MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

D. LEPINE

Facteurs et plans. II : plans quasi-complets

Mathématiques et sciences humaines, tome 58 (1977), p. 5-24
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__58__5_0>

Math. Sci. hum. (15[e] année, n°58, *1977*, p.5-24)

FACTEURS ET PLANS

II : PLANS QUASI-COMPLETS ★

D. LEPINE ★★

1. PROPRIETE DE COMPLETUDE

1.1. Plans complets

Un plan dans un espace de description $\pi J = \prod_{j \in J} E_j$ étant une partie P de cet espace assujettie à la condition : pour tout $j \in J$: $pr_j(P) = E_j$ (cf. I §2.1 p.9), un cas particulier de structure de plan apparaît immédiatement : celui où P est la partie pleine de l'espace de description : $P = \pi J$. Dans ce cas on dit que P est un plan complet. Cette dénomination s'entend d'elle-même puisque si P est un plan complet il contient toutes les combinaisons possibles de ses facteurs élémentaires.

Au-delà de cette structure simple des plans complets, on peut chercher à définir une ou plusieurs classifications des structures de plans; mais nous n'aborderons pas cette question

★ La première partie de ce texte : "Facteurs et plans, I : Structure de finesse", Math. Sci. hum. n°57, 1977, p.5-26 sera supposée connue. Il y sera fait référence par la mention I §.. p... .

★★ Laboratoire de Psychologie expérimentale et comparée, E.P.H.E. 3e section et Université René-Descartes, Paris, associé au C.N.R.S.

dans toute sa généralité. Concrètement, on s'intéresse à certaines propriétés auxquelles un plan satisfait éventuellement et on étudie alors les caractéristiques (algébriques et combinatoires) de la classe des plans satisfaisant telle ou telle de ces propriétés. C'est ce que nous ferons ici en cherchant à définir une classe de plans qui élargisse la classe des plans complets sans cependant englober les structures de plans très "incomplètes" traditionnelles telles que les structures en carré latin, en blocs incomplets équilibrés, etc.

1.2. Nous pouvons chercher à tirer parti de la remarque suivante : si un plan P n'est pas complet, du moins certains des sous-plans P_K de P peuvent l'être. Si pour une partie K de J on a $P_K = \pi K$, c'est-à-dire si le sous-plan P_K dérivé de P par projection sur le sous-espace πK est complet, nous dirons que P est complet <u>pour la sous-famille</u> $\{E_j\}$ $j \in K$ de facteurs élémentaires. On remarquera que la propriété de complétude est héréditaire par projection : si un plan est complet, il est complet pour toute sous-famille de ses facteurs élémentaires. Pour étudier la structure d'un plan P eu égard à la propriété de complétude, il suffit donc de rechercher les familles maximales de facteurs élémentaires pour lesquelles P est complet.

D'autre part, la propriété de complétude crée des contraintes sur la structure de finesse du plan : en effet, si P est complet pour une sous-famille $\{E_j\}$ $j \in K$ de facteurs élémentaires, ceux-ci sont deux à deux non-comparables pour la finesse (mis à part le cas particulier, et en fait dégénéré, des facteurs élémentaires constants qui sont comparables avec n'importe quel facteur). Appelons <u>partie libre</u> de l'ensemble Z des facteurs élémentaires de P toute partie de Z dont les éléments sont non-comparables pour la finesse. Quelle que soit la structure de P, et pour toute partie Y de Z, on a (aux facteurs élémentaires constants près) :

(1) P est complet pour Y $\Rightarrow$ Y est une partie libre

1.3. Cette remarque nous conduit à distinguer deux classes de plans : s'il existe une partie libre de Z (au moins) telle que P n'est pas complet pour cette partie, nous dirons que P est un plan <u>incomplet</u> (au sens strict) ; si par contre P est complet pour une partie de Z dès que cette partie est libre, nous dirons que P est <u>quasi-complet</u>; autrement dit, les plans quasi-complets sont ceux pour lesquels la réciproque de l'implication (1) ci-dessus est satisfaite; ou encore, comme nous le verrons par la suite, les plans quasi-complets sont les plans qui sont complets conditionnellement à la donnée d'un ordre d'emboîtement sur l'ensemble de leurs facteurs élémentaires.

