MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. BARBUT

Sur quelques propriétés élémentaires des fonctions de concentration de C. Gini

Mathématiques et sciences humaines, tome 88 (1984), p. 5-20

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1984__88__5_0>

Math. Sci. hum. (*22*^{e}année, n°88, *1984*, p.5-19)

SUR QUELQUES PROPRIETES ELEMENTAIRES DES FONCTIONS DE CONCENTRATION DE C. GINI

M. BARBUT*

L'étude des inégalités économiques ou sociales est l'un des objets à la fois les plus anciens et les plus actuels des Sciences Sociales.

Les fonctions de concentration de Corrado Gini (et de Paul Lévy) constituent un outil efficace dans l'analyse de ces inégalités, et de leurs variations (dans le temps, l'espace, ou par rapport à tout autre paramètre).

La présente note, après un rappel des définitions de base, est consacrée à l'examen d'un cas fréquent dans les applications : celui où la population étudiée se répartit non seulement par rapport à la variable en jeu (l'ensemble I des indices dans ce qui suit), mais également en deux classes complémentaires ; par exemple, hommes et femmes dans la population active, admis et exclus d'un ordre d'enseignement donné, prélèvement obligatoire et revenu disponible pour les revenus bruts de ménages, etc... .

Il est clair que si l'on rapporte la répartition (selon la variable étudiée) de chacune des classes à la répartition dans la population toute entière, les deux fonctions de concentration associées ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Ce sont quelques propriétés élémentaires de ces deux concentrations, que je propose d'appeler *adjointes* l'une de l'autre, que je présente ici.

Une application à des données réelles - portant sur l'évolution temporelle dans l'inégalité, selon les C.S.P., de l'accès à l'enseignement -

---

*Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales - 54, boulevard Raspail, 75270 PARIS CEDEX 06.

est fournie dans la Revue Française de Sociologie (M. BARBUT, *Note sur quelques indicateurs globaux de l'inégalité : C.Gini, W.Pareto, P.Lévy, Revue Française de Sociologie*, T.25, n°4, Oct-Dec. 1984) ; le lecteur , s'il souhaite voir une illustration, pourra se reporter à cet article, dont la note qui suit est en quelque sorte l'annexe théorique.*

1 - LA FONCTION DE CONCENTRATION DE C. GINI.

1.1. Définition de la fonction de concentration.

Soient deux distributions :

$p = (p_1, p_2, .., p_i, .., p_k)$, $\forall i,\ p_i > 0$, $\Sigma\, p_i = 1$

$q = (q_1, q_2, .., q_i, .., q_k)$, $\forall i,\ q_i \geq 0$, $\Sigma\, q_i = 1$

définies sur *un même ensemble I* :

$$I = \{1, 2, \ldots, i, \ldots, k\}$$

Ordonnons les rapports :

$$u_i = \frac{q_i}{p_i}$$

par valeurs décroissantes. On obtient ainsi une suite de nombres positifs dont le premier terme est nécessairement supérieur ou égal à 1, et le dernier inférieur ou égal à 1 :

$$\frac{q_{i_1}}{p_{i_1}} = u_{i_1} \geq u_{i_2} \geq \ldots \geq u_{i_k} = \frac{q_{i_k}}{p_{i_k}}$$

et un ordre $i_1, i_2, \ldots, i_k$ des indices (un préordre dans le cas où certains des rapports u_i sont égaux entre eux ; dans ce cas, on ordonne les indices selon n'importe quel ordre total compatible avec ce préordre).

On peut alors considérer les deux fonctions de répartitions, associées aux distributions p et q respectivement, et définies par :

$$\forall j \in I\ ,\ P_j = \sum_{h=1}^{j} P_{i_h} \qquad Q_j = \sum_{h=1}^{j} Q_{i_h}$$

La *fonction de concentration* de la distribution q par rapport à la distribution p est la fonction "linéaire par morceaux" définie sur l'intervalle fermé [0,1] par :

$$P_0 = Q_0 = 0 \text{ et } P_{j-1} \leq P_j \Rightarrow Q(P) = Q_{j-1} + u_{i_j}\,(P - P_{j-1})$$

Sa courbe représentative est un contour polygonal convexe, reliant l'origine au point (1,1), et situé au-dessus de la première bissectrive des axes (figure 1, pour $k = 3$).

---

* voir également : J.C. Combessie, "A propos de Gini ...", *Revue Française de Sociologie*, T.26, n°1.

