considérablement plus grand que 55.586.725. De plus, il n'y a pas un diviseur unique mais une infinité de diviseurs qui donneront la même répartition: par exemple dans notre cas et pour la méthode d'Adams, tous les entiers compris entre 107.892 et 108.395.

Examinons les résultats fournis par les cinq méthodes à diviseurs à la lumière de nos grandes propriétés. Les méthodes à diviseurs sont robustes. Par contre elles ne respectent pas le principe des quotas. Par exemple Paris avec un quota de 21,97 obtient 23 sièges par la méthode de Jefferson, tandis que les Bouches du Rhône, dont le quota est 17,41, n'obtiennent que 16 sièges avec la méthode d'Adams.

La méthode de Jefferson respecte toujours les quotas inférieurs mais viole souvent les quotas supérieurs. A l'opposé, la méthode de Adams respecte les quotas supérieurs et viole souvent les quotas inférieurs. (Le fait que la méthode de Jefferson respecte les quotas inférieurs justifie l'algorithme "de la plus forte moyenne").

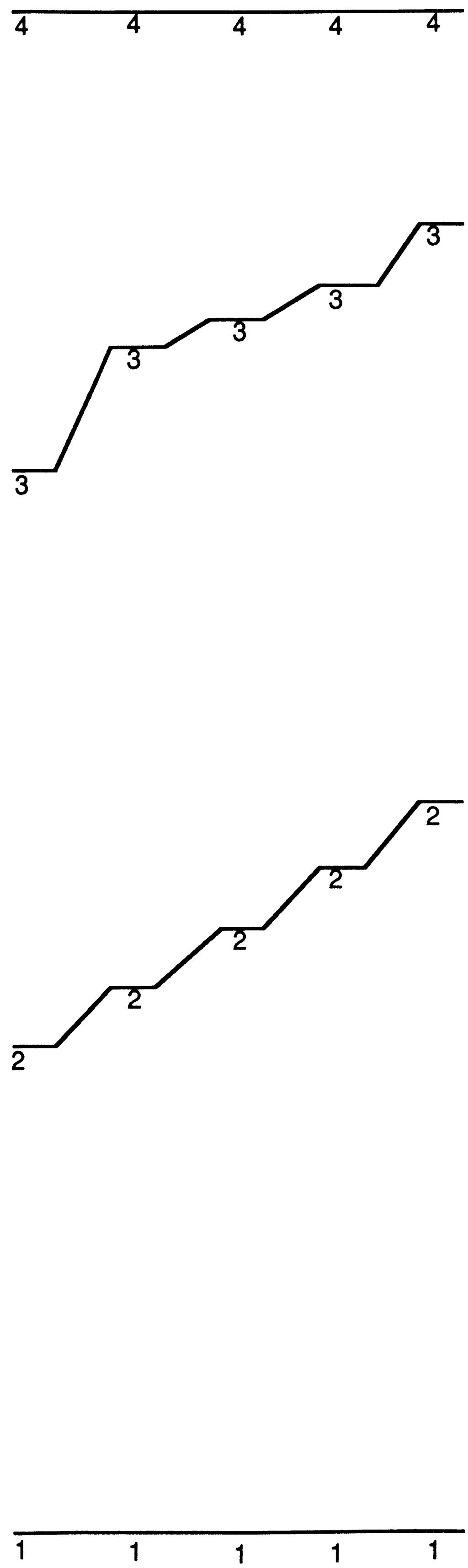
Nous pouvons illustrer l'information contenue dans le tableau 6 avec divers schémas. En voici quelques exemples.

Tableau 6 - Répartition de 571 sièges par cinq méthodes à diviseurs pour une population totale de 55.586.725 habitants.

Départements	Populations	Nombres de sièges par les méthodes de Adams	Dean	Hill	Webs.	Jeff.
Nord	2520526	24	25	26	26	27
Paris	2176243	21	22	22	22	23
Bouches-du-Rhône	1724199	16	17	17	18	18
Rhône	1445208	14	15	15	15	15
Pas-de-Calais	1412413		14	14	14	
Hauts-de-Seine	1387039	13				
Seine-Saint-Denis	1324301		13	13		14
Yvelines	1196111	12	12	12	12	12
Val-de-Marne	1193655					
Seine-Maritime	1193039					
Gironde	1127546	11	11	11		
Moselle	1007189	10	10	10	10	10
Loire-Atlantique	995498					
Essonne	988000					
Isère	936771	9	9			
Val-d'Oise	920598			9	9	
Bas-Rhin	915676					9
Seine-et-Marne	887112					
Alpes-Maritimes	881198					
Finistère	828364	8	8	8	8	
Haute-Garonne	824501					8
Ille-et-Vilaine	749764	7				
Loire	739521		7			
Meurthe-et-Moselle	716846			7	7	7
Var	708331					
Hérault	706499					
Maine-et-Loire	675321					
Oise	662781					
Haut-Rhin	650372					
Puy-de-Dôme	594365	6	6	6	6	6
Morbihan	590889					
Calvados	589559					
Saône-et-Loire	571852					
Pyrénées-Atlantiques	555696					
Somme	544570					5
Marne	543627					
Côtes-du-Nord	538869	5	5	5	5	
Loiret	535669					
Aisne	533970					
Gard	530478					
Réunion	515814					
Charente-Maritime	513220					
Indre-et-Loire	506097					
Sarthe	504768					
Haute-Savoie	484505					
Vendée	483027					
Doubs	477163					
Côte-d'Or	473548					
Manche	465948					
Eure	462323					

