

V. DUQUENNE

B. MONJARDET

Relations binaires entre partitions

Mathématiques et sciences humaines, tome 80 (1982), p. 5-37

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1982__80__5_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RELATIONS BINAIRES ENTRE PARTITIONS

V. DUQUENNE*, B. MONJARDET**

I. INTRODUCTION

Le treillis des partitions (ou des équivalences) d'un ensemble fini est une structure algébrique et combinatoire présente dans de nombreux domaines. Défini initialement par Birkhoff (1935), il a été étudié de façon approfondie par Dubreil et Dubreil-Jacotin (1939) puis par Ore (1942). On en trouve une description insistant sur ses propriétés de nature géométrique dans Barbut (1968) ou Barbut et Monjardet (1970). Ce treillis fait d'ailleurs partie de la classe des *treillis géométriques*, dont on connaît l'importance dans les développements actuels de la combinatoire (voir notamment Crapo et Rota (1971) et Aigner (1979)).

Nous nous proposons dans ce texte, de donner une vue d'ensemble sur plusieurs relations binaires définies dans ce treillis, c'est-à-dire sur des relations binaires entre partitions (ou équivalences) d'un ensemble (fini).

La plupart de ces relations ont été introduites par les Dubreil et Ore, à partir de diverses considérations mathématiques; par exemple la recherche de sous-treillis ou d'identités particulières, ou la permutabilité d'équivalences. Cette direction a été poursuivie ultérieurement par Aigner (1972), dont il faut signaler l'importante contribution.

* Equipe de Mathématique et Psychologie, Université Paris V, 12 rue Cujas, 75005 Paris, et Laboratoire de psychologie expérimentale.

** Centre de Mathématique Sociale, 54 bd Raspail, 75270 Paris Cedex, et Université Paris V.

Des relations entre partitions interviennent notamment pour formaliser la planification et l'analyse des données expérimentales : voir Rouanet et Lépine (1977) qui ont consacré à ce thème un numéro spécial d'*Informatique et Sciences Humaines*. Schématiquement, on peut dire que les observations d'une expérience sont décrites dans le produit $\prod_K F^k$ d'une famille de facteurs; les modalités d'un facteur de base : $F^k = \{F_1^k, F_2^k, \dots, F_n^k\}$ étant associés de manière bijective aux niveaux d'une même *variable indépendante* qui reflète l'une des dimensions retenues pour caractériser les conditions expérimentales. Parallèlement un facteur de base induit une partition des observations dont les classes correspondent à ses modalités. On conçoit donc que des relations entre facteurs expérimentaux se traduisent par des relations entre partitions, et que les propriétés algébriques des plans d'expériences s'expriment aisément dans le treillis des partitions.

La combinaison des relations sur les facteurs de base, de *croisement* (voir III), et d'*emboîtement* (relation d'ordre entre partitions associées), conduit, sous certaines restrictions, à une classe de *plans* privilégiée du point de vue statistique : les *mixed designs* des manuels anglo-saxons (voir par exemple Lee (1975, p. 62) qui en exhibe quelques propriétés), ou *plans quasi-complets* des articles parus dans *Mathématiques et Sciences Humaines*; sur ce sujet cf. Ehrlich (1975), et Lépine (1977) qui en formalise certaines propriétés algébriques. Ces plans possèdent, même lorsqu'ils sont à emboîtements non équilibrés, des propriétés de régularités aptes à en faciliter le traitement sur ordinateur (voir Duquenne (1977)). Pour tenir compte de la présence de lacunes dans les observations recueillies sans pour autant s'éloigner trop de la structure de cette classe de plans, on peut considérer utilement des relations plus générales que celle de croisement (voir Duquenne (1980)), telles que la permutabilité et la connexion qui seront étudiées en III et IV.

Notons qu'en général de telles relations donnent lieu à des caractérisations de natures diverses. Par exemple, une propriété comme la *3-permutabilité* de deux équivalences (i. e. RSR = SRS) se présente d'abord comme une condition portant sur la composition de ces deux relations d'équivalence, mais elle correspond, du point de vue latticiel à la propriété classique de *paire comodulaire*; une troisième interprétation "graphique" celle-là, porte sur le diamètre du *graphe biparti* associé à R et S (voir II et IV).

Ainsi, certaines propriétés des relations sur les partitions découlent de résultats établis pour des treillis moins particuliers que celui des partitions, comme les *treillis géométriques* ou même *relativement complémentés*; d'autres résultats s'obtiennent plus aisément en considérant les *graphes bipartis* associés aux partitions et quelques propriétés élémentaires de théorie des graphes. Par souci d'unité, ne seront développés dans le corps du texte que les notions et résultats spécifiques au treillis des partitions (ou des équivalences), réservant en annexe ce qui se définit ou s'obtient dans des structures plus générales. Nous n'avons développé les démonstrations que des résultats apparemment nouveaux, donnant parfois quelques indications pour les propriétés classiques.

Le paragraphe II résume les notions de base sur les partitions et les relations d'équivalence, et précise nos notations. On étudie en III la relation symétrique de permutabilité, notée \square , entre deux partitions ($RS = SR$ pour les équivalences associées), ainsi que deux renforcements de cette relation : le *croisement*, noté $*$, et l'*associabilité*. Pour ces relations, comme pour la plupart de celles qui seront étudiées ici, on donnera les divers types de caractérisation (latticielle, relationnelle ou graphique), et des propriétés relatives à leur hérédité. Le paragraphe IV est consacré à la relation symétrique de *paire modulaire* et à des relations non-symétriques : celle de *couple co-modulaire* notée M^* est classique et correspond à une propriété de modularité locale; la relation notée ici D^* , qui traduit elle une condition de distributivité locale, se trouve être plus forte que M^* dans les treillis relativement complémentés; enfin dans le treillis des partitions, une relation notée A^* s'intercale entre M^* et D^* .

Au paragraphe V, on considère les symétrisées des relations précédentes. En particulier on introduit en renforçant la symétrisée de M^* une nouvelle relation, baptisée *connexion*, intéressante dans le contexte de l'analyse des données expérimentales car elle formalise l'idée de lacunes dans un croisement, tout en conservant certaines propriétés de la relation de croisement, notamment d'hérédité.

En conclusion, le paragraphe VI synthétise une partie des résultats énoncés en montrant que l'ensemble ordonné par implication des quinze relations symétriques définies dans le texte est un \cap -demi-treillis. Ce paragraphe se termine par trois problèmes.

L'Annexe A1 rappelle les notions indispensables ici sur les treillis.

Les Annexes A2 et A3 sont consacrées aux relations M^* et D^* dans un treillis d'abord quelconque, puis dans les treillis relativement complétés et géométriques. Enfin la dernière Annexe rassemble le vocabulaire nécessaire de théorie des graphes. Nous ne nous intéressons ici qu'à des relations binaires entre partitions; on pourrait plus généralement considérer des relations n -aires. De telles relations interviennent dans la planification d'expériences, où elles sont construites le plus souvent à partir des relations binaires étudiées ici. Pour ces développements on se reportera à la thèse de V. Duquenne (1980).

NB : les paragraphes sont numérotés : I, ..., VI, les annexes A1, ..., A4.

Dans chaque paragraphe les théorèmes, propositions ... sont numérotés 1, 2, ... Pour désigner la condition (e) de la proposition 4 du paragraphe III, on écrit 4(e) en III et III.4(e) ailleurs.

II. TREILLIS DES PARTITIONS ET DES RELATIONS D'EQUIVALENCE

Soit X un ensemble; une *partition* de X est un ensemble de parties disjointes et non vides de X dont l'union égale X . Nous notons $\pi, \rho, \sigma \dots$ des partitions de X , dont les classes seront énumérées quand cela sera nécessaire, en les indiciant "en bas" : $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p) \dots$ réservant les indices "en haut" pour énumérer des familles de partitions : (ρ^1, ρ^2, \dots) . A toute partition π de X est associée une *relation d'équivalence* sur X , notée R_π et caractérisée par :

$$xR_\pi x' \text{ ssi } (*) \text{ } x \text{ et } x' \text{ appartiennent à une même classe de } \pi.$$

L'ensemble P_X des partitions de X est ordonné par la relation de finesse :

$\pi \leq \rho$ ssi toute classe de ρ est union de classe(s) de π , ou ce qui est équivalent

$$\pi \leq \rho \text{ ssi toute classe de } \pi \text{ est incluse dans une classe de } \rho.$$

Dans la suite, nous ne considérons que des partitions d'un ensemble X fini, et noterons parfois P_n l'ensemble des partitions d'un ensemble à n éléments, car s'il existe une bijection entre deux ensembles, leurs treillis des partitions sont isomorphes.

A deux partitions $\pi, \rho \in P_X$ est associé un graphe (non orienté) noté $G(\pi, \rho)$, dont les sommets sont les classes de π et de ρ , deux classes $\pi_j \in \pi$ et $\rho_k \in \rho$ étant reliées par une arête ssi $\pi_j \cap \rho_k \neq \emptyset$. Ce graphe est donc bi-

(*) Pour abrégé, nous écrirons ssi pour si et seulement si.

parti. Lorsque $\pi_j \cap \rho_k \neq \emptyset$, on dit que les classes π_j et ρ_k sont jointes, ou que π_j rencontre ρ_k , ce que l'on notera, en suivant Ore, $\pi_j \chi \rho_k$. Deux classes π_j, ρ_k (resp. $\pi_j, \pi_{j'}$, ou encore $\rho_k, \rho_{k'}$) seront dites connectées parmi l'ensemble $\{\pi\} \cup \{\rho\}$ des classes de π et ρ , s'il existe une chaîne les joignant dans $G(\pi, \rho)$. La relation de connexion ainsi définie est clairement une équivalence sur $\{\pi\} \cup \{\rho\}$, ayant pour classes les classes connexes de $G(\pi, \rho)$.

THEOREME 1. (Birkhoff 1935) : L'ensemble ordonné $(P_X, <)$ est un treillis relativement complémenté et semi-modulaire supérieurement (i. e. un treillis géométrique).

Nous notons 0, 1 respectivement son minimum (la partition la plus fine de X, dont toutes les classes sont formées chacune d'un élément de X) et son maximum (la partition grossière de X en une seule classe); Ses opérations \wedge et \vee se caractérisent ainsi :

- l'infimum $\pi \wedge \rho$ de deux partitions $\pi, \rho \in P_X$ a pour classes les intersections non vides des classes de π et de ρ qui correspondent donc aux arêtes de $G(\pi, \rho)$;

- leur supremum $\pi \vee \rho$, soit la plus fine des partitions moins fines que π et ρ , peut être caractérisée au moyen du graphe $G(\pi, \rho)$: si deux classes π_j et ρ_k sont jointes elles sont incluses dans la même classe de $\pi \vee \rho$. Il en va de même si π_j et ρ_k sont connectées, d'où l'on déduit qu'une classe de $\pi \vee \rho$ est la réunion des classes de π, ρ appartenant à une même classe connexe de $G(\pi, \rho)$.

Si $\pi \vee \rho = 1$ nous notons $\pi \vee \rho$.

Nous aurons recours pour illustrer des énoncés ou des démonstrations à trois types de représentations, introduites maintenant sur un exemple :

Exemple : Soit $X = \{a, b, c, \dots, j, k, l\}$ $\theta = (cbd, aef, l, hg, ijk)$
 $\rho = (c, li, bda, h, gef, jk)$

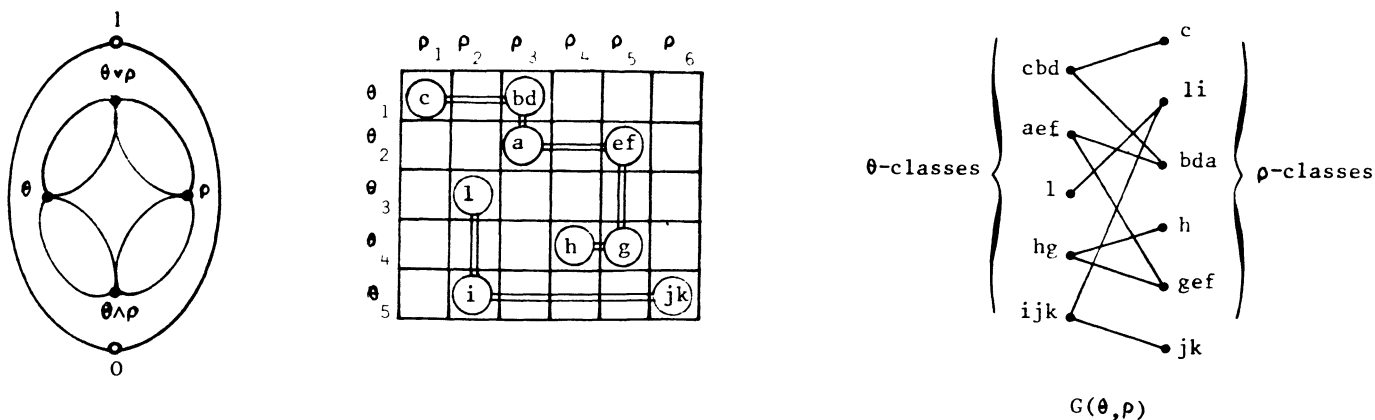


Figure 1.