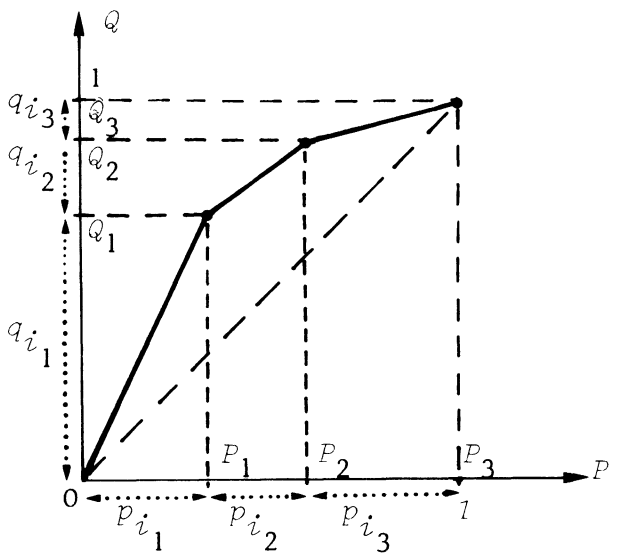

Figure 1

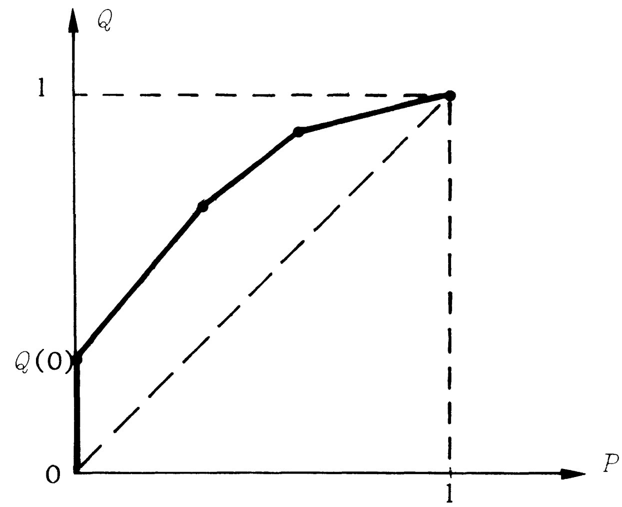

Figure 2

Si les p_i ne sont plus astreints à être tous strictement positifs, et si certains sont nuls, on posera :

$$Q(0) = \sum_{i \in I_0} q_i$$

où I_0 est la partie de l'ensemble I des indices sur laquelle tous les p_i sont nuls (Figure 2) ; $Q(0)$ est le maximum de masse selon la distribution q que l'on peut faire correspondre à une partie de I de mesure nulle par rapport à p.

D'une façon générale, pour chacun des k nombres $P_j (P_1 = p_{i_1} \leq P_2 \leq P_3 \ldots \ldots \leq P_k = 1)$, $Q(P_j) = Q_j$ est, par définition, le *maximum* de mesure q qui ait pour support une partie de I de mesure p égale à P_j.

Il est d'autre part immédiat de démontrer (le lecteur pourra s'appuyer sur la béquille constituée par la figure 1) que $Q(P)$ possède la propriété "isopérimétrique" suivante :

Sur l'ensemble des k! permutations $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ de l'ensemble I des indices, le maximum de $\sum_{j=1}^{k} p_{i_j} Q_j$, où $Q_j = \sum_{h=1}^{j} q_{i_h}$, est atteint pour la permutation (il y en a éventuellement plusieurs) qui fournit la fonction de concentration.

L'interpolation linéaire qui permet de définir $Q(P)$ pour tout nombre P compris entre 0 et 1 résulte d'une convention commode et naturelle ; elle fournit une représentation graphique claire, et nous le verrons plus loin, elle est bien adaptée à la *comparaison* des concentrations.

La définition "en escalier" de $Q(P)$ conduirait d'ailleurs exactement aux mêmes résultats que ceux qui vont suivre ; mais sa représentation graphique est moins claire.

Remarques :

1 - La définition de la fonction de concentration donnée ci-dessus dans le cas où I est fini (qui est le seul cas que l'on rencontre dans les observations) s'étend sans difficulté à tous les cas où p et q sont deux mesures sur un même ensemble I quelconque telles que les parties mesurables par rapport à p le soient également par rapport à q : pour tout nombre P compris entre 0 et 1, $Q(P)$ est le supremum de $q(X)$ pour l'ensemble des parties X de I de mesure $p(X)$ égale à P.

2 - Mais ces définitions supposent bien entendu que la variable dont I est l'ensemble des valeurs possibles soit "nominale", c'est-à-dire que l'on puisse en réordonner arbitrairement les valeurs.

Il est clair que si I est muni d'une structure d'ordre et a fortiori si c'est une échelle numérique, il faut modifier la définition de la fonction de concentration. En ce cas, on prend pour valeur de $Q(P)$ le maximum (éventuellement, le supremum) de la mesure par rapport à q *des intervalles fermés* de mesure égale à P par rapport à P.

Ceci entraîne que certaines des propriétés qu'ont les fonctions de concentration dans le cas où I est sans structure ne sont pas conservées ; en particulier, la courbe de concentration n'est plus nécessairement convexe, et la fonction Q ne satisfait plus, outre la monotonie, qu'à la condition (plus faible que la convexité) de *sous-addivité :*

$$\forall x,\ \forall y \in [0,1],\ Q\ (x+y) \leq Q\ (x) + Q\ (y)$$

3 - Lorsque p est la distribution uniforme, Q est appelée, tout court, fonction de concentration de la distribution q.

1.2 - Comparaison des concentrations.

Revenons au cas où I est fini et sans structure.

Lorsque les deux distributions p et q sont égales entre elles, il est clair que la fonction Q est la fonction identique, et la courbe de concentration la première bissectrices des axes.

A l'opposé, si toute la masse de q est concentrée sur un seul élément de I, l'élément 1 par exemple, et s'il n'en est pas de même pour q, $Q(P)$ est égale à 1 pour $P \geq p_1$; et l'on jugera q d'autant plus concentrée par rapport à q que p_1 sera petit (figure 3).

