MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

MARC ARTZROUNI

Les processus itératifs en dynamique des populations et la théorie d'Easterlin

Mathématiques et sciences humaines, tome 76 (1981), p. 33-46

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1981__76__33_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Math. Sci. hum. (*19e* année, n°76, *1981*, p.33-46)

LES PROCESSUS ITERATIFS EN DYNAMIQUE DES POPULATIONS ET LA THEORIE D'EASTERLIN

Marc ARTZROUNI*

La théorie mathématique des processus itératifs trouve de nombreuses applications dans des domaines aussi divers que l'économie, l'électronique, la biologie et la physique nucléaire. Nous proposons ici une utilisation originale de cette théorie en dynamique des populations, et nous présentons, en illustration des méthodes mises au point, un exemple d'application à la théorie démographique de R. Easterlin [1]. Cet économiste américain a constaté que depuis la deuxième guerre mondiale, dans un certain nombre de pays développés, la fécondité est en relation inverse avec le nombre relatif de jeunes (en effet, Easterlin et Condran [2] ont observé dans quatre pays industrialisés une assez forte corrélation positive entre d'une part le rapport de la population masculine des 35-64 ans aux 15-34 ans et d'autre part l'indice conjoncturel de fécondité, c'est-à-dire la somme des naissances réduites). Easterlin conjecture qu'une génération de jeunes relativement peu nombreuse sera plus prospère et de ce fait aura plus d'enfants - et vice versa. Nous verrons également comment la théorie de l'itération permet d'étudier les phénomènes asymptotiques qui se dégagent lorsque l'on projette une population soumise à une fécondité fonction de la structure par âge (c'est précisément ce qui se produit dans le cas de la théorie d'Easterlin).

1) LA MODELISATION EN TERMES DE FONCTIONS RECURRENTES

Le démographe qui étudie la dynamique des populations attache une importance toute particulière au comportement de la suite B_t des naissances au temps t. Keyfitz [5], Lee [7], Samuelson [12] et Le Bras [6] ont étudié l'effet, sur cette suite, d'une fécondité dépendant des naissances antérieures. C'est ainsi que

---

* Department of Mathematics, Drexel University, Philadelphia, PA 19104,USA.
Cet article résume la thèse de 3ème cycle que l'auteur a préparée à l'UER de Mathématiques, Logique Formelle et Informatique, Université Paris-V René Descartes.

Samuelson propose une "modélisation ultra-simplifiée de la théorie d'Easterlin" dans laquelle il s'intéresse au comportement dynamique de la suite $Y_t = B_t/B_{t-1}$. Il montre que Y_t peut s'écrire itérativement comme une fonction H de Y_{t-1} ($Y_t=H(Y_{t-1})$) si :

a) la population ne comporte que deux groupes d'âges et

b) la mortalité étant constante, la fécondité du deuxième groupe d'âge est constante, et l'année t, celle du premier groupe est une fonction (décroissante) du rapport $Y_{t-1} = B_{t-1}/B_{t-2}$ (dans le cas où il n'y a que deux groupes d'âges, cette dernière hypothèse exprime, de façon simplifiée, l'idée d'Easterlin ; en effet, si Y_{t-1} est grand, le nombre relatif de jeunes est grand et l'hypothèse de décroissance rend leur fécondité faible (et vice versa)).

Dans ces conditions, l'équation récurrente donnant B_t s'écrit :

$$B_t = B_{t-1} \cdot g_1(B_{t-1}/B_{t-2}) + g_2 \cdot B_{t-2} \qquad (1)$$

g_1 et g_2 représentent l'effet combiné de la mortalité et de la fécondité ; g_2 est donc une constante et g_1 est la fonction décroissante de B_{t-1}/B_{t-2}.

On en déduit immédiatement :

$$B_t/B_{t-1} = g_1(B_{t-1}/B_{t-2}) + g_2 \cdot B_{t-2}/B_{t-1} \qquad (2)$$

ou :

$$Y_t = g_1(Y_{t-1}) + g_2/Y_{t-1} \qquad (3)$$

L'équation (3) exprime donc Y_t itérativement comme fonction de Y_{t-1} puisqu'on peut la récrire $Y_t = H(Y_{t-1})$. Samuelson étudie alors les comportements dynamique et asymptotique du rapport Y_t, en s'appuyant sur les résultats connus de la théorie des processus itératifs dans le cas où H est un opérateur sur $\mathbb{R}$.