Départements	Population
Vaucluse	427343
Ain	418516
Vosges	395769
Drôme	389781
Dordogne	377356
Vienne	371428
Allier	369580
Eure-et-Loir	362813
Haute-Vienne	355737
Deux-Sèvres	342812
Charente	340770
Tarn	339345
Pyrénées-Orientales	334557
Martinique	328566
Guadeloupe	328400
Savoie	323675
Cher	320174
Yonne	311019
Ardennes	302338
Lot-et-Garonne	298522
Landes	297424
Loir-et-cher	296220
Orne	295472
Aube	289300
Aude	280686
Aveyron	278654
Mayenne	271784
Ardèche	267970
Indre	243191
Jura	252925
Corrèze	241448
Nièvre	239635
Haute-Saône	231962
Hautes-Pyrénées	227922
Haute-Marne	210670
Haute-Loire	205895
Meuse	200101
Tarn-et-Garonne	190485
Gers	174154
Cantal	162838
Lot	154533
Creuse	139968
Ariège	135725
Territoire-de-Belfort	131999
Haute-Corse	131574
Alpes de Haute-Provence	119068
Corse du Sud	108604
Hautes-Alpes	105070
Lozère	74294
Guyane	73022
Saint-Pierre-et-Miquelon	6041

Nombres de sièges par les méthodes de
Adams Dean Hill Webster Jeff.



A partir du tableau 6 on constitue le tableau 7 qui se rapporte à la seule méthode d'Adams. Ce dernier tableau contient (colonnes 3 et 5) l'information utile pour tracer la courbe de concentration, ou courbe de Lorenz-Gini, de la répartition des sièges entre les départements. La figure 4 représente cette courbe ainsi que celle que l'on obtient de la même façon à partir de la méthode de Jefferson.

Tableau 7 - Cumul sur les départements et sur les sièges pour la méthode de Adams.

Nombres de sièges	Nombres de départements	Nombres de départements cumulés	Nombres de sièges cumulés	pourcentages de sièges cumulés
1	1	1	1	0,18
2	16	17	33	5,78
3	19	36	90	15,76
4	15	51	150	26,27
5	14	65	220	38,53
6	7	72	262	45,88
7	8	80	318	55,69
8	2	82	334	58,49
9	5	87	379	66,37
10	3	90	409	71,63
11	1	91	420	73,56
12	3	94	456	79,86
13	2	96	482	84,41
14	2	98	510	89,32
16	1	99	526	92,12
21	1	100	547	95,80
24	1	101	571	100,0

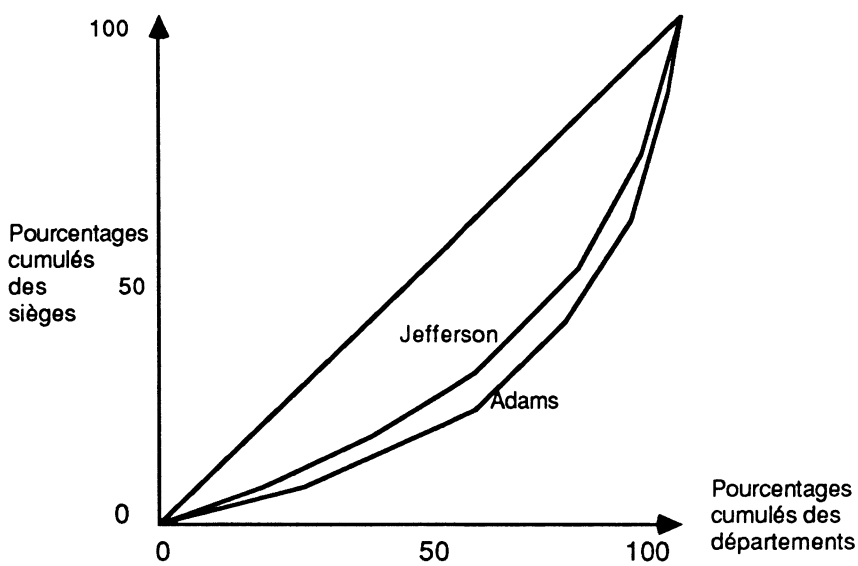


Figure 4 - Courbes de concentration sièges-département, pour les méthodes de Jefferson et Adams.

Un autre moyen de comparer les méthodes entre elles est de calculer pour chacune d'elles le nombre moyen d'habitants par siège en fonction du nombre de sièges par département (tableau 8). Par exemple pour la méthode de Adams, il y a trois départements qui reçoivent chacun douze sièges. le nombre moyen correspondant est:

99.522 = (1.196.111 + 1.193.655 + 1.193.039) / (3 x 12).

Nous avons éliminé les départements au dessous du seuil (1 ou 2 sièges).

Tableau 8 - Nombres moyens d'habitants par siège pour les méthodes d'Adams, Webster et Jefferson

Nombres de sièges	Nombre moyen d'habitants (Adams)	Nombre moyen d'habitants (Webster)	Nombre moyen d'habitants (Jefferson)
27			93 353
26		96 943	
24	105 022		
23			94 619
22		98 921	
21	103 631		
18		95 788	85 789
16	107 762		
15		96 347	94 326
14	102 058	98 184	94 593
13	104 282		
12	99 522	98 132	98 132
11	102 504		
10	99 690	98 187	96 961
9	100 919	100 127	97 566
8	103 304	98 192	96 408
7	100 151	98 075	98 075
6	95 013	95 013	96 745
5	100 506	100 506	101 545
4	91 379	96 342	98 206
3	92 286	102 591	105 728

La figure 5 montre que sur notre exemple la méthode de Jefferson favorise davantage les grands départements que la méthode de Adams.

