MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. TH. GUILBAUD

Continu expérimental et continu mathématique

Mathématiques et sciences humaines, tome 62 (1978), p. 11-33
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__62__11_0>

Math. Sci. hum., (*16*^{e} année, n°62, *1978*, p.11-33)

CONTINU EXPERIMENTAL ET CONTINU MATHEMATIQUE

G.Th. GUILBAUD*

1. INTRODUCTION

Le texte qu'on va lire est le compte-rendu de leçons faites à l'Ecole Pratique des Hautes Etudes en 1962, pour attirer l'attention sur l'usage des structures ordinales et des structures métriques en divers domaines des sciences de la nature comme des sciences de l'homme.

Le point de départ en a été le rapprochement de trois sortes de textes (dont quelques fragments sont reproduits plus loin, en annexe).

En premier lieu les idées plusieurs fois exprimées par Henri Poincaré dans sa critique des modèles fechneriens : ainsi, entre autres, le Continu mathématique, un article de la Revue de Métaphysique paru en 1893 et repris en 1902 pour constituer le chapitre 2 de La Science et l'Hypothèse ; voir aussi la suite dans la 3ème section (le Continu physique) du chapitre 3 (la Notion d'espace) de La Valeur de la Science (1905) ainsi que les sections 3 et 6 de "Pourquoi l'espace à trois dimensions" qui forme le 3ème chapitre du recueil posthume (1913) intitulé "Dernières pensées".

En second lieu, un mémoire écrit par Etienne Halphen en 1947 et publié en 1955 par l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, vol.4, fasc. 1, pages 54 et suivantes : "Les grandeurs psychologiques", chapitre qui constitue selon les mots de l'auteur : "une esquisse d'Algèbre de la qualité, prélude nécessaire de la statistique mathématique".

---

* Centre de Mathématique Sociale, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales
54 bd Raspail 75270 Paris Cedex 06

Enfin, le point de vue axiomatique présenté par André Weil dans le fascicule n°1 des publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Strasbourg : "Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale" (Paris, Hermann, A.S.I. 551, 1937, 40 p.) et qu'on retrouve au chapitre 2 de La Topologie Générale de N. Bourbaki.

2. AXIOMATIQUE DU PREORDRE

2.1. Rappels sur l'ordre

2.1.1. Une *relation d'ordre strict* est une relation binaire, notée $<$ (et sa négation notée $\nless$), qui vérifie les postulats suivants :

(i) $x < y \Rightarrow y \nless x,\ y \neq x$ (asymétrie), $\forall x$ et $y \in E$;

(ii) $x < y$ et $y < z \Rightarrow x < z$ (transitivité) $\forall x, y, z \in E$.

On pourra interpréter intuitivement la relation $<$ comme exprimant un jugement de "préférence" (ou de "prévalence"), $x < y$ signifiant par exemple que y est préféré à x ou que y possède une "valeur" supérieure à celle de x.

2.1.2. Une *échelle*, ou *ordre total strict* est la donnée d'une relation d'ordre strict, notée $<$, et d'un ensemble E tels que :

(iii) $x \in E$ et $y \in E$ et $x \neq y \Rightarrow x < y$ ou $y < x$.

Du point de vue formel, il est plus commode d'introduire la relation $\leqslant$, définie par $x \leqslant y$ si et seulement si : $x < y$ ou $x = y$.
L'avantage en est que l'on n'est plus astreint à préciser chaque fois que x et y sont distincts.

La relation $\leqslant$ sera dite relation d'ordre (alors que $<$ sera dite relation d'ordre strict), qualifiée parfois de "large".
Elle vérifie les postulats :

(i) $x \leqslant x \quad \forall x \in E$

(ii) $x \leqslant y$ et $y \leqslant x \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in E$

(iii) $x \leqslant y$ et $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z \quad \forall x, y, z \in E$

Dans une échelle au sens large (ou ordre total) on a le postulat supplémentaire suivant :

(iv) $\forall x, y \in E$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ est vraie

Remarques :
On pourra écrire $y \geqslant x$ au lieu de $x \leqslant y$ et de même $y > x$ pour $x < y$.
Avec ces notations, dans un ordre total strict, $y \nless x$ équivaut à $y \geqslant x$.
Les postulats d'un ordre total peuvent donc s'écrire :

(i') $x \nless x \quad \forall x \in E$

(ii') $y \nless x$ et $x \nless y \Rightarrow x = y \qquad \forall x,y \in E$

(iii') $z \nless y$ et $y \nless x \Rightarrow z \nless x \qquad \forall x,y,z \in E$

(iv') $\forall x,y \in E$, $y \nless x$ ou $x \nless y$ est vraie.

2.3. Rappels sur le préordre total

2.3.1. Un *préordre total* correspond à un affaiblissement de la notion d'échelle, car on ordonne les objets de l'ensemble par une relation d'ordre strict $<$, mais on permet les "ex-aequo" : deux objets distincts peuvent occuper une "même place" dans l'échelle ; deux tels éléments x et y seront dits "équivalents", ce que l'on notera $x \equiv y$; ce sont donc des éléments dont aucun ne précède (au sens strict) l'autre.
Ainsi $x \equiv y$ si et seulement si $x \nless y$ et $y \nless x$.
Mais la relation $\equiv$ ne peut être quelconque.

2.3.2. Propriétés exigées de la relation d'équivalence

a) Réflexivité : $x \equiv x$
Cette propriété est trivialement vérifiée.

b) Symétrie : $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$
Vérifié d'après la définition de la relation.

c) Transitivité : $x \equiv y$ et $y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$
soit en termes de la relation d'ordre :

$(x \nless y$ et $y \nless x)$ et $(y \nless z$ et $z \nless y) \Rightarrow (x \nless z$ et $z \nless x)$.

En se servant du calcul des propositions, on obtient de façon équivalente

$$x < z \Rightarrow x < y \text{ ou } y < x \text{ ou } y < z \text{ ou } z < y$$

ou encore non $(x < z$ et $x \equiv y$ et $y \equiv z)$.

d) Compatibilité avec l'ordre : on doit pouvoir remplacer un élément par un autre qui lui est équivalent, sans que l'ordre soit modifié.

$$x < y \text{ et } y \equiv z \Rightarrow x < z$$

Finalement un préordre total est la donnée d'un ensemble ordonné $(E,<)$ et d'une relation d'équivalence qui vérifient les postulats d'ordre strict :

(i) $x < y \Rightarrow y \nless x$, $y \neq x$;

(ii) $x < y$ et $y < z \Rightarrow x < z$;

et les postulats de préordre total :

(1) $x \equiv y \Longleftrightarrow x \nless y$ et $y \nless x$ (définition de $\equiv$) ;

(2) non $(x < z$ et $x \equiv y$ et $y \equiv z)$ (transitivité de $\equiv$) ;

(3) $x < y$ et $y \equiv z \Rightarrow x < z$ (compatibilité de $\equiv$ avec $<$) .

