MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. PETITOT

Caustiques et catastrophes

Mathématiques et sciences humaines, tome 64 (1978), p. 9-26
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__64__9_0>

Math. Sci. hum. (16e année, n°64, *1978*, p.9-26)

CAUSTIQUES ET CATASTROPHES

J. PETITOT

Ce premier chapitre a pour but de présenter de façon sommaire le lien intime qui existe entre la T.C. et la théorie des caustiques en optique ondulatoire. Plus que d'une introduction spécialisée (qui n'aurait pas sa place ici), il s'agit d'un argument heuristique destiné à montrer que la T.C. dérive *généalogiquement* des formalismes qui régissent une part essentielle de la physique mathématique, et que donc :

i) son universalité n'est pas plus étrange que celle du formalisme différentiel ;
ii) sa capacité à modéliser qualitativement des situations non physiques ainsi que sa remise en cause, parfois radicale, des stratégies réductionnistes procèdent non pas d'une dénégation, mais bien au contraire d'un *maintien* du rapport constitutif d'implication des mathématiques dans l'expérience.

Très brièvement, le geste théorique propre à la T.C. peut se résumer ainsi :

i) La T.C. repose sur la mise en évidence d'une *géométrie* sous-jacente aux phénomènes critiques dans leur ensemble ;
ii) fondée d'une part sur des théorèmes de classification qualitative de morphologies critiques locales et d'autre part sur l'interprétation en termes de phénomènes critiques des morphologies naturelles, elle permet de comprendre celles-ci comme une information *contraignant* les dynamiques sous-jacentes (en général implicites et inobservables).
iii) sa doctrine dialectique de l'opposition des espaces internes (espaces de phase des dynamiques sous-jacentes) et des espaces externes (espaces de déploiement des morphologies) lui permet à volonté de scotomiser la physique des phénomènes (tout en la maintenant comme cause supposée) et d'autonomiser ainsi la géométrie de l'apparaître *comme tel*.

iv) ce tronquage phénoménologique de l'ordre des causes a pour conséquence ce que l'on pourrait appeler un "effet ontologique", à savoir une réactivation de l'hylémorphisme.

C'est au niveau *iii)* que se situent les applications utilisant les modèles catastrophiques (qualitatifs, locaux et non prédictifs) comme archétypes phénoménologiques. Mais comme en général elles se soucient peu de *l'effet* ontologique qui y adhère, celui-ci s'inverse dès lors en un *a priori* métaphysique épistémologiquement non fondé.

Il est donc d'un intérêt heuristique certain de montrer comment peut et doit émerger l'accentuation catastrophique dans un cas classique et fondamental où la physique du phénomène est explicite (1).

Je me bornerai à résumer quelques textes sur la théorie des caustiques [Duistermaat 1974, Chazarain 1975, Malgrange , Guckenheimer 1973], et pour des raisons de simplicité je traiterai des caustiques dans $\mathbb{R}^2$ (et non dans $\mathbb{R}^3$).

1. SOLUTIONS ASYMPOTIQUES ET APPROXIMATION GEOMETRIQUE.

Considérons dans le plan $\mathbb{R}^2$ une source lumineuse constituée par une courbe S indéfiniment différentiable et régulière. D'après les principes de l'optique géométrique les rayons lumineux sont les normales à S et les surfaces d'onde des courbes parallèles à S. L'on voit immédiatement que ce qui fait obstruction à la trivialité géométrique du phénomène, est *l'enveloppe* K des normales à S, dite *caustique* de la propagation. Sur la caustique l'intensité lumineuse devient "infinie" et rend celle-ci observable.

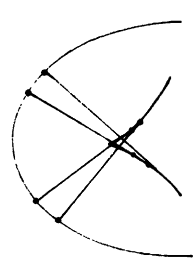

Figure 1.

Cette définition géométrique élémentaire des caustiques comme enveloppes de normales correspond à l'approximation de l'optique géométrique. Mais le

(1) C'est aussi un exemple de cet ordre (mais d'une bien moindre portée) que j'ai pris pour support dans le premier numéro.

phénomène réel est un phénomène de propagation d'ondes et la véritable question théorique est donc celle de l'analyse au voisinage de leurs caustiques des solutions de l'équation des ondes.

Soient $q = (x,y)$ les coordonnées de $\mathbb{R}^2$ et t la variable temps. L'équation des ondes (on suppose le milieu homogène et isotrope) est associée à l'opérateur différentiel du 2ème ordre [(1)] :

1.1. $$D = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

où Δ est l'opérateur laplacien $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Toute propagation d'ondes dans le plan est décrite par une solution $v(q,t)$ de l'équation :

1.2. $$D\, v(q,t) = 0$$

satisfaisant certaines conditions initiales, $v(q,t)$ représente le champ lumineux en q au temps t. Suivant sa covariance ce peut être un scalaire, un vecteur, un tenseur, etc. Supposons le scalaire (complexe).

On restreint d'abord le problème de la résolution de 1.2. en ne considérant que des solutions *stationnaires* $v(q,t) = e^{i\tau t}u(q)$ (séparation des variables spatiales et temporelles) : en q, le champ est défini par une amplitude $u(q)$ ne dépendant que de q et par une phase de fréquence τ, ne dépendant que de t. La connaissance de $v(q,t)$ se ramène alors à celle de la fonction $u(q)$ qui, $v(q,t)$ étant solution de 1.2., est solution de l'équation :

1.3. $$D_\tau\, u(q) = 0$$

où D_τ est l'opérateur différentiel, *dépendant de la fréquence* τ :

1.4. $$D_\tau = \tau^2 + \Delta$$

Quant aux conditions initiales, elles se réduisent à la donnée de la fonction amplitude $u_o(q)$ sur la courbe source S.