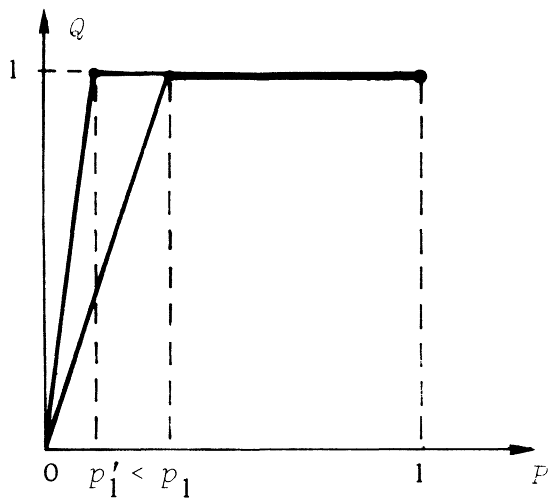

Figure 3

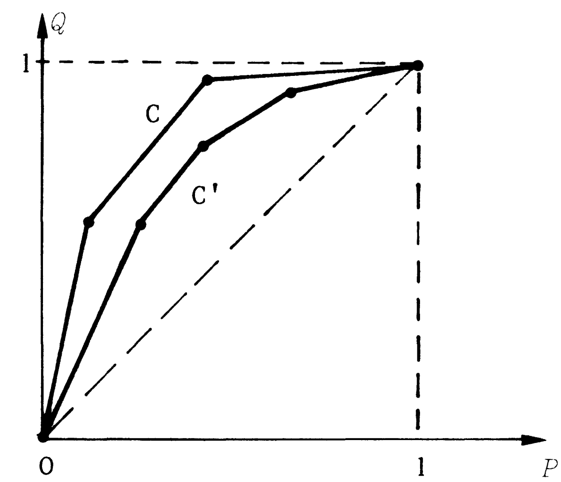

Figure 4

D'une façon générale, si p' et q' sont deux autres distributions (que p et q) définies sur un ensemble I' (pas nécessairement le même que I, bien que dans les applications, I et I' soient en général identiques), on dira que q est *plus concentrée* par rapport à p que q' ne l'est par rapport à p' si la fonction de concentration Q (de q par rapport à p) *majore uniformément* (au sens large) la fonction de concentration Q' (de q' par rapport à p') ; la courbe de concentration C du premier couple de distributions est alors constamment au-dessus de (ou égale à) celle, C', du second couple (figure 4).

Lorsque Q ne majore pas Q' uniformément, et que les courbes de concentration C et C' se coupent (figure 5), les concentrations ne sont plus comparables "à vue" ; pour les comparer, on peut se donner une mesure de l'écart de la fonction de concentration à la concentration minimum, c'est-à-dire de la courbe C de concentration à la première bissectrice.

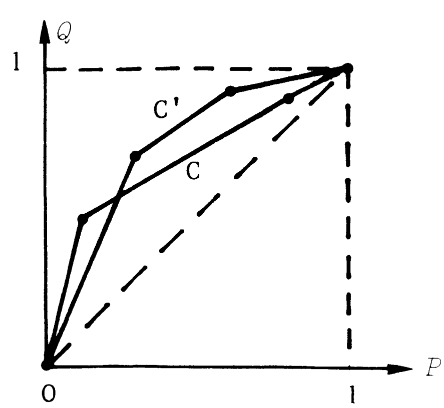

Figure 5

Il y a ainsi un grand choix de mesures possibles de la concentration, à commencer par l'écart quadratique moyen :

$$\frac{1}{k} \sum_j (Q_j - P_j)^2$$

Ou, pourquoi pas ? la distance du khi-deux : $\frac{1}{k} \sum_j \frac{(Q_j - P_j)^2}{P_j}$

Seules sont admissibles les mesures qui sont compatibles avec la comparaison uniforme. C. Gini proposait de prendre la surface S comprise entre le courbe C de concentration et la première bissectrice.

S varie sur une échelle allant de 0 à 1/2 ; son expression est :

$$S = \sum_{j=1}^{k} \frac{Q_j + Q_{j-1}}{2} p_{i_j} - \frac{1}{2}$$

Dans la suite, lorsque nous comparerons des concentrations, *il s'agira toujours de la comparaison uniforme*, la seule qui ne pose aucun problème d'interprétation.

Remarques :

1 - Lorsque le sens s'y prête, on dit que la distribution q est d'autant plus *inégalitaire* par rapport à p que la fonction de concentration Q de q par rapport à p est plus grande dans l'ordre de comparaison uniforme ; cette interprétation de la concentration en termes d'inégalités est notamment très fréquente dans les applications aux phénomènes économiques et sociaux.

2 - Dans d'autres contextes, on parlera *d'indépendance* (par rapport au choix de la classe "horizontale", dans le sens du par. 2.1.ci-dessous) des distributions là où nous disons ici *égalité*, minimum de concentration

2 - DICHOTOMIES ET CONCENTRATIONS ADJOINTES.

2.1. - Définitions et notations.

Une situation que l'on rencontre souvent dans la pratique est la suivante : une population d'effectif N est divisée selon un premier critère en deux *classes* d'effectifs X et Y respectivement, et par rapport à un second critère en k *catégories* d'effectifs $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_k$ respectivement.

On a, pour toute catégorie i :

$$n_i = x_i + y_i$$

où x_i désigne le nombre d'éléments de la première classe dans la catégorie i, et y_i celui de la seconde classe.