Nous allons voir maintenant comment la modélisation de l'équation (1) peut se généraliser au cas réaliste où il y a plus que deux groupes d'âges et comment on peut étudier le processus démographique qui en résulte à l'aide d'un opérateur sur un espace $\mathbb{R}^n$. En effet, l'équation (1) se généralise de la façon suivante :

$$B_t = \sum_{i=1}^{q} g_i(B_{t-q}, B_{t-q+1}, \ldots, B_{t-1}) \cdot B_{t-i} \qquad (4)$$

q est un entier quelconque. Chaque g_i est une fonction homogène (de degré 0) des q variables $B_{t-q}, B_{t-q+1}, \ldots, B_{t-1}$ et représente, l'année t, le nombre de filles nées pour chaque naissance féminine en t-i (on raisonne d'habitude sur les naissances féminines, mais on peut obtenir les naissances totales en

multipliant les deux membres de l'équation (4) par 2.05).
L'hypothèse d'homogénéité est celle par laquelle est généralisée la formulation de Samuelson : la fécondité de chaque groupe d'âge est une fonction de la *distribution de la population* l'année t, cette population étant mesurée par les effectifs à la naissance (ce sont les q variables $B_{t-q}, B_{t-q+1}, \ldots, B_{t-1}$).
Dans la suite, on ne précisera pas le degré des fonctions homogènes considérées car elles seront toutes de degré 0.

Remarquons d'abord qu'une fonction homogène des q variables $B_{t-q}, B_{t-q+1}, \ldots, B_{t-1}$ est un objet identique à une fonction des q-1 variables B_{t-q+1}/B_{t-q}, $B_{t-q+2}/B_{t-q+1}, \ldots, B_{t-1}/B_{t-2}$. En effet, si l'on pose $Y_r = B_r/B_{r-1}$ (les naissances seront toujours non nulles) et si l'on suppose que l'on connaisse une fonction homogène $g(B_{t-q}, B_{t-q+1}, \ldots, B_{t-1})$, on peut alors écrire, en divisant chaque B_i par B_{t-q} :

$$g(B_{t-q}, B_{t-q+1}, \ldots, B_{t-1}) = g(1, Y_{t-q+1}, Y_{t-q+2}\, Y_{t-q+1}, \ldots, \prod_{j=1}^{q-1} Y_{t-q+j}) \qquad (5)$$

L'équation (5) montre que g dépend des q-1 quantités $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_{t-q+1}$.
On peut donc dire qu'il existe une fonction f de q-1 variables telle que :

$$g(B_{t-q}, B_{t-q+1}, \ldots, B_{t-1}) \equiv f(Y_{t-q+1}, Y_{t-q+2}, \ldots, Y_{t-1}) \qquad (6)$$

Inversement, toute fonction f, définie comme en (6), est trivialement identique à une fonction g des q variables $B_{t-q}, B_{t-q+1}, \ldots, B_{t-1}$; g est alors homogène.

Les g_i de l'équation (4) peuvent donc être considérées comme des fonctions f_i des rapports $Y_{t-j} = B_{t-j}/B_{t-j-1}$. En divisant alors les deux membres de l'équation (4) par B_{t-1}, il vient :

$$Y_t = f_1(Y_{t-q+1}, Y_{t-q+2}, \ldots, Y_{t-1}) + \sum_{i=2}^{q} \frac{f_i(Y_{t-q+1}, Y_{t-q+2}, \ldots, Y_{t-1})}{\prod_{k=t-i+1}^{t-1} Y_k} \qquad (7)$$

La première étape de la généralisation du modèle de Samuelson est ainsi obtenue : sous l'hypothèse que les g_i dépendent de la distribution des naissances passées (fonctions homogènes), Y_t s'écrit, de façon récurrente, comme fonction des (q-1) Y_i antérieurs.

2. LA MODELISATION EN TERMES DE FONCTIONS ITERANTES

De même que Samuelson avait ramené un problème sur deux naissances antérieures à un problème itératif dans $\mathbb{R}$, on "plongera" l'équation récurrente (7), qui porte sur q naissances passées, dans $\mathbb{R}^{q-1}$.