La première représente les intervalles définis dans P_X par θ, ρ , leurs supremum et infimum, ce qui sera utile pour illustrer des propriétés latticielles. Les deux autres représentent le graphe $G(\theta, \rho)$; le tableau sera suggestif dès qu'interviennent dans un raisonnement des regroupements de classes de θ ou ρ (voir par exemple la proposition 2); on peut sur ce tableau représenter les classes du supremum $\theta \vee \rho$, en reliant les cases appartenant à une même classe connexe de $G(\theta, \rho)$ (Ces chemins ressemblent à ceux empruntés par une tour au jeu d'échec).

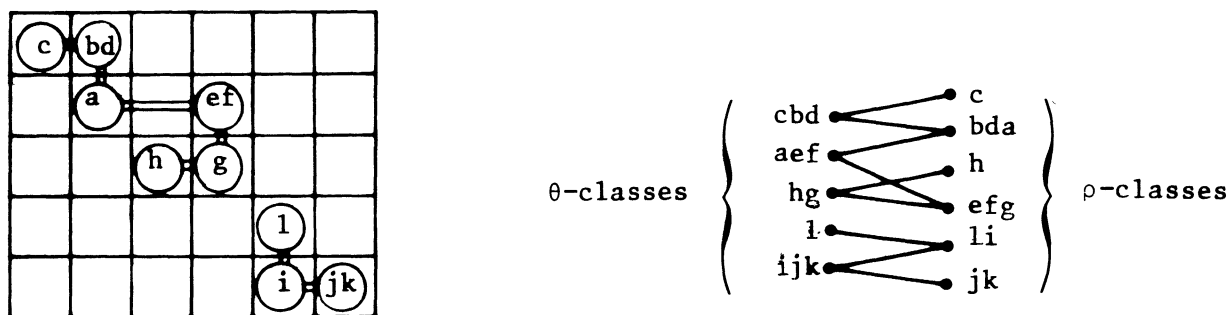


Figure 2.

Remarquons également qu'une permutation adéquate des lignes et des colonnes du tableau, ou des sommets du graphe, sépare les classes connexes, ce qui rend plus lisibles ces figures.

Une partition π' *succède* à π (ou couvre π), ce que l'on note $\pi' \succ \pi$ si l'on obtient π' en regroupant deux classes de π ; en particulier les successeurs de 0, qui sont les *atomes* de P_X ont chacun une classe à deux éléments et $n-2$ classes à un élément. Nous notons $c(\pi)$ le nombre de classes de π , la fonction c indique la *profondeur* de π dans P_X , i. e. la longueur de l'intervalle $[\pi, 1]$; le *rang* de π est donc $r(\pi) = n - c(\pi)$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises des propriétés de *décomposition* des intervalles du treillis P_X . Le treillis P est lui-même *irréductible* (Ore, 1942), ce résultat pouvant d'ailleurs s'obtenir comme cas particulier d'un théorème de décomposition des treillis géométriques (voir par exemple Gratzer, 1978 p. 183).

P_X étant semi-modulaire supérieurement, $\rho \succ \pi \wedge \rho$ entraîne $\pi \vee \rho \succ \pi$; en opposition, on a la propriété suivante :

PROPOSITION 2. Soit $\pi, \rho \in P_X$, ρ' un successeur de ρ appartenant à $[\rho, \pi \vee \rho]$; l'intervalle $[\pi \wedge \rho, \pi \wedge \rho']$ est alors booléen.

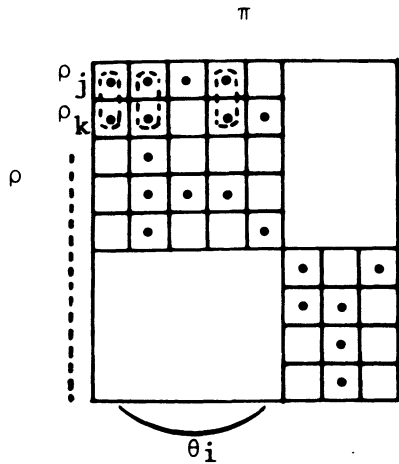


Figure 3.

Cette propriété est immédiate si l'on précise le nombre d'atomes de ce treillis booléen, ou si l'on considère le tableau associé à $G(\pi, \rho)$. Notons ρ' un successeur de ρ dans $[\rho, \pi \vee \rho]$, obtenu en faisant l'union de deux classes ρ_j, ρ_k contenues dans une même classe $\theta_i \in \pi \vee \rho$.

Nous notons par la suite de manière condensée $t(\rho')$ le nombre de classes de π dont θ_i est l'union, et $s(\rho')$ le nombre

de ces classes rencontrant ρ_j et ρ_k (sur l'exemple représenté ci-contre,

$t(\rho') = 5$ $s(\rho') = 3$). Alors, $[\pi \wedge \rho, \pi \wedge \rho']$ est isomorphe au treillis booléen $2^{s(\rho')}$. On a évidemment $0 \leq s(\rho') \leq t(\rho')$, l'égalité $s(\rho') = 0$ correspond à $\pi \wedge \rho = \pi \wedge \rho'$, l'égalité $s(\rho') = t(\rho')$ au cas où toutes les classes de π incluses dans θ_i rencontrent ρ_j et ρ_k .

Rappelons qu'une partition dont une seule classe contient plusieurs éléments de X est qualifiée de *singulière*; les atomes de P_X par exemple sont des partitions singulières. A toute partition $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ est associée la famille des partitions singulières maximales qu'elle majore :

$\theta \rightarrow (\tilde{\theta}^j)_{j=1, \dots, r}$ où $\tilde{\theta}^j$ a pour classes $\theta_j \in \theta$ et des classes ne contenant qu'un élément de X ; il est clair que $\theta = \bigvee_1^r \tilde{\theta}^j$. Cette propriété se généralise de la manière suivante.

Soit $\rho < \theta$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_s)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$; notons $(\theta^j)_{j=1, \dots, r}$ la famille de partitions appartenant à l'intervalle $[\rho, \theta]$ où chaque $\theta^j = (\theta_j, \rho_a, \rho_b, \dots, \rho_k)$ a pour classes $\theta_j \in \theta$ et des classes de ρ non incluses dans θ_j .

PROPOSITION 3. L'application $\psi : \pi[\rho, \theta^j] \rightarrow [\rho, \theta]$, $(\alpha^j)_{j=1, \dots, r} \rightarrow \bigvee_1^r \alpha_j$, est un isomorphisme : $[\rho, \theta] \simeq \pi[\rho, \theta^j]$.

Si l'on note n_j le nombre de classes de ρ formant par union la classe θ_j de θ^j , on a $[\rho, \theta^j] \simeq P_{n_j}$ d'où $[\rho, \theta] \simeq \prod_{j=1}^r P_{|\theta_j|}$. En particulier $[\rho, 1] \simeq P_{c(\rho)}$, fait remarquable qui soutend des propriétés récursives du

treillis des partitions. Dualement, il est clair que $[0, \theta] \simeq \prod_{j=1}^r P_{|\theta_j|}$.

Considérons maintenant $\pi, \rho \in P_X$ non comparables, $F = [\rho, \pi \vee \rho]$,

$\pi \vee \rho = \theta = (\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_r)$, et comme précédemment la famille $(\theta^j)_{j=1, \dots, r}$

où $\theta^j = (\theta_j, \rho_a, \dots, \rho_k)$; notons enfin $F^j = [\rho, \theta^j]$. D'après 3 on sait que

$$F \simeq \prod_1^r F^j ; \text{ de plus :}$$

PROPOSITION 4.

(a) $(\forall \alpha^1 \in F^1, \forall \alpha^2 \in F^2) (\alpha^1 \vee \alpha^2) \wedge \pi = (\alpha^1 \wedge \pi) \vee (\alpha^2 \wedge \pi)$.

(b) Soit $\alpha \in F$, $(\alpha^j)_{j=1, \dots, r} = \psi^{-1}(\alpha)$ et l'application $\varphi_\pi : F \rightarrow [\pi \wedge \rho, \pi]$, $\alpha \mapsto \alpha \wedge \pi$; alors : $\varphi_\pi(\alpha) = \varphi_\pi(\vee_1^r \alpha^j) = \vee_1^r (\alpha^j \wedge \pi)$.

(c) Posons $E = [\pi \wedge \rho, \pi]$; alors $E \simeq \prod_1^r [\pi \wedge \rho, \pi \wedge \theta^j]$.

Pour prouver (a), il suffit de remarquer que

α^1 et α^2 regroupent des classes de ρ qui appartiennent respectivement à deux classes connexes distinctes du graphe $G(\pi, \rho)$; (b) et (c) découlent directement de (a).

Cette proposition se résume également par un schéma de décomposition de l'application φ_π ,

où l'on note $E^j = [\pi \wedge \rho, \pi \wedge \theta^j]$:

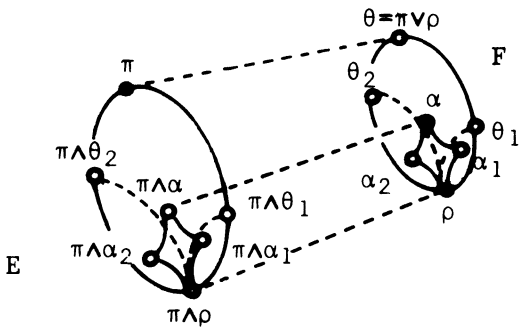
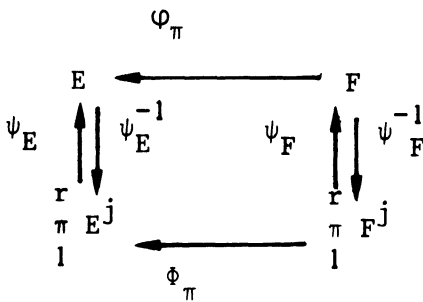


Figure 4.



L'intérêt de cette décomposition sera de pouvoir étendre à l'intervalle F des propriétés de φ_π (injectivité, sup-morphisme) posées uniquement au niveau des idéaux $(F^j)_{j=1, \dots, r}$ de F .

Où Φ_π est l'application produit $(\varphi_\pi, \varphi_\pi, \dots, \varphi_\pi)$.

Enfin nous noterons dans la suite ε_X le treillis des équivalences sur X , qui est donc isomorphe à P_X et a pour opération infimum l'intersection ensembliste des relations, le supremum de deux équivalences étant la fermeture tran-

sitive de leur union : $x R_{\Pi} \wedge R_{\rho} x' \text{ ssi } ((x R_{\Pi} x' \text{ et } x R_{\rho} x'),$

$x R_{\Pi} \vee R_{\rho} x' \text{ ssi il existe } x_0 = x, x_1, \dots, x_m = x' \text{ tel}$
 que pour tout $k=1, \dots, m : (x_{k-1} R_{\Pi} x_k \text{ ou } x_{k-1} R_{\rho} x_k).$

On note généralement RoR' , ou de façon plus compacte RR' , la *composée* de deux équivalences R, R' soit, la relation définie par : $xRoR'y$ ssi il existe z tel que xRz et $zR'y$. La composition de deux équivalences se généralise en une opération n -aire définie par : $xR_1R_2\dots R_n y$ ssi il existe une suite d'éléments de $X : z_1, \dots, z_{n-1}$ telle que xR_1z_1 et $z_1R_2z_2\dots z_{n-1}R_n y$. Comme $RR\dots R = R$ on supposera toujours que les termes consécutifs d'un tel produit de composition sont distincts. Considérons maintenant des suites de composition alternées de deux équivalences R et S . On a les inclusions d'ensembles (en considérant R et S comme des parties de X^2) :

$$\begin{array}{ccccccc} R & & RS & & RSR & & \\ S \subseteq & RUS \subseteq & SR \subseteq & RSUSR \subseteq & SRS \dots \subseteq & RVS \end{array}$$

Notons $(R\dots R)_k$ et $(R\dots S)_k$ des suites de compositions, commençant par R , respectivement pour k impair et pair; de telles suites vérifient les propriétés élémentaires suivantes (que le lecteur pourra démontrer) :

PROPOSITION 5. Si k est pair :

(a) $(S\dots R)_k$ est la relation réciproque de $(R\dots S)_k$.

(b) $(R\dots S)_k$ est symétrique ssi $(R\dots S)_k = (S\dots R)_k$.

(c) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(c1) $(R\dots S)_k$ équivalence (c1)' $(S\dots R)_k$ équivalence

(c2) $(R\dots S)_k = RvS$ (c2)' $(S\dots R)_k = RvS$

(c3) $(R\dots S)_k \subseteq (S\dots R)_k$ (c3)' $(S\dots R)_k \subseteq (R\dots S)_k$

(c4) $(R\dots S)_k = (S\dots R)_k$

(c5) $(R\dots S)_k = (S\dots R)_k = RvS$

Si k est impair :

(d) $(R\dots R)_k$ est symétrique.

(e) $(R\dots R)_k \subseteq (S\dots S)_k$ ssi $(S\dots S)_k$ est une équivalence ou ssi
 $(S\dots S)_k = RvS$.

(f) $(R\dots R)_k = (S\dots S)_k$ ssi $(R\dots R)_k = (S\dots S)_k = RvS$

DEFINITION 6. Deux équivalences R et S sont *k-permutables* ($k \geq 1$) ssi $(RS\dots)_k = (SR\dots)_k = RvS$.