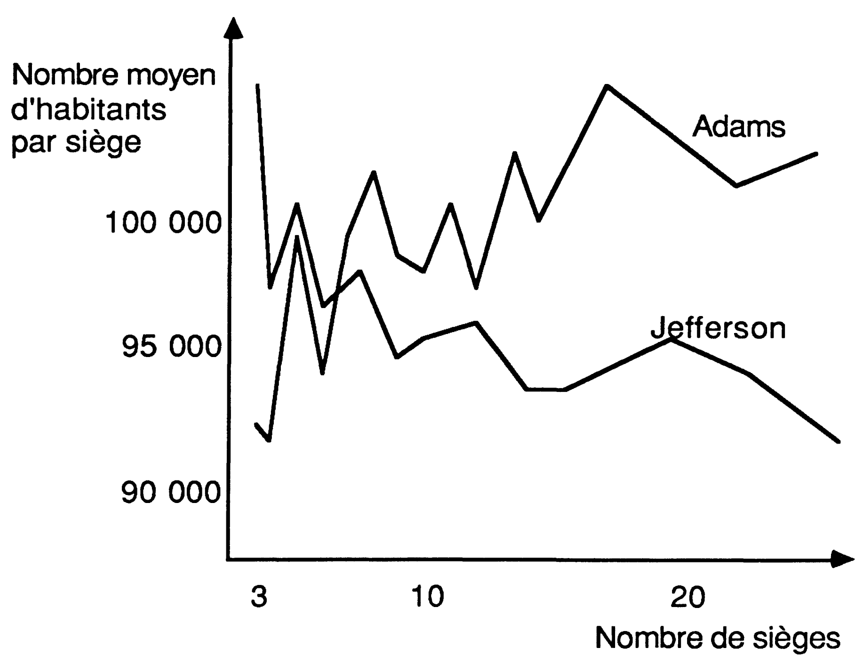
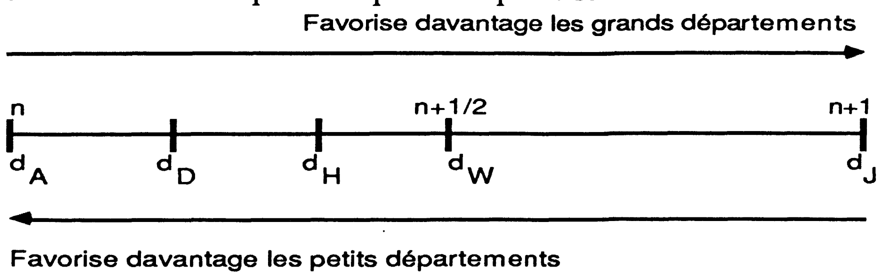


Figure 5 - Comparaison des biais des méthodes de Adams et Jefferson.

Cette notion de biais peut se représenter par le schéma suivant:



Nous vérifions ces phénomènes encore plus clairement sur les courbes de concentration de la figure 4. En effet, ces courbes correspondent à la definition mathématique du biais: Une méthode favorise plus les petits départements qu'une autre si sa courbe de concentration est au-dessus.

PROBLEMES DE COALITIONS

Quand nous examinons les tableaux 2 et 6, nous sommes placés devant un des problèmes classiques de la statistique: l'information se lit mal car il y en a trop. Pour réduire cette information, nous allons regrouper les départements par régions. Le tableau 9 donne, pour chacune des 23 régions, les cumuls des sièges attribués par trois méthodes. Les régions y sont rangées par ordre décroissant de population.

Tableau 9 - Cumuls par région des sièges attribués par Adams, Webster et Jefferson.

Régions	Adams	Webster	Jefferson
Ile-de-France	99	102	105
Rhône-Alpes	49	52	51
Provence-Alpes-Côte-d'Azur	40	42	42
Nord-Pas de Calais	38	40	42
Pays de Loire	30	30	29
Bretagne	26	27	28
Aquitaine	27	28	28
Midi-Pyrénées	26	24	24
Lorraine	23	23	23
Centre	23	22	21
Languedoc-Roussillon	21	20	20
Picardie	18	18	17
Haute-Normandie	17	17	17
Bourgogne	17	16	16
Poitou-Charente	17	15	15
Alsace	16	16	16
Basse-Normandie	14	14	14
Champagne-Ardenne	14	14	13
Auvergne	14	14	14
D.O.M.	16	14	14
Franche-Comté	13	11	11
Limousin	9	8	7
Corse	4	4	4

Nous voyons, sur ce tableau, des différences considérables entre les méthodes. Par exemple, si nous utilisons l'écart absolu pour mesurer la différence entre les méthodes de Jefferson et de Adams sur ce tableau, nous obtenons:

$$\sum_{i=1}^{23} N_i(A)-N_i(J) = 34 .$$

Examinons alors le *Problème des coalitions:* que se passe-t-il si on décide de répartir les 571 sièges non plus entre les départements mais entre les régions, *proportionnellement* à leurs populations? Le tableau 10 donne les résultats correspondants en utilisant les trois mêmes méthodes.Les régions sont toujours par ordre décroissant de population. Les seuils utilisés pour les régions sont obtenus en cumulant les seuils départementaux: il n'y a en fait qu'une seule région touchée par ces seuils, la Corse.

Tableau 10 - Répartition de 571 sièges entre 23 régions par Adams, Webster et Jefferson.

Régions	Adams	Webster	Jefferson
Ile-de-France	102	103	104
Rhône-Alpes	51	51	52
Provence-Alpes-Côte-d'Azur	40	40	41
Nord-Pas de Calais	30	40	40
Pays de Loire	28	30	30
Bretagne	27	28	28
Aquitaine	24	27	27
Midi-Pyrénées	24	24	24
Lorraine	23	24	24
Centre	20	23	23
Languedoc-Roussillon	18	20	20
Picardie	17	18	18
Haute-Normandie	17	17	17
Bourgogne	16	16	16
Poitou-Charente	16	16	16
Alsace	16	16	16
Basse-Normandie	14	14	14
Champagne-Ardenne	14	14	13
Auvergne	14	14	13
D.O.M	13	13	13
Franche-Comté	11	11	11
Limousin	8	8	7
Corse	4	4	4

Nous allons, en nous restreignant aux méthodes de Adams, Webster et Jefferson, étudier d'un peu plus près les effets de coalition. La figure 6 représente les gains et pertes obtenus par coalition (seuls ont été représentés les départements pour lesquels ces gains ou pertes sont non nuls). Nous voyons qu'il est très difficile de tenir un discours cohérent sur ces effets. La seule certitude que l'on possède est: Si certains acteurs gagnent à se coaliser, d'autres y perdent puisque le nombre des sièges est une constante (Somme des gains = Somme des pertes en valeur absolue, c'est un *jeu de somme nulle*).