On va construire un opérateur H sur $\mathbb{R}^{q-1}$ qui sera équivalent (en un sens qui apparaitra clairement plus loin) à la fonction définie en (7). Récrivons d'abord l'équation (7) de la façon suivante :

$$Y_t = G(Y_{t-q+1}, Y_{t-q+2}, \ldots, Y_{t-1}) \tag{8}$$

où la fonction G représente le membre droit de l'équation (7). Considérons maintenant l'opérateur H sur $\mathbb{R}^{q-1}$ défini de la façon suivante :

$$H : \begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ x_2 & & x_3 \\ \vdots & \longmapsto & \vdots \\ & & x_{q-1} \\ x_{q-1} & & G(x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}) \end{array} \tag{9}$$

Posons $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{q-1})$.

On voit clairement que si $x_i = Y_i$, $i = 1,2,\ldots,q-1$, la dernière composante de l'itéré $H^n(X)$ n'est autre que Y_{n+q-1}.
On sait que si $H^n(X)$ converge pour n tendant vers l'infini (avec H continu) ce ne peut être que vers un point fixe $X_o = H(X_o)$. En regardant la relation (9), on voit que X_o est un point de l'espace $\mathbb{R}^{q-1}$ dont toutes les composantes sont égales : $X_o = (x_o, x_o, \ldots, x_o)$ et $\lim Y_t = x_o$. Ainsi x_o sera la limite de Y_t correspondant à l'état initial $X = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}) = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_{q-1})$ et la convergence des Y_t est donc équivalente à celle de $H^n(X)$.

La riche théorie des processus itératifs, appliquée à l'opérateur H, va maintenant nous permettre d'analyser les comportements dynamique et asymptotique de la suite Y_t.

i) <u>Quelques résultats sur la convergence des Y_t</u>

La convergence des Y_t signifie que les naissances, asymptotiquement, croissent sensiblement de façon géométrique*. On dira que la population tend vers un état stable "en les naissances". En effet, la notion de population stable est chère au démographe, mais pour celui-ci il s'agit d'une population dont les naissances et chaque tranche d'âge s'accroissent selon une progression géométrique de même rapport r. Or ici, on a cette propriété uniquement sur les naissances mais on ne sait rien de précis sur la mortalité (même asymptotiquement) puisqu'elle est intimement liée à la fécondité dans la fonction nette de maternité (les g_i de l'équation (4)). Pour cette raison, on a introduit la notion plus générale de stabilité "en les naissances". Néanmoins, dans les

* du moins lorsque les Y_t sont définis de façon récurrente.

projections qui seront faites plus loin en grandeur nature (pour la France), la mortalité sera constante et la convergence des Y_t sera alors la convergence vers un état stable au sens classique.

Précisons d'abord une définition avant d'entamer l'étude de l'opérateur H. Un point fixe X_o d'une transformation H sera dit attractif s'il existe un voisinage V de X_o tel que si $X \in V$, alors $\lim_n H^n(X) = X_o$.

On va chercher maintenant quelles sont les conditions sur les fonctions f_i de l'équation (7) pour qu'il y ait convergence des Y_t, ou ce qui est équivalent, pour qu'il y ait convergence des itérés $H^n(X)$ vers un point fixe X_o. Comme on le verra, ce seront toujours des conditions locales portant sur un voisinage de X_o, la question de "l'universalité" de cette convergence étant d'un autre ordre.

Le résultat que nous utiliserons à ce sujet est dû à Ostrowski [11]. Soit H un opérateur différentiable sur $\mathbb{R}^{q-1}$ et X_o un point fixe de H. Si le rayon spectral ρ de la matrice jacobienne $J_{H(X_o)}$ de H en X_o est strictement inférieur à 1, alors X_o est un point fixe attractif et si $\rho > 1$ X_o est répulsif (rappelons que $\rho = \max_i |\lambda_i|$, λ_i les valeurs propres de $J_{H(X_o)}$). $\rho < 1$ est donc une condition suffisante de convergence vers X_o et l'on peut dire qu'il s'agit d'une condition "quasi-nécessaire" au sens que $\rho > 1$ garantit la non convergence, le cas litigieux se situant évidemment en $\rho=1$ (le point fixe est alors soit répulsif, soit attractif, soit indifférent).