Dans ce cadre, l'approximation de l'optique géométrique correspond au cas d'une fréquence τ *infinie* [(2)].

---

(1) On suppose que la vitesse de la lumière est $c = 1$.

(2) Notons le parallèle avec l'approximation classique (non ondulatoire) de la mécanique quantique. Les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger sont du type $e^{\frac{-iEt}{h}}u(q)$, le quotient E/h de l'énergie E par la constante de Planck h étant une fréquence d'après la formule de de Broglie $E=h\nu$. On sait que l'approximation classique de la mécanique quantique s'obtient pour $h=0$.

Mais pour τ infinie, l'équation 1.3. n'a plus de sens. Plutôt que de chercher directement une solution u(q), on est donc conduit à chercher une *famille* u_τ de fonctions, paramétrée par τ et satisfaisant, au lieu de 1.3., la famille d'équations perturbées :

1.5. $D_\tau u_\tau = \varepsilon_\tau$

où ε_τ est une fonction de τ tendant vers zéro lorsque τ tend vers l'infini. "A la limite", la fonction u_∞ sera donc solution de "l'équation" $D_\infty u_\infty = 0$, c'est-à-dire solution de l'approximation géométrique.

Pour des raisons qui apparaîtront dans la suite, on impose aux perturbations ε_τ d'être à décroissance rapide en τ, c'est-à-dire de décroître plus vite que *toute* puissance négative de τ (tel est le cas par exemple de la fonction $e^{-\tau}$). Cette façon de poser le problème autorise à considérer comme équivalentes ($\sim$) deux solutions différant par une fonction à décroissance rapide en τ.

On est donc en définitive, conduit à chercher des solutions $u_\tau(q)$ - dites *solutions asymptotiques* (asymptotiques relativement à τ) - des équations 1.5., dont la restriction à S est une fonction donnée $u_o(q)$ (condition initiale).

Ce problème est beaucoup plus simple à résoudre que celui de la recherche directe des solutions de l'équation non perturbée 1.3. Pour ce faire, on introduit une nouvelle hypothèse. On suppose que la fonction complexe $u_\tau(q) = a\, e^{i\theta}$ est du type suivant :

i) l'argument θ est de la forme $\theta(q,\tau) = \tau\, \varphi(q)$ où $\varphi(q)$ est une phase réelle indéfiniment différentiable (hypothèse de simplicité sur la dépendance en τ) (1) ;

ii) l'amplitude $a_\tau(q)$ admet, lorsque τ tend vers l'infini, un *développement asymptotique* de la forme :

1.6. $a_\tau(q) \sim \tau^\mu \left[a_o(q) + \frac{1}{\tau} a_1(q) + \frac{1}{\tau^2} a_2(q) + \ldots\ldots\right]$

où $a_o(q)$ est une fonction non nulle.

2. EQUATION CARACTERISTIQUE ET EQUATIONS DE TRANSPORT.

Considérons une solution asymptotique

$$u_\tau(q) \sim e^{i\tau\varphi(q)}\, \tau^\mu \left[a_o(q) + \frac{1}{\tau} a_1(q) + \ldots\ldots\right]$$

---

(1) Cette "phase" spatiale $\varphi(q)$, dépendant de la position q, ne doit pas être confondue avec la phase classique $e^{i\tau t}$ des solutions stationnaires de 1.2.

de l'équation 1.5. Ordonnons $D_\tau u_\tau$ suivant les puissances décroissantes de τ. Un calcul, facile mais un peu fastidieux, montre que l'on obtient, au facteur $e^{i\tau\varphi}$ près :

2.1. – $\tau^{\mu+2}$: $a_o(1 - |\nabla\varphi|^2)$, où

$|\nabla\varphi|^2 = (\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial y})^2$ est le carré du module du vecteur gradient $\nabla\varphi$ de composantes $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$.

– $\tau^{\mu+1}$: $ia_o\,\Delta\varphi - a_1\,|\nabla\varphi|^2 + 2i\,\nabla\varphi\cdot\nabla a_o + a_1$,

où $\nabla\varphi\cdot\nabla a_o = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial a_o}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial a_o}{\partial y}$ est le produit scalaire.

– τ^{μ} : $ia_1\,\Delta\varphi - a_2\,|\nabla\varphi|^2 + 2i\,\nabla\varphi\cdot\nabla\,a_1 + \Delta\,a_o + a_2$, et en général :

– $\tau^{\mu+1-j}$: $ia_j\,\Delta\varphi - a_{j+1}\,|\nabla\varphi|^2 + 2i\,\nabla\varphi\cdot\nabla a_j + \Delta a_{j-1} + a_{j+1}$ pour $j \geqslant 1$.

Comme, par hypothèse, la perturbation ε_τ intervenant dans 1.5. est à décroissance rapide, $D_\tau u_\tau = \varepsilon_\tau$ implique que *tous* les coefficients des puissances de τ dans le développement $D_\tau u_\tau$ doivent *s'annuler*. L'équation principale 1.5. équivaut donc à une série d'équations dérivées.

i) Comme $a_o \neq 0$ par hypothèse, l'annulation du coefficient de $\tau^{\mu+2}$ montre que la phase réelle $\varphi(q)$ doit satisfaire *l'équation caractéristique* (équation eikonale de l'optique géométrique) :

2.2. $1 - |\nabla\varphi|^2 = 0$

avec la condition initiale $\varphi|_S = 0$.

ii) Supposons que l'on connaisse une solution φ *de l'équation caractéristique*. L'annulation du coefficient de $\tau^{\mu+1}$ montre que l'amplitude $a_o(q)$ doit satisfaire *l'équation de transport* :

2.3. $a_o\,\Delta\varphi - 2\,\nabla\varphi\cdot\nabla a_o = 0$

avec la condition initiale $a_o|_S = u_o$.

iii) Supposons que l'on connaisse une solution $a_o(q)$ de 2.3. L'annulation du coefficient de τ^{μ} montre que l'amplitude $a_1(q)$ doit satisfaire l'équation de transport :

2.4. $a_1\Delta\varphi + 2\,\nabla a_1\cdot\nabla\varphi = i\Delta a_o$, etc.