2.4. Représentation graphique d'un préordre total

On représente les éléments de l'ensemble préordonné par des points et on représente $a < b$ par $a \longrightarrow b$

$a \equiv b$ par a ---- b

Les postulats (i), (ii), (1), (2) et (3) d'un préordre total se transforment en:

(P1) : les trois cas :

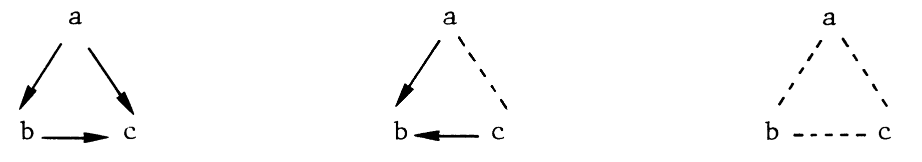
$a \longrightarrow b$

a ---- b

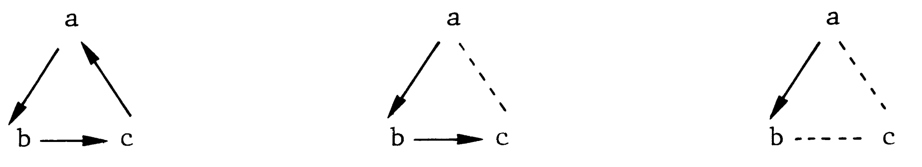
$a \longleftarrow b$

sont mutuellement exclusifs.

(P2) : les sous-graphes :



sont permis ; les sous-graphes :



sont interdits.

3. SESQUI TRANSITIVITE

3.1. Le paradoxe de Poincaré : supposons que l'on réalise l'expérience suivante: on présente à un sujet les poids
$\begin{cases} A, \text{ de } 10 \text{ g} ; \\ B, \text{ de } 11 \text{ g} ; \\ C, \text{ de } 12 \text{ g} . \end{cases}$

Il se peut que le sujet trouve que les poids A et B sont "équivalents", produisent la même sensation (ce que nous notons $A \approx B$), que B et C produisent la même sensation $B \approx C$ et que cependant A et C soient faciles à distinguer $A \prec C$.

On a donc $A \approx B$, $B \approx C$ et $A \prec C$.

C'est là, selon les termes mêmes de Poincaré, un désaccord intolérable avec le principe de contradiction, car si la relation est effectivement une équivalence, elle doit être transitive.

Or ce phénomène constitue l'essence même du continu expérimental. Et, fait remarquable, le continu mathématique permet de lever la contradiction ; c'est ce qu'avait pressenti Poincaré et prouvé Halphen (et ensuite Luce). Il n'est, par contre, absolument pas nécessaire de probabiliser les jugements, en introduisant les erreurs d'expérience, comme l'a fait Fechner. Il suffit de formaliser la notion d'équivalence non transitive.

Remarquons que les relations d'équivalence, dans la terminologie actuelle, sont toujours transitives. Par suite, la relation $\approx$ ne saurait être désignée par ce nom. On l'appellera indifférence ou non préférence.

3.2. Définition de la sesqui-transitivité

Soit E un ensemble ordonné par une relation $<$ qui satisfait aux postulats d'ordre strict :

(i) $a < b \Rightarrow b \nless a, \; a \neq b \qquad \forall a,b \in E.$

(ii) $a < b$ et $b < c \Rightarrow a < c \quad \forall a,b,c \in E.$

La relation $<$ pourra être interprétée intuitivement comme une relation de préférence.

On dira que a et b sont indifférents, noté $a \not\lessgtr b$, si et seulement si :

$$a \nless b \text{ et } b \nless a.$$

Graphiquement : $a < b$ sera représenté par $a \longrightarrow b$

$a \not\lessgtr b$ " " a ---- b

La relation $\not\lessgtr$ sera dite sesqui-transitive si :

a) $a \not\lessgtr b \Rightarrow b \not\lessgtr a \qquad \forall a,b \in E$. Ceci résulte de la définition même de $\not\lessgtr$, et il n'est pas nécessaire ici de postuler cette propriété.

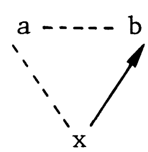
b) $x \not\lessgtr a$ et $a < b$ et $b < c \Rightarrow x < c \qquad \forall a,b,c,x \in E$

soit graphiquement : x ---- $a \longrightarrow b \longrightarrow c \Rightarrow x \longrightarrow c$

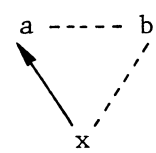
c) $\forall a,b \in E : a \not\lessgtr b, \exists x \in E$ tel que $\begin{cases} \text{soit } x \not\lessgtr a \text{ et } x < b \\ \text{soit } x \not\lessgtr b \text{ et } x < a \end{cases}$

ces cas étant mutuellement exclusifs. Graphiquement :

a ------ $b \Rightarrow \exists x \in E$ tel que



ou



mais non les deux à la fois.

Finalement, un ensemble E ordonné par une relation d'ordre strict $<$, et muni d'une relation sesqui-transitive vérifie les postulats suivants :

(i) $a < b \Rightarrow b \nless a, \; a \neq b \qquad \forall a,b \in E$

(ii) $a < b$ et $b < c \Rightarrow a < c \qquad \forall a,b,c \in E$

(iii) $a \not\lessgtr b \iff a \nless b$ et $b \nless a \qquad \forall a,b \in E$

(iv) $x \not\lessgtr a$ et $a < b$ et $b < c \Rightarrow x < c \qquad \forall a,b,c,x \in E$

(v) $\forall a,b \in E : a \not\lessgtr b, \exists x \in E : \begin{cases} \text{ou bien } x \not\lessgtr a \text{ et } x < b \\ \text{ou bien } x \not\lessgtr b \text{ et } x < a \end{cases}$

Ces deux cas étant mutuellement exclusifs.

Nous allons voir que la relation sesqui-transitive est orientable, et nous en déduirons un ordre total et strict sur les éléments de E.

3.3. Sections

Nous allons nous occuper du rôle d'un élément a dans l'ensemble ordonné E muni de la relation sesqui-transitive $\lessgtr$. Pour cela, on situe les éléments de E par rapport à a.

3.3.1. Section commençante relative à a : ensemble A (a) des $x < a$:

$$A(a) = \{x \in E : x < a\}$$

Ce sont les éléments auxquels on préfère a.

3.3.2. Section finissante relative à a : ensemble P(a) des x tels que $a < x$:

$$P(a) = \{x \in E : a < x\}$$

Ce sont les éléments que l'on préfère à a.

3.3.3. Section intermédiaire relative à a : ensemble I(a) des x tels que $x \lessgtr a$

$$I(a) = \{x \in E : x \lessgtr a\}$$

Ce sont les éléments indifférents par rapport à a.

La donnée des trois ensembles A(a), P(a) et I(a) spécifie complètement le "rôle" de a ; ce rôle sera confondu avec la donnée des 3 ensembles. Tout élément de E appartient à l'un d'eux, et à un seul (en particulier $a \in I(a)$, car $a \lessgtr a$).

Cependant, il se peut que A(a) ou P(a) soient vides (cela se produit en particulier si a est un élément extrémal). Ainsi le rôle de a forme un recouvrement disjoint de l'ensemble E.