Il résulte de la proposition 5 que pour k quelconque R et S sont k-permutables ssi $(RS\dots)_k = (SR\dots)_k$. Si k est pair on a six autres caractérisations de R et S k-permutables dont notamment chacune des deux égalités de la définition : $(RS\dots)_k = RvS$ ou $(SR\dots)_k = RvS$. Par contre, si k est impair l'égalité $(RS\dots)_k = RvS$ n'implique que l'inclusion $(SR\dots)_k \subseteq (RS\dots)_k$; la k-permutabilité se décompose alors en deux relations non symétriques.

La notion de k-permutabilité est due à Aigner qui en fait une étude approfondie (1972). Elle généralise les notions de permutabilité ($k = 2$) et de 3-permutabilité qui étaient déjà classiques. Noter que deux équivalences k-permutables sont aussi ℓ -permutables pour $\ell > k$.

N.B. Pour R relation, $x \not R y$ signifie que x n'est pas dans la relation R avec y.

III. RELATIONS DE CROISEMENT ET DE PERMUTABILITE

Nous étudions dans ce paragraphe la relation de permutabilité entre deux partitions, en commençant par le cas particulier, mais intéressant, du croisement.

DEFINITION 1. Deux partitions $\pi, \rho \in P_X$ sont *croisées* ssi toute π -classe rencontre toute ρ -classe.

Nous notons $*$ la relation de *croisement*, qui est évidemment symétrique et satisfait les propriétés élémentaires suivantes :

- . $\pi * \rho$ entraîne $\prod \bigvee \rho$ (où $\prod \bigvee \rho$ dénote l'égalité $\prod \vee \rho = 1$).
- . Pour tout π de P_X , $\pi * 1$.
- . $\pi \leq \rho$ et $\pi * \rho$ entraîne $\rho = 1$.
- . $\pi * \rho$ entraîne, pour tout $\pi' \geq \pi$ et $\rho' \geq \rho$, $\pi' * \rho'$ (hérédité de la relation $*$).

La relation de croisement admet d'autres caractérisations :

PROPOSITION 2. Pour deux partitions π, ρ de P_X , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\pi * \rho$.
- (b) Le graphe $G(\pi, \rho)$ est biparti complet.
- (c) $c(\pi \wedge \rho) = c(\pi) \times c(\rho)$.
- (d) $R_\pi R_\rho = R_\rho R_\pi = X^2$.
- (e) Pour tout ρ' tel que $\rho' \not\geq \rho$, $[\pi \wedge \rho, \pi \wedge \rho']$ est isomorphe au treillis booléen $2^{c(\pi)}$.

- (f) Pour tout $\rho^1, \rho^2 \in [\rho, 1]$ tels que $\rho^1 \leq \rho^2$, $[\pi \wedge \rho^1, \pi \wedge \rho^2]$ est isomorphe au treillis booléen $2^{c(\pi)}$.
- (g) L'intervalle $[\pi \wedge \rho, \pi]$ est isomorphe au produit direct de $c(\pi)$ treillis $P_{c(\rho)}$.

La relation de croisement entre deux partitions est ainsi caractérisée par des conditions portant sur le graphe associé ((b) et (c)), sur les équivalences correspondantes comme en (d), ou sur les intervalles de P_X ((e), (f) et (g)). On retrouvera ces différents types de caractérisations pour la plupart des relations entre partitions que nous étudions par la suite.

PROPOSITION 3. Pour deux partitions π, ρ de P_X , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Quelles que soient $\pi_i, \pi_j \in \pi$ et $\rho_k, \rho_\ell \in \rho$ vérifiant $\pi_i \chi_{\rho_k}$ et $\pi_i \chi_{\rho_\ell}$, on a

$$\pi_j \chi_{\rho_k} \text{ ssi } \pi_j \chi_{\rho_\ell}.$$

- (b) Toute paire de classes $\pi_j \in \pi, \rho_k \in \rho$ incluses dans une même classe θ_i de $\pi \vee \rho$ est telle que $\pi_j \chi_{\rho_k}$.

DEFINITION 4. Deux partitions $\pi, \rho \in P_X$ satisfaisant aux conditions de 3 sont dites *permutables*, ce que l'on note $\pi \square \rho$.

Suivant le contexte, on pourra également dire que π et ρ *permutent*, la relation \square de *permutabilité* est évidemment symétrique; nous en rappelons ci-dessous quelques caractérisations :

PROPOSITION 4. Pour deux partitions $\pi, \rho \in P_X$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (c) $\pi \square \rho$.
- (d) $G(\pi, \rho)$ est union (disjointe) de graphes bipartis complets.
- (e) $R_{\pi \rho} R_{\rho \pi} = R_{\rho \pi} R_{\pi \rho}$ (ou $R_{\pi \rho} R_{\rho \pi}$ comparable à $R_{\rho \pi} R_{\pi \rho}$).
- (f) $R_{\pi \rho} R_{\rho \pi}$ est une équivalence (ou $R_{\rho \pi} R_{\pi \rho}$ équivalence).
- (g) $R_{\pi \vee \rho} R_{\rho \vee \pi} = R_{\rho \vee \pi} R_{\pi \vee \rho}$ (ou $R_{\rho \vee \pi} R_{\pi \vee \rho} = R_{\pi \vee \rho} R_{\rho \vee \pi}$).
- (h) Pour tout ρ' successeur de ρ dans $[\rho, \pi \vee \rho]$, l'intervalle $[\pi \wedge \rho, \pi \wedge \rho']$ est isomorphe au treillis booléen $2^{t(\rho')}$ ($t(\rho')$ est défini en II.2).

Ce sont apparemment les Dubreil (1937, p.706) qui introduisent la relation de permutabilité, mais sous le nom d'équivalences *associables* (terme que nous réserverons ci-dessous à un sens plus restreint); Ore (1942) parle lui d'équivalences *commutables*, ce dernier terme étant classiquement traduit en

français par permutable. La condition (d) portant sur $G(\pi, \rho)$ s'exprime également en disant que toutes les composantes connexes sont de diamètre inférieur ou égal à 2. Si $G(\pi, \rho)$ est connexe on retrouve le cas des partitions croisées. Les conditions précédentes se trouvent dans Dubreil (1939, p. 72), Ore (1942, p. 590) ou Birkhoff (1967, p. 95); la condition d'intervalle (h) est une conséquence directe de II.2. (e), (f) et (g) découlent de II.5. Notons également l'existence d'une caractérisation latticielle due à Aigner (1972, p. 286), qui est un cas particulier de son théorème général sur la k -permutabilité des partitions. Rappelons maintenant quelques propriétés de la permutableté, démontrées dans l'article des Dubreil (1939) (sauf la proposition 7).

PROPOSITION 5.

- (a) $\pi < \rho$ entraîne $\pi \sqcap \rho$.
- (b) $\pi \sqcap \rho^1$ et $\pi \sqcap \rho^2$ entraîne $\pi \sqcap (\rho^1 \vee \rho^2)$.
- (c) $\pi \sqcap \rho$ et $\pi' \geq \pi$ entraîne $\pi \sqcap (\pi' \wedge \rho)$.
- (d) $\pi \sqcap \rho$ entraîne, pour tout $\rho' \in [\rho, \pi \vee \rho]$, $\pi \sqcap \rho'$.
- (e) $\pi \sqcap \rho$ entraîne, pour tout $\rho' \geq \rho$, $\rho' \wedge (\pi \vee \rho) = (\rho' \wedge \pi) \vee \rho$ (comodularité $\pi M^* \rho$).

PROPOSITION 6. Si $\pi \sqcap \rho$, l'ensemble des $\sigma \in [\pi \wedge \rho, \pi]$ vérifiant $\sigma \sqcap \rho$ est un sous-treillis de $[\pi \wedge \rho, \pi]$, image isomorphe de $[\rho, \pi \vee \rho]$ par l'application $\varphi_\pi : \alpha \rightarrow \alpha \wedge \pi$.

PROPOSITION 7.

Si l'on a $\pi \sqcap \sigma$, $(\pi \wedge \sigma) \vee \rho = \sigma$ et $(\pi \wedge \sigma) \sqcap \rho$, alors $\pi \vee \rho = \pi \vee \sigma$ et $\pi \sqcap \rho$.

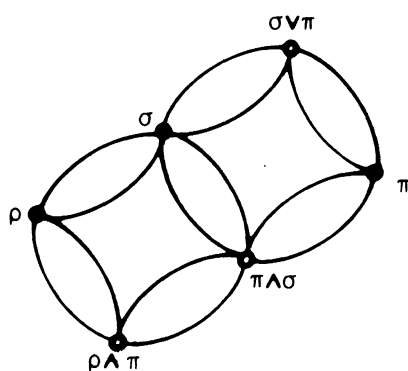
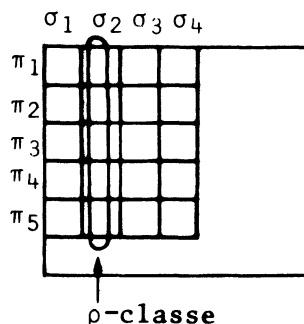


Figure 5



on a clairement $\rho \vee \pi = \rho \vee (\pi \wedge \sigma) \vee \pi = \sigma \vee \pi$.

Comme $\sigma \sqcap \pi$, toute σ -classe rencontre

toutes les π -classes incluses dans la

même $\sigma \vee \pi$ -classe qu'elle-même. De même

toute ρ -classe rencontre toute $\pi \wedge \sigma$ -classe incluse dans la même σ -classe.

A fortiori toute ρ -classe rencontre toutes les π -classes incluses dans la

même $\sigma \vee \pi$ -classe qu'elle-même (voir fig. 5) ce qui établit $\rho \sqcap \pi$.

Cette propriété exprime un genre de transitivité et de réciproque de 5(c) et 6; elle est utile lorsqu'on étudie la relation n-aire de croisement dans P_X . Etudions enfin un cas particulier de partitions permutables :

PROPOSITION 8. Pour deux partitions π, ρ de P_X , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Toute classe θ_i de $\pi \vee \rho$ est une classe de π ou de ρ .
- (b) Toute π -classe π_i non incluse dans une ρ -classe est union de ρ -classes et symétriquement toute ρ -classe ρ_k non incluse dans une π -classe est union de π -classes.
- (c) $G(\pi, \rho)$ est union (disjointe) de graphes (bipartis) étoiles.
- (d) $R_\pi \cup R_\rho$ est une équivalence.
- (e) $R_\pi \vee R_\rho = R_{\pi \cup \rho}$.
- (f) Pour tout $\theta \in P_X$, $\theta \wedge (\pi \vee \rho) = (\theta \wedge \pi) \vee (\theta \wedge \rho)$.
- (g) Pour tout $\sigma \in [\pi \wedge \rho, \pi], \sigma \sqsupset \rho$.
- (h) $\pi \sqsupset \rho$ et (π, ρ) est une paire modulaire ($\pi M \rho$ et $\rho M \pi$).

DEFINITION 9. Deux partitions satisfaisant aux conditions de 8 sont dites *associables*. Cette notion semble due aux Dubreil (1939, p. 69) qui utilisaient le terme de *partitions semi-consécutives* évocateur de 8(b); Ore (1942) parle lui de partitions associables. Les conditions de 8 (excepté (h)) sont démontrées par ces auteurs. 8(f) a pour conséquence qu'un sous-treillis de partitions deux à deux associables est un sous-treillis distributif de P_X .

IV. RELATIONS M, M* et D* dans P_X

Nous étudions dans ce paragraphe comment se particularisent dans le treillis des partitions les relations M, M* et D* dont les définitions et propriétés générales sont rappelées en Annexe (A2 et A3). La première de ces relations se distingue particulièrement des deux autres dans P_X du fait qu'elle y est symétrique :

PROPOSITION 1. Les conditions suivantes sont équivalentes dans P_X :

- (a) (π, ρ) est une *paire modulaire* : $\pi M \rho$ et $\rho M \pi$.
- (b) $\pi M \rho$ (ou $\rho M \pi$).
- (c) π (resp. ρ) est un complément relatif minimal de ρ (resp. de π) dans l'intervalle $[\pi \wedge \rho, \pi \vee \rho]$.
- (d) $r(\pi) + r(\rho) = r(\pi \wedge \rho) + r(\pi \vee \rho)$.

- (e) $c(\pi) + c(\rho) = c(\pi \wedge \rho) + c(\pi \vee \rho)$.
- (f) $G(\pi, \rho)$ est une forêt.

Les équivalences (a)...(d) proviennent du fait qu'un treillis semi-modulaire supérieurement est M -symétrique et des résultats concernant la relation M dans les treillis géométriques (notamment la propriété duale de A3-6). L'équivalence (d) \Leftrightarrow (e) résulte de l'égalité $r(\pi) = n - c(\pi)$ (voir II). Pour montrer l'équivalence de (e) et (f), il suffit de remarquer que le graphe $G(\pi, \rho)$ a $c(\pi) + c(\rho)$ sommets, $c(\pi \wedge \rho)$ arêtes et $c(\pi \vee \rho)$ composantes connexes et donc que son nombre cyclomatique égale $c(\pi \vee \rho) + c(\pi \wedge \rho) - c(\pi) - c(\rho)$. Il est rappelé en A4 que le nombre cyclomatique d'un graphe est nul ssi c'est une forêt, ce qui prouve l'assertion.