Parmi les plans quasi-complets nous retrouvons les plans complets (§1.1) qui sont ceux pour lesquels toute partie de Z est libre.

Avant de revenir à cette définition, et à ses conséquences quant à la structure de finesse des plans quasi-complets, nous définirons la relation de croisement qui est l'équivalent, en terme de relation entre facteurs ou entre partitions du plan, de la propriété de complétude.

2. RELATION DE CROISEMENT

2.1. Soit F et G deux sous-facteurs de P, $f:P \rightarrow F$ et $g:P \rightarrow G$ les surjections associées à ces facteurs. Notons fg l'application-produit des applications f et g, à valeurs dans le produit $F \times G$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1° Chaque classe de la partition P/f a une intersection non vide avec chacune des classes de la partition P/g.

2° L'application-produit fg est surjective; autrement dit, en notant FG l'image de P par l'application fg, on a : $FG = F \times G$.

S'il en est ainsi, nous dirons que les partitions P/f et P/g (notées aussi P/F et P/G) sont complètement croisées, ou simplement qu'elles sont <u>croisées</u>, et que les facteurs F et G sont <u>croisés</u> (ou que le plan P est croisé pour ces facteurs).

REMARQUE. La relation (binaire) de croisement ainsi définie peut être définie par une condition de cardinalité : les partitions P/f et P/g sont croisées ou F et G sont croisés si et seulement si le cardinal de la partition infimum de P/f et P/g (i.e. de la partition P/fg) est égal au produit des cardinaux de ces deux partitions, ou encore si $|FG| = |F \times G| = |F| \times |G|$.

2.2. La relation de croisement binaire se généralise immédiatement en une relation k-aire ($k \geq 1$) : étant donnés k facteurs $F_1, F_2, .., F_k$ de P, la condition de surjectivité de l'application produit des surjections $f_1, f_2, .., f_k$, que l'on écrira :

$$F_1 F_2 .. F_k = F_1 \times F_2 \times .. \times F_k$$

est équivalente à la condition que toutes les intersections $C_1 \cap C_2 \cap .. \cap C_k$ où C_1 est une classe de $P/f_1, ..,$ C_k une classe de P/f_k sont non-vides. On dira alors que les partitions $P/f_1, ..,$ P/f_k sont croisées, ou que la famille de facteurs $\{F_i\}$ $i=1,2,..,k$ est croisée dans P (ou que P est croisé pour cette famille).

REMARQUE. La relation un-aire de croisement exprime, pour un facteur F, que l'application $f : P \rightarrow F$ est surjective, ce qui est toujours vrai par définition de la notion de facteur.

2.3. Soit F_K et $F_{K'}$ $(K, K' \subseteq J)$ deux sous-facteurs de P. L'image de P par l'application-produit $f_K f_{K'}$ est une partie du produit $F_K \times F_{K'}$ et donc une partie de $\pi K \times \pi K'$. Cette image que nous notons donc $F_K F_{K'}$ n'est pas égale au facteur composé $F_K \circledast F_{K'}$ lequel est une partie du produit $\pi(K \cup K') = \prod_{j \in K \cup K'} E_j$ (cf. I, §3, p.11); mais, en notant e_j un élément de E_j, on voit que la correspondance :

$$((e_j)j \in K, (e_j)j \in K') \mapsto ((e_j)j \in K \cup K')$$

définit une bijection canonique de $F_K F_{K'}$ sur $F_K \circledast F_{K'}$ qui permet d'identifier ces deux ensembles. Moyennant cette identification on a :

$$F_K \text{ et } F_{K'} \text{ croisés} \Leftrightarrow F_K \circledast F_{K'} = F_K \times F_{K'}$$

Dans ce contexte particulier nous utiliserons le symbole $*$ plutôt que le symbole habituel $\times$ du produit cartésien : si F et G sont croisés nous noterons $F * G$ le composé de F et de G (et cette écriture signalera la relation), c'est-à-dire leur produit, à l'identification ci-dessus près; ou aussi bien $G * F$ évidemment puisque la relation de croisement est symétrique.