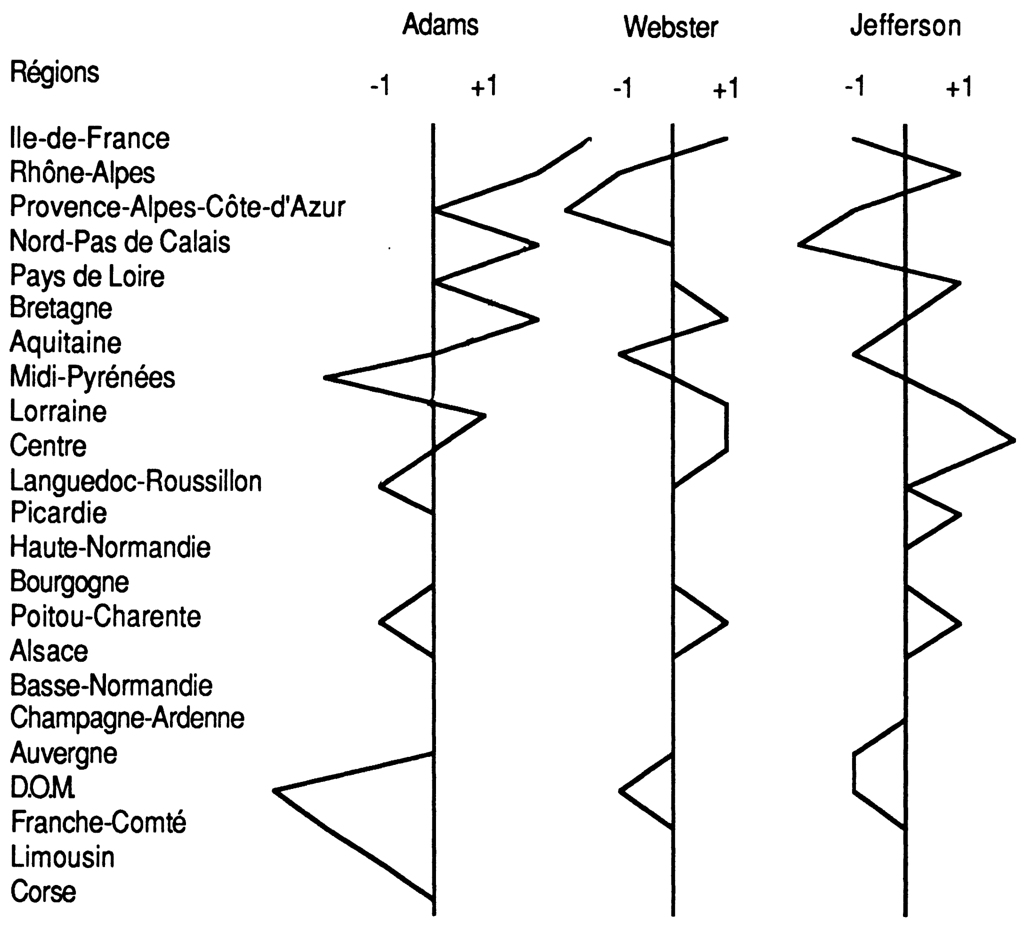


Figure 6 - Gains et pertes obtenus par coalition des régions, pour les méthodes de Adams, Webster et Jefferson.

POPULATIONS

Pour préciser ce que l'on entend par population, il faut réaliser les deux opérations suivantes:

- définition du mot population,
- mesure de la population.

Nous ne nous occuperons pas de la deuxième opération (c'est le problème de l'INSEE). Signalons seulement à son propos qu'un recensement est une opération très complexe qui entraîne des estimations hasardeuses: il ne faut pas prendre les nombres fournis par un recensement comme des nombres absolus, mais comme des valeurs qui doivent être corrigées par des "fourchettes". Ceci renforce la nécessité de choisir des méthodes "robustes".

Occupons nous donc de la première opération. On peut prendre plusieurs définitions:

- Population totale
- Population française
- Population des électeurs etc...

Tableau 11 - Répartition de 571 sièges *proportionnellement* à la population française, par Adams, Webster et Jefferson.