Cette situation est statistiquement décrite par le tableau à 2 lignes et k colonnes ci-dessous

Categ. / Classes	1	2	......	i	......	k	Totaux
I	x_1	x_2		x_i		x_k	X
II	y_1	y_2		y_i		y_k	Y
Totaux	n_1	n_2	......	n_i	......	n_k	N

Par exemple, la population active française à une date donnée peut être répartie suivant le sexe d'une part, et les C.S.P. d'autre part ; il y a des questions que chacun se pose, et qui sont l'objet de bien des débats : la répartition des femmes est-elle plus, ou moins, inégalitaire que celle des hommes ? Si l'on compare les données du recensement de 1982 avec celles du recensement de 1962, l'inégalité des femmes vis à vis des diverses C.S.P. s'est-elle rapprochée de celle des hommes, ou s'en est-elle éloignée ?

L'étude des fonctions de concentration constitue une voie d'approche dans l'analyse de ces questions.

Posons, pour chaque élément i de l'ensemble $I = \{1,2,\ldots, ,\ldots,k\}$ des catégories :

$$p_i = \frac{x_i}{N} \quad , \quad q_i = \frac{x_i}{X} \quad , \quad r_i = \frac{y_i}{Y}$$

Par référence à la disposition des données en tableau à double entrée, ces nombres peuvent être appelés *taux* (ou proportions) *horizontaux*, et les distributions $p = (p_1, p_2,\ldots, p_i,\ldots, p_k)$, $q = (q_1,\ldots,q_k)$ *et* $r = (r_1,\ldots, r_k)$ qu'ils engendrent *distributions horizontales*. En particulier, p est la distribution marginale horizontale.

De même, on peut poser pour chaque catégorie i :

$$\varepsilon_i = \frac{x_i}{n_i} \quad , \quad \eta_i = 1 - \varepsilon_i = \frac{y_i}{n_i}$$

On les appellera *taux verticaux* ; $\varepsilon = \frac{X}{N}$ et $\eta = \frac{Y}{N} = 1 - \varepsilon$ sont les taux verticaux *moyens* ; on vérifie d'ailleurs immédiatement que :

$$\varepsilon = \frac{X}{N} = \sum_{i=1}^{k} p_i \varepsilon_i \qquad \eta = \frac{Y}{N} = \sum_{i=1}^{k} p_i \eta_i$$

Ceci posé, on peut considérer d'une part la fonction de concentration de la distribution q dans la première classe par rapport à la distribution marginale p, d'autre part celle de la distribution r dans la classe complémentaire par rapport à p : je propose d'appeler les deux fonctions de concentration ainsi obtenues *adjointes* l'une de l'autre.

2.2. Construction de l'adjointe d'une fonction de concentration.

Nous supposons dans la suite que l'ordre 1,2,...,i,...,k de numérotation des catégories est celui des rapports $u_i = \frac{q_i}{p_i}$ *décroissants ;* dans ces conditions, la fonction de concentration de q par rapport à p, est définie en chacun de ses points de changement de pente par :

$$P_j = p_1 + p_2 + \dots + p_j$$
$$Q_j = q_1 + q_2 + \dots + q_j$$

et par interpolation linéaire ailleurs.

On remarquera que l'ordre décroissant des rapoorts u_i est aussi celui des *taux verticaux* ε_i ; en effet :

$$u_i = \frac{q_i}{p_i} = \frac{N}{X} \frac{x_i}{n_i} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon}$$

Pour la fonction de concentration *adjointe*, de r par rapport à p, l'ordre des rapports :

$$v_i = \frac{r_i}{p_i} = \frac{\eta_i}{\eta} = \frac{1 - \varepsilon_i}{1 - \varepsilon}$$

est donc *croissant* avec l'indice i ; l'ordre décroissant des rapports v_i, celui dans lequel doit être construite cette fonction de concentration, est donc l'ordre $k, k-1, \dots, 2, 1$ inverse de celui de la numérotation des catégories.

Et le $j^{\text{ième}}$ sommet de la courbe de concentration, par ordre décroissant des pentes, est donc défini par :

$$\Pi_j = p_k + p_{k-1} + \dots + p_{k-j+1} = 1 - P_{k-j}$$

$$R_i = r_k + r_{k-1} + \dots + r_{k-j+1} = \frac{1-P_{k-j}-\varepsilon(1-Q_{k-j})}{1 - \varepsilon}$$

L'expression de R_j résulte de l'égalité :

$$r_i = \frac{y_i}{Y} = \frac{n_i - x_i}{N - X} = \frac{Np_i - Xq_i}{N - X} = \frac{p_i - \varepsilon q_i}{1 - \varepsilon}$$

Ainsi, la fonction de concentration adjointe d'une fonction de concentration donnée se déduit très simplement de celle-ci, et seul le "taux vertical" moyen ε intervient dans le passage de l'une à l'autre.

Ce passage est rendu encore plus clair par la construction géométrique de la courbe de concentration Γ de l'adjointe à partir de la courbe C de départ.