La généralisation de cette écriture est immédiate, compte tenu de l'associativité du produit d'ensembles : si $\{F_i\}$ $i=1,2,..,k$ est une famille croisée, on notera :

$$F_1 * F_2 * .. * F_k$$

(ou de toute autre manière équivalente obtenue en permutant les lettres $F_1, F_2, .., F_k$) le composé de ces facteurs, appelé <u>croisement</u> de la famille $\{F_i\}$.

2.4. La définition de la relation de croisement nous conduit à généraliser la notion de complétude du plan en l'étendant aux familles de facteurs composés (et non plus seulement aux familles de facteurs élémentaires) : P est complet pour une famille $\{F_i\}$ $i=1,2,..,k$ d'éléments de $\mathcal{F}$ si cette famille est croisée dans P ; ce qui n'implique pas, bien entendu, que P soit complet pour la famille des composants élémentaires des facteurs F_i : $F_K \circledast F_{K'} = F_K * F_{K'}$ n'implique pas que la famille $\{E_j\}$ $j \in K \cup K'$ soit croisée. Mais la propriété suivante, immédiate à établir, et qui généralise la propriété d'hérédité de la complétude par projection, jouera par la suite un rôle fondamental : si $\{F_i\}$ $i=1,2,..,k$ est une famille croisée dans P, toute famille de la forme $\{G_i\}$ $i=1,2,..,k$ où pour chaque i G_i est un facteur moins fin ou aussi fin que F_i est croisée. Notamment si les G_i sont des composants respectifs des F_i ils sont croisés.

2.5. Si deux partitions sont croisées, leur supremum est la partition la plus grossière (le maximum du treillis des partitions) ; donc si F_K et $F_{K'}$ sont croisés on a :

$$\sigma(F_K \wedge F_{K'}) = \sigma(F_{K \cap K'}) = \{P\} \text{ , i.e. } F_{K \cap K'} \sim F_{\emptyset}$$

c'est-à-dire que tout composant commun à F_K et $F_{K'}$ est un facteur constant ; d'où il résulte (via la propriété précédente) que F_K et $F_{K'}$ ne sont comparables pour la finesse que si l'un des deux au moins est constant : cas trivial car tout facteur constant C est à la fois moins fin (au sens large) que tout autre facteur ($\forall F$: $F \lesssim C$) et croisé avec lui ($F \circledast C = F * C$).

Si l'on élimine les facteurs élémentaires constants (par exemple en se plaçant dans la classe des plans minimaux) on obtient sous une forme générale la propriété annoncée ci-dessus (§1.2) que si P est complet pour une famille de facteurs celle-ci est libre.

3. STRUCTURE DE FINESSE DES PQC

3.1. Propriété de quasi-complétude

Par définition, un plan est quasi-complet (en abrégé : est un pqc) si toute partie libre de l'ensemble de ses facteurs élémentaires y est croisée. On remarquera que cette définition n'implique pas la minimalité du plan : la propriété de quasi-complétude n'exclut pas l'existence de facteurs élémentaires superflus (y compris l'existence de facteurs élémentaires constants). Pour étudier la structure de finesse des plans quasi-complets il sera commode, mais bien entendu non-restrictif, de se placer dans la classe des plans quasi-complets minimaux (en abrégé : pqcm).

La propriété de quasi-complétude est, comme la complétude, héréditaire par projection : si P est un pqc, toute sous-famille $\{E_j\}$ $j \in K'$ $(K' \subseteq K \subseteq J)$ libre dans P_K est libre dans P, donc croisée dans P, donc croisée dans P_K ; donc P_K est un pqc.

EXEMPLE. Le plan P défini par le tableau I (cf.I §4 p.12) et dont le treillis des facteurs saturés est donné figure 1 (cf. I §7.3 p.21) n'est pas un pqc car il contient (notamment) la famille libre mais non croisée $\{B,O,R\}$; en effet ces facteurs sont deux à deux croisés ($BO = B * O$, etc.) mais le composé des trois est un plan en carré latin à $4^2 = 16$ éléments au lieu des $4^3 = 64$ éléments que comporterait le composé $BOR = B * O * R$ si la famille $\{B,O,R\}$ était croisée.