Il s'agit donc de résoudre l'équation caractéristique de la phase et les équations de transport des amplitudes.

L'équation caractéristique 2.2. disant que le gradient de la phase φ est de module constant 1, signifie géométriquement que les courbes de niveau

$\varphi(q)$ = constante, *sont des courbes parallèles* (et donc parallèles à la source S qui est par hypothèse la courbe de niveau $\varphi = 0$). Ce sont les surfaces d'ondes.

Pour résoudre l'équation de transport 2.3. considérons le champ de vecteur $2\nabla\varphi$ *et supposons-le intégrable*. Ses courbes intégrales étant les lignes de gradient de φ, elles sont orthogonales aux courbes de niveau de φ, c'est-à-dire aux surfaces d'ondes. Ce sont les rayons lumineux. Soit $q(t)$ un tel rayon lumineux. Par hypothèse $\frac{dq}{dt} = 2\nabla\varphi$ et

$$2\nabla\varphi\cdot\nabla a_o = \nabla a_o \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{da_o}{dt}$$

L'équation de transport 2.3. se réduit donc à une *équation linéaire* :

2.5. $\dfrac{da_o}{dt} + a_o\,\Delta\varphi = 0$ sur les rayons lumineux.

L'équation de transport 2.4. se réduit de même à l'équation linéaire :

2.6. $\dfrac{da_1}{dt} + a_1\,\Delta\varphi - i\Delta a_o = 0$

On peut toujours obtenir ainsi, par intégrations successives, une solution asymptotique *locale* dans un voisinage de la source S. Mais ce qui fait *obstruction* à l'obtention d'une solution *globale* est précisément *l'enveloppe* des courbes intégrales du champ $2\nabla\varphi$, c'est-à-dire la caustique au sens géométrique du terme. Sur la caustique, l'amplitude a_o *diverge*.

La question se pose donc de *comprendre* cette obstruction.

3. FORMALISME HAMILTONIEN.

On sait qu'il existe les plus grands rapports entre l'optique et la mécanique hamiltonienne (1). Commençons donc par décrire brièvement la généralisation hamiltonienne de ce qui précède.

Nous considérons au départ la variété différentiable (précédemment $\mathbb{R}^2$) que parcourt la variable spatiale q. Les propriétés optiques du milieu définissent sur X une métrique riemannienne (euclidienne si le milieu est optiquement homogène et isotrope). Soit T^*X le fibré cotangent de X et notons (q,p) un système de coordonnées locales. Nous nous donnons un opérateur différentiel D (précédemment l'équation des ondes) et cherchons des solutions asymptotiques de l'équation perturbée $D_\tau u_\tau = \varepsilon_\tau$. Un calcul analogue à celui du §2 montre qu'à l'opérateur D_τ est associée une fonction $H(q,p)$ (précédemment $1 - |p|^2$), définie sur T^*X et telle que le coefficient de $\tau^{\mu+2}$ dans le développement de $D_\tau u_\tau$ soit égal à $a_o(q)H(q,d\varphi)$ où $d\varphi$

(1) Cf. par exemple [Arnold 1976]

est la différentielle de la phase $\varphi : X \to \mathbb{R}$ [1].

3.1. Remarque.
Précédemment la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^2$ établissait un isomorphisme entre le fibré cotangent $T^* \mathbb{R}^2$ et le fibré tangent $T\mathbb{R}^2$, isomorphisme identifiant le covecteur $d\varphi$ au vecteur tangent $\nabla\varphi$. Comme $H(q,p)$ était donné par $1 - |p|^2$, on trouvait donc comme coefficient de $\tau^{\mu+2}$, $a_o(1 - |\nabla\varphi|^2)$.

La fonction $H(q,p)$, dite *symbole principal* de l'opérateur D_τ, joue un rôle éminent dans la compréhension du problème, puisque nous allons voir qu'il est identifiable à un hamiltonien.

D'abord le symbole principal permet de définir l'équation caractéristique du problème.

Sur tout ouvert U de X où la phase φ est définie, elle satisfait l'équation :

3.2. $H(q,d\varphi) = 0$ (cf. 2.2.)

Considérons alors le graphe Λ_φ de $d\varphi$: $\Lambda_\varphi = \{(q,d\varphi(q))\}_{q\in U}$ [2].
Il possède les propriétés suivantes [3].

3.3. Λ_φ est une sous-variété de dimension $n=2$ de $T^* U$ (de dimension $2n=4$).