Appliquons ces résultats au cas qui nous intéresse ici. En regardant la définition de H en (7) on voit que :

$$J_{H(X_o)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & - & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ | & & & & 1 & & & & & \\ | & & & & & \ddots & & & & \\ | & & & & & & \ddots & & & \\ | & & & & & & & \ddots & & \\ | & & & & & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ d_1 & d_2 & & & & & & & & d_{q-1} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

$J_{H(X_o)}$ est une matrice d'ordre (q-1) et l'on a :

$$d_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}(X_o) \quad ; \quad X_o = (x_o, x_o, \ldots, x_o) = H(X_o) \qquad (11)$$

Le polynôme caractéristique de $J_{H(X_o)}$ s'écrit :

$$\lambda^{q-1} - \sum_{j=1}^{q-1} d_{q-j} \lambda^{q-1-j} = 0 \qquad (12)$$

Si l'on avait développé G en série au voisinage de X_o, on aurait pu étudier le processus linéaire tangeant associé et l'on aurait évidemment retrouvé le même polynôme et la même condition sur le module des racines pour qu'il y ait convergence. Toutefois, nous avons préféré la formulation en termes de processus itératifs (qui est tout à fait équivalente) afin de suivre une démarche qui généralise clairement celle de Samuelson.

Explicitons maintenant les dérivées partielles $d_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}(X_o)$ où G de (9) est définie en (7) et (8) de la façon suivante :

$$G(x_1,x_2,\ldots, x_{q-1}) = f_1(x_1,x_2,\ldots,x_{q-1}) + \sum_{i=2}^{q} \frac{f_i(x_1,x_2,\ldots,x_{q-1})}{\prod_{k=q-i+1}^{q-1} x_k}$$

Les dérivées partielles des f_i sont toutes prises en X_o et l'on pose, pour alléger l'écriture, $f_i = f_i(x_o,x_o,\ldots,x_o)$; on obtient alors :

$$d_r = \sum_{i=1}^{q} x_o^{1-i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_r} - \sum_{i=q-r+1}^{q} x_o^{-i} \cdot f_i \qquad (13)$$

$r=1,2,\ldots,q-1$

En résumé, pour qu'un processus démographique défini par l'opérateur H en (9) converge vers une valeur x_o* , il est suffisant (et "quasi-nécessaire") que toutes les racines de l'équation polynomiale (12), où les coefficients d_r sont définis en (13), soient de modules strictement plus petits que 1. Nous sommes donc ramenés à l'étude des modules des solutions d'une équation algébrique de degré quelconque. La littérature sur le sujet est abondante (Marden [9]) et il existe de nombreux résultats donnant des majorations des modules des racines en fonction des coefficients du polynôme. On retrouve en particulier, de cette façon, les résultats connus dans le cas où la mortalité et la fécondité sont constantes ($\frac{\partial f_i}{\partial x_r} \equiv 0 \quad \forall$ i et r). On montre en effet que les modules sont strictement plus petits que 1 si et seulement si le PGCD des i des f_i non nuls est égal à 1.

---

* (au voisinage de x_o)

ii) La "convergence en générations alternées"

Dans son article, Samuelson considère un exemple où "l'effet Easterlin" fait apparaître deux sous-suites convergentes de Y_t, toujours défini itérativement par $Y_t = H(Y_{t-1})$ où H est un opérateur sur $\mathbb{R}$. De façon précise, la sous-suite Y_{2t} converge vers un nombre A et Y_{2t+1} converge vers B (différent de A). On a baptisé ce phénomène "convergence en générations alternées (d'ordre 2)" et l'on va voir que la théorie de l'itération propose des outils permettant une généralisation élégante de ce genre de situation.

Considérons la définition suivante, empruntée à Gumowski [3]. Un point Z_o est dit point d'un cycle d'ordre k de la transformation H s'il est point fixe de H^k sans être point fixe de H^j, pour $1 \leqslant j < k$, c'est-à-dire :

$$H^k(Z_o) = Z_o \quad \text{et} \quad H^j(Z_o) \neq Z_o \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j < k$$

Le cycle k est ainsi constitué des k points (différents) Z_o, $H(Z_o),\ldots H^{k-1}(Z_o)$. L'exemple de Samuelson peut alors se décrire de la façon suivante : A et B sont des points attractifs d'un cycle d'ordre 2 de H puisqu'ils sont points fixes attractifs de H^2.

Dans le cas général où H est défini comme en (9), on obtient donc la définition suivante : on aura une "convergence en générations alternées (d'ordre k)" s'il existe Z_o, point attractif d'un cycle d'ordre k de H ; H étant supposé continu, on aura alors, pour X proche de Z_o :

$$\lim_n H^{nk+j}(X) = H^j(Z_o) \qquad j = 0,1,2,\ldots,k-1 \tag{14}$$

Il y a donc k sous-suites "adjacentes" de la suite $H^r(X)$ qui convergent vers les k itérés de Z_o définis en (14).