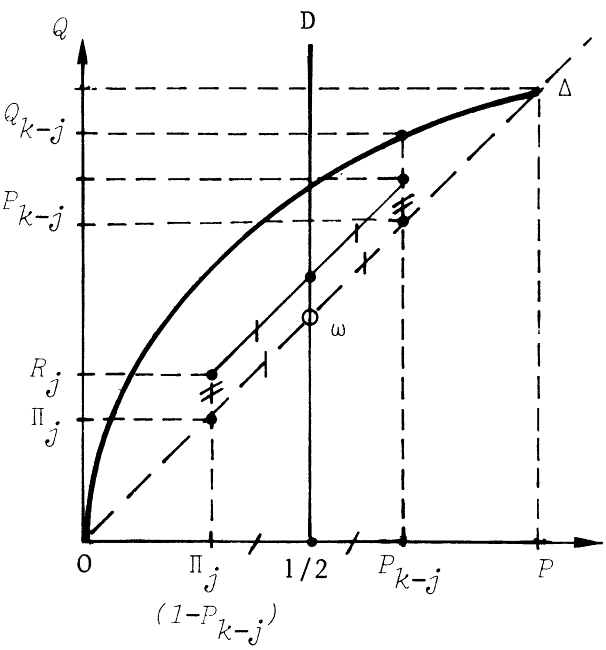

Figure 6

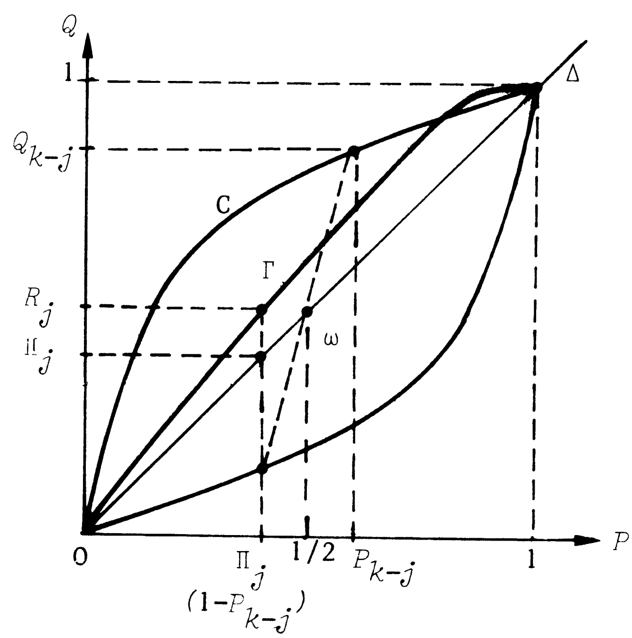

Figure 7

La relation définissant R_j s'écrit encore en effet :

$$R_j - (1 - P_{k-j}) = R_j - \Pi_j = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} (Q_{k-j} - P_{k-j})$$

D'où la construction (figure 6) : appliquer à C une *affinité* (ou *dilatation*) de rapport $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, parallèlement à l'axe vertical ($P = 0$), et d'axe Δ, la première bissectrice ; suivie d'une seconde affinité, de rapport -1, parallèlement à Δ, et d'axe D, la droite d'équation $P = \frac{1}{2}$.

Variante à cette construction (figure 7) : appliquer à C une symétrie ayant pour centre le point ω de coordonnées (1/2 , 1/2) ; suivie d'une affinité de rapport $- \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, parallèlement à l'axe vertical, et d'axe Δ.

On remarquera d'ailleurs que, de même que les *pentes* successives, par ordre décroissant, du contour polygonal C sont les nombres :

$$u_i = \frac{q_i}{p_i} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} \quad (u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_k)$$

celles du contour polygonal Γ adjoint sont les nombres :

$$\theta_j = \frac{r_j}{\pi_j} = \frac{1 - \varepsilon_{k-j+1}}{1 - \varepsilon} \quad (\theta_1 \geqq \theta_2 \geqq \ldots \geqq \theta_k)$$

2.3. Comparaison d'une fonction de concentration à son adjointe.

De la transformation qui fait passer d'une fonction de concentration à son adjointe, et de la courbe C à la courbe Γ, se déduisent quelques conséquences immédiates.

Remarquons d'abord que le rapport d'affinité $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ croit de 0 à l'infini lorsque ε varie de 0 à 1, et vaut 1 pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

En particulier, si $\varepsilon = 0$, c'est que X, et par conséquent tous les x_i sont nuls ; on a donc : $\forall_i : n_i = y_i$
et la courbe Γ est confondue avec la première bissectrice Δ. Si ε tend vers zéro, l'adjointe C tend vers la courbe de type "Dirac" de masse 1 à l'origine. De même C est confondue avec Δ pour ε = 1, et Γ est la courbe de type "Dirac".

L'indice de concentration de C. Gini (la surface S comprise entre la courbe C et la première bissectrice) est évidemment multiplié par le rapport $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ pour la contration adjointe ; ainsi, l'adjointe est moins concentrée (au sens de l'indice de C. Gini) pour $0 < \varepsilon < 1/2$, plus concentrée pour $1 > \varepsilon > 1/2$, et également concentrée pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Ceci n'entraîne pas que C et Γ soient *uniformément comparables*.

Par exemple, pour que C et Γ soient *confondues*, il faut d'abord que les pentes successives de ces deux contours polygonaux soient égales entre elles :

$$\forall_i, \qquad \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_{k-i+1}}{1 - \varepsilon} .$$

D'où l'on déduit facilement qu'il n'y a que deux cas possibles :

- ou bien, $\forall_i$, $\varepsilon_i = \varepsilon$, la valeur de ε étant par ailleurs quelconque ; chaque x_i est alors égal à $\varepsilon\, n_i$, et chaque y_i à $(1-\varepsilon)n_i$; les distributions "horizontales" q et r sont identiques à la distribution marginale p ; C et Γ sont confondues avec la bissectrice Δ.