3.3.4. Passage au quotient : soient x et y deux éléments ayant même rôle, c.a.d. $A(x) = A(y)$ et $P(x) = P(y)$, ce qui implique aussi $I(x) = I(y)$.
C'est une relation entre x et y qui sera notée $x \simeq y$.

Le lecteur s'assurera facilement que cette relation est bien une relation d'équivalence au sens classique, c.a.d. qu'elle est réflexive, symétrique et transitive. Comme $x \simeq y$ signifie que x et y "jouent le même rôle", qu'ils sont indiscernables, on les confond. Du point de vue strictement formel, on remplace donc l'ensemble E par l'ensemble $E' = E / \simeq$ quotient de E par la relation $\simeq$. On sait que les éléments de E' sont les classes d'éléments de E, modulo $\simeq$:

$$x' = \{y \in E : y \simeq x\}$$

Pour ne pas alourdir les notations, et par un abus de langage que l'on prendra garde de ne pas perdre de vue, on appellera encore E l'ensemble E'. Autrement dit, deux éléments distincts de E sont discernables l'un de l'autre.

3.4. Préordre latent

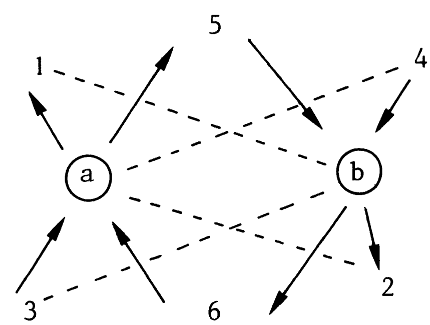
3.4.1. Soient a et b deux éléments distincts de E.

Un troisième élément x de E étant donné, examinons sa situation parmi les sections de a et de b. Comme dans tout problème d'énumération systématique et exhaustive, il est commode de faire le produit cartésien des deux recouvrements disjoints de E constitués par les sections relatives à a et à b respectivement.

	A(a)	I(a)	P(a)
A(b)	\	4	5
I(b)	3	\	1
P(b)	6	2	\

On ne considère que les éléments jouant un rôle différent par rapport à a et à b, c'est pourquoi on ne se préoccupe pas de la diagonale.

Graphiquement les cas 1 à 6 peuvent être représentés par :



Les cases du tableau sont loin d'être compatibles.

Ainsi 5 et 6 sont incompatibles (ce que l'on notera 5 | 6) , en ce sens que si 5 contient des éléments, 6 ne peut en contenir, et inversement.

Autrement dit le graphe S ci-dessous est interdit.

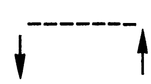
$$S : \begin{tikzcd} a \arrow[r] & u \ (5) \arrow[d] \\ (6)\ v \arrow[u] & b \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Ceci résulte des propriétés de la relation d'ordre strict $<$;

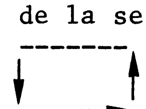
on a en effet $v < a$ et $a < u$ et $u < b \Rightarrow v < b$.

Or, d'après le graphe $b < v$, ce qui est absurde.

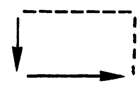
De même, on a :

$1 \mid 2 \iff 3 \mid 4 \iff Q$:  interdit ;

Ceci résulte des postulats (iv) et (v) de la sesqui-transitivité. De même,

$1 \mid 6, 2 \mid 5, 3 \mid 5, 4 \mid 6 \iff R$:  interdit ;

par transitivité de la relation $<$.

Enfin $1 \mid 3,\ 2 \mid 4 \iff T$:  interdit par le postulat (iv).

Finalement Q,R,S,T sont des graphes interdits. On a donc démontré la

<u>Proposition 1</u> : les cases 1,4,5 sont incompatibles avec les cases 2,3,6 (ce qu'on notera $(1,4,5 \mid 2,3,6)$).

3.4.2. Si aucun x ne figure dans la case n° p du tableau on écrira $p = \emptyset$.

Le symbole $\subset$ est le symbole de l'inclusion large : inclus strictement ou égal.

Avec ces notations, on vérifie que :

<u>Lemme:</u>

$$A(b) \subset A(a) \iff 4 = 5 = \emptyset$$
$$A(a) \subset A(b) \iff 3 = 6 = \emptyset$$
$$P(a) \subset P(b) \iff 1 = 5 = \emptyset$$
$$P(b) \subset P(a) \iff 2 = 6 = \emptyset$$

<u>Proposition 2</u> : la condition $(1,4,5 \mid 2,3,6)$ équivaut aux conditions suivantes :

1) $A(a) \subset A(b)$ ou $A(b) \subset A(a)$;

2) $P(a) \subset P(b)$ ou $P(b) \subset P(a)$;

3) $[A(a) \subset A(b)$ ou $P(a) \subset P(b)]$ et $[A(b) \subset A(a)$ ou $P(b) \subset P(a)]$;

quels que soient a et b de E.

Démonstration :

1), 2) et 3) entraînent la proposition 1. En effet, d'après le lemme, $A(a) \subset A(b)$ ou $A(b) \subset A(a)$ signifie qu'on $4 = 5 = \emptyset$ ou $3 = 6 = \emptyset$, c.a.d. $(4,5 \mid 3,6)$.

De même le lemme implique que $P(a) \subset P(b)$ ou $P(b) \subset P(a)$ signifie qu'on a $1 = 5 = \emptyset$ ou $2 = 6 = \emptyset$, soit $(1,5 \mid 2,6)$.

Reste à montrer que $1 \mid 3$ et que $4 \mid 2$; cela résulte précisément de la condition 3) ci-dessus. Par exemple, si $1 \neq \emptyset$, on a d'après le lemme $P(a) \not\subset P(b)$, d'où $A(a) \subset A(b)$ et $3 = \emptyset$.

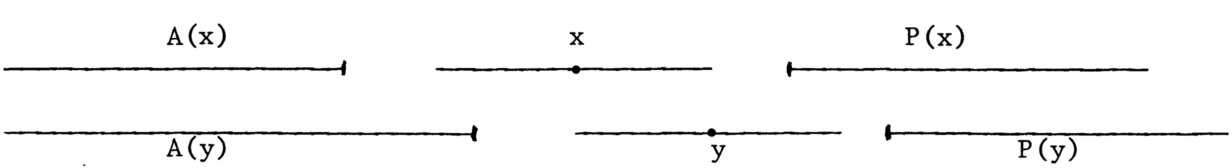
Réciproquement, la proposition 1 entraîne les conditions 1), 2) et 3).

En effet, si $(1,4,5 \mid 2,3,6)$, on a en particulier $(4,5 \mid 3,6)$.

On a donc ou bien $4 = 5 = \emptyset$ ou bien $3 = 6 = \emptyset$, c.a.d. $A(b) \subset A(a)$ ou $A(a) \subset A(b)$ d'après le lemme. La proposition 1 entraîne donc la condition 1). De même $(1,5 \mid 2,6)$ entraîne la condition 2) d'après le lemme.

Montrons enfin la condition 3). Si, par exemple, $A(a) \not\subset A(b)$, on a d'après le lemme 3 ou $6 \neq \emptyset$, donc $1 = 4 = 5 = \emptyset$ et $P(a) \subset P(b)$.