Comme on l'a vu plus haut, ce n'est que la dernière composante de l'image par H^r qui nous intéresse puisqu'elle constitue "l'innovation" au sens que $W_r(X)$ = dernière composante de $H^r(X)$ est Y_{r+q-1} (correspondant aux "naissances initiales" X) ; les autres composantes ne font que répéter, de façon redondante, les innovations antérieures.

En exprimant dans (14) la convergence de la dernière composante des vecteurs considérés, on a :

$$\lim_n W_{nk+j}(X) = \lim_n Y_{nk+j+q-1} = W_j(Z_o)$$

La suite Y_t peut donc être "éclatée" en k sous-suites convergentes, de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
Y_{nk+q-1} & Y_{nk+q} & Y_{nk+q+1} & \cdots\cdots & Y_{nk+q+k-2} \\
| & | & | & & | \\
Y_{(n+1)k+q-1} & Y_{(n+1)k+q} & Y_{(n+1)k+q+1} & & Y_{(n+1)k+q+k-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
W_o(Z_o) & W_1(Z_o) & W_2(Z_o) & \cdots\cdots & W_{k-1}(Z_o)
\end{array}$$

Remarquons au passage que les composantes de Z_o, point fixe de H^k, ne sont pas nécessairement égales si $k > 1$, contrairement au cas $k = 1$.

On peut maintenant chercher des conditions pour lesquelles un point Z_o d'un cycle d'ordre k est point fixe attractif de H^k. Il suffira pour cela d'adapter les résultats du paragraphe précédent puisque l'on est exactement dans la même situation, à ceci près que H est remplacé par H^k. La condition nécessaire, et "quasi-suffisante", pour que Z_o soit point fixe attractif de H^k est donc que la matrice jacobienne $J_{H^k(Z_o)}$ de H^k en Z_o ait un rayon spectral strictement inférieur à un.

3. AJUSTEMENTS ET PROJECTIONS

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, Easterlin a observé, pour un certain nombre de pays industrialisés, une corrélation positive entre la somme des naissances réduites (SNR) l'année t, et le rapport suivant :

$$R_t = \frac{P_t(35,64)}{P_t(15,34)} \tag{15}$$

ou $P_t(a,b)$ désigne la population masculine, l'année t, dont l'âge est compris entre a et b. L'intérêt essentiel de cette corrélation provient du fait qu'elle permet, au vu de la population l'année t, de prédire ce que sera la fécondité (SNR) cette même année. Néanmoins, cela n'est pas suffisant pour projeter la population. En effet, nous avons vu (équation(4)) qu'il est nécessaire de connaitre les quantités $g_i(B_{t-q},B_{t-q+1},\ldots,B_{t-1})$ qui sont en fait le produit du taux de fécondité de l'âge i, l'année t (nombre d'enfants nés de 100 femmes d'âge i, l'année t) par la probabilité de survie jusqu'à l'âge i (la SNR

l'année t est alors la somme des taux de fécondité par âge (TFA) l'année t et elle est égale au nombre d'enfants qu'aurait une femme si la fécondité de toute sa vie était celle de l'ensemble de la population l'année t).

La théorie d'Easterlin a été vérifiée pour la France par Leridon [8] qui trouve un coefficient de corrélation de 0.92 entre les deux séries (SNR et rapports de l'équation (15), entre les années 1946 et 1976). Nous nous sommes alors posés la question de savoir si l'on pouvait, pour la France, remplacer le "rapport d'Easterlin" (eq. (15)) par un rapport du type :

$$R'_t = \frac{\sum_{j=m_2}^{m_3} B_{t-j}}{\sum_{k=m_1}^{m_2-1} B_{t-k}} \qquad (16)$$

où les populations l'année t ont été remplacées par des effectifs à la naissance et où les bornes du rapport (15-34-65) sont remplacées par des paramètres m_1, m_2 et m_3 qui seront choisis de façon à maximiser (en valeur absolue) les coefficients de corrélation dans la nouvelle régression faite entre R'_t et la SNR l'année t (toujours pour la période 1946-1976). Comme nous l'avons dit plus haut, la connaissance de la SNR (au vu des naissances passées) ne permet pas de projeter la population, aussi a-t-on fait la même chose pour les taux de fécondité par âge (on peut dire que pour chaque groupe d'âge - en pratique des groupes quinquennaux - le taux de fécondité du groupe d'âge évolue, très approximativement, et avec des exceptions, comme la somme des naissances réduites : lorsque celle-ci baisse les TFA baissent aussi et vice-versa). On va donc chercher à ajuster linéairement les taux de fécondité par âge par des rapports $R'_t(i)$ de la façon suivante :