On pourra vérifier par contre que le sous-plan ABCOS (obtenu à partir de P par suppression du facteur R) est un pqc (et que donc tous les sous-plans de P qui ne contiennent pas le facteur R sont des pqc; on notera que dans certains de ces plans, en particulier ABCOS, le facteur S est superflu mais qu'il existe des sous-plans de ABCOS confondus avec P dans lesquels S n'est pas superflu, par exemple le plan ABCS)★

Cet exemple illustre l'une des raisons pour lesquelles la classe des pqc joue un rôle central en planification et en analyse des données : c'est que la propriété de quasi-complétude,

---

★ On pourra vérifier aussi que, contrairement à ce qui a été dit en I §7.3 p.21 lignes 10-11 par erreur, le plan ABCRS n'est pas un pqc.

si elle n'est pas satisfaite par un plan P donné, s'acquiert éventuellement par projection de ce plan c'est-à-dire par suppression de facteurs élémentaires; en l'occurrence, la suppression du seul facteur R dans le plan incomplet ABCORS conduit à un plan quasi-complet du même degré de finesse que P (i.e. confondu avec lui).

3.2. Ordre d'emboîtement sur l'ensemble des facteurs élémentaires.

Nous adopterons ici des notations modifiées par rapport à celles de la première partie : Z désignant l'ensemble des facteurs élémentaires de P et Y une partie quelconque de Z, on notera fY le composé des facteurs élémentaires appartenant à Y; autrement dit, si $Y = \{E_j\}$ $j \in K$ $(K \subseteq J)$ on a : $fY = F_K$ (f est l'isomorphisme de treillis $P(Z) \rightarrow \mathcal{F}$).

Le plan P étant minimal, Z muni de la relation de finesse est un ordre; l'ordre strict associé à cet ordre réflexif sera appelé l'ordre d'emboîtement (sous-entendu : sur l'ensemble des facteurs élémentaires) du plan. (Rappelons que nous avons défini la relation d'emboîtement sur $\mathcal{F}$ par : " F est emboîté dans G $\Leftrightarrow$ $F \lesssim G$ avec $G \not\lesssim F$ "; sur Z on a donc : " E_1 est emboîté dans E_2 $\Leftrightarrow$ $E_1 < E_2$ ".)

L'ordre d'emboîtement $(Z,<)$ d'un plan quasi-complet minimal P satisfait à la propriété suivante : pour tout $E \in Z$, E a un prédécesseur au plus ; autrement dit l'ensemble des facteurs élémentaires plus fins que E (s'il en existe) constitue une chaîne de l'ordre $(Z,<)$. En effet soit A, B et C trois facteurs élémentaires et supposons que A et B précèdent tous deux le facteur C ; A et B sont non-comparables, donc croisés, et on a $A \bullet C = A\langle C\rangle \sim A$ et $B \bullet C = B\langle C\rangle \sim B$; $A\langle C\rangle$ et $B\langle C\rangle$ respectivement aussi fins que A et que B sont croisés donc leur composant commun C est constant (cf. ci-dessus §2.4 et 2.5). Si

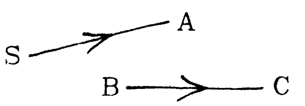
P est minimal il ne contient aucun facteur élémentaire constant donc pour tout $E \in Z$ E a un prédécesseur au plus.

N.B. En théorie des ensembles ordonnés on appelle habituellement <u>arbre</u> un demi-treillis arborescent, c'est-à-dire un demi-treillis tel que si deux éléments x et y sont comparables l'intervalle $[x,y]$ est une chaîne (un ordre total); un inf-demi-treillis est un arbre si et seulement si tous ses éléments sauf un ont un prédécesseur exactement; l'élément qui n'a pas de prédécesseur est le minimum du demi-treillis et est appelé la <u>racine</u> de l'arbre.