Département	Population	quotas modifiés	pourcentage d'étrangers	Nombres de sièges par Adams	Webster	Jefferson
Nord	2360860	26,00	6,33	24	25	27
Paris	1833300	20,19	15,76	19	20	21
Bouches-du-Rhône	1566240	17,25	9,16	16	17	18
Pas-de-Calais	1370220	15,09	2,99	14	15	16
Rhône	1286780	14,17	10,96	13	14	15
Hauts-de-Seine	1190000	13,10	14,21	12	13	13
Seine-Maritime	1159660	12,77	2,80		12	
Seine-Saint-Denis	1101120	12,12	16,85			12
Gironde	1074740	11,83	4,68	11		
Yvelines	1059780	11,67	11,40		11	
Val-de-Marne	1041540	11,47	12,74			
Loire-Atlantique	996520	10,86	0,90	10		11
Moselle	903520	9,95	10,29		10	10
Essonne	891640	9,82	9,75	9		
Bas-Rhin	848740	9,35	7,31		9	9
Isère	843620	9,29	9,94			
Finistère	818700	9,01	1,17			
Val-d'Oise	817100	9,00	11,24			
Seine-et-Marne	806300	8,88	9,11			
Alpes-Maritimes	792880	8,73	10,02	8		
Haute-Garonne	773340	8,52	6,21		8	
Ille-et-Vilaine	741180	8,16	1,14			8
Loire	678380	7,47	8,27	7	7	7
Meurthe-et-Moselle	668720	7,36	6,71			
Maine-et-Loire	665000	7,32	1,53			
Hérault	660500	7,27	6,51			
Var	656660	7,23	7,29			
Oise	613660	6,76	7,27			
Morbihan	585400	6,45	0,93	6	6	6
Calvados	583600	6,43	1,09			
Haut-Rhin	579820	6,38	10,85			
Puy-de-Dôme	552960	6,09	6,97			
Côtes-du-Nord	538500	5,93	0,07			
Somme	534300	5,88	1,89			
Saône-et-Loire	532440	5,86	6,89			
Pyrénées-Atlantiques	521000	5,74	6,24			
Marne	518780	5,71	4,57			
Réunion	515818	5,68	0,00			
Aisne	512900	5,65	3,95			5
Charente-Maritime	505120	5,56	1,58		5	
Loiret	498000	5,48	7,03			
Gard	497900	5,48	6,14			
Sarthe	495700	5,46	1,80	5		
Indre-et-Loir	485080	5,34	4,15			
Vendée	481780	5,31	0,26			
Manche	455420	5,01	2,26			
Haute-Savoie	455280	5,01	7,93			
Eure	445840	4,91	3,57			
Côte-d'Or	442680	4,87	6,52			
Doubs	433180	4,77	9,22			

Département	Population	quotas modifiés	pourcentage d'étrangers	Nombres de sièges par Adams	Webster	Jefferson
Vaucluse	391160	4,31	8,47	4	4	4
Ain	383740	4,23	8,31			
Vosges	383080	4,22	3,21			
Drôme	364660	4,02	6,44			
Vienne	365420	4,02	1,62			
Dordogne	365260	4,02	3,21			
Allier	353980	3,90	4,22			
Haute-Vienne	344700	3,80	3,10			
Eure-et-Loire	341700	3,76	5,82			3
Deux-Sèvres	338440	3,73	1,28			
Charente	332580	3,66	2,40			
Guadeloupe	328566	3,62	0,00			
Martinique	328400	3,62	0,00			
Tarn	316920	3,49	6,61		3	
Pyrénées-Orientales	306260	3,37	8,46			
Cher	305920	3,37	4,45			
Savoie	298280	3,28	7,85	3		
Yonne	296660	3,27	4,62			
Orne	289020	3,18	2,18			
Landes	288940	3,18	2,85			
Ardennes	285320	3,14	5,63			
Lot-et-Garonne	284840	3,14	4,48			
Loir-et-Cher	284540	3,13	3,94			
Aube	269080	2,96	6,99			
Aude	267520	2,95	4,69			
Mayenne	267340	2,94	1,64			
Aveyron	267180	2,94	4,12			
Ardèche	254040	2,80	5,20			2
Corrèze	235440	2,59	2,49			
Indre	234600	2,58	3,53			
Nièvre	233740	2,57	2,46			
Jura	227480	2,50	6,36		2	
Haute-Saône	218280	2,40	5,90			
Hautes-Pyrénées	216580	2,38	4,98			
Haute-Loire	200160	2,20	2,79			
Haute-Marne	198520	2,19	5,77	2		
Meuse	193100	2,13	3,50			
Tarn-et-Garonne	179480	2,00	5,78			
Gers	169960	2,00	2,41			
Cantal	161440	2,00	0,86			
Lot	144700	2,00	6,36			
Creuse	136480	2,00	2,49			
Ariège	128880	2,00	5,04			
Territoire-de-Belfort	119860	2,00	9,20			
Alpes-de-Hte-Provence	114440	2,00	3,89			
Haute-Corse	114180	2,00	13,22			
Hautes-Alpes	98780	2,00	5,99			
Corse du Sud	93880	2,00	13,56			
Guyane	73022	2,00	0,00			
Lozère	71120	2,00	4,27			
St-Pierre et Miquelon	6077	1,00	0,00	1	1	1

Nous allons étudier les modifications apportées par le remplacement suivant : Population totale (T) -----> Population française (F).

Le tableau 11 fournit les résultats de trois méthodes appliquées aux populations françaises.(Nous avons pris pour la population française les nombres publiés par l'INSEE dans son sondage au 1/20. Comme dans cette étude les DOM n'interviennent pas, nous avons fait l'hypothèse que dans ces derniers le nombre d'étrangers est négligeable. Ces hypothèses ne sont pas dérangeantes vis à vis des buts que nous poursuivons dans cet article. De toute façon, l'estimation) des populations étrangères semble peu fiable).

Etudions plus en détail le cas de la méthode de Adams.La figure 7 montre les départements dont le nombre de sièges a varié lors du passage de T à F. On retrouve bien, au niveau des pertes, les départements à fort pourcentage d'étrangers. Mais le phénomène correspondant pour les gains est moins clair (pourquoi le Gard et le Loiret gagnent-ils un siège?)