3.4.3. <u>Définition du préordre latent</u> : posons maintenant $x \prec y$ si et seulement si $A(x) \subset A(y)$ et $P(y) \subset P(x)$. Graphiquement $x \prec y$ peut se représenter de la manière ci-dessous :



Théorème 1 : La relation $x \preccurlyeq y$ définie par $A(x) \subset A(y)$ et $P(y) \subset P(x)$ est une relation d'ordre total sur l'ensemble E, dite induite sur E par la relation d'inclusion sur les sections de E, et plus fine que la relation d'ordre partiel $x < y$ donnée au départ.

Vérifions les axiomes (i) à (iv) du 2.1.2. :

(i) $x \preccurlyeq x$. On a bien en effet $A(x) \subset A(x)$;

(ii) $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x \Rightarrow x = y$.

En effet, ceci équivaut à $A(x) \subset A(y)$, $P(y) \subset P(x)$, $A(y) \subset A(x)$ et $P(x) \subset P(y)$, d'où $A(x) = A(y)$ et $P(x) = P(y)$.
Autant dire que les rôles de x et de y sont identiques. Mais n'oublions pas que nous sommes dans l'ensemble quotient et que deux éléments ayant même rôle sont identiques, $x = y$.

(iii) $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$.

En effet : $x \preccurlyeq y$ équivaut à $A(x) \subset A(y)$ et $P(y) \subset P(x)$

$y \preccurlyeq z$ équivaut à $A(y) \subset A(z)$ et $P(z) \subset P(y)$

Or la relation $\subset$ est transitive, d'où $A(x) \subset A(z)$ et $P(z) \subset P(x)$ c.a.d. $x \preccurlyeq z$.

(iv) $\forall x,y \in E$ on a $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. Ceci résulte des conditions 1), 2) et 3) de la proposition 2, démontrée plus haut.

Reste à montrer que la relation $x \preccurlyeq y$ est plus fine que (c.a.d. impliquée par) la relation $x < y$: cette dernière en effet signifie que $x \in A(y)$ et donc a fortiori $A(x) \subset A(y)$ et $P(y) \subset P(x)$.

L'ordre total $\preccurlyeq$ obtenu sur l'ensemble quotient de l'ensemble de départ par la relation d'équivalence
$x \simeq y \iff A(x) = A(y)$ et $P(x) = P(y)$ est dit "ordre latent", par opposition à l'ordre partiel $<$, dit "ordre patent".

En fait, si on n'était pas passé au quotient, la relation $\preccurlyeq$ ne serait qu'un préordre total, car de $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$ on ne pourrait déduire que $x \simeq y$.

D'un point de vue intuitif, on peut dire que si $x < y$, alors x est "nettement avant" y, tandis que si $x \preccurlyeq y$, alors x est encore avant y, mais seulement "imperceptiblement avant".

4. LE CONTINU EXPERIMENTAL

4.1. Seuil : Supposons que l'expérimentation nous ait conduit à un ensemble ordonné E muni d'une relation sesqui-transitive, d'où on a déduit un ordre latent en considérant les sections antérieure $A(x)$ et postérieure $P(x)$, pour tout $x \in E$.

Demandons-nous maintenant si $A(x)$ admet une borne supérieure (plus petit commun majorant des éléments de $A(x)$), notée $\sup A(x)$ et, dualement, si $P(x)$ admet une borne inférieure (plus grand commun minorant des éléments de $P(x)$), notée $\inf P(x)$.

Si l'ordre de E est compact, ces éléments existent toujours : on supposera donc dans tout ce qui suit que cette condition est réalisée.
On posera par définition $\begin{cases} a(x) = \sup A(x) \\ p(x) = \inf P(x). \end{cases}$

Si l'ordre considéré est discret par exemple, on sait qu'il est compact ipso facto et $a(x)$ et $p(x)$ existent bien.

On désigne généralement par "seuil" l'intervalle fermé $[a(x),p(x)]$, ensemble d'éléments $t \in E$ vérifiant $a(x) \leqslant t \leqslant p(x)$. Nous nous écartons de cette terminologie qui peut être gênante si la structure de E n'est pas une structure numérique. Pour nous, donc, les "seuils" (au pluriel) de x seront les éléments $a(x)$ et $p(x)$ de E ; si on a besoin d'expliciter, on les désignera respectivement par "seuil antérieur de x" et "seuil postérieur de x".

Remarquons tout de suite que les seuils ne peuvent être disposés n'importe comment, étant donné la dualité existant entre le seuil supérieur et le seuil antérieur. Soit par exemple un ordre latent de type ξ localement compact.

Le premier seuil est arbitraire. Posons par exemple $a(3) = 0$, $p(3) = 8$. Alors obligatoirement $p(0) = 3$ sinon on aurait $3 \simeq 4$. De façon générale, le seuil postérieur du seuil antérieur de x est x lui-même : $p(a(x)) = x$.

Si les seuils ne sont pas consécutifs, c'est qu'on n'est pas passé au quotient. Donc l'intervalle $[a(x),p(x)]$ est constant (même nombre d'éléments pour tout x). C'est ce qui conduit certains à dire qu'on a une unité de mesure (intervalle des deux seuils). Mais c'est là une illusion, car on ne peut diviser en 2 ou en 3 cette "unité". Ce n'est pas autre chose qu'une constante fondamentale.

4.2. Cas compact : on va généraliser à une échelle compacte. Prenons par exemple la structure d'ordre de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, cet ordre étant l'ordre latent, noté $<$. L'ordre patent sera noté $\ll$; $x \ll y$ signifie donc que x est nettement avant y.

Il revient au même de dire que $p(x) < y$ ou que $x < a(y)$:

$$x \ll y \iff p(x) < y \iff x < a(y).$$

En somme on se donne deux fonctions p et a duales l'une de l'autre, vérifiant les conditions :

1) Ce sont des endomorphismes de l'ordre : $a(x) \leqslant x \leqslant p(x)$.
2) Elles sont monotones.

$$x < y \Rightarrow a(x) < a(y)$$
$$p(x) < p(y)$$

(résulte de la sesqui-transitivité)

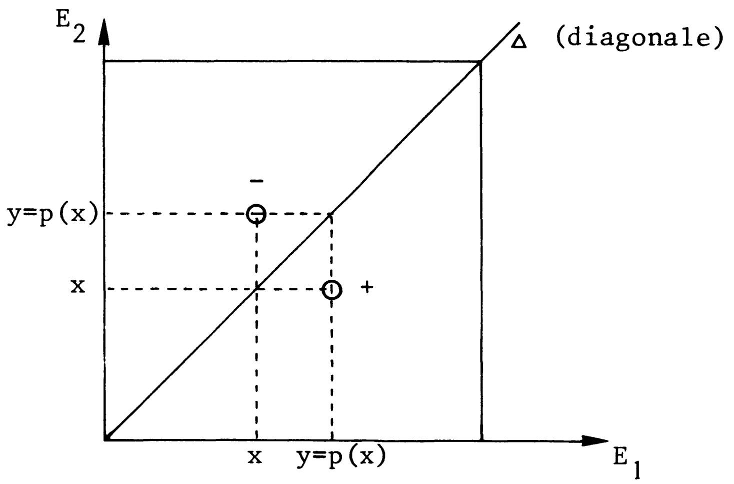
3) $x < y < p(x) \Rightarrow a(x) < a(y) < x$ car $x << y$.