$$TFA_t(i) \simeq A(i) \frac{\sum_{j=m_2(i)}^{m_3(i)} B_{t-j}}{\sum_{k=m_1(i)}^{m_2(i)-1} B_{t-k}} + B(i) = A(i)\, R'_t(i) + B(i) \qquad (17)$$

où $TFA_t(i)$ est le taux de fécondité du groupe d'âge i, l'année t, et les $m_k(i)$ sont les bornes correspondantes du $R'_t(i)$ qui est le rapport R'_t par lequel on ajuste la fécondité du i-ème groupe d'âge (ils seront sept groupes quinquennaux : 15-19, 20-24, 25-29, 30-34, 35-39, 40-44, 45-49 ans). Les résultats

des régressions linéaires apparaissent au tableau ci-dessous (il serait en fait plus exact de parler de régression "pseudo-linéaire" puisque nous avons cherché le coefficient de corrélation linéaire pour chaque triplet (m_1, m_2, m_3) avec $m_1 \leq m_2 - 5 \leq m_3 - 10$ pour assurer l'existence d'au moins cinq années de naissances au numérateur et au dénominateur des rapports $R'_t(i)$, puis l'on a conservé le triplet qui donnait le plus fort coefficient de corrélation en valeur absolue ; il s'agit donc d'un ajustement mixte : en amont sur trois entiers, et en aval, pour chaque triplet, on a fait une régression linéaire normale (dont les coefficients sont donc les termes A et B de l'équation (17)).

Ages	m_1	m_2	m_3	A	B	Coef. de corrél.
15-19	1	25	36	-4.34	4.41	-0,88
20-24	20	29	44	4.06	8.79	0.76
25-29	19	32	68	4.14	3.71	0.95
30-34	17	36	68	8.17	-5.63	0.98
35-39	9	33	68	6.14	-4.59	0.99
40-44	16	36	68	2.55	-2.98	0.98
45-49	20	38	65	0.25	-0.30	0.94

Le coefficient de corrélation négatif pour les 15-19 ans semble démontrer un effet d'Easterlin inverse mais il est certain que la théorie ne s'applique pas bien à ces classes d'âges très jeunes car la fécondité (très faible) y est surtout conditionnée par des facteurs non strictement économiques (âge au mariage, accès à la contraception, etc.). Les estimations ainsi obtenues seront néanmoins conservées pour la suite. Pour les autres groupes d'âges, on trouve de forts coefficients de corrélation positifs qui confirment la théorie d'Easterlin indépendamment pour chaque groupe quinquennal d'âge.
Il sera alors possible de projeter la population en utilisant l'équation (4), car on disposera d'estimations des TFA en fonction des naissances passées (eq.(17)) et par ailleurs la mortalité sera supposée constante ; étant donnée la forme du rapport $R'_t(i)$, les g_i de l'équation (4) sont alors bien des fonctions homogènes de naissances antérieures et l'équation (4) s'écrit, compte tenu des sept groupes quinquennaux d'âges reproductifs :

$$B_t = \sum_{i=1}^{7} \sum_{n=11}^{15} 0.488 \; B_{t-5i-n} \; \underbrace{M(i) \; [R'_t(i)A(i) + B(i)]}_{g_i} \qquad (18)$$

où 0.488 M(i) B_{t-5i-n} est le nombre de femmes du groupe quinquennal i, l'année t, et R'_t (i) A(i) + B(i) est leur fécondité. M(i) est la probabilité de survie jusqu'à l'âge i (mortalité) et 0.488 est la proportion de naissances féminines (parmi les B_{t-5i-n} naissances des deux sexes).