Départements		Pourcentage d'étrangers
93	Seine-Saint-Denis	16.85
75	Paris	15.76
92	Hauts-de-Seine	14.21
94	Val-de-Marne	12.74
78	Yvelines	11.40
69	Rhone	10.96
68	Haut-Rhin	10.85
6	Alpes-Maritimes	10.02
91	Essonne	9.75
45	Loiret	7.03
30	Gard	6.14
18	Cher	4.45
2	Aisne	3.95
43	Haute-Loire	2.79
17	Charente-Maritime	1.58
29	Finistère	1.17
35	Ille-et-Vilaine	1.14
22	Côtes-du-Nord	0.07
104	Réunion	0

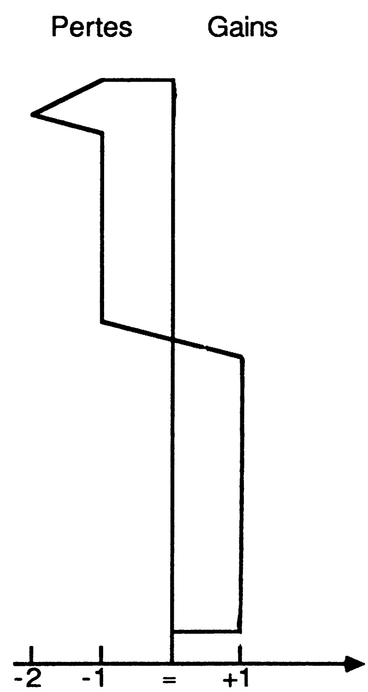


Figure 7 - Gains et pertes de sièges pour la méthode de Adams, lors du remplacement T ---> F.

EXCURSION AU SECOND ETAGE

Nous allons préciser notre jeu introductif. Nous ne considérons que les trois méthodes suivantes:
Adams (A); Webster(W); Jefferson (J).

Nous avons plusieurs possibilités selon les choix opérés aux différents étages:- choix du premier étage: A, W, J - choix du deuxième étage: A, W, J.

Tableau 13 - Répartition départementale des sièges entre les six listes par la "solution 3".

Départements	PC	PS	UDF-RPR	FN
Ain	0	1	3	0
Aisne	1	1	3	0
Allier	1	1	2	0
Alpes de Haute-Provence	0	1	1	0
Hautes-Alpes	0	0	2	0
Alpes Maritimes	1	1	5	2
Ardèche	0	1	2	0
Ardennes	0	1	2	0
Ariège	0	1	1	0
Aube	0	1	2	0
Aude	0	2	1	0
Aveyron	0	1	2	0
Bouches du Rhône	3	3	7	3
Calvados	0	2	4	0
Cantal	0	0	2	0
Charente	0	1	3	0
Charente-Maritime	0	1	4	0
Cher	1	0	2	0
Corrèze	0	1	2	0
Corse du Sud	0	0	2	0
Haute Corse	0	0	2	0
Côte d'Or	0	1	3	1
Côtes du Nord	1	1	3	0
Creuse	0	1	1	0
Dordogne	1	1	2	0
Doubs	0	1	3	1
Drôme	0	1	3	0
Eure	0	1	4	0
Eure-et-Loir	0	1	3	0
Finistère	1	2	5	0
Gard	1	1	2	1
Haute-Garonne	1	3	3	1
Gers	0	1	1	0
Gironde	1	3	6	1
Hérault	1	2	3	1
Ille-et-Vilaine	0	2	5	0
Indre	0	1	2	0
Indre-et-Loire	0	2	3	0
Isère	1	2	5	1
Jura	0	1	2	0
Landes	0	1	2	0
Loir-et-Cher	0	1	2	0
Loire	1	1	4	1
Haute-Loire	0	0	21	0
Loire Atlantique	0	3	6	1
Loiret	0	1	4	0
Lot	0	1	1	0
Lot-et-Garonne	0	1	2	0
Lozère	0	0	2	0
Maine-et-Loire	0	2	5	0

Départements	PC	PS	UDF-RPR	FN
Manche	0	1	4	0
Marne	0	1	4	1
Haute-Marne	0	0	2	0
Mayenne	0	0	3	0
Meurthe-et-Moselle	1	1	4	1
Meuse	0	0	2	0
Morbihan	0	2	4	0
Moselle	0	2	6	2
Nièvre	0	1	2	0
Nord	4	6	11	3
Oise	1	1	4	1
Orne	0	1	2	0
Pas-de-Calais	3	4	6	1
Puy-de-dôme	0	2	4	0
Pyrénées-Atlantiques	0	2	4	0
Hautes-Pyrénées	0	1	2	0
Pyrénées-Orientales	1	1	2	0
Bas-Rhin	0	1	7	1
Haut-Rhin	0	1	5	1
Rhône	1	3	8	2
Haute-Saône	0	1	2	0
Saône-et-Loire	0	2	4	0
Sarthe	0	1	4	0
Savoie	0	1	2	0
Haute-Savoie	0	1	3	1
Seine-Maritime	2	3	6	1
Seine-et-Marne	1	2	5	1
Deux-Sèvres	0	1	3	0
Somme	1	1	4	0
Tarn	0	2	2	0
Tarn-et-Garonne	0	1	1	0
Var	1	1	4	1
Vaucluse	0	1	2	1
Vendée	0	1	4	0
Vienne	0	1	3	0
Haute-Vienne	1	1	2	0
Vosges	0	1	3	0
Yonne	0	1	2	0
Territoire de Belfort	0	1	1	0
Paris	1	4	13	3
Yvelines	1	2	7	2
Essonne	1	3	5	1
Hauts-de-Seine	1	3	7	2
Seine-Saint-Denis	3	3	5	2
Val de Marne	2	2	6	2
Val d'Oise	1	2	5	1
Martinique	0	1	3	0
Guadeloupe	0	1	3	0
Guyane	0	0	2	0
Réunion	2	0	3	0
Saint-Pierre-et-Miquelon	0	0	1	0
Totaux	**45**	**135**	**346**	**45**

Nous obtenons ainsi neuf possibilités représentées par le tableau 12.

Tableau 12 - Les neuf chambres

		Choix du second étage		
		Adams	Webster	Jefferson
Choix du premier étage	Adams	1	2	3
	Webster	4	5	6
	Jefferson	7	8	9

La numérotation des cases dans le tableau 12 correspond à celle des lignes dans le tableau 1. La loi électorale française correspond à la case 3. Le tableau 13 donne les résultats par département dans ce seul cas.