4) Propriété de dualité : $a(p(x)) \leqslant x$ $p(a(x)) \geqslant x$

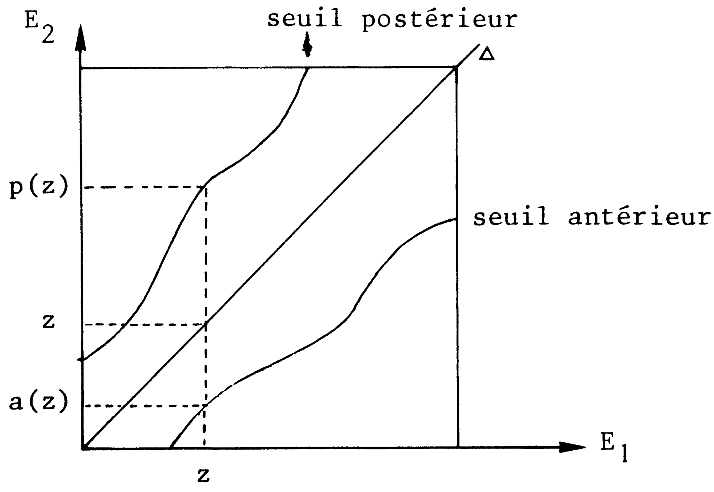
d'où $a(p(x)) = x$ $p(a(x)) = x$

a et p sont donc des applications inverses.

4.3. Représentation du modèle dans $E \times E$: au lieu de caractériser le modèle par l'intervalle seuil $[a(x), p(x)]$, on le caractérise par l'intervalle $[x,p(x)]$ ou, de façon équivalente, $[a(y),y]$ avec $y = p(x)$, que nous appellerons semi-intervalle seuil. Ce semi-intervalle seuil se "déplace" le long de l'échelle latente E. Considérons alors le produit cartésien $E_1 \times E_2$, avec $E_1 = E_2 = E$. Pour chaque $x \in E_2$, portons sur le produit $E_1 \times E_2$, le point (y,x), avec $y = p(x) \in E_1$, et marquons ce point d'un signe +. De même pour chaque $x \in E_1$, on porte sur $E_1 \times E_2$ le point (x,y) avec $y = p(x) \in E_2$, et on le marque du signe −.

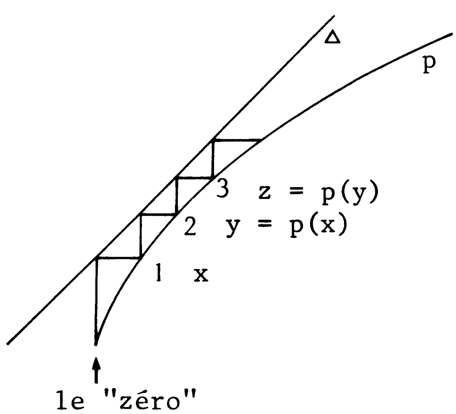


Lorsqu'on a effectué ces opérations pour tout $x \in E_1$ et tout $x \in E_2$ on obtient le diagramme suivant :



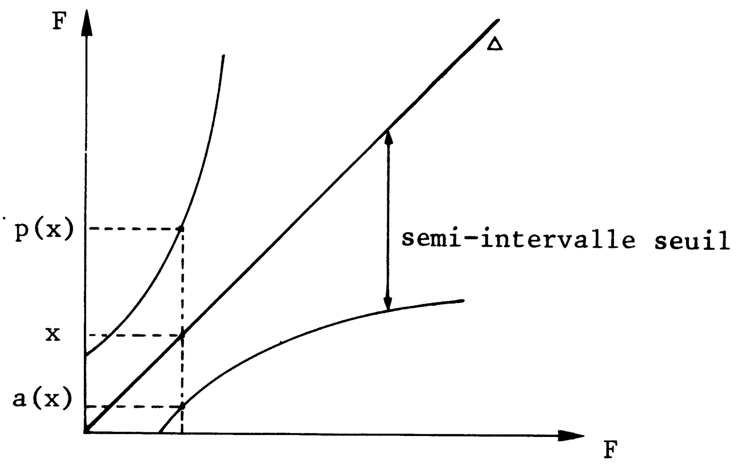
Il est facile de voir que la courbe frontière du domaine marqué des signes + est le graphe du seuil antérieur a, que la courbe frontière du domaine marqué des signes - est le graphe du seuil postérieur p. D'après ce que nous avons dit au 4.2., les seuils a et p doivent être des fonctions strictement monotones.

Attirons une fois de plus l'attention du lecteur sur l'impossibilité d'introduire une mesure avec l'intervalle seuil (ou le semi-intervalle seuil) pour unité, car on ne peut "diviser" le seuil. Cependant, comme le seuil est une fonction strictement monotone, on peut obtenir une *graduation* en prenant pour échelons successifs les seuils postérieurs par exemple :



La *graduation* est une localisation imparfaite, ce n'est pas une *mesure*.

4.4. <u>Le continu expérimental</u> : la forme finale donnée au continu expérimental est donc représentée par le produit cartésien E x E (dépouillé le cas échéant de sa diagonale, mais on reviendra là-dessus), où l'on a porté les graphes des fonctions seuil postérieur p et seuil antérieur a.

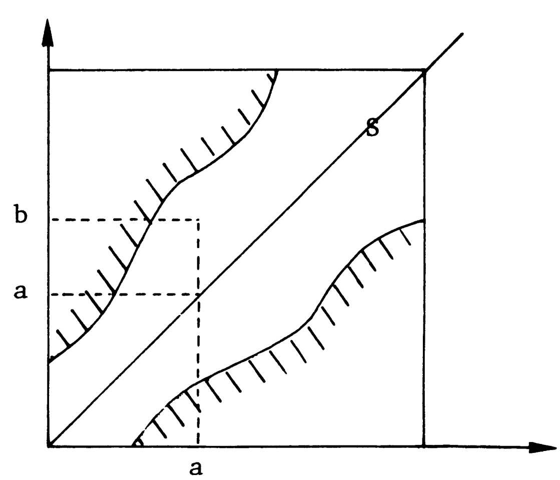


Or cette représentation est valable pour une échelle donnée et des seuils donnés. Mais les seuils varient suivant les instruments, il serait donc commode de pouvoir considérer toutes les échelles de ce genre, avoir un réservoir d'où tirer des réalisations particulières : ce sera le continu mathématique, une pure structure. Cette dernière sera une échelle à une infinité de sensibilités où seront supposées plongées les échelles latentes précédentes.