Etudions maintenant la relation M^* , caractéristique des couples de partitions *co-modulaires* dans P_X :

PROPOSITION 2. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\pi M^* \rho$, c'est-à-dire pour tout $\rho' \in [\rho, \pi \vee \rho]$ $(\rho' \wedge \pi) \vee \rho = \rho'$.
- (b) Tout successeur ρ' de ρ dans $[\rho, \pi \vee \rho]$ est tel que $\rho' \wedge \pi \neq \rho \wedge \pi$: ρ est un complément maximal de π dans l'intervalle $[\pi \wedge \rho, \pi \vee \rho]$.
- (c) Pour toute paire $\rho_j, \rho_k \in \rho$ de ρ -classes incluses dans une même classe θ_i de $\pi \vee \rho$ il existe au moins une π -classe jointe à ρ_j et ρ_k .
- (d) Dans ε_X : $R_{\rho} R_{\pi} R_{\rho} = R_{\pi} \vee R_{\rho}$.
- (e) $R_{\rho} R_{\pi} R_{\rho}$ est une équivalence.
- (f) $R_{\pi} R_{\rho} R_{\pi} \subseteq R_{\rho} R_{\pi} R_{\rho}$.

L'équivalence (a) \Leftrightarrow (b) est une conséquence de A3.6; (c) est une traduction de (b), exprimée au niveau des classes de π et ρ , ou du graphe $G(\pi, \rho)$, qui est donc tel que toute paire de ρ -classes connectées l'est par une chaîne de longueur 2. L'équivalence (a) \Leftrightarrow (b) est proposée en exercice par Birkhoff (1967, p. 98), voir également Aigner (1972, p. 283); l'équivalence (a) \Leftrightarrow (c) est montrée par Ore (1942, p. 581) en raisonnant directement sur les classes.

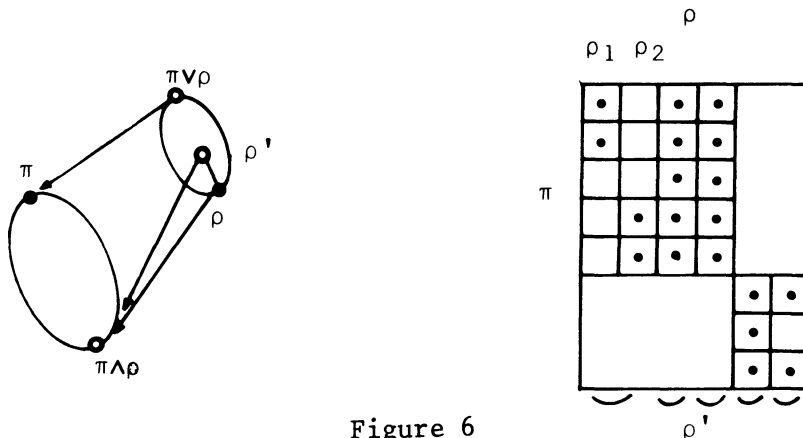


Figure 6

Pour illustrer l'équivalence (b) \Leftrightarrow (c), prenons $\rho_1, \rho_2 \in \rho$ ne vérifiant pas 2.(c) et posons $\rho' = (\rho_1 \cup \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_k, \dots)$; il est clair que $\rho' \wedge \pi = \rho \wedge \pi$, d'où $\pi M^* \rho$. L'équivalence de (d), (e) et (f) résulte de II.5 avec $k = 3$.

PROPOSITION 3. Si deux partitions π et ρ sont permutables, elles forment une paire co-modulaire : $\pi \square \rho \Rightarrow \pi M^* \rho$ & $\rho M^* \pi$.

Cela ressort directement de la caractérisation 2.(c) et de III.4.(d).

Pour étudier maintenant la relation D^* , notons comme précédemment (voir II.4) $\pi \vee \rho = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ et $(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^r)$ la famille de partitions définies par $\theta^j = (\theta_j, \dots, \rho_k, \dots)$.

LEMME 4 :

$\pi D^* \rho$ ssi $(\pi \wedge \theta^j) D^* \rho$ pour tout $j \in [1, \dots, r]$

D'après A.2.15, la condition annoncée est nécessaire pour que l'on ait $\pi D^* \rho$; réciproquement, soit $\alpha, \beta \in [\rho, \pi \vee \rho]$ deux partitions non comparables,

$(\alpha^j)_{j=1, \dots, r} = \psi^{-1}(\alpha)$, $(\beta^j)_{j=1, \dots, r} = \psi^{-1}(\beta)$ où ψ est l'isomorphisme

$\prod_{j=1}^r [\rho, \theta^j] \rightarrow [\rho, \pi \vee \rho]$ (voir II.4).

Par hypothèse : $\pi \wedge (\alpha^j \vee \beta^j) = (\pi \wedge \alpha^j) \vee (\pi \wedge \beta^j)$ ($\forall j = 1, \dots, r$).

$$\begin{aligned} \pi \wedge (\alpha \vee \beta) &= \pi \wedge \left[\bigvee_1^r (\alpha^j) \vee \bigvee_1^r (\beta^j) \right] = \pi \wedge \left[\bigvee_1^r (\alpha^j \vee \beta^j) \right] \\ &= \bigvee_1^r [\pi \wedge (\alpha^j \vee \beta^j)] && \text{d'après II.4} \\ &= \bigvee_1^r [(\pi \wedge \alpha^j) \vee (\pi \wedge \beta^j)] && \text{par hypothèse} \\ &= \left[\bigvee_1^r (\pi \wedge \alpha^j) \right] \vee \left[\bigvee_1^r (\pi \wedge \beta^j) \right] = [\pi \wedge \alpha] \vee [\pi \wedge \beta] && \text{d'après II.4.} \end{aligned}$$

On pourra donc, lorsqu'on veut prouver $\pi D^* \rho$ restreindre son étude aux idéaux $[\rho, \theta^j]$ de $[\rho, \pi \vee \rho]$, ce qui revient quand on raisonne sur le graphe $G(\pi, \rho)$ à en considérer séparément les composantes connexes.

THEOREME 5 : Soit $\pi, \rho \in \mathcal{P}_X$; $\pi D^* \rho$ ssi toute paire ρ', ρ'' de successeurs de ρ appartenant à un même idéal $[\rho, \theta^j]$ de $[\rho, \pi \vee \rho]$ est telle que :

$$(\pi \wedge \rho') \vee (\pi \wedge \rho'') = \pi \wedge (\rho' \vee \rho'').$$

Cette condition est évidemment nécessaire pour que $\pi D^* \rho$; montrons inversement qu'elle n'est pas remplie si $\pi \not\leq^* \rho$. D'après le lemme 4, $\pi \not\leq^* \rho$ entraîne l'existence d'au moins deux éléments non comparables α, β appartenant à un même idéal $[\rho, \theta^j]$ de $[\rho, \pi \vee \rho]$ tels que : $(\pi \wedge \alpha) \vee (\pi \wedge \beta) < \pi \wedge (\alpha \vee \beta)$.

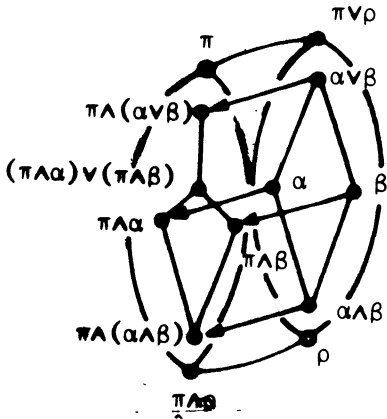


Figure 7

Il existe donc au moins une classe de $\pi \wedge (\alpha \vee \beta)$ qui est l'union de plusieurs classes distinctes de $(\pi \wedge \alpha) \vee (\pi \wedge \beta)$; notons $\pi * \cap c^*$ cette classe, où $c^* \in \alpha \vee \beta$ et c^* est l'union des éléments d'une classe connexe $\mathcal{C}^* = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots\}$ du graphe $G(\alpha, \beta)$. La famille $\mathcal{D}^* = \{\pi * \cap \alpha_1, \pi * \cap \alpha_2, \dots, \pi * \cap \beta_i, \dots\}$ est donc formée de plusieurs classes connexes disjointes de $G(\pi \wedge \alpha, \pi \wedge \beta)$, d'où l'existence de deux termes de \mathcal{D}^* : $\pi * \cap \alpha_k$ et $\pi * \cap \alpha_1$, distincts, non vides et non connectés dans ce

graphe. Soit $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}^*$ une chaîne élémentaire (sans cycle) de $G(\alpha, \beta)$ joignant α_k et α_1 : $\mathcal{C}' = \{\gamma_1 = \alpha_k, \gamma_2, \dots, \gamma_j, \dots, \gamma_n = \alpha_1\}$ où $n \geq 3$ et où les indices pairs et impairs correspondent respectivement aux classes de β et α . D'après la remarque précédente, toute chaîne \mathcal{C}' joignant α_k et α_1 a au moins deux termes consécutifs γ_{j-1} et γ_j , $j \in [2, n]$ tels que $\pi * \cap (\gamma_{j-1} \cap \gamma_j) = \emptyset$ (on peut avoir en particulier un ou plusieurs termes γ_j , $j \in [2, n-1]$ disjoints de $\pi *$). Notons ρ_a, ρ_b, ρ_c des classes de ρ choisies telles que : $\rho_a \subseteq \alpha_k$ & $\rho_a \not\leq \pi *$, $\rho_c \subseteq \alpha_\rho$ & $\rho_c \not\leq \pi *$ (de telles classes existent puisque α_k et α_ρ sont l'union de ρ -classes et que l'on a conjointement $\pi * \not\leq \alpha_k$ & $\pi * \not\leq \alpha_1$), et $\rho_b \subseteq (\gamma_{j-1} \cap \gamma_j)$ (d'où $\pi * \cap \rho_b = \emptyset$ puisque $\pi * \cap (\gamma_{j-1} \cap \gamma_j) = \emptyset$); les classes ρ_a, ρ_b, ρ_c sont incluses dans la même classe θ_j de $\pi \vee \rho$ puisque $\alpha, \beta \in [\rho, \theta^j]$. Notons enfin ρ' et ρ'' les successeurs de ρ définis par : $\rho' = (\rho_a \cup \rho_b, \rho_c, \dots, \rho_i, \dots)$ $\rho'' = (\rho_a, \rho_b \cup \rho_c, \dots, \rho_i, \dots)$; ils appartiennent tous deux à l'idéal $[\rho, \theta^j]$ de $[\rho, \pi \vee \rho]$. D'après l'inégalité distributive $(\pi \wedge \rho') \vee (\pi \wedge \rho'') \leq \pi \wedge (\rho' \vee \rho'')$, mais l'égalité est exclue car $\pi * \cap \rho_a = \pi * \cap (\rho_a \cup \rho_b)$ et $\pi * \cap \rho_c = \pi * \cap (\rho_b \cup \rho_c)$ sont respectivement des classes de $\pi \wedge \rho'$ et $\pi \wedge \rho''$ non connectées dans $G(\pi \wedge \rho', \pi \wedge \rho'')$ alors que ρ' et ρ'' sont jointes dans $G(\rho', \rho'')$; $\pi * \cap \rho_a$ et $\pi * \cap \rho_c$ sont donc deux classes distinctes de $(\pi \wedge \rho') \vee (\pi \wedge \rho'')$, bien que leur union soit une classe de $\pi \wedge (\rho' \vee \rho'')$, ce qui achève la démonstration.

Ce théorème présente l'avantage de restreindre encore le nombre d'égalités distributives à établir pour prouver $\pi D^* \rho$ puisqu'il suffit d'examiner les paires de successeurs de ρ regroupant deux parmi trois ρ -classes incluses

dans une même $\pi\nu\rho$ -classe. Notons que la caractérisation de $\pi D^*\rho$ s'énonce très simplement : $\pi D^*\rho$ ssi il existe trois classes $\rho_a, \rho_b, \rho_c \subset \theta_j \in \pi\nu\rho$, et $\pi^* \in \pi$ telles que : $\pi^* \cap \rho_a, \pi^* \cap \rho_c, \pi^* \cap \rho_b = \emptyset$. On en tire directement les caractérisations suivantes de la relation D^* :

THEOREME 6 : Les conditions suivantes sont équivalentes dans P_X :

- (a) $\pi D^*\rho$.
- (b) Toute $\pi\nu\rho$ -classe θ_j est telle qu'il existe (une ou) des π -classe(s) rencontrant toutes les ρ -classes incluses dans θ_j , les autres π -classes incluses dans θ_j étant chacune incluse dans une ρ -classe.

(c) $[\pi \wedge \rho, \pi] \simeq \prod_{k=1}^{c(\pi\nu\rho)} \prod_{j=1}^{x_{\pi}(k)} P_{c_k(\rho)}$ où $x_{\pi}(k)$ est le nombre de π -classes rencontrant toutes les ρ -classes formant $\theta_k \in \pi\nu\rho$, et $c_k(\rho)$ est le nombre de ρ -classes formant θ_k .

(d) $G(\pi, \rho)$ est union (disjointe) de graphes constitué chacun d'un sous-graphe biparti complet et de π -sommets joints chacun à un seul ρ -sommets.

