

C. FLAMENT

Un théorème de point fixe dans les treillis

Mathématiques et sciences humaines, tome 61 (1978), p. 61-64

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__61__61_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN THEOREME DE POINT FIXE DANS LES TREILLIS

C. FLAMENT*

1. RESUME

Tarski (1955, théorème 1) a montré que l'ensemble des points fixes d'une application isotone dans un treillis complet était non vide et constituait un treillis pour l'ordre du treillis initial (cf. Szasz, 1971, pp. 52-53).

Nous étudions le cas où l'application est de plus, extensive. On trouve que l'ensemble des points fixes est le sous-demi-treillis inférieur des fermés d'une fermeture, supérieure ou égale à toutes les puissances de l'application.

2. RAPPELS

Nous appelons un *opérateur* f dans un ensemble ordonné P une application isotone ($x, y \in P : x \leq y \Rightarrow fx \leq fy$) et extensive ($\forall x \in P : x \leq fx$).

Une *fermeture* φ dans un ensemble ordonné P est un opérateur idempotent ($\forall x \in P : \varphi \varphi x = \varphi x$).

Un ensemble ordonné P vérifie la *condition de chaîne ascendante* si toute suite strictement croissante d'éléments de P est finie (Szasz, 1971, p.14).

3. THEOREME

Soit f un opérateur sur P , demi-treillis supérieur complet. Il existe dans P une fermeture φ , dont les fermés sont les points fixes de f , et, pour tout x de P , et tout entier k , on a : $f^k x \leq \varphi x$. Si, de plus, P vérifie la condition de chaîne ascendante, il existe un entier h tel que $f^h = \varphi$.

4. DEMONSTRATION

4.1. P étant sup-complet, $u = \max (P)$ existe, et $fu \leq u$; mais, f étant extensive, $u \leq fu$; donc, $u = fu$ est un point fixe de f , majorant tout élément

* Département de Psychologie, Université de Provence.

de P . Il s'ensuit que pour tout a de P , l'ensemble $F_a = \{x : x \in P, fx = x \geq a\}$ des points fixes majorant a n'est pas vide.

Soit G_a l'ensemble des minorants de F_a ; G_a n'est pas vide, puisque a minore F_a . P étant sup-complet, $b = \sup (G_a)$ existe, et est évidemment le plus grand des minorants de F_a : $b = \sup (G_a) = \inf (F_a)$.

Pour tout x de F_a , on a : $a \leq b \leq x$, et, par l'isotonie de f : $fa \leq fb \leq fx = x$ (puisque les éléments de F_a sont des points fixes) ; il s'ensuit que fb minore F_a , et, comme f est extensive, on obtient : $b \leq fb \leq b = \inf (F_a)$... donc, b est un point fixe majorant a , et on a : $b = \min (F_a)$.

4.2. Soit $\varphi x = \min (F_x)$, pour tout x de P . Montrons que φ est une fermeture : si $x \leq \varphi y$, on a : $\varphi y \in F_x$ et donc, $\varphi x \leq \varphi y$; inversement, puisque $x \leq \varphi x$, on a : $\varphi x \leq \varphi y \Rightarrow x \leq \varphi y$; ainsi, on vérifie la relation de Morgado (1962) :

$$x \leq \varphi y \iff \varphi x \leq \varphi y,$$

qui est caractéristique d'une fermeture.

Par construction, un fermé pour φ est un point fixe de f ; réciproquement, tout point fixe de f est un fermé : $fx = x$ entraîne : $x = \min (F_x) = \varphi x$.

4.3. Pour tout entier k , f^k est isotone, et a les mêmes points fixes que f ; donc : $x \leq \varphi x$ entraîne :

$$f^k x \leq f^k(\varphi x) = \varphi x.$$

Par l'extensivité de f , on a : $x \leq fx \leq f^2 x \leq \dots \leq \varphi x$, si P vérifie la condition de chaîne ascendante, cette série est strictement croissante (puisque l'égalité entre deux termes désigne un point fixe), et est finie ; donc, pour chaque x de P , il existe un entier $k(x)$ tel que : $f^{k(x)} x = \varphi x$; on pose : $h = \max_{x \in P} \{k(x)\}$, et on obtient $f^h = \varphi$.

5. COROLLAIRE

Si f est un opérateur dans un treillis complet P , l'ensemble de ses points fixes est un treillis complet pour l'ordre de P ; c'est, de plus, un sous-demi-treillis inférieur de P .

Cela résulte de ce que, pour toute fermeture dans P , l'ensemble des fermés est un treillis complet pour l'ordre de P , sous-demi-treillis inférieur de P (Szasz, 1971, théorème 25).

6. APPLICATIONS

6.1. En psychologie mathématique, il arrive qu'on ait des informations relatives aux *paires* d'éléments d'un ensemble (fini) X , qu'on souhaite plonger dans un système plus général sur X , par exemple, en considérant une fermeture sur $\mathcal{P}(X)$ (cf. Flament, 1977).