5. STRUCTURES UNIFORMES

5.1. Définition

5.1.1. Motivation : dans le modèle donné ci-dessus pour le continu expérimental, le domaine de E × E compris entre le graphe du seuil postérieur p et celui du seuil antérieur a correspond au domaine d'insensibilité. En effet (fig. ci-dessous) :



Soit (a,b) un point de ce domaine. Il est manifeste que b appartient à l'intervalle seuil de a, donc que l'on a $a \not\gtrless b$.
Nous écrirons cette relation d'indifférence a S b. On sait qu'il revient au même d'écrire $(a,b) \in S$, confondant la relation avec l'ensemble des couples d'éléments qui y satisfont. Bien entendu, comme on est amené à considérer non pas une échelle, mais toute une famille d'échelles dont les seuils peuvent varier, on sera amené à considérer toute une famille de domaines d'insensibilité $(S_i)_{i \in I}$. Cette famille n'est pas finie, sinon on pourrait prendre la meilleure, par exemple $\overline{S} = \bigcap_{i \in I} S_i$.

On a donc une famille infinie $(S_i)_{i \in I}$ d'entourages de la diagonale, c.a.d. de la relation $x = y$: $S_i \subset E^2$ pour tout i. Mais il est bien entendu que pour obtenir une structure, il faut imposer des conditions :
1°) On exigera que la diagonale soit contenue dans tous les S_i :

$$\Delta \subset S_i \subset E^2, \quad \forall i \in I.$$

Autrement dit, la relation S_i doit être réflexive. C'est une exigence formelle analogue à celle faite à propos d'une relation d'ordre, et elle signifie que x est toujours indiscernable de lui-même, ce qui est une tautologie.
2°) Les S_i sont des parties de E^2, $S_i \subset S_j$ signifie alors que S_j est moins fine que S_i, le domaine d'insensibilité S_j étant plus grand que le domaine d'insensibilité S_i.
Donc $S_i \cap S_j$ sera plus fine que S_i et que S_j.

La deuxième condition imposée, c'est que pour tout couple i et j, il existe un $k \in I$ tel que S_k soit plus fine que S_i et S_j, donc plus fine que $S_i \cap S_j$: $\quad S_k \subset S_i \cap S_j$

Il revient au même de dire que pour toute partie finie J de I, on peut trouver un $k \in I$ tel que S_k soit plus fine que la famille $(S_i)i \in J$, soit $S_k \subset \bigcap_{i \in J} S_i$.
3°) Deux objets de E seront inséparables pour n'importe quel instrument si et seulement si ils appartiennent à l'intersection de tous les S_i. Par conséquent, le pouvoir séparateur est $\bigcap_{i \in I} S_i$. Il est commode de postuler que cette intersection se réduit à la diagonale, autrement dit que si deux objets sont distincts, il y a au moins un instrument qui sache les discerner :

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \Delta \ .$$

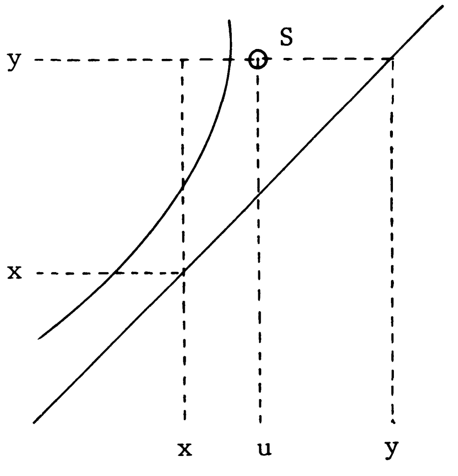
On peut montrer que si $\bigcap_{i \in I} S_i \neq \Delta$, alors il existe une relation d'équivalence naturelle R telle que l'on puisse trouver dans l'ensemble $E \times E/R \times R$ une famille d'entourages de la diagonale $(S'_i)\ i \in I$ vérifiant $\bigcap_{i \in I} S'_i = \Delta$. Cela revient au fond à redéfinir l'égalité.

Bien entendu, on suppose que Δ n'est pas un des S_i, sinon tout ensemble contenant Δ serait un entourage. Autrement dit, aucun instrument n'est parfait.

Ces conditions reviennent à effectuer une enquête pour savoir si $x = y$ ou $x \neq y$. On expulse progressivement les ensembles de la famille d'entourages jusqu'à ce qu'on voie si $x = y$ ou non (filtre).

4°) Cependant, ces conditions sont insuffisantes (*), les entourages ne sont pas seulement des éléments d'une algèbre de Boole : on doit pouvoir les enchaîner, car la relation d'ordre patent, $<$, est transitive :

$$a < b \text{ et } b < c \Rightarrow a < c$$



Soient x et y deux éléments séparés par S, u un élément indiscernable à la fois de x et de y. On postule alors qu'il existe un entourage S' permettant de comparer u à x et à y, autrement dit d'intercaler un instrument de mesure :

$x\, S'\, u$ et $u\, S'\, y \iff (x,u) \in S'$ et $(u,y) \in S'$,

ce que l'on notera $(x,y) \in S'S'$.

On exigera donc que pour tout S, il existe un S' tel que $S'S' \subset S$.

5°) Enfin une dernière exigence est que la relation d'indiscernabilité soit symétrique :

$$(x,y) \in S \iff (y,x) \in S.$$

Désignons par S^{-1} l'ensemble des couples (y,x) tels que $(x,y) \in S$, on aura donc $S^{-1} = S$.

(*) cf. André Weil, sur les espaces à structure uniforme.

5.1.2. Définition formelle : une famille $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in I}$ de parties de $E \times E$ définit sur E une structure uniforme séparée si elle satisfait aux axiomes :

(U_1) $\forall i \in I, \quad S_i \supset \Delta$

(U_2) $\forall i$ et $j \in I, \quad \exists k \in I : S_k \subset S_i \cap S_j$

(U_3) $\mathcal{S} \neq \emptyset$, et $\emptyset \notin \mathcal{S}$

(U_4) $\bigcap_{i \in I} S_i = \Delta$

(U_5) $\forall i \in I, \exists j \in I : S_j S_j \subset S_i$

(U_6) $\forall i \in I, S_i^{-1} = S_i$

Les ensembles de la famille $\mathcal{S}$ sont appelés entourages, et $\mathcal{S}$ un système fondamental d'entourages de la structure uniforme séparée considérée.

5.3. Espaces topologiques, espaces métriques

5.3.1. Structure topologique (ou topologie) sur un ensemble E : c'est la donnée d'un ensemble O de parties de E vérifiant les propriétés :

(O_1) Une réunion quelconque d'ensembles de O est un ensemble de O .

(O_2) L'intersection de deux ensembles de O est un ensemble de O .

(O_3) La partie vide de E, $\emptyset$, et l'ensemble E lui-même sont des ensembles de O.

Les ensembles de O sont appelés ouverts de la topologie définie par O sur E.

5.3.2. Espace topologique : c'est la donnée d'un ensemble muni d'une structure topologique.

5.3.3. Théorème 2 : la donnée d'un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme séparée sur un ensemble E, y définit une structure d'espace topologique séparé.

Pour la démonstration ainsi que pour la signification du mot "séparé" cf. Bourbaki, Topologie Générale Chap.I et II, paragraphe 2.

L'ensemble E, muni d'une structure uniforme séparée et la topologie déduite de cette structure prend le nom d'espace uniforme séparé.