OUTILS GRAPHIQUES

La répartition des sièges entre les listes, par une méthode *proportionnelle* donnée, peut être représentée par des moyens graphiques très efficaces. Nous illustrerons ces moyens graphiques avec l'exemple des Hauts-de-Seine. Les résultats de ce département aux élections européennes sont contenus dans le tableau 14.

Tableau 14 - Répartitions des 13 sièges en fonction des résultats des élections européennes pour le département des Hauts-de-Seine, par 5 méthodes *proportionnelles* (entre les quatre listes ayant franchi le seuil des 5%).

Listes	**Voix**	**Quotas**	**Hamilton**	**Lowndes**	**Adams**	**Webster**	**Jefferson**
UDF-RPR	204 835	6.58	6	6	6	6	7
PS	81 692	2.62	3	3	3	3	3
FN	65 087	2.09	2	2	2	2	2
PC	52 982	1.70	2	2	2	2	1
Total	404 596		13	13	13	13	13

A une liste i, nous pouvons associer la droite suivante:

x ----->y = (P_i/P) x (figure 8).

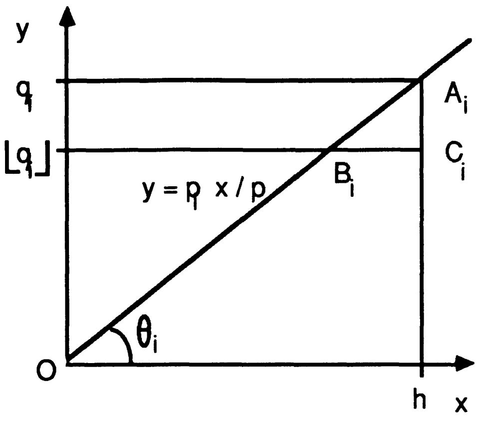


Figure 8 - Le quota et les restes pour une liste.

Nous avons ainsi:

$r_i = q_i - \lfloor q_i \rfloor = A_iC_i$

$\mathrm{tg}\ \theta_i = P_i / P = A_iC_i / B_iC_i$

d'où:

$B_iC_i = r_i\, P / P_i = h\, r_i/q_i$

Les résultats de la méthode de Hamilton se lisent donc verticalement, alors que ceux de la méthode de Lowndes se lisent horizontalement (figure 9).

Le calcul d'une répartition de sièges doit être effectué avec les outils algébriques si l'on désire une solution précise à un problème précis, par exemple dans le cas du dépouillement d'une élection réelle. Par contre l'outil graphique est plus utile dans des situations imprécises, par exemple pour la prévision des résultats d'une future élection.

La figure 9 montre bien que, dans notre exemple des Hauts de Seine, le résultat par la méthode de Lowndes est relativement robuste, alors que ce n'est pas le cas pour la méthode de Hamilton à cause du litige entre PS et UDF-RPR.

Les figures 10 et 11 montrent les résultats des méthodes de Jefferson et Webster.

Il est facile de représenter la méthode d'Adams à partir du "processus Jefferson": elle consiste simplement à commencer par attribuer un siège à chacune des listes, puis à appliquer la méthode Jefferson aux 9 sièges restants.

CONCLUSION

Nous avons vu qu'il existe un grand nombre de méthodes *proportionnelles* conduisant à des solutions très différentes. Ainsi se pose le problème du choix d'une méthode. Dans la loi française on a choisi deux méthodes à diviseur différentes:

- au premier étage, la méthode de Adams pour favoriser les petits départements,
- au deuxième étage, la méthode de Jefferson pour favoriser les grosses listes.

Les seuils choisis renforcent ces deux effets.

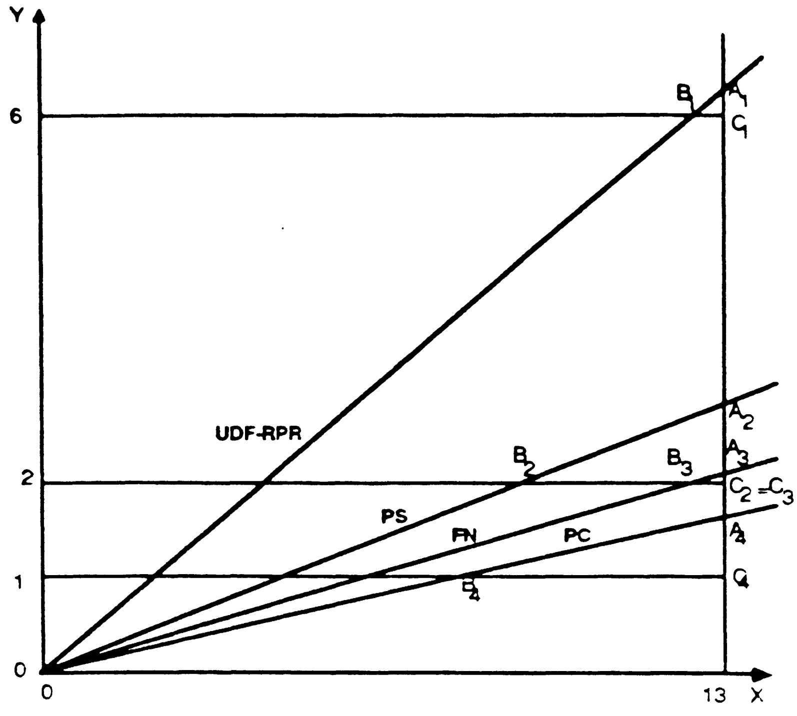


Figure 9 - Représentation graphique des résultats des méthodes à restes dans le cas des Hauts-de-Seine.