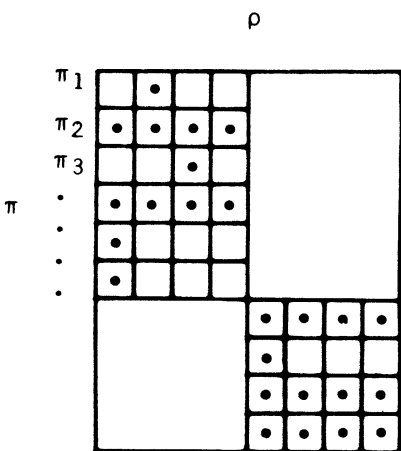


Figure 8.

L'équivalence entre (b) et (c) résulte de 4, II.3 et du fait que le treillis des partitions est irréductible. On peut vérifier sur la figure ci-contre la propriété A2.15 selon qui : $\pi D^*\rho$ entraîne, pour tout $\rho' \in [\rho, \pi\nu\rho]$, $\pi D^*\rho'$ et $\pi D^*\rho$ n'entraîne pas, pour tout $\pi' \in [\pi, \pi\nu\rho]$, $\pi' D^*\rho$ car la propriété caractéristique de D^* se conserve lorsqu'on regroupe des colonnes du tableau, mais ne se conserve pas lorsqu'on en regroupe des des lignes (par exemple π_1, π_3).

La caractérisation 6(d) a pour conséquence la

PROPOSITION 7. Dans P_X , $\pi \sqcap \rho$ entraîne $\pi D^*\rho$ et $\rho D^*\pi$.

Considérons maintenant le cas particulier de relation D^* , où les composantes de $G(\pi, \rho)$ sont le plus "incomplètes" possible :

DEFINITION 8. Soit I^* la relation binaire sur P_X définie par : $\pi I^*\rho$ ssi toute $\pi\nu\rho$ -classe θ_j , est telle qu'il existe une (et une seule) π -classe incluse dans θ_j qui rencontre toutes les ρ -classes formant θ_j , les autres π -classes incluses dans θ_j étant chacune incluse dans une ρ -classe.

Deux partitions associables π, ρ sont évidemment telles que $\pi I^*\rho$ et $\rho I^*\pi$.

PROPOSITION 9. Les conditions suivantes sont équivalentes dans P_X :

- (a) $\pi I^* \rho$.
- (b) $[\pi \wedge \rho, \pi] \simeq [\rho, \pi \vee \rho]$
- (c) $\pi M^* \rho$ et π, ρ paire modulaire.
- (d) ρ est un complément maximal et minimal de π dans l'intervalle $[\pi \wedge \rho, \pi \vee \rho]$
- (e) $G(\pi, \rho)$ est une forêt telle que toute paire de ρ -classes connectées l'est par une chaîne de longueur 2.

Les équivalences (a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (e), initialement montrées par Ore en raisonnant sur les classes découlent directement du théorème 6; (b) \Leftrightarrow (c) est vérifié dans tout treillis, (c) \Leftrightarrow (d) l'est dans les treillis relativement complétés (voir A3.6 et sa duale).

Aigner (1972) a introduit une relation sur P_X , que nous noterons ici A^* , et qui est intermédiaire entre M^* et D^* (i.e. $\pi D^* \rho \Rightarrow \pi A^* \rho \Rightarrow \pi M^* \rho$) :

DEFINITION 10. $\pi A^* \rho$ ssi dans toute $\pi \vee \rho$ -classe θ_k il existe au moins une π -classe rencontrant toutes les ρ -classes incluses dans θ_k .

Il en a donné les caractérisations suivantes :

PROPOSITION 11. Les conditions suivantes sont équivalentes dans P_X :

- (a) $\pi A^* \rho$.
- (b) Pour tout $\sigma \in [\pi \wedge \rho, \pi \vee \rho]$, $r(\sigma) \leq r((\sigma \wedge \pi) \vee \rho)$.
- (c) Il existe un complément minimal τ de ρ dans $[\pi \wedge \rho, \pi \vee \rho]$ tel que $\tau \leq \pi$ et $\tau M^* \rho$ (i.e. il existe un élément $\tau \in [\rho \wedge \pi, \pi]$ tel que ρ soit un complément maximal et minimal de τ dans $[\rho \wedge \pi, \pi \vee \rho]$).

Nous en rappellerons la démonstration car elle ne s'obtient pas comme conséquence de résultats plus généraux.

(a) \Rightarrow (b) : Soit $\sigma \in [\pi \wedge \rho, \pi \vee \rho]$; dans chaque $\pi \vee \rho$ -classe θ_k , choisissons une π -classe π_k qui y rencontre toutes les ρ -classes. π_k se rencontre en x_k $\sigma \wedge \pi$ -classes où $x_k \leq c_k(\sigma)$, $c_k(\sigma)$ notant le nombre de σ -classes incluses dans θ_k . Comme toute ρ -classe incluse dans θ_k rencontre une de ces x_k $\sigma \wedge \pi$ -classes, on a $c_k((\sigma \wedge \pi) \vee \rho) \leq x_k \leq c_k(\sigma)$, d'où $c((\sigma \wedge \pi) \vee \rho) \leq c(\sigma)$.

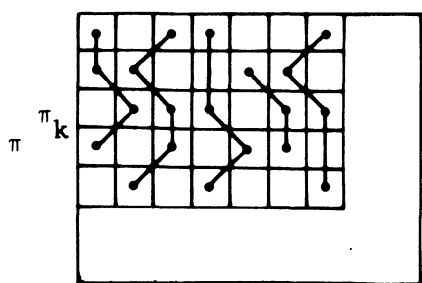


Figure 9.

(b) \Rightarrow (a) : Posons $\pi A^* \rho$ et raisonnons dans $\theta_k \in \pi \vee \rho$; notons π_k une classe de π rencontrant le maximum de classes de ρ incluses dans θ_k et n_k ce maximum. On peut toujours construire une partition de θ_k , notée $(B_j)_{j=1, \dots, n_k}$ où chaque

B_j ne contient au plus qu'une $\pi \wedge \rho$ -classe incluse dans chaque π -classe (voir tableau ci-dessus). Soit σ la partition de X obtenue en adjoignant à la famille $(B_j)_{j=1, \dots, n_k}$ les π -classes non incluses dans θ_k . On a clairement

$$\sigma \wedge \pi = \rho \wedge \pi \text{ d'où } (\sigma \wedge \pi) \vee \rho = \rho \text{ alors que } r(\sigma) > r(\rho) \text{ (car } n_k < c_k(\rho)\text{)}.$$

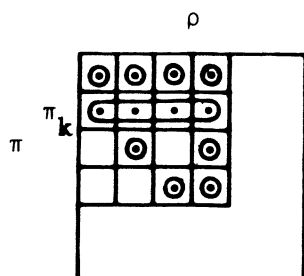


Figure 10.

(a) \Rightarrow (c) : choisissons dans chaque $\pi \vee \rho$ -classe θ_k une π -classe qui y rencontre toutes les ρ -classes. Soit τ la partition obtenue en adjoignant aux classes

$(\pi_k)_{k=1, \dots, c(\pi \vee \rho)}$ les classes de $\pi \wedge \rho$ (non incluses dans les π_k); τ vérifie la propriété caractéristique de

$\tau \perp \rho$, et est un complément de ρ dans $[\pi \wedge \rho, \pi \vee \rho]$.

(c) \Rightarrow (a) : on a évidemment les implications $\tau \perp \rho \Rightarrow \tau \wedge \rho \Rightarrow \tau \wedge \pi \wedge \rho \Rightarrow \tau \wedge \pi \wedge \rho \forall \pi \in [\tau, \tau \vee \rho]$.

Les implications $\pi \perp \rho \Rightarrow \pi \wedge \rho \Rightarrow \pi \vee \rho$ admettent la réciproque suivante, qui complète les caractérisations de la relation \perp données en 9 :

PROPOSITION 12. Les conditions suivantes sont équivalentes dans P_X :

- (a) $\pi \perp \rho$.
- (b) $\pi \vee \rho$ et π, ρ paire modulaire.
- (c) $\pi \wedge \rho$ et π, ρ paire modulaire.
- (d) $\pi \vee \rho$ et π, ρ paire modulaire.

Pour (a) \Rightarrow (b), voir 9; (d) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b) est trivial; (b) \Rightarrow (d) car 9(e) implique 6(d).

V. RELATIONS SYMETRIQUES, CROISEMENT ET CONNEXION

Nous allons pour finir étudier les symétrisées des relations M^* , A^* , D^* et \perp , que nous noterons respectivement \bar{M}^* , \bar{A}^* , \bar{D}^* et $\bar{\perp}^*$, et qui seront ensuite renforcées par la condition de connexité ($\pi \vee \rho$). Nous établirons un réseau d'implications entre ces relations, et observerons le caractère privilégié de la relation de connexion notée $\#$ ($\pi \# \rho$ ssi $\pi \bar{M}^* \rho$ et $\pi \bar{\vee} \rho$) pour formaliser, dans le contexte expérimental, la notion de lacunes dans un croisement.

PROPOSITION 1. Les conditions suivantes sont équivalentes dans P_X :

- (a) $\pi \bar{M}^* \rho$: π et ρ forment une paire comodulaire.
- (b) Tout successeur $\rho' \succ \rho$ (resp. $\pi' \succ \pi$) appartenant à $[\pi \wedge \rho, \pi \vee \rho]$ est tel que $\rho' \wedge \pi \neq \rho \wedge \pi$ (resp. $\pi' \wedge \rho \neq \pi \wedge \rho$) : ρ et π sont l'un pour l'autre un complément maximal dans l'intervalle $[\pi \wedge \rho, \pi \vee \rho]$.
- (c) Toute composante connexe du graphe $G(\pi, \rho)$ a un diamètre inférieur ou égal à 3.

- (d) $R_{\pi} R_{\rho} R_{\pi} = R_{\rho} R_{\pi} R_{\rho}$.
- (e) $R_{\pi} R_{\rho} R_{\pi}$ et $R_{\rho} R_{\pi} R_{\rho}$ sont des équivalences.
- (f) $R_{\pi} \vee R_{\rho} = R_{\pi} R_{\rho} R_{\pi} = R_{\rho} R_{\pi} R_{\rho}$.

Les équivalences précédentes résultent directement de IV.2; Il est intéressant de remarquer l'équivalence entre la notion latticielle de paire comodulaire et la 3-permutabilité. Notons, comme pour la permutabilité (voir III.4) que l'équivalence (c) \Leftrightarrow (f) est un cas particulier du théorème d'Aigner (1972, p.285) selon qui : π et ρ sont k -permutables ssi chaque composante connexe de $G(\pi, \rho)$ a un diamètre $d \leq k$.

PROPOSITION 2 : Les conditions suivantes sont équivalentes dans P_X :

- (a) $\pi \bar{D}^* \rho$.
- (b) Dans toute $\pi \vee \rho$ -classe, soit toute π -classe rencontre toute ρ -classe, soit il existe une π -classe unique rencontrant toutes les ρ -classes et une ρ -classe unique rencontrant toutes les π -classes.
- (c) $G(\pi, \rho)$ est union disjointe de graphes qui sont chacun complet, ou biétoile.
- (d) Soit θ_k une $\pi \vee \rho$ -classe, notons $\theta^k = (\theta_k, \rho_a, \rho_b, \dots)$; pour tout $\theta_k \in \pi \vee \rho$ on a : $(\theta^k \wedge \pi) \square \rho$ ou alors $(\theta^k \wedge \pi) \bar{I}^* \rho$.

Le point (b) découle de IV.6(b); (c) en est la traduction sur le graphe $G(\pi, \rho)$.

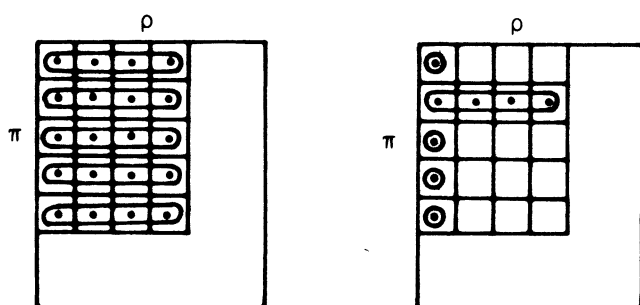


Figure 11.

Le point (d) est illustré ci-contre où sont représentées, dans les deux cas possibles, les classes de $\theta^k \wedge \pi$ incluses dans θ_k .

Il est intéressant de noter que, contrairement à ce qui se passe pour M^* , la symétrisation de D^* est une condition très contraignante, chaque composante connexe de $G(\pi, \rho)$ étant soit la plus complète, soit le plus incomplète possible.

PROPOSITION 3 : $\pi \bar{A}^* \rho$ ssi toute $\pi \vee \rho$ -classe θ_k contient une π -classe (resp. une ρ -classe) y rencontrant toutes les ρ -classes (resp. les π -classes).

Comme pour la relation M^* , la symétrisation de A^* ne fait que juxtaposer les propriétés caractéristiques de $\pi A^* \rho$ et $\rho A^* \pi$. \bar{A}^* a été considérée à l'origine par Ore (1942, p. 608) car $\pi \bar{A}^* \rho$ est une condition nécessaire et suffi-

sante pour que l'on puisse définir deux *contractions* α_π, α_ρ permutables :

$\alpha_\pi \alpha_\rho = \alpha_\rho \alpha_\pi$ (une "contraction" α_π étant une application $X \rightarrow X$ ayant π pour pré-image et telle que : $\alpha_\pi(x) = y$ pour tout x tel que $y R_\pi x$, i.e. y est le représentant de sa R_π -classe d'équivalence).