5.3.4. Distance sur un ensemble E : c'est une application d, de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

(D_1) $d(x,y) = 0 \iff x = y \quad \forall x,y \in E$

(D_2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in E$

(D_3) $d(x,z) < d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in E$

5.3.5. Théorème 3 : la donnée d'une distance d sur un ensemble E y définit une structure uniforme séparée ayant pour système fondamental d'entourages la famille des ensembles :

$S_a = \{(x,y) \in E \times E : d(x,y) < a\}, \quad a \in \mathbb{R}^+$

Corollaire : une distance d sur un ensemble E y définit une structure d'espace topologique séparé.

Pour la démonstration du théorème, cf. Bourbaki, Topologie Générale, chapitre 9.

5.3.6. Espace métrique : ensemble E muni de la topologie définie par la donnée d'une distance d sur E.

Exemple : soit $E = \mathbb{R}$ ensemble de réels.

Pour tout $a > 0$, x et y seront "indiscernables" si $|x - y| < a$.

Le système fondamental d'entourages $\mathcal{S}$ est constitué, nous le savons, par les $S_a = \{(x,y) \in R^2 : |x-y| \leqslant a\}$.

En effet, on vérifie sans peine que $|x - y|$ est bien une distance sur $\mathbb{R}^2$.

L'espace métrique $\mathbb{R}^2$ ainsi obtenu, est le plan $\mathbb{R}^2$ usuel, un ouvert étant une réunion de "cercles ouverts" $C_{x_o a}$ de centre x_o et de rayon $a > 0$ quelconques.

Les éléments de 0 sont des réunions d'éléments de la famille des

$$(C_{x_o,a})_{\substack{x_o \in R \\ a \in R^+}} \qquad \text{avec} \quad C_{x_o,a} = \{x \in R : |x - x_o| < a\}$$

5.4. Structures uniformes métrisables : dans le paragraphe précédent, on a vu que tout espace métrique possédait une structure uniforme. Demandons-nous réciproquement si toute structure uniforme permet de définir une distance qui ensuite redonne la même structure uniforme.

5.4.1. Théorème 4 : pour qu'une structure uniforme séparée soit métrisable, il faut et il suffit que le système fondamental d'entourages définissant la structure soit dénombrable.

Pour la démonstration cf. Bourbaki, Topologie Générale, chapitre 9.

Indiquons enfin, pour terminer, deux résultats.

5.4.2. Théorème 5 : tout espace uniforme séparé est complètement régulier si et seulement si le système fondamental d'entourages définissant sa structure est dénombrable.

Un espace topologique E est complètement régulier si pour tout voisinage V d'un $x \in E$, on peut trouver une graduation c.a.d. une fonction numérique continue dans E, prenant des valeurs entre 0 et 1, égale à 0 en x et à 1 en dehors de V.

5.4.3. Théorème 6 : tout espace uniforme est isomorphe à un sous-ensemble d'un produit dénombrable d'espaces métriques.

Ainsi ce qui échappe à la métrique, c'est ce qui est au-delà du dénombrable.

A N N E X E S

H. POINCARE, *La Science et L'Hypothèse,* (1902)

Pages 34 et 35

On en vient alors à se demander si la notion du continu mathématique n'est pas tout simplement tirée de l'expérience. Si cela était, les données brutes de l'expérience, qui sont nos sensations, seraient susceptibles de mesure. On pourrait être tenté de croire qu'il en est bien ainsi, puisque l'on s'est, dans ces derniers temps, efforcé de les mesurer et que l'on a même formulé une loi, connue sous le nom de loi de Fechner, et d'après laquelle la sensation serait proportionnelle au logarithme de l'excitation.

Mais si l'on examine de près les expériences par lesquelles on a cherché à établir cette loi, on sera conduit à une conclusion toute contraire. On a observé, par exemple, qu'un poids A de 10 grammes et un poids B de 11 grammes produisaient des sensations identiques, que le poids B ne pouvait non plus être discerné d'un poids C de 12 grammes, mais que l'on distinguait facilement le poids A du poids C. Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes :

$$A = B, \qquad B = C, \qquad A < C.$$

qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique.

Il y a là, avec le principe de contradiction, un désaccord intolérable, et c'est la nécessité de le faire cesser qui nous a contraints à inventer le continu mathématique.

page 44

J'ai étudié plus haut le continu physique tel qu'il ressort des données immédiates de nos sens, ou, si l'on veut, des résultats bruts des expériences de Fechner ; j'ai montré que ces résultats sont résumés dans les formules contradictoires :

$$A = B, \qquad B = C, \qquad A < C.$$

H. POINCARE, *La Valeur de la Science*, (1905)

Page 69

J'ai expliqué dans "*Science et Hypothèse* d'où nous vient la notion de continuité physique et comment a pu en sortir celle de la continuité mathématique. Il arrive que nous sommes capables de distinguer deux impressions l'une de l'autre, tandis que nous ne saurions distinguer chacune d'elles d'une même troisième. C'est ainsi que nous pouvons discerner facilement un poids de 12 grammes d'un poids de 10 grammes, tandis qu'un poids de 11 grammes ne saurait se distinguer ni de l'un ni de l'autre.

Une pareille constatation, traduite en symboles s'écrirait :

$$A = B, \qquad B = C \qquad A < C.$$

Ce serait là la formule du continu physique, tel que nous le donne l'expérience brute, d'où une contradiction intolérable que l'on a levée par l'introduction du continu mathématique. Celui-ci est une échelle dont les échelons (nombres commensurables ou incommensurables) sont en nombre infini, mais sont extérieurs les uns aux autres, au lieu d'empiéter les uns sur les autres comme le font, conformément à la formule précédente, les éléments du continu physique.

Le continu physique est pour ainsi dire une nébuleuse non résolue, les instruments les plus perfectionnés ne pourraient parvenir à la résoudre ; sans doute si on évaluait les poids avec une bonne balance, au lieu de les apprécier à la main, on distinguerait le poids de 11 grammes de ceux de 10 et de 12 grammes et notre formule deviendrait :

$$A < B, \qquad B < C, \qquad A < C.$$

Mais on trouverait toujours entre A et B et entre B et C de nouveaux éléments D et E tels que :

$$\begin{array}{llll} A = D, & D = B, & A < B, & B = E \\ B = E, & E = C, & B < C, & \end{array}$$

et la difficulté n'aurait fait que reculer et la nébuleuse ne serait toujours pas résolue ; c'est l'esprit seul qui peut la résoudre et c'est le continu mathématique qui est la nébuleuse résolue en étoiles.

H. POINCARE, *Dernières Pensées*, (1913)

Page 68

Les continus que nous révèlent directement nos sens, et que j'ai appelés continus physiques, sont tous différents. La loi de ces continus est la loi de Fechner, que je dépouillerai du pompeux appareil mathématique qui l'entoure d'ordinaire pour la réduire au simple énoncé des données expérimentales sur lesquelles elle repose. On sait distinguer au jugé un poids de 10 grammes d'un poids de 12 grammes ; on ne pourrait distinguer un poids de 11 grammes, ni de celui de 10 grammes, ni de celui de 12 grammes. Plus généralement il peut y avoir deux ensembles de sensations que nous distinguons l'un de l'autre, sans que nous puissions distinguer ni l'un, ni l'autre d'un même troisième. Cela posé, nous pouvons imaginer une chaîne continue d'ensembles de sensations de telle sorte que chacun d'eux ne se distingue pas du suivant, bien que les deux extrémités de la chaîne se discernent aisément ; ce sera là un continu physique à une dimension.