3.4. La 2-forme fondamentale $\omega = dq\wedge dp$ (définissant la structure symplectique de $T^* X$) s'annule sur Λ_φ. En effet sur Λ_φ $p = d\varphi$, Λ_φ étant l'image de U par la section $d\varphi : U \longrightarrow T^* U$

$$(x,y) \longmapsto (x,y, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}).$$

Le jacobien de cette application étant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

(1) Sur tout ouvert U de X où φ est définie, $d\varphi$ - section du fibré $T^* U$ - est la 1-forme $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} dx_n$ $(q=(x_1 \ldots x_n))$.
(2) Pour tout point $q\in U$, $d\varphi(q)$ est un élément du plan cotangent $T_q^* X$ de X en q, c'est-à-dire, une forme linéaire sur le plan tangent $T_q X$ de X en q.
(3) Pour faciliter les écritures nous supposerons que X est de dimension $n=2$. $q=(x,y)$ seront des coordonnées locales de X et $(q,p) = (x,y,\xi,\zeta)$ des coordonnées locales de $T^* X$.

un vecteur tangent en q à U, de coordonnées (u,v) dans la base $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ de T_qU, a pour image par l'application dérivée de $d\varphi$ le vecteur tangent en $(q,d\varphi(q))$ à $T_{(q,d\varphi(q))}(T^*U)$, de coordonnées :

$(u,v,\ u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y},\ u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + v\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2})$ dans la base

$(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \zeta}, \frac{\partial}{\partial \zeta})$.

Cela montre que le plan tangent à Λ_φ en $(q,d\varphi(q))$ est engendré par les vecteurs :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

Or, $\omega(X_1,X_2) = X_{1x}X_{2\xi} - X_{1\xi}X_{2x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = 0$

3.5. Le symbole principal s'annule sur Λ_φ. En effet, sur Λ_φ $p=d\varphi$ et donc $H|_{\Lambda_\varphi} = H(q,d\varphi) = 0$ d'après 3.2. Cette condition fondamentale ne fait donc que reformuler l'équation caractéristique 3.2.

3.6. Λ_φ est *transverse* en tout point aux fibres de la projection canonique

$\Pi : T\ U \longrightarrow U$

$\quad (q,p) \longmapsto q$

car $d\varphi$ est une section de Π.

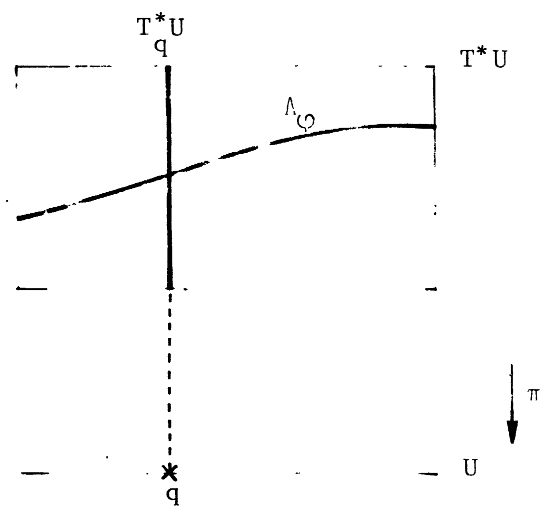

Figure 2

Cette reformulation du problème permet de soupçonner que l'obstruction qu'il y a à prolonger une solution locale (qui existe toujours au voisinage de S) en une solution globale *provient des points où la condition 3.6. de transversalité n'est plus remplie*. En ces points la phase φ cesse en effet d'être définie.

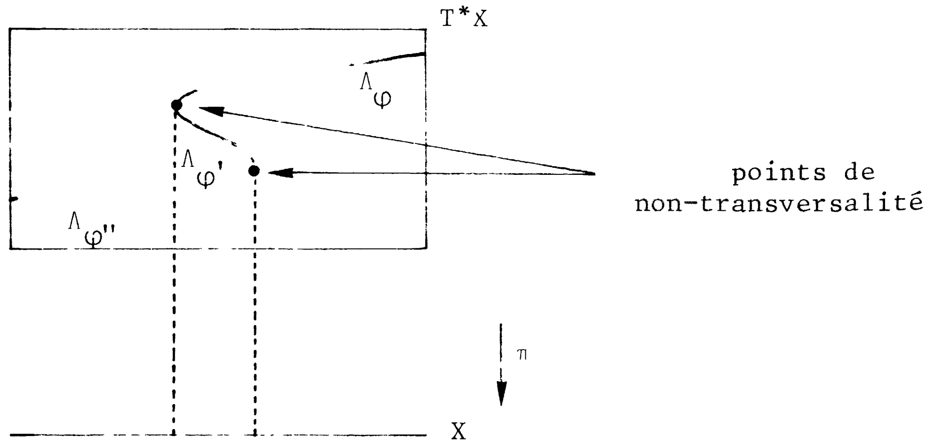

Figure 3

Nous sommes donc conduits à *changer de stratégie* en cherchant :

3.7.A. d'abord à définir *géométriquement et non plus fonctionnellement* les solutions de l'équation caractéristique ;

3.7.B. ensuite à reprendre la question de la représentation fonctionnelle de ces solutions géométriques.

4. SOLUTIONS LAGRANGIENNES.

Abordons le problème 3.7.A.

4.1. Définition.

On appelle *variété lagrangienne* une sous-variété Λ de dimension n de $T^* X$ (qui est de dimension 2n) satisfaisant la condition 3.4. $\omega|_\Lambda = 0$.
On appelle *solution lagrangienne* du problème défini par le symbole principal H, une variété lagrangienne Λ satisfaisant à la condition 3.5. $H|_\Lambda = 0$. (1).

Soit Λ une solution lagrangienne. Sur l'ouvert où la condition 3.6. de transversalité est satisfaite, Λ est localement représentable par le graphe Λ_φ d'une phase. Cette représentation échoue pour le lieu critique Σ

(1) Les conditions 3.4. et 3.5. étant locales, Λ ne peut être une solution globale que si elle est d'extension maximale. On suppose d'autre part que 0 est une valeur *régulière* de H . Tel est le cas pour $H = 1 - |p|^2$.

de Λ, ensemble des points où Λ est non transverse aux fibres de la projection canonique $\Pi : T^* X \to X$. Ce lieu critique définit par projection le *contour apparent* $\Pi(\Sigma)$ de Λ sur X, qu'il s'agit de comparer à la caustique K définie précédemment.