On a évidemment le

COROLLAIRE 4 : Dans P_X : $\pi \bar{D}^* \rho \Rightarrow \pi \bar{A}^* \rho \Rightarrow \pi \bar{M}^* \rho$.

PROPOSITION 5 : Les conditions suivantes sont équivalentes dans P_X :

- (a) $\pi \bar{I}^* \rho$.
- (b) $[\rho \wedge \pi, \pi] \simeq [\rho, \pi \vee \rho]$ et $[\rho \wedge \pi, \rho] \simeq [\pi, \pi \vee \rho]$.
- (c) π, ρ est une paire modulaire et comodulaire.
- (d) $\pi \bar{A}^* \rho$ et π, ρ paire modulaire.
- (e) $\pi \bar{D}^* \rho$ et π, ρ paire modulaire.
- (f) ρ (resp. π) est un complément maximal et minimal de π (resp. de ρ) dans $[\pi \wedge \rho, \pi \vee \rho]$.
- (g) Toute composante connexe de $G(\pi, \rho)$ est une étoile ou une biétoile.

REMARQUE : Si l'on a évidemment les implications : π, ρ associables $\Rightarrow \pi \bar{I}^* \rho$, et π, ρ associables $\Rightarrow \pi \square \rho$, réciproquement on a l'implication : $\pi \bar{I}^* \rho$ et $\pi \square \rho \Rightarrow \pi, \rho$ associables.

En renforçant les relations précédentes par la condition $\pi \bar{I}^* \rho$ (i.e. que le graphe $G(\pi, \rho)$ soit connexe), nous obtenons directement les notions et propriétés suivantes :

DEFINITION 6 : Deux partitions $\pi, \rho \in P_X$ sont *connectées*, ce que l'on notera

$\pi \# \rho$, si π, ρ forment une paire comodulaire et si $\pi \bar{I}^* \rho$.

PROPOSITION 7 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\pi \# \rho$.
- (b) $G(\pi, \rho)$ est de diamètre ≤ 3 .
- (c) $R_{\pi \rho} R_\pi R_\rho = R_\rho R_\pi R_\rho = X^2$.

COROLLAIRE 8 :

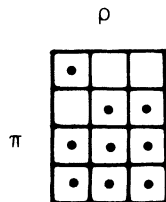
$\pi \bar{D}^* \rho$ et $\pi \vee \rho \Rightarrow \pi \bar{A}^* \rho$ et $\pi \vee \rho \Rightarrow \pi \# \rho$.

PROPRIÉTÉ 9 : $\pi \# \rho$ entraîne $\pi' \# \rho'$, pour tout $\pi' \geq \pi$ et tout $\rho' \geq \rho$ (hérédité de la relation $\#$).

Il peut être fastidieux de vérifier que deux partitions sont ou non connectées; le corollaire 8 nous donne déjà une condition suffisante pour avoir

la connection, facilement vérifiable : pour que l'on ait ($\pi\bar{A}^*\rho$ et $\pi\bar{V}\rho$), il suffit de vérifier que $G(\pi,\rho)$ est connexe et qu'il existe un graphe partiel biétoile joignant tous les sommets de $G(\pi,\rho)$. Notons également la

PROPRIETE 10 : $c(\pi\wedge\rho) > c(\pi)c(\rho) - \text{Min}\{c(\pi),c(\rho)\}$ entraîne $\pi\#\rho$.



Lorsque $c(\pi\wedge\rho) = c(\pi)c(\rho) - \text{Min}\{c(\pi),c(\rho)\}$, π et ρ peuvent ne pas être connectées (voir figure), ce qui n'est pas le cas si $G(\pi,\rho)$ contient une arête supplémentaire.

Figure 12.

PROPOSITION 11 : Les conditions suivantes sont équivalentes dans P_X :

- (a) $\pi\bar{I}^*\rho$ et $\pi\bar{V}\rho$.
- (b) $\pi\#\rho$ et $\pi M\rho$.
- (c) $\pi\bar{D}^*\rho$, $\pi M\rho$ et $\pi\bar{V}\rho$.
- (d) $\pi\bar{A}^*\rho$, $\pi M\rho$ et $\pi\bar{V}\rho$.
- (e) $[\rho\wedge\pi,\pi] \simeq [\rho,\pi\bar{V}\rho]$, $[\rho\wedge\pi,\rho] \simeq [\pi,\pi\bar{V}\rho]$ et $\pi\bar{V}\rho$.
- (f) $G(\pi,\rho)$ est un graphe biétoile ou étoile.
- (g) $\pi\#\rho$ et $c(\pi\wedge\rho) = c(\pi) + c(\rho) - 1$.

L'équivalence des points (a)...(f) découle de 5; (b) \Rightarrow (g) est une conséquence de IV.1(e), (g) \Rightarrow (f) est évidente. Le point (g) attire l'attention sur le fait que les conditions de 11 correspondent au cas où π,ρ sont connectées alors que $G(\pi,\rho)$ est le plus incomplet possible. Pour cette raison :

DEFINITION 12 : On dira que $\pi,\rho \in P_X$ sont M-connectées, ce qui sera noté $\pi(M-\#\rho)$, si elle satisfont aux conditions de 11.

COROLLAIRE 13 : Les conditions suivantes sont équivalentes dans P_X :

- (a) $\pi\bar{D}^*\rho$ et $\pi\bar{V}\rho$.
- (b) $\pi\#\rho$ ou $\pi(M-\#\rho)$.
- (c) $G(\pi,\rho)$ est un graphe biparti-complet ou biétoile.

Il est assez remarquable que dans P_X , la symétrisée de la relation D^* renforcée de la condition $\pi\bar{V}\rho$, conduise à ces cas particuliers aussi opposés quant au nombre d'arêtes du graphe $G(\pi,\rho)$.

$M-\#$ et $\#$ sont deux cas particuliers de $\#$ qui se distinguent simplement par la propriété suivante. Notons F, E, J, I respectivement $[\rho,\pi\bar{V}\rho]$, $[\pi\wedge\rho,\pi]$

$[\pi, \pi \vee \rho]$ et $[\pi \wedge \rho, \rho]$ et les applications $\varphi_\pi : \theta \mapsto \theta \wedge \pi$, $\varphi_\rho : \theta \mapsto \theta \wedge \rho$;

PROPRIETE 14 : Soit $\pi, \rho \in \mathcal{P}_X$ telles que $\pi \vee \rho$:

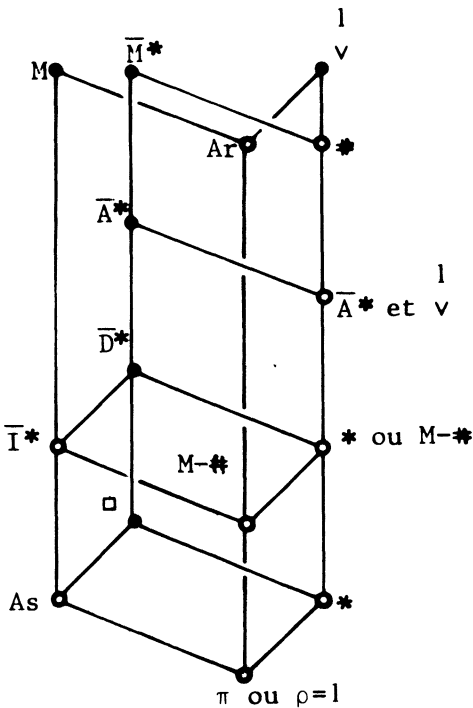
(a) $\pi \# \rho$ ssi $F \simeq \varphi_\pi(F)$ et $J \simeq \varphi_\rho(J)$.

(b) $(M-\#)_\rho$ ssi $\varphi_\pi(F) = E$ et $\varphi_\rho(J) = I$

(c) $\pi * \rho$ ssi $\varphi_\pi(F)$ et $\varphi_\rho(J)$ sont des sous-treillis stricts respectivement de E et I .

VI. CONCLUSION

L'essentiel des résultats énoncés dans ce texte et notamment le paragraphe V peut se résumer par le dessin ci-dessous :



- M : modularité; A2; IV.1.
- \bar{M}^* : comodularité; A2; A3; IV.2 ; V.1.
- # : connexion; V.6, 7.
- Ar : $G(\pi, \rho)$ arbre.
- \bar{A}^* : IV.10, 11 ; V.3.
- \bar{D}^* : A2; IV.4 , 5, 6 ; V.2.
- \bar{I}^* : IV.8, 9 ; V.5.
- $M-\#$: M-connexion; V.11, 12..
- \square : croisement; III.1,2.
- As : associabilité : III.8, 9.

Ce dessin représente les implications entre quinze relations symétriques définies dans le treillis des partitions (on a rappelé à côté, le nom et les passages du texte où ces relations sont définies ou caractérisées). L'implication entre relations est toujours transitive; elle est de plus ici antisymétrique : deux quelconques des relations considérées ne sont jamais équivalentes (pour $n \geq 4$). L'ensemble des quinze relations muni de l'implication est donc un ensemble ordonné dont le dessin est le diagramme de Hasse (les implications se lisent de bas en haut, par exemple, \square implique \bar{D}^*). Il est facile de vérifier, compte tenu des résultats énoncés dans l'article, que cet ensemble ordonné est un \cap demi-treillis, sous \cap demi-treillis du treillis de toutes les relations binaires sur P_n ; par exemple, on a $M \cap \square = As$ (III.8 (h)).

Par contre le supremum de deux de ces relations (lorsqu'il existe) n'a pas généralement d'interprétation.

Cet inf-demi-treillis a six éléments inf-irréductibles : $M, \bar{M}^*, \bar{A}^*, \bar{D}^*$,
 \square, \vee . Toutes les autres relations se déduisent donc de ces six relations par intersection. En particulier M et la chaîne d'implications $\square \Rightarrow \bar{D}^* \Rightarrow \bar{A}^* \Rightarrow \bar{M}^*$ engendrent un sous Ω -demi treillis à sept éléments. Les deux éléments nouveaux étant $\bar{I}^* = M \cap \bar{D}^* = M \cap \bar{A}^* = M \cap \bar{M}^*$ (V.5) et $A_s = M \cap \square$ (III.8(h)). Ce sous Ω -demi treillis est ensuite translaté par l'opération $\cdot \rightarrow \cdot \cap (\vee)$, ce qui revient à ajouter aux relations précédentes la condition $G(\pi, \rho)$ connexe. On obtient ainsi sept autres relations; par exemple $*$ = $(\square) \cap (\vee)$ ou $(M-\#) = \bar{I}^* \cap (\vee)$ (V. 11 et 12). La quinzième relation est l'intersection de M et \vee et signifie que $G(\pi, \rho)$ est un arbre.

Nous terminerons en signalant des problèmes ouverts suggérés par cette étude.

1. La caractérisation "locale" de la relation D^* dans le treillis des partitions (IV, théorème 5) s'étend-elle aux treillis géométriques ?
2. Donner des caractérisations des relations I^* , D^* et A^* par des propriétés des équivalences associées.
3. Dans un treillis quelconque on peut définir la relation A^* par la condition (c) de IV.11. On vérifie aisément que $[xM^*y$ et $yMx]$ implique $[xA^*y]$ qui implique $[xM^*y]$. Dans un treillis relativement complété on a de même $[xM^*y$ et $yMx]$ implique $[xD^*y]$ qui implique $[xM^*y]$. Enfin dans le treillis des partitions on a $[xD^*y]$ implique $[xA^*y]$. Cette dernière implication est-elle vraie dans tout treillis géométrique (ou relativement complété)?

ANNEXE 1. RAPPELS SUR LES TREILLIS.

Cette annexe contient des définitions et résultats classiques. Pour tout compléments, voir Birkhoff (1967), Barbut-Monjardet (1970), Gratzer (1978) ou Aigner (1979).

Un *treillis* est noté T , ou (T, \wedge, \vee) ou (T, \leq, \wedge, \vee) si l'on veut préciser les opérations infimum et supremum et la relation d'ordre de ce treillis. T^* désigne le *treillis dual* du treillis $T(\leq^* = \geq; \wedge^* = \vee, \vee^* = \wedge)$.

Une *chaîne* du treillis T est un sous-ensemble totalement ordonné de T . Si x est le premier élément et y le dernier élément de cette chaîne, on dit qu'on a une chaîne entre x et y . La *longueur* d'une chaîne finie est le nombre de ses éléments moins un. Un treillis T est de *longueur finie* ssi la longueur

de ses chaînes est bornée par un nombre fini. Pour un tel treillis T , on définit la longueur de T comme le supremum des longueurs de chaînes de T . Si un treillis T admet un plus petit élément (un plus grand élément) on le note 0 (1). Dans la suite, nous ne considérerons que des treillis de longueur finie admettant un 0 et un 1 . Soit x élément d'un tel treillis, la *hauteur* de x est la longueur de l'intervalle $[0, x]$; la *profondeur* de x est la longueur de l'intervalle $[x, 1]$.