Ce cas de l'égale concentration pour les deux distributions est celui que l'on qualifie aussi, dans certains contextes, d'indépendance entre les catégories et les classes (les colonnes et les lignes du tableau de données).

- ou bien, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $\forall_i$, $\varepsilon_i + \varepsilon_{k-i+1} = 1$. Comme les pentes des côtés d'un contour polygonal ne déterminent pas celui-ci, ces dernières conditions ne sont pas suffisantes ; il faut en outre que les effectifs des catégories satisfassent à la condition de symétrie :

$$\forall_i, \qquad y_i = x_{k-i+1} .$$

Les distributions q de la première classe et r de la seconde sont alors symétriques l'une de l'autre.

De même, une condition *nécessaire* pour que C majore uniformément Γ est que la pente à l'origine de C soit supérieure à celle de Γ, et qu'à l'autre extrémité (1,1) des contours polygonaux, ce soit le contraire (figure 8) ; c'est-à-dire :

$$u_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} > \frac{1-\varepsilon_k}{1-\varepsilon} = \theta_1 \quad \text{et} \quad u_k = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} < \frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon} = \theta_k$$

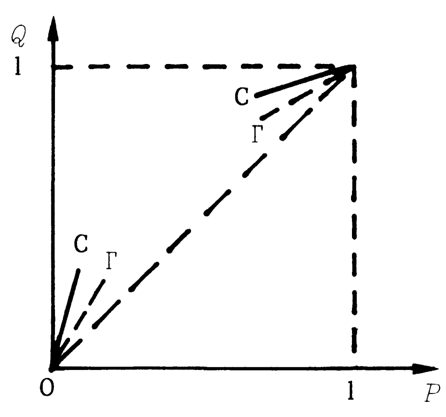

Figure 8

Ce qui s'écrit encore :

$$\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_k} > \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} > \frac{\varepsilon_k}{1-\varepsilon_1} .$$

Cette condition nécessaire, et non toujours vérifiée, fournit un test rapide, et ne portant que sur les "taux verticaux", qui permet de conclure soit à la non comparabilité uniforme d'une concentration et de son adjointe, soit à *l'éventuelle* comparabilité.

La comparaison deux à deux de toutes les pentes des contours polygonaux C et Γ fournit des conditions nécessaires plus contraignantes de comparabilité ; si par exemple ε, moyenne des taux verticaux ε_i, en est en même temps médiane, pour que C majore uniformément Γ, il est nécessaire que :

$$\forall_i \leq \left[\frac{k}{2}\right], \quad \frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_{k-i+1}} > \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

et

$$\forall_i > \left[\frac{k}{2}\right], \quad \frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_{k-i+1}} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} .$$

3 - VARIATIONS CONCOMITANTES D'UNE FONCTION DE CONTRATION ET DE SON ADJOINTE.

3.1. Des cas où les variations sont de même sens.

Une autre conséquence immédiate de la transformation faisant passer de C à son adjointe Γ porte sur la façon dont celle-ci se modifie en fonction de certaines variations de C ou du taux vertical moyen ε.

Si les données sont modifiées de telle sorte que ε reste constant, mais que la nouvelle courbe de concentration C' majore uniformément C, alors l'adjointe Γ' de C' majore uniformément Γ : les deux concentrations se modifient dans le même sens.

Il en est de même si C restant invariante, c'est le taux vertical moyen ε' qui est supérieur à ε (le rapport $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ croit avec ε) ; autrement dit, une modification des données qui ne change pas la concentration dans la première classe, mais augmente le taux vertical moyen, accroît la concentration dans la seconde classe.

A fortiori y a-t-il accroissement de la concentration adjointe lorsque la modification des données entraîne à la fois majoration de C et accroissement de ε ; et diminution s'il y a minoration (ou invariance) pour C, et diminution (ou égalité) pour ε.

3.2. Un cas où les variations sont de sens opposés.

Par contre, il n'y a pas de conclusion immédiate, et il faut y regarder de plus près, si un accroissement de la concentration dans la première classe s'accompagne d'une diminution du taux vertical moyen ε, ou si l'on est dans la situation duale.

Voici un cas simple et souvent assez réaliste pour les petites variations (variations "infinitésimales") du tableau des données*:

- la distribution marginale horizontale est invariante :

$$\forall_i , \quad n'_i = \lambda\, n_i \quad (p'_i = p_i) \;;$$

- les taux verticaux par catégorie augmentent tous d'une même quantité δ :

$$\forall_i , \quad \frac{x'_i}{n'_i} = \varepsilon'_i = \varepsilon_i + \delta = \frac{x_i}{n_i} + \delta \;(\delta > 0).$$

On en déduit immédiatement que :

$$\forall_i , \quad x'_i = \lambda(x_i + \delta\, n_i)$$

et que :

$$q'_i = \frac{x'_i}{X'} = \frac{x_i + \delta\, n_i}{X + \delta N} = \frac{q_i X + \delta\, p_i N}{X + \delta N} = \frac{\varepsilon\, q_i + \delta\, p_i}{\varepsilon + \delta} \quad .$$

---

* hypothèses suggérées par J. Prévot.