En théorie des graphes on appelle habituellement arbre un graphe connexe qui a n-1 arêtes s'il a n sommets. Ces deux définitions sont compatibles en ce sens qu'un ensemble ordonné fini est un arbre (un demi-treillis arborescent) si et seulement si sa relation d'adjacence est un arbre (au sens de la théorie des graphes). Cette compatibilité est manifeste dans la représentation graphique habituelle des ensembles ordonnés, où seules sont figurées les arêtes de la relation d'adjacence.

La propriété précédente de l'ordre d'emboîtement $(Z,<)$ d'un pqcm (chaque facteur élémentaire a au plus un prédécesseur) peut s'exprimer sous la forme suivante : chacune des composantes connexes de l'ordre d'emboîtement est un arbre.

EXEMPLE. Le plan ABCS, sous-plan du plan ABCORS défini par le tableau I, est un pqcm; S est emboîté dans A, B est emboîté dans C; d'où le graphe ci-dessous de la relation de succession associée à l'ordre d'emboîtement sur $\{A,B,C,S\}$ (deux composantes connexes, de racines respectives S et B) :



3.3. <u>Treillis des facteurs saturés d'un pqcm</u>

3.3.1. Soit P un plan minimal (de structure quelconque), $(Z,<)$ l'ordre d'emboîtement de P. Notons ℓ^- l'application de l'ensemble P(Z) dans lui-même qui à toute partie Y de Z associe l'ensemble de ses éléments minimaux pour la finesse (c'est-à-dire la partie libre $\ell^-(Y)$ telle que pour tout $E \in Y$, $E \in \ell^-(Y)$ si et seulement si il n'existe aucun facteur élémentaire $E' \in Y$ qui soit strictement plus fin que E). Si P est un pqcm, le facteur fY est un pqcm donc l'ordre $(Y, \leqslant)$ satisfait à la propriété 3.2 (chaque composante connexe de $(Y, \leqslant)$ est un arbre), donc $\ell^-(Y)$ est l'ensemble des racines de ces composantes. La partie $\ell^-(Y)$ étant une partie libre de Z, elle est croisée dans P, donc le facteur $f\ell^-(Y)$ est un croisement de facteurs élémentaires.

3.3.2. Etant donnée une partie Y (quelconque) de Z, on notera $\bar{Y}$ la <u>fermeture finissante</u> de Y dans l'ordre $(Z, \leqslant)$, c'est-à-dire le sous-ensemble de Z dont les éléments sont les majorants (non stricts) des éléments de Y : $E \in \bar{Y} \Leftrightarrow$ il existe $E' \in Y$ avec $E' \leqslant E$. L'ensemble des parties finissantes sur l'ordre $(Z, \leqslant)$:

$$\Phi = \{\bar{Y} : Y \subseteq Z\}$$

est, pour l'ordre d'inclusion, un treillis distributif sous-treillis du treillis $(P(Z), \subseteq)$ (cf. Monjardet, 1974, §2.1.2).

Soit P un plan minimal (de structure quelconque), $(Z, <)$ l'ordre d'emboîtement de P et Y une partie de Z. Le saturé $\bar{f}Y$ du facteur fY contient, par définition, tous les facteurs élémentaires moins fins ou aussi fins que fY, donc il contient en particulier tous les facteurs élémentaires qui majorent (non-strictement) un élément de Y ($\forall E' \in Y$ et $\forall E$ tel que $E' \leqslant E$: $fY \lesssim E' \leqslant E$ donc $E \sqsubseteq \bar{f}Y$); c'est-à-dire que l'ensemble des composants élémentaires du saturé de fY inclut la fermeture finissante de Y : $\bar{f}Y \sqsupseteq f\bar{Y}$.

En général (si P a une structure incomplète), le saturé $\bar{f}Y$ pourra contenir un facteur élémentaire (au moins) qui n'appartient pas à la partie finissante $\bar{Y}$ (i.e. $f\bar{Y}$ est un composant strict de $\bar{f}Y$). Mais on peut montrer que si P est un pqcm alors aucun facteur élémentaire autre que les éléments de la partie finissante $\bar{Y}$ n'est un composant de $\bar{f}Y$; autrement dit :