On dit que x est *couvert* par y , ou que y couvre x ce qu'on note $x \triangleleft y$ ssi il n'existe pas d'élément z avec $x < z < y$. Les éléments d'un treillis couvrant 0 s'appellent ses *atomes* ou ses *points*; les éléments de T couverts par 1 s'appellent ses *coatoms* ou ses *copoints*. Un treillis T est *atomique* (*coatomique*) ssi tout élément de T est supremum d'atomes (infimum de coatoms).

Un élément x' de T est un *complément* de x , ssi $x \wedge x' = 0$ et $x \vee x' = 1$. Un treillis est *complémenté* ssi tout élément de T admet (au moins) un complément. Si $x, y \in T$ et $x < y$, on note $[x, y]$ l'ensemble des $z \in T$, tels que $x \leq z \leq y$. Cet ensemble s'appelle l'intervalle entre x et y . Un treillis est *relativement complémenté* ssi pour tout $x, y \in T$, avec $x < y$, l'intervalle $[x, y]$ est complémenté. On montre facilement qu'un treillis relativement complémenté est atomique et coatomique.

Un treillis T est *gradué* ssi il existe une application r de T dans \mathbb{N} tel que $x \triangleleft y$ implique $r(y) = r(x) + 1$. Si T est gradué, pour tout $x, y \in T$, avec $x < y$, les chaînes maximales entre x et y ont toutes même longueur (condition de Jordan - Dedekind). Dans un tel treillis on peut prendre comme fonction de rang, la hauteur de l'élément x , c'est-à-dire la longueur d'une chaîne maximale entre 0 et x .

Un treillis T est *semi-modulaire supérieurement* ssi il est gradué, la fonction de rang satisfaisant $r(x) + r(y) \geq r(x \wedge y) + r(x \vee y)$ pour tout $x, y \in T$. Une définition équivalente est : pour tout $x, y, z \in T$ avec $z \triangleleft x$, $z \triangleleft y$, on a $x \triangleleft x \vee y$ et $y \triangleleft x \vee y$. Dualement, un treillis est *semi-modulaire inférieurement* ssi il est gradué, r vérifiant $r(x) + r(y) \leq r(x \wedge y) + r(x \vee y)$, pour tout $x, y \in T$, ou ssi, pour tout $x, y, z \in T$, $x \triangleleft z$ et $y \triangleleft z$ implique $x \wedge y \triangleleft x$ et $x \wedge y \triangleleft y$. Un treillis est *modulaire* ssi il est semi-modulaire supérieurement et inférieurement. Une définition équivalente d'un treillis modulaire est pour tout $x, y, z \in T$ avec $z \geq y$, on a $(z \wedge x) \vee y = z \wedge (x \vee y)$. Un treillis est *distributif* ssi il est gradué, la fonction de rang r vérifiant $r(x \vee y \vee z) - r(x \wedge y \wedge z) = r(x) + r(y) + r(z) - r(x \wedge y) - r(y \wedge z) - r(z \wedge x)$, pour tout $x, y, z \in T$. Deux définitions équivalentes sont que l'opération \vee soit distributive par rapport à l'opération \wedge , ou que l'opéra-

tion \wedge soit distributive par rapport à l'opération \vee . Il est clair qu'un treillis distributif est modulaire.

On démontre qu'un treillis semi-modulaire supérieurement est atomique ssi il est relativement complété. On appelle *treillis géométrique* un treillis semi-modulaire supérieurement et atomique (et donc relativement complété, et coatomique). Un treillis *projectif* est un treillis géométrique et modulaire. Un treillis *booléen* est un treillis géométrique et distributif. Un treillis booléen à n atomes peut se noter 2^n . Un treillis géométrique est *irréductible* ssi il n'est pas isomorphe au produit direct de treillis géométriques (non réduits à un élément).

Un exemple classique de treillis géométrique irréductible est le treillis des partitions d'un ensemble à n éléments P_n ; d'autre part, il n'est pas modulaire pour $n > 3$.

Soient a et b , deux éléments incomparables d'un treillis T . Nous désignerons dans la suite les quatre intervalles que définissent a , b , avb et $a\wedge b$ par :

$$I = [a\wedge b, b], J = [a, avb], E = [a\wedge b, a], F = [b, avb].$$

ANNEXE 2. RELATIONS M^* ET D^* DANS UN TREILLIS QUELCONQUE.

Soient (T, \leq, \wedge, \vee) un treillis, a et b deux éléments de T . On considère les deux intervalles $F = [b, avb]$ et $E = [a\wedge b, a]$. On définit deux applications φ_a et ψ_b entre ces intervalles :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\varphi_a} & E \\ x & \longmapsto & x\wedge a \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\psi_b} & F \\ y & \longmapsto & y\vee b \end{array}$$

On a la résultat suivant (où l'on notera que F est considéré avec l'ordre dual de celui de T).

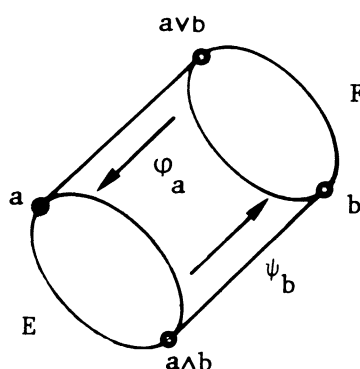


Figure 1

PROPOSITION 1 : Le couple (φ_a, ψ_b) constitue une correspondance de Galois entre (F, \geq) et (E, \leq) .

On vérifie en effet immédiatement que φ_a et ψ_b sont monotones décroissants pour ces deux ensembles ordonnés et que les applications composées $\psi_b \circ \varphi_a$ et $\varphi_a \circ \psi_b$ sont extensives ($x \geq \psi_b \circ \varphi_a(x)$ et $y \leq \varphi_a \circ \psi_b(y)$).

COROLLAIRE 2 :

- $\psi_b \circ \varphi_a$ est une ouverture sur $(F, \underline{\leq})$ et \bar{F} (ensemble des ouverts correspondants)
 $= \psi_b \circ \varphi_a (F) = \psi_b (E)$.
- $\varphi_a \circ \psi_b$ est une fermeture sur $(E, \underline{\leq})$ et \bar{E} (ensemble des fermés correspondants)
 $= \varphi_a \circ \psi_b (E) = \varphi_a (F)$.
- Les deux treillis $(\bar{F}, \underline{\leq}, \bar{\wedge}, \bar{\vee})$ et $(\bar{E}, \underline{\leq}, \bar{\wedge}, \bar{\vee})$ sont isomorphes ($\bar{\wedge}$ et $\bar{\vee}$ dénotant leurs opération infimum et supremum respectives).

COROLLAIRE 3 : Pour tout a, b dans T , $\varphi_a \circ \psi_b \circ \varphi_a = \varphi_a$ et $\psi_b \circ \varphi_a \circ \psi_b = \psi_b$.

Ce résultat est classiquement appelé le "lemme de Schwann".

REMARQUE 4 : La proposition 1 s'énonce également en disant que l'application φ_a de $(F, \underline{\leq})$ dans $(E, \underline{\leq})$ est *résiduée*, ψ_b étant son application *résiduelle* associée (Blyth et Janowitz, 1972). Cette formulation peut être plus agréable dans certains contextes (la composition de deux applications résiduées est résiduée).

Nous énonçons maintenant un certain nombre de propriétés équivalentes pour un couple (a, b) de T , ce qui conduira à définir la relation M^* dans T . Nous notons id_X , l'application identité de l'ensemble X .

PROPOSITION 5 : Pour un couple (a, b) d'éléments de T , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Tout élément de $F = [b, avb]$ est un ouvert de $\psi_b \circ \varphi_a$ ($F = \bar{F}$).
2. Pour tout $x \in F = [b, avb]$, $x = (x \wedge a) \vee b$ ($\psi_b \circ \varphi_a = \text{id}_F$).
3. Pour tout $t \in T$, avec $t \geq b$, $t \wedge (avb) = (t \wedge a) \vee b$.
4. Pour $x_1, x_2 \in F$, $x_1 \wedge a \leq x_2$ implique $x_1 \leq x_2$.
5. L'application φ_a est injective. (Pour $x_1, x_2 \in F$, $x_1 < x_2$ implique $x_1 \wedge a < x_2 \wedge a$).
6. L'application ψ_b est surjective.
7. Le sous-treillis (F, \wedge, \vee) de T est isomorphe au treillis (\bar{E}, \wedge, \vee) .
8. T n'admet aucun sous-treillis identique à celui de la Figure 2 avec $x_1 \geq b$.

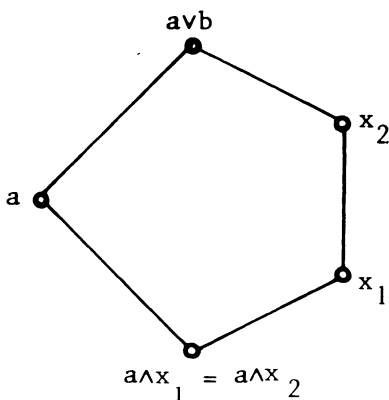


Figure 2.

DEFINITION 6 : Un couple (a,b) d'éléments de T vérifiant la condition précédente est dit un *couple comodulaire*. Cette relation de comodularité est notée M^* et on écrira donc aM^*b . La Figure 3 montre un exemple de treillis où aM^*b (mais non bM^*a). Si on a aM^*b et bM^*a , on dit que $\{a,b\}$ est une *paire comodulaire*.

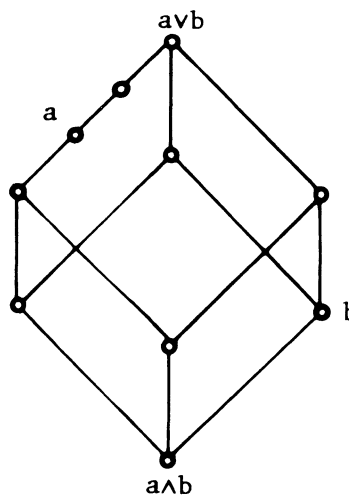


Figure 3.

REMARQUES :

7. La condition 2 n'est qu'une réécriture de la condition 1 et n'est qu'apparemment moins forte que la condition 3. Celle-ci est une condition de modularité (et de distributivité) "locale", illustrée également par la condition 8 (due à Blyth et Janowitz, 1972) excluant certains sous-treillis "pentagonaux" (donc non modulaires).

8. Dans la littérature sur les treillis, il est plus classique de définir d'abord la notion duale de *couple modulaire*. (a,b) est un tel couple, ce qu'on note aMb , s'il vérifie les propriétés duales de la proposition 5, donc si par exemple, pour tout $t \leq b$, $tv(a \wedge b) = (tva) \wedge b$. On a alors aM^*b si et seulement si aMb dans le treillis dual de T (ce qui explique la notation M^*). On remarquera que $[aM^*b \text{ et } bMa]$ équivaut à l'isomorphisme des intervalles F et E . $\{a,b\}$ est une *paire modulaire* ssi aMb et bMa .

9. Ces notions de couple modulaire et de relation M de modularité ont été introduites par Wilcox (1939). Nous empruntons le terme comodulaire à Aigner (1979). Noter aussi que dans la littérature anglo-saxonne, un couple modulaire est souvent appelé "a modular pair".

La relation M^* satisfait aux propriétés d'hérédité suivantes :

PROPOSITION 10 :

- 1) aM^*b implique que pour tout $x_1, x_2 \in F$, avec $b \leq x_1 < x_2 \leq avb$, on a $(x_2 \wedge a)M^*x_1$.
- 2) aM^*b implique que pour tout $z \in [a, avb]$, on a zM^*b .

On notera que 6.1 implique en particulier que pour tout $x \in [b, avb]$, on a aM^*x et $(x \wedge a)M^*b$.

Par contre, on peut vérifier que aM^*b n'implique pas pour $z \in [a, avb]$, $aM^*(z \wedge b)$. De même, aM^*b et $(a \wedge b)M^*t$ avec $t \leq b$ n'impliquent pas aM^*t .

DEFINITION 11 : Un élément a du treillis T est *comodulaire (à droite)* ssi pour tout $t \in T$, on a aM^*t .

On définit dualement la notion d'élément modulaire (à droite). On vérifie aisément que ces deux notions sont équivalentes : a est comodulaire (à droite) ssi il est modulaire (à droite).

La propriété 7 dit que si aM^*b , $(\bar{E}, \leq, \wedge, \bar{\vee})$ est isomorphe au sous-treillis F de T . Ceci évidemment s'implique nullement que \bar{E} soit un sous-treillis de T (cf. Figure 3). On introduit alors les définitions suivantes :

DEFINITION 12 : Le couple (a,b) de T est dans la relation $S^*:aS^*b$ ssi \bar{E} est un sous-treillis de E .

Il est clair qu'on a la caractérisation suivante de S^* : $aS^*b \Leftrightarrow$ Pour tout $x_1, x_2 \in F$, il existe $x \in F$ avec $(x_1 \wedge a) \vee (x_2 \wedge a) = x \wedge a$.

DEFINITION 13 : Le couple (a,b) de T vérifie la relation $D^* : aD^*b$ ssi pour tout $x_1, x_2 \in F$, $(x_1 \wedge a) \vee (x_2 \wedge a) = (x_1 \vee x_2) \wedge a$ (ou, de manière équivalente, ssi $(x_1 \wedge a) \vee (x_2 \wedge a) \geq (x_1 \vee x_2) \wedge a$). Autrement dit, φ_a est un \vee -morphisme.