Etienne HALPHEN, *La notion de vraisemblance, essai sur les fondements du calcul des probabilités et de la statistique mathématique*, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, Vol.4, fasc. 1, 1955.

Pages 57-59

Considérons un ensemble d'êtres A, A', etc. auxquels on a associé une certaine opération nommée *équivalence* qui se notera

$$A \asymp A'.$$

Si l'équivalence est transitive, on peut faire correspondre à l'ensemble précédent un ensemble dit 'isomorphe' $X_1, X_2, \ldots$ tel qu'à tout A corresponde un X, qu'à deux A non équivalents correspondent deux X distincts et qu'à deux A équivalents corresponde un seul X.

Mais si l'équivalence n'est pas transitive, cette réduction isomorphique n'est pas possible : c'est parce qu'on a l'habitude de la postuler qu'on se scandalise à la pensée d'une équivalence non transitive.

L'équivalence peut d'ailleurs être transitive pour une partie seulement des A : dans l'avenir nous supposerons d'ordinaire que pour ceux-là la réduction a été effectuée. Supposons maintenant qu'en outre de l'équivalence soit définie une certaine relation nommée prévalence ($A \succ B$), possédant les propriétés suivantes : elle est exclusive de l'équivalence, ainsi que de sa réciproque (sa converse se nommera postvalence, notée : $B \prec A$). Bien que ce ne soit probablement pas toujours le cas, nous supposerons la prévalence transitive :

de $A \succ B$ et $B \succ C$ on tirera : $A \succ C$.

En général la prévalence ne commute pas avec l'équivalence, autrement dit de : $A \asymp B$ et $B \succ C$ on ne peut tirer $A \succ C$, car se serait exclure la possibilité d'avoir simultanément : $B \asymp A$, $A \asymp C$, $B \succ C$: en ce cas l'équivalence serait transitive, ce qu'on ne suppose pas.

Si maintenant, étant donnés deux être quelconques d'un certain ensemble E, il existe toujours entre eux soit équivalence soit prévalence (ou postvalence) l'ensemble sera dit comparable. Eu égard à ces relations d'équivalence et de prévalence, les éléments de l'ensemble seront alors nommés des "grandeurs".

Ce nom de grandeurs ne doit pas nous faire illusion : il n'appartient pas aux éléments eux-mêmes, mais à l'association de ces éléments avec leurs relations de comparaison ; en outre, si l'équivalence n'est pas transitive dans l'ensemble nous savons qu'on ne peut associer à chaque élément un symbole qui constituerait "sa grandeur", de telle sorte qu'à deux éléments équivalents corresponde "une même grandeur". C'est donc avec beaucoup d'hésitation que nous acceptons d'employer ce nom dangereux de "grandeurs" : il s'agit de grandeurs improprement dites. Si au contraire l'équivalence est transitive le terme de grandeur ne fait plus de difficulté : nous parlerons alors de grandeurs vraies, et l'ensemble E sera dit ordonné.

Examinons un cas particulier important, celui d'un ensemble E comparable mais non ordonné (c'est-à-dire dans lequel l'équivalence n'est pas transitive) satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1°) De $A' \asymp A$ et de $A \succ B \succ C$ on peut tirer $A' \succ C$.

2°) Etant donné un couple quelconque d'éléments équivalents $A' \asymp A$, on peut trouver des X équivalents à A' et prévalents à A, ou bien on en peut trouver d'équivalents à A et prévalents à A', mais non les deux à la fois.

Dans ces conditions, on peut ordonner A et A' par référence aux X, et cet ordre est transitif. L'ensemble E, dans ce cas, bien que non ordonné par nature, est ainsi ordonnable par un artifice. A chaque élément A on peut associer l' "intervalle" (ordonné comme il vient d'être dit) de ses équivalents. Si l'on a défini dans l'ensemble E une addition (comme nous l'expliquons ci-dessous) un tel ensemble est alors approximativement mesurable, c'est-à-dire qu'il est représentable par des points d'un axe avec un seuil E à l'intérieur duquel se trouvent les points figuratifs de l'intervalle associé à A. C'est ce qui se passe pour la loi de Fechner par exemple.

André WEIL, *Sur les Espaces à structure uniforme et sur la Topologie générale,* (1937).

Pages 3-4

On sait que la notion de distance est utilisée dans de nombreux travaux de topologie (par exemple ceux d'Alexandroff et de son école), et l'on s'explique mal qu'elle soit venue à jouer un pareil rôle dans une branche des mathématiques où elle n'est, à proprement parler, qu'une intruse. Son emploi repose d'ailleurs sur les résultats d'Alexandroff et Urysohn, d'après lesquels il est possible de l'introduire dans tout espace localement compact, pourvu que celui-ci satisfasse au II^e axiome de dénombrabilité : on voit apparaître ici cette hypothèse du dénombrable (dite aussi, on ne sait pourquoi, de séparabilité), malfaisant parasite qui infeste tant de livres et de mémoires dont il affaiblit la portée tout en nuisant à une claire compréhension des phénomènes. Non seulement, en effet, la conscience d'un mathématicien, s'il en possède, doit répugner à faire intervenir une hypothèse superflue et étrangère à la question qu'il a en vue, mais encore on s'aperçoit de plus en plus que les espaces de caractère non dénombrable peuvent fournir souvent des moyens techniques précieux dont il est maladroit de se priver. Naturellement, lorsqu'on quitte le dénombrable, il n'est plus légitime de faire des notions de suite et de limite l'outil essentiel, et on doit les remplacer par d'autres dont le champ d'action soit moins restreint. A plus forte raison faudra-t-il abandonner la notion de distance ; et il convient de se demander ce qu'on pourra lui substituer.

Or, quand on essaye de raisonner sur les groupes topologiques, on s'aperçoit vite qu'on y retrouve, sans qu'ils soient en général métrisables, beaucoup des propriétés connues des espaces métriques ; et en effet, toutes ces propriétés ont une origine commune, qui est simplement la possibilité de comparer entre eux les voisinages donnés en tous les points de l'espace. Il n'en faut pas plus, en réalité, pour établir presque toutes les propriétés essentielles des espaces métriques : c'est ce que je me propose de faire voir dans le présent mémoire, après avoir formulé au &1 le système d'axiomes auquel on se trouve tout naturellement conduit. J'appelle *uniformes* les espaces satisfaisant à ces axiomes, qui sont ceux où la notion de continuité uniforme a un sens : on a là une structure, beaucoup plus faible qu'une structure métrique, mais plus forte qu'une structure topologique ; d'ailleurs la structure topologique des espaces ainsi définis n'est pas quelconque : on trouve en effet, grâce à une idée de Pontrjagin qui joue un rôle important dans cette théorie, que ces espaces sont toujours complètement réguliers.