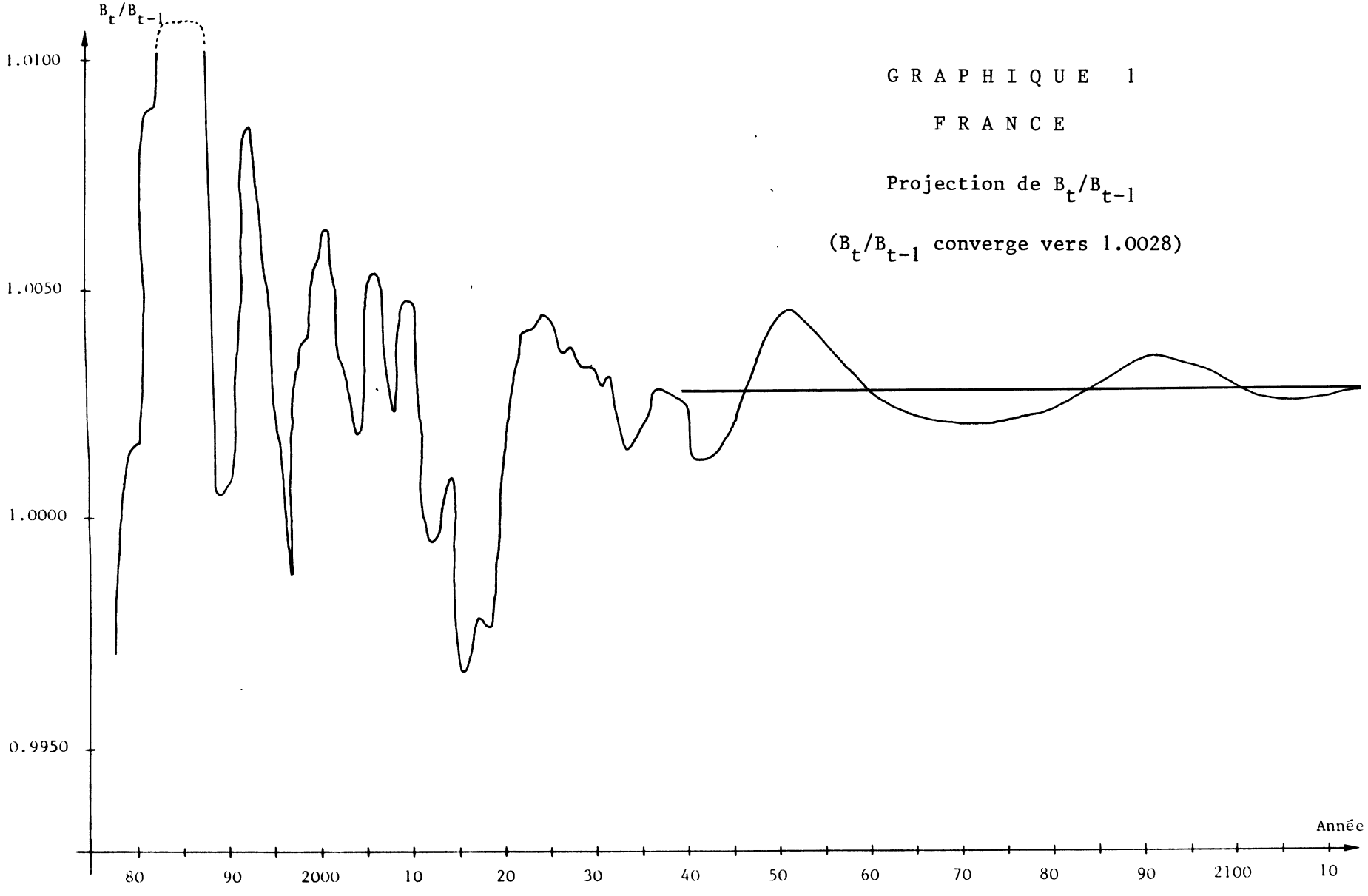
Comme nous l'avons vu au paragraphe 1, l'équation (18) peut alors se transformer en une équation récurrente de Y_t qui s'écrira comme fonction des 67 Y_t antérieurs (en effet, l'examen du tableau ci-dessus permet de voir que les g_i peuvent tous être considérés comme des fonctions de 68 variables, i.e. q=68 dans l'équation (4)). H de (9) est alors un opérateur sur $\mathbb{R}^{67}$ qui a été itéré sur ordinateur et l'on a constaté empiriquement (après plusieurs centaines d'itérations) une convergence de Y_t vers le point fixe 1.0028, valeur au demeurant tout à fait réaliste pour le démographe puisqu'elle correspond à une très lente augmentation de la population (graphique 1).

Les 67 dérivées partielles d_i de (11) ont été calculées et l'on a pu vérifier que l'équation polynômiale du 67ème degré en (12) avait bien toutes ses racines strictement dans le cercle unité.