Pour cela rappelons que cette caustique était au §2, l'enveloppe des courbes intégrales du champ $2\nabla\varphi$ et remarquons que ce champ est donné par la dérivée $\frac{\partial}{\partial p} H(q,d\varphi)$.

Considérons alors le *champ hamiltonien* X_H défini sur $T^* X$ par les équations classiques de Hamilton relatives au symbole principal H :

$$4.2. \quad \begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

Comme :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dt} \\ &= \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} \\ &= 0 , \end{aligned}$$

H est constant sur les courbes intégrales de X_H et comme $H|_\Lambda = 0$ d'après 3.5. Λ (supposée maximale) est réunion de telles courbes (1). Dans le cas où il n'y a pas d'obstruction due à un défaut de transversalité, $\Lambda = \Lambda_\varphi$, $p = d\varphi$ et le champ $\frac{\partial}{\partial p} H(q,d\varphi)$ est la *projection sur X* du champ X_H *restreint à* Λ.

L'on voit donc que la caustique K comme enveloppe des courbes intégrales du champ $\frac{\partial}{\partial p} H(q,d\varphi)$ *n'est rien d'autre que le contour apparent de la solution lagrangienne globale.*

Cela permet de comprendre en quoi la conception de la caustique comme obstruction à l'obtention d'une solution *fonctionnelle* globale est hybride. L'optique géométrique est un problème hamiltonien de géodésiques (principe de Fermat) dont le "lieu" naturel est le fibré cotangent $T^* X$ et non pas l'espace de base X. Si l'on se restreint à cet espace de base, les caustiques s'introduisent de façon *extrinsèque et négative* comme *obstructions*, alors qu'elles matérialisent en fait l'aspect *dominant* des phénomènes. Si en revanche, l'on se situe dans $T^* X$, elles apparaissent comme contours

---

(1) On appelle aussi bandes caractéristiques, les courbes intégrales de X_H, hypersurface caractéristique, l'hypersurface H_o de $T^* X$ d'équation $H=0$, bandes bicaractéristiques, les bandes caractéristiques de H_o et courbes bicaractéristiques les projections sur X des bandes bicaractéristiques. Λ est donc réunion de bandes bicaractéristiques.

apparents des solutions "géométriques" régulières que sont les solutions lagrangiennes et sont donc *induites* par elles. Il s'agit-là d'une bon exemple du déplacement stratégique et épistémologique que soutient la maxime catastrophiste selon laquelle toute morphologie naturelle est un contour apparent.

4.3. Remarques.

L'intervention du fibré cotangent dans ce qui précède aura pu paraître étrange. Elle est pourtant tout à fait naturelle. Un covecteur p en un point q de X est une forme linéaire sur T_qX à laquelle est canoniquement associé l'hyperplan $\mathrm{Ker}(p)$ de $T_q(X)$ qui en est le noyau. Soit alors S un front d'onde se propageant dans X. S admet en chaque point q un hyperplan tangent, canoniquement associé à un covecteur $p(q)$ de T_qX défini à un facteur d'homothétie λ près. Le choix d'une direction et d'une vitesse de propagation fixe λ .

On obtient ainsi un champ $j : S \longrightarrow T^*X$
$$q \longmapsto (q,p(q))$$

Si l'on part de l'image $j(S)$, si l'on suit son déplacement le long des trajectoires du champ hamiltonien X_H pendant un temps t et si on la projette sur X, on obtient la position S_t du front d'onde au temps t. Qui plus est l'isomorphisme $T^*X \simeq TX$ induit par la métrique riemannienne de X transforme le covecteur $p(q)$ en un vecteur tangent normal à $\mathrm{Ker}p(q)$. C'est le principe de Huyghens : S_t se propage normalement à lui-même.

5. CAUSTIQUES ET CATASTROPHES.

Avant d'aborder le second problème 3.7.B. de la représentation fonctionnelle des solutions lagrangiennes, esquissons comment (suivant Guckenheimer) on peut identifier localement, caustiques et catastrophes.

L'idée de base va être - conformément au principe phénoménologique de la T.C. - *de considérer l'espace réel X comme l'espace externe d'un déploiement* dont l'ensemble de bifurcation sera la caustique envisagée. Les étapes sont les suivantes.

a) - Un déploiement sur un ouvert U de X étant une famille de potentiels paramétrée par U, il s'agit d'abord d'établir un rapport entre variétés lagrangiennes et familles de potentiels.

Soit $\varphi_q(\alpha)$ une famille de potentiels définis sur $\mathbb{R}^p$ (de variable α) et paramétrée par $q \in U$. Elle est représentable par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^p \times U \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & \mathbb{R} \times U \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\alpha,q) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr] & & (\varphi_q(\alpha), q) \arrow[dl] \\ & q & \end{tikzcd}$$

Soit V_φ le lieu critique de φ d'équation $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\alpha,q) = 0$, lieu des points (α,q) tels que $\varphi_q(\alpha)$ admette α comme point critique. Sur $d_\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial q}\,dq$ puisque $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$. Considérons l'application :

5.1. $$\begin{aligned} \sigma\ :\ V_\varphi &\longrightarrow T^* U \\ (\alpha,q) &\longmapsto (q, \frac{\partial\varphi}{\partial q}\,dq = d\varphi) \end{aligned}$$

5.2. PROPOSITION

Génériquement V_φ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^p \times U$ et $\Lambda = \sigma(V_\varphi)$ est une variété lagrangienne de $T^* U$.