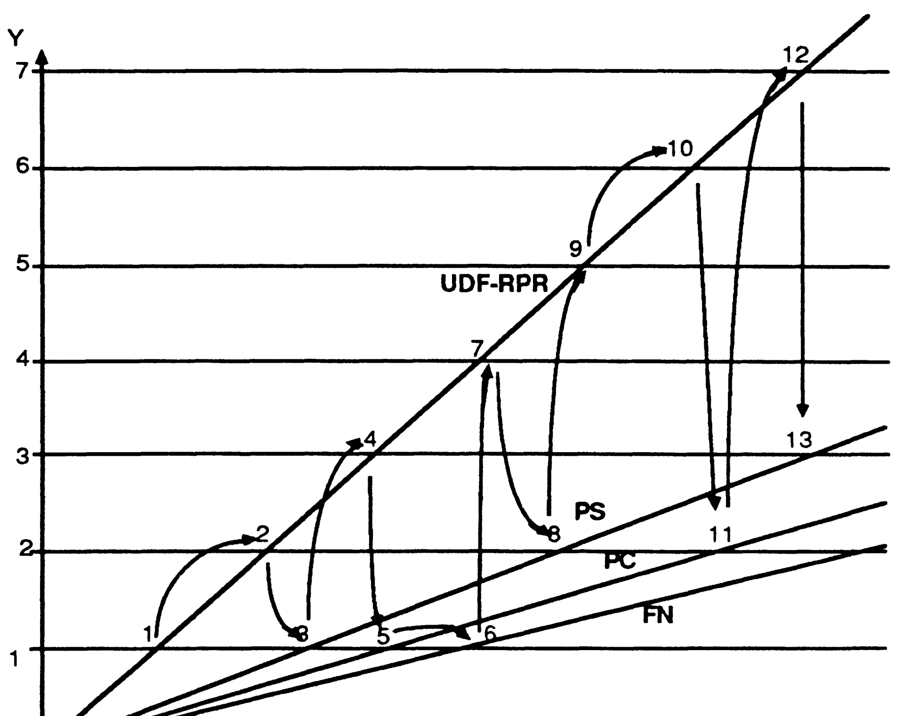


Figure 10 Représentation graphique de la "trajectoire du processus de Jefferson" dans le cas des Hauts-de-Seine.

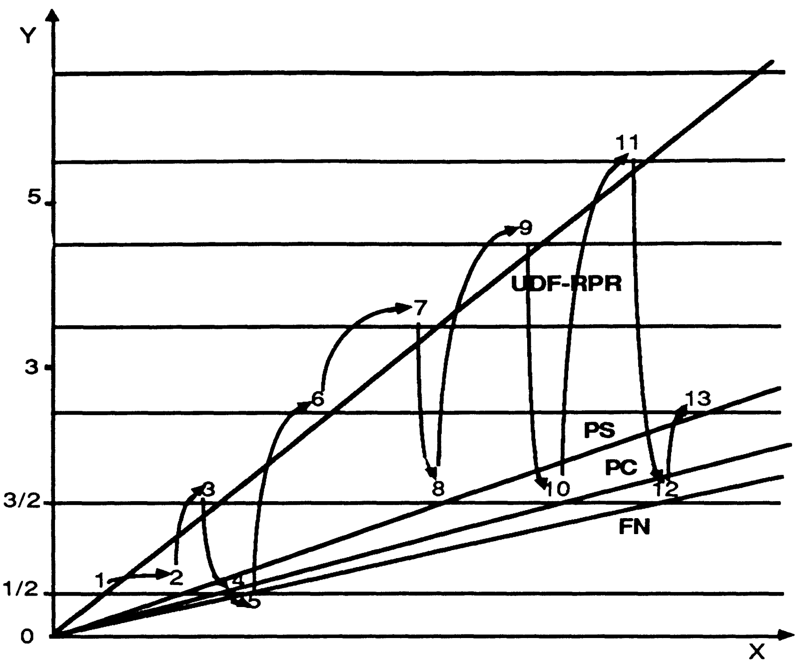


Figure 11 - Représentation graphique de la "trajectoire du processus Webster" dans le cas de la Haute-Seine.

La situation *proportionnelle* est certes complexe mais beaucoup moins que la situation *majoritaire*. En effet, cette dernière impose h = 1, ce qui entraîne un problème pratiquement insoluble de *chirurgie électorale*, lequel entraîne à son tour la pratique connue sous le nom de *Gerrymander*. (Dans à peu près tous les domaines scientifiques, on sait bien que les *classifications* sont sujettes à caution).

Terminons par les citations suivantes:

"La littérature concernant la "représentation proportionnelle" est effrayante. En volume d'abord - et souvent aussi par le mélange d'arguments proprement politiques et d'arguments prétendument mathématiques. On ne peut cacher qu'il s'agit d'une affaire mathématique"." Aussi l'énorme bibliographie du sujet comportera-t-elle des noms de mathématiciens professionels (E.V. Huntington, A. Sainte-Lagüe, même Henri Poincaré et John Von Neumann - et bien d'autres).

Mais politiciens et politologues se rebiffent - et ils ont bien raison: car le mathématicien, professionnel ou amateur, ne se contente pas d'exposer les difficultés conceptuelles, il prend parti et veut persuader que tel algorithme est <u>meilleur</u> que tous les autres.

En 1901, au cours d'un débat sur le mode de répartition des sièges de représentants entre états, C.E. Littlefield, représentant de l'état du Maine, s'écrie:

"God help State of Maine when mathematics reach for Her!" " [2]

<u>Notes Bibliographiques</u>

[1] BALINSKI M. & YOUNG P., Fair representation. Meeting the ideal of one man, one vote, New Haven, Yale University Press, 1982

[2] GUILBAUD G.Th., Leçons d'à peu près, Paris, Christian Bourgois, 1985.