Comme les rapports $\frac{q'_i}{p'_i} = \frac{\varepsilon'_i}{\varepsilon'} = \frac{\varepsilon_i + \delta}{\varepsilon + \delta}$ sont dans le même ordre décroissant que les rapports (les pentes) $\frac{q_i}{p_i}$, la fonction de concentration Q' de q' par rapport à p' (i.e. ici p) est définie, en ses points de changement de pente, par :

$$P'_j = P_j \qquad\qquad j = 1,2,\ldots,k.$$
$$Q'_j = \frac{\varepsilon\, Q_j + \delta\, P_j}{\varepsilon + \delta}$$

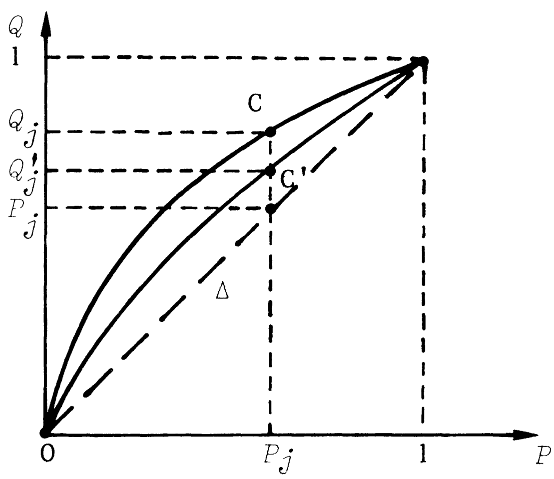

Figure 9

Le point (P'_j, Q'_j) de la courbe de concentration C' est donc le barycentre, avec les poids $\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\delta}$ et $\frac{\delta}{\varepsilon+\delta}$ respectivement, des points (P_j,Q_j) de C et (P_j,P_j) de la première bissectrice Δ. Autre façon de dire :

$$Q'_j - P'_j = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\delta}\,(Q_j - P_j)$$

et C' se déduit de C par affinité d'axe Δ, parallèle à l'axe vertical, et de rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\delta}$ compris entre 0 et 1.

Donc, dans les hypothèses faites, la *concentration diminue uniformément* pour la première classe.

Et inversement elle augmenterait bien entendu si δ était négatif.

Mais un accroissement positif δ de tous les taux $\varepsilon_i = \frac{x_i}{n_i}$ correspond à une diminution $-\delta$ des taux adjoints $1 - \varepsilon_i = \frac{y_i}{n_i}$.

Dans l'hypothèse faite, la concentration adjointe (celle de la seconde classe), *augmente* donc uniformément ; la courbe Γ' se déduit d'ailleurs de Γ par affinité de rapport $\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon-\delta}$ supérieur à 1.

Nous avons ainsi un exemple dans lequel les deux concentrations adjointes l'une de l'autre varient en sens inverse : accroître l'inégalité pour l'une des deux distributions "horizontales" revient à la diminuer pour l'autre, et vice versa.

Ce résultat reste valable si tous les taux verticaux ε_i augmentent chacun d'une quantité δ_i positive ou nulle (plus nécessairement la même pour tous) de telle sorte que les δ_i soient non décroissants avec i, et les $\varepsilon_i + \delta_i$ non croissants, comme les ε_i.

3.3. - Un cas de non comparabilité.

Un autre cas très simple qui conduit catte fois à la *non comparabilité* de C et C', et partant de Γ et Γ' également, et celui où il existe un indice h tel que :

$$\varepsilon'_h = \varepsilon_h + \delta$$

avec : $$0 < \delta < \varepsilon_{h-1} - \varepsilon_h$$

et $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$ pour $i \neq h$; autrement dit, le "taux vertical" n'augmente que dans une seule catégorie, la catégorie h.

On a alors, en posant $a = \dfrac{\delta n_h}{X}$:

$$Q'_j = \frac{Q_j}{1+a} < Q_j \quad \text{si } j < h$$

$$Q'_j = Q_j + \frac{a}{1+a}(1 - Q_j) > Q_j \quad \text{si } j \geq h$$

Ainsi, C et C' se coupent entre leur $(h-1)^{\text{ième}}$ et leur $h^{\text{ième}}$ sommets ; sauf toutefois dans le cas extrême où c'est la catégorie ayant déjà le plus fort "taux vertical" qui bénéficie de l'accroissement δ ($h = 1$, et C' majore C : l'inégalité aumente), et dans celui où c'est celle ayant le plus faible taux ($h = k$, et C' est majorée par C : l'inégalité diminue).

Si δ est négatif, l'expression de Q'_j reste la même, mais a est alors négatif ; le sens des inégalités est inversé ; ce qui montre que Γ et Γ' se coupent également elles aussi en général.

3.4. Lorsque l'une des concentrations est invariante, son adjointe peut varier.

Posons nous maintenant la question suivante : comment choisir les accroissements δ_i des taux verticaux ε_i de façon que la concentration de la première classe soit invariante ?

Il est clair qu'une condition nécessaire (nous faisons toujours l'hypothèse de l'invariance de la distribution marginale horizontale $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$) est que toutes les pentes des côtés du contour polygonal C restent invariantes ; i.e. :

$$\forall i, \quad \frac{\varepsilon_i + \delta_i}{\varepsilon + \delta} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} \qquad \text{(où l'on a posé } \delta = \Sigma\, p_i\, \delta_i)$$

D'où l'on déduit immédiatement :

$$\forall i, \quad \delta_i = \frac{\delta}{\varepsilon}\, \varepsilon_i = \lambda\, \varepsilon_i$$

Les accroissements δ_i sont *proportionnels* aux ε_i.