Preuve

L'argument de généricité, bien que standard, nous entrainerait trop loin. Montrons en revanche que Λ est lagrangienne. La 2-forme $\omega = dq\wedge dp$ définissant la structure symplectique de $T^* U$ est la différentielle extérieure de la 1-forme $p\,dq$. Mais sur $\sigma(V_\varphi)$ $p\,dq = d\varphi$ et donc $\omega|_{\sigma(V_\varphi)} = d^2\varphi = 0$ (condition 3.4.).

b) - Considérons maintenant un germe en 0 de singularité *résiduelle* (1) $\varphi_o(\alpha)$ de codimension n et de déploiement universel :

$$\begin{aligned} \varphi\ :\ \mathbb{R}^p \times U &\longrightarrow \mathbb{R} \times U \\ (\alpha,q) &\longmapsto (\varphi_q(\alpha),q) \end{aligned}$$

où U est un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$.

Il s'agit de lui associer un autre germe de singularité ψ_o de déploiement ψ tel que :

i) les ensembles de bifurcation K_φ et K_ψ soient égaux,

ii) le déploiement universel de ψ ait une forme particulièrement simple, permettant de définir K_ψ comme caustique.

Soit donc K_φ l'ensemble de bifurcation de φ, lieu des points q de l'espace externe U tels que φ_q admette un point critique *dégénéré*. K_φ est la projection sur U du lieu critique Σ_φ de la variété V_φ, lieu des points (α,q) tels que φ_q admette α comme point critique dégénéré.

(1) Rappelons que cela signifie que la différentielle seconde $d^2\varphi_o(0) = 0$. D'après le lemme de réduction, toute singularité est équivalente à une singularité résiduelle.

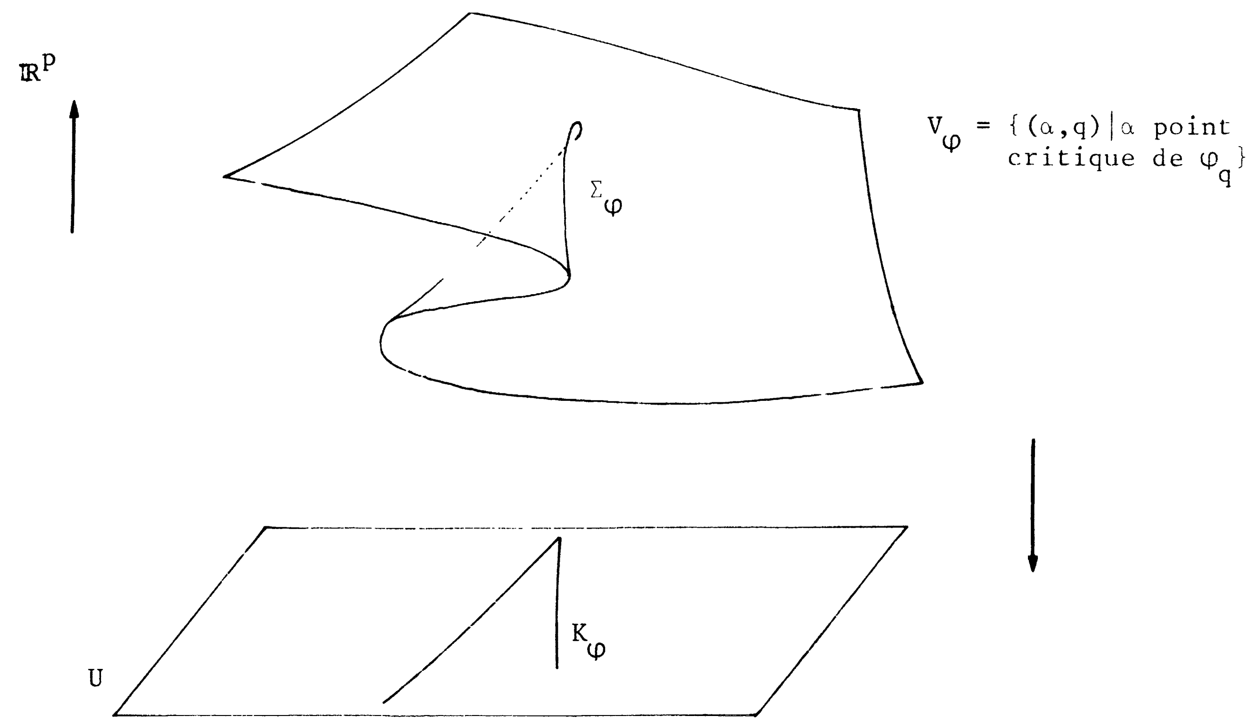

Figure 4.

Posons $\varphi_q(\alpha) = \varphi_o(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i\,(\alpha) \qquad (q = (x_1 \dots x_n))$.

La singularité $\varphi_o(0)$ étant résiduelle, la codimension n est supérieure au corang p et l'on peut supposer que $v_j = \alpha_j$ pour $j=1, \dots, p$.

Considérons alors le germe $\psi_o : (\mathbb{R}^n,0) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par :

$$\psi_o(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi_o(\alpha_1, \dots, \alpha_p) - \frac{1}{2} \sum_{\ell=p+1}^{\ell=n} (\alpha_\ell - v_\ell(\alpha_1 \dots \alpha_p))^2$$

Un calcul facile mais un peu fastidieux permet de montrer le résultat suivant :

5.3. PROPOSITION

i) $\psi_q(\alpha) = \psi_o(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$ <u>est un déploiement universel de</u> ψ_o.

ii) $K_\varphi = K_\psi$

c) - Soit K la caustique de ψ. C'est le contour apparent par la projection canonique $\Pi : T^* U \longrightarrow U$ de la variété lagrangienne $\sigma(V_\psi)$, σ associant au point (α,q) de V_ψ le point $(q, \frac{\partial\psi}{\partial q}\, dq = d\psi)$ de $T^* U$. Mais comme

$\frac{\partial\psi}{\partial q} = \alpha$ d'après 5.3.*i*), σ associe en fait au point (α,q) de V_ψ le point (q,α) de T^*U. K et K_ψ sont donc tous deux égaux à la projection le Σ_ψ sur U et d'après 5.3.*ii)* $K = K_\varphi$. Localement toute catastrophe est une caustique.