3.3.3. PROPOSITION : P est un pqcm $\Rightarrow \forall Y \subseteq Z : \bar{f}Y = f\bar{Y}$

Nous ne donnerons ici que l'indication d'un schéma de preuve de cette proposition. Soit P un pqcm, Y une partie de Z, E un facteur élémentaire qui n'appartient pas à $\bar{Y}$ et R un élément minimal de Y (c'est-à-dire un élément de $\ell^{-}(Y)$, racine de l'une des composantes connexes de $(Y,\leqslant)$); alors ou bien E et R ne sont pas comparables, ou bien E est strictement plus fin que R. En classant les éléments de $\ell^{-}(Y)$ en deux sous-ensembles (l'un des deux étant éventuellement vide) : l'ensemble des racines R non-comparables avec E et l'ensemble des racines R telles que $E < R$, on montrera - en utilisant la propriété que le cardinal d'un croisement est le produit des cardinaux des facteurs croisés - que l'on a : $|f\ell^{-}(Y) \circledast E| > |f\ell^{-}(Y)|$ c'est-à-dire que le facteur $f\ell^{-}(Y) \circledast E$ est strictement plus fin que le facteur $f\ell^{-}(Y)$, qui est lui-même confondu avec fY et avec $\bar{f}Y$; donc $\bar{f}Y \circledast E < \bar{f}Y$, ce qui exclut que E soit un composant de $\bar{f}Y$, cqfd.

3.3.4. Il résulte de la proposition 3.3.3 que si P est un pqcm, le treillis de composition $(\mathcal{S},\sqsubseteq)$ des facteurs saturés de P est un treillis distributif, sous-treillis de $(\mathcal{F},\sqsubseteq)$, isomorphe au treillis $(\Phi,\subseteq)$ des parties finissantes sur l'ordre $(Z,\leqslant)$. La construction de $(\mathcal{S},\sqsubseteq)$ s'ensuit immédiatement, à partir de la seule donnée de l'ordre d'emboîtement $(Z,<)$.

EXEMPLE. Le pqcm ABCS a pour treillis $(\mathcal{S},\sqsubseteq)$ le treillis isomorphe au treillis d'inclusion des parties finissantes de l'ordre d'emboîtement indiqué ci-dessus (§3.2); les 9 éléments de ce treillis sont $F_{\emptyset}$, A, C, AC, SA, BC, SAC, BCA, SABC. (On pourra vérifier que l'on retrouve ce treillis comme sous-ensemble ordonné du treillis de la figure 1, cf. I §7.3 p.21.)

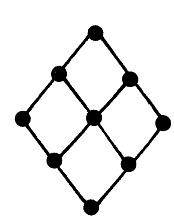
3.4. Classes de finesse et treillis des croisements

3.4.1. Soit P un pqcm, Y une partie de Z. Le croisement $f\ell^{-}(Y)$

est minimal (pour l'ordre de composition) dans sa classe de finesse (qui est celle de fY), car tout sous-facteur strict d'un croisement de facteurs élémentaires non-constants est strictement moins fin que ce croisement; d'autre part, tout facteur minimal pour $\sqsubseteq$ dans la classe de finesse de fY est un composant de $f\ell^{-}(Y)$; donc le croisement $f\ell^{-}(Y)$ est le <u>minimum</u> de sa classe de finesse et celle-ci est l'intervalle : $[f\ell^{-}(Y), f\bar{Y}]$ de $(\mathcal{F},\sqsubseteq)$; c'est donc un treillis booléen à 2^k éléments si $\bar{Y}$ contient k facteurs élémentaires non-minimaux pour la finesse, i.e. si $|\bar{Y} - \ell^{-}(Y)| = k$.

3.4.2. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des parties libres de $(Z,\leqslant)$; les facteurs fL $(L\in\mathcal{L})$, croisements des parties libres de Z, sont les minimums respectifs des classes du quotient $\mathcal{F}/\sigma$. Donc l'ensemble de ces croisements : $f\mathcal{L} = \{fL : L\in\mathcal{L}\}$ ordonné par la relation $\leq$ est aussi un treillis de finesse de P (isomorphe au treillis $(\mathcal{S},\leqslant)$ et au treillis $(\mathcal{F}/\sigma,\leqslant)$), c'est-à-dire que la structure de finesse d'un pqcm peut être caractérisée comme le type d'ordre du treillis des croisements des parties libres de son ordre d'emboîtement.