Soit $\mathcal{P}_2(X) = \{p, q, \dots\}$ l'ensemble des paires de X , et g une application de cet ensemble dans $\mathcal{P}(X)$, vérifiant : $p \subset gq \iff gp \subset gq$ (relation de Morgado réduite aux paires).

Définissons une application f de $\mathcal{P}(X)$ dans lui-même :

$$\begin{aligned} f \emptyset &= \emptyset ; f x = x \quad (x \in X) ; \\ f p &= gp \quad (p \in \mathcal{P}_2(X)) ; \\ f A &= \bigcup_{p \subset A} gp \quad (A \subset X) \end{aligned}$$

Pour toute partie A, B de X , comportant au moins deux éléments, on a :

$$A = \bigcup_{p \subset A} p \subset \bigcup_{p \subset A} gp = fA \quad (\text{extensivité});$$

$$A \subset B \Rightarrow f A = \bigcup_{p \subset A} gp \subset \left(\left(\bigcup_{p \subset A} gp \right) \cup \left(\bigcup_{q \subset B} gq \right) \right) = fB \quad (\text{isotonie}) ;$$

On vérifie facilement ces deux propriétés lorsque A et B ont moins de deux éléments.

Donc, f est un opérateur dans le treillis fini $\mathcal{P}(X)$, et on applique le théorème : il existe une fermeture φ et un entier k tel que $f^k = \varphi$.

Il faut vérifier que g est la restriction de φ à l'ensemble des paires; il suffit de montrer que toute partie gp de X est un point fixe pour f , car alors : $gp = fgp = ffp \Rightarrow gp = f^k p = \varphi p$.

On a : $q \subset fp \Rightarrow q \subset gp \Rightarrow gq \subset gp$, et donc : $\bigcup_{q \subset fp} gq \subset gp$, c'est-à-dire, $ffp \subset fp$; et, avec l'extensivité de f , on obtient : $ffp = fp$.

6.2. Certains algorithmes peuvent être vus comme des opérateurs sur un treillis. Par exemple (Degenne, Flament, Vergès, 1978), des données constituent un tableau booléen $X.Y$; la correspondance de Galois associée à ce tableau (cf. Barbut, Monjardet, Chap. 5, 1970) permet de définir une fermeture γ sur $\mathcal{P}(X)$. On s'intéresse aux partitions $(C_i)_{i \in I}$ de X dont chaque classe est γ -fermée : $\gamma C_i = C_i$ ($i \in I$).

L'algorithme considère une partition quelconque de X , $(C_i)_{i \in I}$, et procède en deux étapes :

1) On construit la famille de fermés $(\gamma C_i)_{i \in I}$, qui n'est une partition

que si tous les C_i sont fermés ;

2) Si deux fermés distincts intersectent, on les réunit, ce qui conduit à définir une nouvelle classification sur X , dont les classes ne sont pas forcément γ -fermées.

Cet algorithme fait correspondre à toute partition une partition unique ; on peut donc le décrire comme une application f dans le treillis $\mathcal{L}$ des partitions de X ordonnées par la relation de finesse (cf. Barbut, Monjardet, Chap. 7, 1970).

On voit tout de suite que :

- . les points fixes de f sont les partitions solution de notre problème ;
- . f est extensive.

Montrons l'isotonie : soit $C = (C_i)_{i \in I}$ et $D = (D_j)_{j \in J}$ deux partitions sur X , en relation de finesse : $C \leq D$, c'est-à-dire : $\forall i \in I, \exists j \in J : C_i \subset D_j$; la relation de finesse est maintenue par l'étape 1 de l'algorithme, puisque γ est isotone ; $C_i \subset D_j \Rightarrow \gamma C_i \subset \gamma D_j$; si, en étape 2, on agrège γC_i et γC_k parce que $\gamma C_i \cap \gamma C_k \neq \emptyset$, on a (si $C_i \subset D_j, C_k \subset D_h$) : $\gamma C_i \cap \gamma C_k \subset \gamma D_j \cap \gamma D_h$, et on agrège γD_j et γD_h ; en définitive, on a bien : $C \leq D \Rightarrow fC \leq fD$.

BIBLIOGRAPHIE

- BARBUT, M., MONJARDET, B., *Ordre et classification*, (vol.2), Paris, Hachette, 1970.
- DEGENNE, A., FLAMENT, C., VERGES, P., "Approche galoisienne en classification", *Statistique et Analyse des données*, 1978.
- FLAMENT, C., "A model for similarity judgments", *8th European Mathematical Psychology Meeting*, Saarbrücken, Sept. 1977.
- MORGADO, J., "A characterization of the closure operators by the means of one axiom", *Portugal. Math.*, 21, 155-156, 1962.
- SZASZ, G., *Théorie des treillis*, Paris, Dunod, 1971.
- TARSKI, A., "A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications", *Pacific J. Math.*, 5, 285-309, 1955.