Réciproquement, nous allons voir que la résolution du problème 3.7.B. repose essentiellement sur la théorie de Thom-Mather du déploiement universel.

6. LES FONCTIONS OSCILLANTES DE MASLOV.

La géométrie du problème étant élucidée, la question reste donc de savoir comment la T.C. intervient dans les représentations *fonctionnelles locales* des solutions lagrangiennes.

L'idée fondamentale, due à Maslov, est de chercher des solutions asymptotiques $u_\tau(q)$ (fonctions oscillantes) qui ne sont plus simplement du type $e^{i\tau\varphi(q)}a_\tau(q)$ où $a_\tau(q) = \sum_{j=o}^{\infty} \tau^{\mu-j}a_j(q)$ (cf.1.6.), mais des sommes localement finies *d'intégrales oscillantes :*

6.1. $I(q,\tau) = (\frac{\tau}{2\Pi})^{p/2} \int e^{i\tau\varphi(q,\alpha)} a_\tau(q,\alpha)d\alpha$, où α parcourt $\mathbb{R}^p$, $(\frac{\tau}{2\Pi})^{p/2}$ est un facteur de normalisation et $a_\tau(q,\alpha)$ de support compact en α admet un développement asymptotique en τ de type $\sum_{j=o}^{\infty} \tau^{\mu-j}a_j(q,\alpha)$.

Cette méthode revient essentiellement à introduire des phases $\varphi(q,\alpha)$ dépendant de paramètres supplémentaires α, à considérer ceux-ci comme des variables *internes*, à identifier $\varphi(q,\alpha)$ à une famille $\varphi_q(\alpha)$ de potentiels se déployant sur l'espace *externe* X et à utiliser l'application σ définie en 5.1. pour lui associer une variété lagrangienne.

D'après un théorème d'Hörmander, ce procédé permet de représenter localement *toute* solution lagrangienne Λ. Soit U l'ouvert envisagé. Si il existe sur U une solution $\varphi(q)$ de l'équation caractéristique, les variables internes α sont *non pertinentes.* $\varphi_q(\alpha)$ est sans singularité résiduelle, son unique point critique étant non dégénéré. On peut alors "éliminer" α (corang 0) et poser $\varphi(q) = \varphi_q(\alpha)$. Comme $\varphi(q)$ ne dépend pas de α, $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \equiv 0$, $V_\varphi = U$ et l'application

$$\begin{aligned} \sigma : V_\varphi = U &\longrightarrow T^*U \\ q &\longrightarrow (q, d\varphi(q)) \end{aligned}$$

s'identifie à la section de T^*U définissant le graphe Λ_φ.

Il n'en va plus de même si le point q_o dans un voisinage U duquel on cherche une représentation fonctionnelle de Λ, appartient à la caustique K de Λ (son contour apparent). On considère alors des intégrales oscillantes $I(q,\tau)$; le raccord avec la géométrie sous-jacente reposant essentiellement sur l'équivalence à une fonction à décroissance rapide près, introduite au § 1. On a en effet le résultat remarquable suivant :

6.2. *Principe de la phase stationnaire.* Pour l'équivalence à une fonction à décroissance rapide près, une intégrale oscillante se concentre lorsque τ tend vers l'infini sur le lieu critique V_φ où la phase $\varphi(q,\alpha)$ est stationnaire relativement à α $(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0)$.

Comme d'après le théorème d'Hörmander on peut toujours représenter ainsi localement une solution lagrangienne Λ, on voit que toute caustique est localement une catastrophe et même, d'après le résultat 5.3. de Guckenheimer qu'elle est localement représentable par des phases $\varphi(q,\alpha)$ à n paramètres internes α et d'expression particulièrement simple : $\varphi(q,\alpha) = \varphi_o(\alpha) + q.\alpha$.

On montre qui plus est que les notions d'équivalence et de stabilité structurelle des phases, naturellement déduites de l'action des difféomorphismes symplectiques de T^*U compatibles à la projection canonique $\Pi : T^*U \longrightarrow U$, s'identifient aux notions d'équivalence et de stabilité structurelle des déploiements. Cela montre en particulier, que les singularités *structurellement stables* des caustiques naturelles, ne sont rien d'autre que les catastrophes élémentaires de codimension $\leqslant 3$ classifiées par le théorème de Thom.

Soit Λ une solution lagrangienne globale structurellement stable.

6.3. Si $q_o \notin \Pi(\Lambda)$, alors les intégrales oscillantes sont elles-mêmes à décroissance rapide en τ. $X - \Pi(\Lambda)$ admet pour interprétation physique la *zone d'ombre*.

6.4. Si $q_o \in \Pi(\Lambda) - K$, les points critiques (α,q_o) de $\varphi(q_o,\alpha)$ sont non dégénérés. Les intégrales oscillantes décroissent comme $(\frac{1}{\tau})^{p/2}$ (d'où la présence du facteur de normalisation $(\frac{\tau}{2\Pi})^{p/2}$ dans 6.1.) et l'on peut éliminer α de façon à représenter localement Λ par une phase "normale" $\varphi(q)$ (cf. plus haut). $\Pi(\Lambda) - K$ est la zone de lumière.