La même chose a été faite pour d'autres pays où l'on a observé des phénomènes de divergence. On a pu établir qu'ils se produisaient au voisinage d'un point fixe et l'on a pu vérifier que le polynôme caractéristique correspondant avait au moins une racine de module strictement supérieur à 1, donc que le point fixe était bien répulsif.

4. CONCLUSIONS

Dans cet article, nous avons montré comment une équation récurrente de la dynamique des populations pouvait se formuler simplement en termes d'opérateurs itératifs dans un espace $\mathbb{R}^n$. Les avantages d'une telle modélisation ne sont pas négligeables : elle permet une généralisation élégante du modèle itératif de Samuelson et du phénomène de convergence en générations alternées dont l'étude ne peut se faire aisément si l'on raisonne en termes d'équations récurrentes. Comme on l'a vu au premier paragraphe, l'étude classique de la convergence d'une équation récurrente par approximation linéaire au voisinage du point limite est équivalente au travail que nous avons fait en raisonnant en termes de point fixe attractif, mais la théorie des processus itératifs offre également de nombreux outils qui permettent une étude de tout le domaine d'influence d'un point limite x_o (c'est-à-dire l'ensemble des points initiaux tels que le processus qui en résulte converge vers x_o). A notre connaissance, ces outils n'ont pas d'équivalent en théorie des équations récurrentes classiques, et en particulier, dès qu'une telle équation est



G R A P H I Q U E 1

F R A N C E

Projection de B_t/B_{t-1}

(B_t/B_{t-1} converge vers 1.0028)

transformée en opérateur H sur $\mathbb{R}^n$, il existe en théorie des processus itératifs de nombreux résultats (d'une utilisation toutefois difficile) qui permettent de démontrer, s'il y a lieu, que le processus converge quel que soit le point initial. Ces résultats sont de deux types : les uns consistent à démontrer que H est équivalent (par changement de variable) à un opérateur linéaire H' de rayon spectral strictement plus petit que 1 ; il y a alors convergence vers l'origine, quel que soit le point initial [4] ; les autres appartiennent à tout un ensemble de résultats du type "applications contractantes". Nous en donnerons un seul, à titre d'exemple : si H peut être considéré comme un opérateur sur un espace métrique compact A, si H est continu et si $\bigcap_{n=0}^{\infty} H^n(A) = \{\xi\}$, alors H est une application contractante et les itérés $H^n(X)$ convergent vers l'unique point fixe ξ, quel que soit le point initial X [10].

Enfin nous avons illustré, sur un exemple en grandeur nature, l'utilisation des processus itératifs qui ont permis de projeter une population réelle soumise à un effet d'Easterlin en analysant les phénomènes asymptotiques qui peuvent se dégager en de telles circonstances.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EASTERLIN R., "The american baby-boom in historical perspective", *American Economic Review*, 60 (1961).

[2] EASTERLIN R. et CONDRAN C., "A note on the recent fertility swing in Australia, Canada, England and Wales, and the United States", *in Population, Factor movement and economic development : studies presented to Brinley Thomas*, édité par Hamish Richards, University of Wales Press, 1976.

[3] GUMOWSKI I. et MIRA C., *Dynamique chaotique*, Toulouse, Cepadues Editions, 1980.

[4] GUMOWSKI I. et MIRA C., *Recurrence and discrete dynamic systems*, Lecture Notes in Mathematics, 809 (1980).

[5] KEYFITZ N., "Population Waves" *in Population Dynamics*, T.N.E. Greville, New York, Academic Press, 1972.

[6] LE BRAS H., "Résonnance et équilibre (alternative au modèle de Samuelson-Easterlin)", *La Revue Economique*, vol.31, n°6 (1980).

[7] LEE R., "The formal dynamics of controlled population and the echo, the boom and the bust", *Demography*, vol.11, n°4 (1974).

[8] LERIDON H., "Fécondité et structure démographique : une hypothèse sur l'évolution de la fécondité depuis 1940", *Population*,2(1978).

[9] MARDEN M., *Geometry of Polynomials*, Providence, American Mathematical Society, 1966.

[10] OPOITSEV V.I., "A converse to the principle of contracting maps", *Russian Mathematical Surveys*, 31.4 (1976).

[11] OSTROWSKI A., "Les points d'attraction et de répulsion pour l'itération dans l'espace à n dimensions", *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, 244 (1957).

[12] SAMUELSON P., "An Economist's Non-Linear Model of Self-Generated Fertility Waves", *Population Studies*, 30, 2 (1976).