Mais cette condition est suffisante, puisque, si elle est vérifiée, chaque x_i est transformé en $x_i(1 + \lambda)$, et par conséquent $q_i = \frac{x_i}{X}$ en lui-même $(\frac{x_i(1 + \lambda)}{X\ (1 + \lambda)} = \frac{x_i}{X})$.

Par contre, la concentration adjointe *augmente* si λ est positif et *diminue* si λ est négatif, puisque le rapport d'affinité entre C (invariante) et Γ est transformé de $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ en $\frac{\varepsilon(1 + \lambda)}{1-\varepsilon(1 +\lambda)}$.

On a d'ailleurs :

$$R'_j = \frac{(1 - \varepsilon)\ R_j - \lambda\ \varepsilon\ (1 - Q_{k-j})}{1 - \varepsilon(1 + \lambda)}$$

Donc :

$$R'_j - R_j = \frac{\lambda\ \varepsilon}{1 - \varepsilon(1 + \lambda)}(R_j + Q_{k-j} - 1)$$

Comme, pour tout i, $Q_i \geq P_i$ et $R_i \geq \Pi_i$, on a :

$$R_j \geq \Pi_j = 1 - P_{k-j} \geq 1 - Q_{k-j}$$

Et par conséquent : $R_j + Q_{k-j} - 1 \geq 0$

$R'_j - R_j$ est donc du signe de λ.

N.B. Tous les ε_i devant rester inférieurs à 1, le coefficient de proportionalité λ est au plus égal à $\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1}$

3.5. - Un cas où les deux variations sont de même sens.

En combinant les résultats obtenus en 3.1., 3.2. et 3.4. ci-dessus, nous obtenons un modèle simple de variation des taux verticaux ε_i qui conduit à des variations de même sens pour la concentration de la première classe, et pour son adjointe de la seconde classe.

Supposons que chaque ε_i s'accroisse de :

$$\delta_i = \lambda\ (\varepsilon_i - \varepsilon)$$

$\forall i,\ \varepsilon_i \longrightarrow \varepsilon'_i = \varepsilon_i + \lambda(\varepsilon_i - \varepsilon) = \varepsilon_i(1 + \lambda) - \lambda\ \varepsilon$

Chaque taux ε_i subit d'une part une variation proportionnelle de rapport λ, qui laisse la concentration de la première classe invariante, suivie d'une translation d'amplitude de $- \lambda\ \varepsilon$, qui *accroit* cette concentration si $\lambda > 0$, et la *diminue* si $\lambda < 0$ (cf. 3.3.).

Comme d'autre part le taux moyen ε n'a pas changé, la concentration adjointe augmente si $\lambda > 0$, et diminue si $\lambda < 0$ (Cf. 3.1.).

On voit d'ailleurs que pour les taux adjoints $\eta'_i = 1 - \varepsilon_i$, on a :

$$\begin{aligned} \eta'_i = 1 - \varepsilon'_i &= 1 - \varepsilon_i - \lambda(\varepsilon_i - \varepsilon) = \\ &= 1 - \varepsilon_i + ((1 - \varepsilon_i) - (1 - \varepsilon)\,) = \\ &= \eta_i` + \lambda\,(\eta_i - \eta) \end{aligned}$$

Ce qui fournit une autre façon d'obtenir le résultat.

Des règles de variation des "taux verticaux" ε_i plus élaborées que celles qui ont été proposées ci-dessus seraient probablement utiles ; c'est au spécialiste du domaine d'application qu'il revient d'indiquer lesquelles.

Les conséquences de celles que nous avons étudiées ne sont cependant pas toujours intuitives, et il faut parfois quelque réflexion pour reconnaître que le calcul s'accorde ici à ce que suggère le bon sens, notamment dans la relation entre une concentration et son adjointe. Il faut en conclure que la comparaison des inégalités nécessité beaucoup de précautions : des modalités très simples de variation peuvent avoir, pour des raisons psychologiques, des effets à première vue paradoxaux. La dualité mathématique est presque toujours difficile à assimiler.

Il convient d'autre part de remarquer que le tableau de données a $2k$ degrés de liberté : les x_i et les k_i (ou les x_i et les n_i). Des conditions, en nombre k, portant sur les seuls taux verticaux ε_i ne permettront donc en général aucune conclusion quant à la variation des deux concentrations.

On peut d'ailleurs noter à cet égard que, si les x_i sont donnés, on peut toujours choisir les y_i de façon que les ε_i soient dans tel ordre arbitraire que l'on s'est fixé à l'avance.

Force est donc bien d'ajouter aux conditions portant sur la variation des taux ε_i des contraintes supplémentaires, en nombre k. L'hypothèse faite ici d'invariance de la distribution marginale (qui est aussi, est-ce un hasard ? celle des tests de Khi-deux d'écart à l'indépendance ; i.e., dans le langage utilisé ici, à l'égalité des distributions) est raisonnable tant qu'on n'a en vue que de petites variations.

Bibliographie

Paul Levy, *Théorie de l'Addition des Variables aléatoires*, Gauthier-Villars, 1937.
Amartya Sen, *On Economic Inequality*, Clarendon Press, 1973.