6.5. Si $q_o \in K$ est un point de la caustique et si (α_o,q_o) est un point de Σ (lieu critique de Λ) au-dessus de q_o, l'intégrale oscillante $I(q,\tau)$ décroît comme $(\frac{1}{\tau})^{p/2-\beta}$, où β est un coefficient appelé *degré* de la singularité $\varphi_{q_o}(\alpha_o)$. On peut alors montrer ce résultat remarquable que la stabilité structurelle de Λ (et donc de la phase φ qui la représente) permet essentiellement de réduire le calcul de $I(q,\tau)$ à celui d'intégrales de type $\int e^{i\tau\psi(y,\alpha)}\rho(\alpha)d\alpha$ où $\psi(y,\alpha)$ est un déploiement universel de $\varphi_{q_o}(\alpha_o)$ suivant les coordonnées y *d'un modèle transverse* de K en q_o. Dans le cas (le plus simple) d'une singularité pli (codimension 1) on retrouve ainsi l'intégrale $I = \int e^{i\tau(\alpha^3-y\,\alpha)}d\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (corang 1) introduite par Airy dès 1838 pour exprimer l'intensité de la lumière au voisinage d'une caustique.

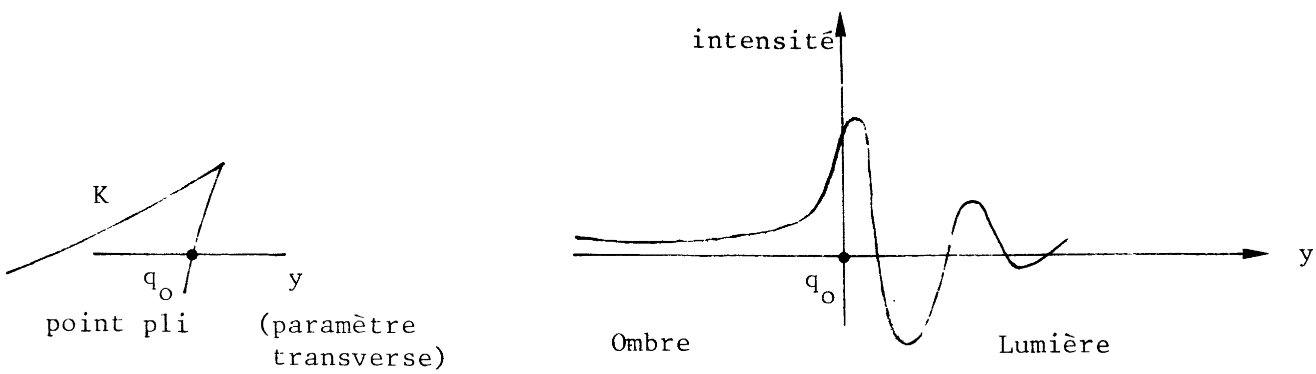

Figure 5.

7. L'on peut en conclusion, résumer ainsi la portée heuristique de cette résolution du problème des caustiques en optique ondulatoire.

7.1. Dans le cadre du formalisme hamiltonien la géométrie du problème se réduit à la théorie des contours apparents des variétés lagrangiennes qui s'identifie elle-même à la T.C.

7.2. La théorie des fonctions oscillantes de Maslov fournissant les solutions asymptotiques au voisinage des caustiques structurellement stables, se réduit à l'analyse des intégrales $\int e^{i\tau\varphi(y,\alpha)}d\alpha$ où $\varphi(y,\alpha)$ est un déploiement universel d'une singularité de codimension finie.

7.3. Dans la mesure où cette stratégie déborde le domaine particulier de l'optique et s'intègre à la théorie générale des opérateurs différentiels, elle a une portée universelle.

7.4. On peut dire que la T.C. doit son importance tant théorique qu'épistémologique au fait d'avoir décelé, autonomisé et formalisé un niveau géométrique primaire sous-jacent à l'universum qu'aménage techniquement la physique classique (mécanique et optique).

7.5. La mathématisation de ce registre profond, *contraignant, informant et effecteur,* autorise la T.C. *à changer de paradigme*, à opérer un tronquage phénoménologique de l'ordre des causes (scotomisation des dynamiques internes) qui restaure la valeur ontologique de l'apparaître comme tel et instaure un effet ontologique faisant faire retour au "refoulé" de la physique fondamentale. Ce faisant, elle permet - *à l'intérieur même des formalismes assurant la* ***rationalité*** (par leur implication constituante dans/de la réalité) - *de réaliser un chiasme entre sciences exactes et phénoménologie* (au sens husserlien du terme).

7.6. Dans le cas des caustiques, *celles-ci constituent précisément l'apparaître du phénomène*. Dans la description classique, il y a *conflit absolu* entre cette donnée phénoménologique immédiate et la mathématisation puisque la caustique y joue comme obstruction. Dans la description catastrophique cette obstruction est non seulement levée mais inverse sa valeur puisqu'en tant que contour apparent d'une solution lagrangienne, la caustique devient contraignante, informante et effectrice pour la compréhension du phénomène critique qu'elle matérialise.

BIBLIOGRAPHIE

J.J. DUISTERMAAT, "Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities", *Com. Pure Appl. Math.*, (1974), p. 207-281.

J. GUCKENHEIMER, "Catastrophes and partial differential equations", *Ann. Inst. Fourier*, (1973), p. 31-59.

V.P. MASLOV, *Perturbation theory and asymptotic methods*, Paris, Dunod, 1972.

J. CHAZARAIN, "Solutions asymptotiques et caustiques", *Rencontre de Cargèse sur les singularités et leurs applications*, Institut d'Etudes Scientifiques de Cargèse, 1975.

V. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Moscou, Ed. Mir, 1976.