On déduit de ces définitions les deux propriétés.

PROPOSITION 14 :

1. Pour tout $a, b \in T$, aD^*b implique aS^*b .
2. Si aM^*b , on a $[aS^*b] \Leftrightarrow [aD^*b]$.

14.1 étant évident, démontrons 14.2 : s'il existe $x_1, x_2, x \in [b, avb]$ avec $(x_1 \vee x_2) \wedge a \geq (x_1 \wedge a) \vee (x_2 \wedge a) = x \wedge a$, on en déduit (aM^*b , propriété 2) $x_1 \vee x_2 \geq x$. De plus, pour $i = 1$ ou 2 , on a $x_i \wedge a \leq x$ et donc (aM^*b , propriété 4), $x_i \leq x$, soit $x_1 \vee x_2 \leq x$, et $x_1 \vee x_2 = x$.

N.B. Le treillis de la Figure 4 montre qu'on n'a pas généralement, aS^*b implique aD^*b .

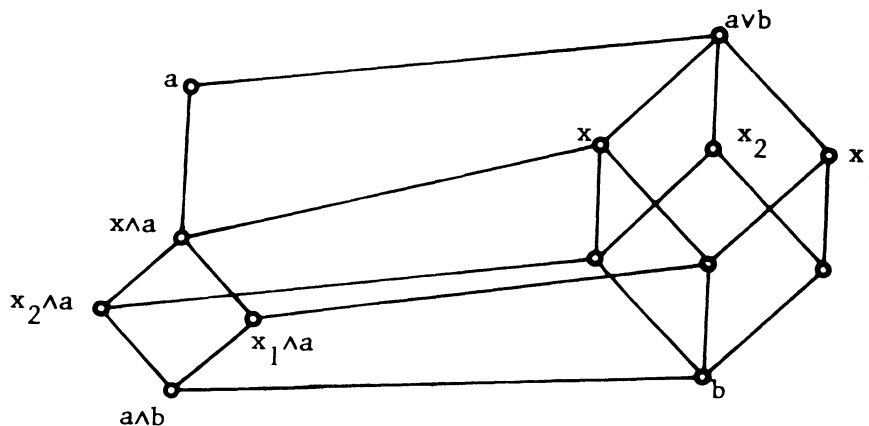


Figure 4.

La relation D^* satisfait la propriété d'hérédité suivante (analogue de la propriété 10.1 pour M^*).

PROPOSITION 15 : aD^*b implique que pour tout x_1, x_2 avec $b \leq x_1 < x_2 \leq avb$, on a $(x_2 \wedge a)D^*x_1$.

En particulier, pour tout $x \in [b, avb]$ on a aD^*x et $(x \wedge a)D^*b$. Par contre, l'analogue de la propriété 10.2 n'est pas vraie. On peut trouver des exemples avec aD^*b , $z \in [a, avb]$ mais non zD^*b .

ANNEXE 3. RELATION M^* ET D^* DANS CERTAINS TREILLIS

Dans cette annexe, nous supposons toujours que les treillis T considérés sont de longueur finie.

PROPOSITION 1 : Dans un treillis gradué par la fonction de rang r , on a

$$aM^*b \Rightarrow r(a) + r(b) \geq r(a \wedge b) + r(avb)$$

$$aMb \Rightarrow r(a) + r(b) \leq r(a \wedge b) + r(avb)$$

PROPOSITION 2 : Dans un treillis semi-modulaire inférieurement (supérieurement), on a

$$aM^*b \text{ (respectivement } aMb) \Leftrightarrow r(a) + r(b) = r(a \wedge b) + r(avb)$$

DEFINITION 3 : Un treillis T est M^* -symétrique (M -symétrique) ssi la relation M^* (M) est symétrique dans T .

PROPOSITION 4 : Un treillis T est semi-modulaire inférieurement (supérieurement) ssi T est M^* -symétrique (M -symétrique).

COROLLAIRE 5 : Un treillis T est modulaire ssi T est M^* -symétrique et M -symétrique, ou, ssi la relation M^* (ou la relation M) est totale.

Tous ces résultats sont classiques (cf. par exemple, Birkhoff 1967, Gratzer 1978). On notera que la proposition 4 permet de considérer les treillis quelconques M^* (ou M) symétriques comme généralisations des treillis semi-modulaires (Maeda, 1970). Noter aussi que si a est un élément modulaire (à droite) d'un treillis semi-modulaire supérieurement, on a pour tout b , $[a \wedge b, a]$ isomorphe à $[b, avb]$.

PROPOSITION 6 : Dans un treillis relativement complété, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. aM^*b .
2. b est un complément relatif maximal de a dans l'intervalle $[a \wedge b, avb]$.
3. Pour tout $c \in F = [b, avb]$ avec $b \not\leq c$, on a $b \wedge a < c \wedge a$.

1 implique 2, du fait de l'injectivité de φ_a . 2 implique 3 est clair.

Si 3, F intervalle d'un treillis relativement complétement est relativement complétement et donc atomique. Pour tout atome c de F , on a $b \leq (c \wedge a) \vee b \leq c$; mais $b = (c \wedge a) \vee b$, implique $b \wedge a = c \wedge a$, ce qui est impossible. Donc $c = (c \wedge a) \vee b$ est un ouvert de F , et tout élément de F étant supremum d'ouverts atomiques, est ouvert ce qui montre aM^*b .

L'équivalence de 1 et 2 dans cette proposition est due à Crapo-Rota (1970). La condition 3, nouvelle ici, est donnée par Aigner (1979) dans le cas du treillis des partitions.

PROPOSITION 7 : Dans un treillis relativement complétement, on a aD^*b implique aM^*b .

Soit T un tel treillis et supposons aM^*b non vérifié. Il existe donc $c \in F$, $c \not\geq b$ avec $a \vee b = a \vee c$. Soit x un complément de c dans F . Si $x \wedge a = a$, on a $x = a \vee b$ et $x \wedge c = c$, ce qui est impossible. Donc, $x \wedge a < a$ et $(x \wedge a) \vee (c \wedge a) = x \wedge a < a = (x \vee c) \wedge a$; donc on a aD^*b non vérifiée.

Dans un treillis géométrique, c'est-à-dire semi-modulaire supérieurement et relativement complétement, on a donc dix conditions équivalentes pour exprimer aM^*b : les huit conditions, toujours valables, de la proposition 5 et les deux conditions de la proposition 6.

D'autre part, il résulte des propositions A2.14 et 7 ci-dessus que dans un tel treillis on a aD^*b équivalent à aS^*b , c'est-à-dire à \bar{E} sous-treillis de E .

ANNEXE 4. RAPPELS SUR LES GRAPHEs.

Un graphe (simple) $G = (X, U)$ est un couple où X est un ensemble et U une partie de l'ensemble des paires d'éléments de X ; les éléments de X (de U) s'appellent les sommets (les arêtes) de G . On note (x, y) ou u une arête de G . Si $A \subseteq X$, on appelle *sous-graphe* induit par A et on note G_A , le graphe (A, U_A) où $(x, y) \in U_A$ ssi $x \in A, y \in A$ et $(x, y) \in U$. Une *chaîne* entre les sommets x et y de G est une suite de sommets $x_0 = x, x_1, \dots, x_i, \dots, x_p = y$, avec pour tout $i = 0, \dots, p-1$, (x_i, x_{i+1}) arête de G . Une chaîne est *élémentaire* si tous ses sommets sont distincts. Un *cycle* de G est une chaîne pour laquelle le sommet initial est identique au sommet terminal.

La relation définie sur les sommets du graphe $G = (X, U)$, par xEy ssi $x = y$ ou il existe une chaîne de x à y , est une équivalence. Les classes de cette équivalence s'appellent les *classes connexes* de G . Les sous-graphes

associés aux classes connexes de G s'appellent les *composantes connexes* de G . G est dit *connexe* ssi il n'a qu'une seule classe connexe (i. e. ssi deux sommets quelconques de G sont reliés par au moins une chaîne). On note n le nombre de sommets de G , m son nombre d'arêtes et p le nombre de ses classes connexes. On pose $\nu(G) = m - n + p$, et ce nombre s'appelle le *nombre cyclomatique* de G .

Un graphe est un *arbre* ssi il est connexe et sans cycles. Un graphe est une *forêt* ssi il est sans cycles, donc, ssi ses composantes connexes sont des arbres. On a le résultat suivant : G est une forêt ssi le nombre cyclomatique $\nu(G) = 0$.

Un graphe est *biparti* ssi on peut partitionner l'ensemble X de ses sommets en deux sous-ensembles Y et Z tels que tout arête de G ait une extrémité dans Y et l'autre dans Z . Un graphe biparti $G = (Y \cup Z, U)$ est *complet* ssi U est l'ensemble de toutes les paires (y, z) , $y \in Y$, $z \in Z$. Un tel graphe, avec $|Y| = h$ et $|Z| = 1$, sera noté K_{h1} . En particulier, on appelle graphe *étoile* un graphe K_{11} ou K_{h1} . D'autre part, on appellera graphe *biétoile*, un graphe formé de deux étoiles (non réduites à un sommet) reliés par une arête (cf. Figure ci-dessous); on notera qu'un tel graphe est un arbre.



Soit G un graphe quelconque. La *longueur* d'une chaîne élémentaire x_0, x_1, \dots, x_p de G est le nombre d'arêtes de cette chaîne, i. e. le nombre p . La *distance* $d_G(x, y)$ entre deux sommets x et y de G est le minimum des longueurs des chaînes entre x et y dans G (si x et y ne sont pas dans une même composante connexe de G , on pose $d_G(x, y) = +\infty$). Le *diamètre* de G est le maximum des distances entre deux sommets de G . Dans le cas d'un graphe biparti $G = (X \cup Z, U)$, on a :

G de diamètre $\leq 2 \Leftrightarrow G$ est complet.

G de diamètre $\leq 3 \Leftrightarrow G$ est connexe et pour tout $y, y' \in Y$, il existe $z \in Z$ tel que (y, z) et $(y', z) \in U$, et pour tout $z, z' \in Z$ il existe $y \in Y$ tel que $(y, z) \in U$ et $(y, z') \in U$.

Cette caractérisation s'étend de manière évidente aux graphes bipartis non connexes dont toutes les composantes connexes sont de diamètre ≤ 2 ou 3 .

BIBLIOGRAPHIE

- AIGNER M., "Vertauschbarkeit von Partitionen", *Math. Z.*, 127 (1972), 281-292.
- AIGNER M., *Combinatorial Theory*, New York, Springer Verlag, 1979.
- BARBUT M., "Partitions d'un ensemble fini", *Math. Sci. hum.*, 22 (1968), 5-22.
- BARBUT M. et MONJARDET B., *Ordre et classification*, Tome 2, Paris, Hachette, 1970.
- BIRKHOFF G., "On the structure of abstract algebras", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 31 (1935), 433-454.
- BIRKHOFF G., *Lattice Theory*, 3e édition, Providence, Amer. Math. Soc., 1967.
- BLYTH T.S. et JANOWITZ M. F., *Residuation Theory*, Oxford, Pergamon Press, 1972.
- CRAPO H. H. et ROTA G. C., "Geometric lattices" in *Trends in lattice theory*, New York, Van Nostrand-Reinhold, 1970 pp. 127-172.
- CRAPO H. H. et ROTA G. C., *On the foundation of Combinatorial Theory : combinatorial Geometries*, Cambridge, M.I.T. Press, 1971.
- DUBREIL P. et DUBREIL-JACOTIN M.-L., "Propriétés algébriques des relations d'équivalence", *C.R.A.S. Paris*, 205 (1937), 704-706 et 1349-1351.
- DUBREIL P. et DUBREIL-JACOTIN M.-L., "Théorie algébriques des relations d'équivalence", *J. de Mathématique*, 18 (1939), 63-95.
- DUBREIL P. et DUBREIL-JACOTIN M.-L., *Algèbre t. I*, Paris (2e édition 1954), Gauthier-Villars, 1946.
- DUQUENNE V., "Représentation optimale d'un plan quasi-complet", *Colloque I.R.I.A., Analyse des données et Informatique*, Versailles, 1977, pp. 297-302.
- DUQUENNE V., *Quelques aspects algébriques du traitement de données planifiées*, Thèse 3ème cycle, Université Paris V, 1980.
- EHRlich M.-F., "L'enseignement des notions élémentaires de méthodologie expérimentale : la planification des expériences", *Math. Sci. Hum.*, 50 (1975), 39-50.
- GRATZER G., *General lattice theory*, New York, Academic Press, 1978.
- LEE W., *Experimental design and analysis*, San Francisco, Freeman and Co, 1975.
- LEPINE D., "Facteurs et plans", *Math. Sci. Hum.*, 33 (1977) 5-26 et 34 (1977) 5-24.
- MAEDA F. et MAEDA S., *Theory of symmetric lattices*, Berlin, Springer Verlag, 1970.
- ORE O., "Theory of equivalence relations", *Duke Math. J.* 9 (1942), 573-627.
- ROUANET H. et LEPINE D., "Introduction à l'analyse des comparaisons pour le traitement des données expérimentales", *Informatique et Sci. Hum.*, 33 - 34 (1977), 125 pages.
- WILCOX L. R., "Modularity in the theory of lattices", *Annals of Math.*, 40 (1939) 490-505.