EXEMPLE. Considérons à nouveau le pqcm ABCS, sous-plan du plan P = ABCORS du tableau I (cf. ci-dessus §3.2 et 3.3.4). Le treillis de finesse de ce plan :



peut être étiqueté aussi bien par l'ensemble des facteurs saturés ($F_{\emptyset}$,A,...,SABC - cf. §3.3.4), qui sont les images par f des parties finissantes de $(Z,\lesssim)$ et les maximums respectifs des classes de finesse de $\mathcal{F}/\sigma$, que par l'ensemble des croisements de facteurs élémentaires : $F_{\emptyset}$, A, C, A✱C, S, B, S✱C, A✱B, et S✱B, qui sont les images par f des parties libres de $(Z,\leq)$ et les minimums respectifs de ces classes.

4. REPRESENTATION DES FACTEURS SATURES : FORMULES DE PQCM

4.1. Le treillis de composition $(\mathcal{S},\sqsubseteq)$ des facteurs saturés d'un pqcm contient le minimum $F_{\emptyset}$ et le maximum P du treillis $\mathcal{F}$ de ses sous-facteurs.

Soit E_1 et E_2 deux facteurs élémentaires; les parties finissantes $\overline{\{E_1\}}$ et $\overline{\{E_2\}}$ sont des arbres de racines E_1 et E_2; donc si E_1 et E_2 ne sont pas comparables, $\overline{\{E_1\}} \cap \overline{\{E_2\}} = \emptyset$ et $\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 = F_{\emptyset}$ c'est-à-dire que $\bar{E}_1$ et $\bar{E}_2$ sont séparés. Ainsi le treillis $(\mathcal{S},\sqsubseteq)$ est un sous-treillis de $\mathcal{F}$ tel que ses éléments sup-irréductibles (sauf $F_{\emptyset}$), c'est-à-dire les facteurs de base, saturés respectifs des facteurs élémentaires, sont soit comparables soit séparés.

4.2. L'ensemble des facteurs de base : $\mathcal{B} = \{\bar{E} : E \in Z\}$ constitue une <u>sup-base</u> du treillis $\mathcal{S}$ (cf. O & C, ch.III) car tout facteur saturé sup-réductible admet une représentation minimale unique comme supremum de facteurs de base - à savoir : tout facteur saturé est le composé, en l'occurrence le croisement, des saturés de ses composants élémentaires minimaux pour la finesse. En effet, soit $F \in \mathcal{S}$ et soit $R = \{R_i\}$ i=1,2,..,k l'ensemble des composants élémentaires minimaux de F (i.e. si $F = fY$, $R = \mathcal{L}^{-}(Y)$). On a : $F = f\bar{R} \sim fR = R_1 * R_2 * \ldots * R_k$; pour tout $E \in \bar{R}$ il existe R_i avec $R_i \leq E$ donc $f\bar{R} = \bar{R}_1 \bullet \bar{R}_2 \bullet \ldots \bullet \bar{R}_k$ et $\{\bar{R}_i\}$ i=1,2,..,k constitue une famille de facteurs respectivement aussi fins que les R_i (i=1,2,..,k); donc la famille $\{\bar{R}_i\}$ est croisée et :

$$F = f\bar{R} = \bar{R}_1 * \bar{R}_2 * \ldots * \bar{R}_k$$

Si $|R| = 1$, F est sup-irréductible (c'est un facteur de base $\bar{E}$);

si $|R| > 1$ on a la représentation minimale cherchée.

4.3. Développement de $\bar{E}$

Soit $E \in Z$; on a $\bar{E} = f\overline{\{E\}}$; si E est maximal dans $(Z,<)$, $\overline{\{E\}} = \{E\}$ et $\bar{E} = f\{E\} = E$. Si E n'est pas maximal, soit $E_1, E_2, .., E_m$ les successeurs de E dans $(Z,<)$; l'ensemble de ces successeurs est une partie libre de Z, donc croisée et on a :

$$\bar{E} = E<\bar{E}_1 * \bar{E}_2 * .. * \bar{E}_m>$$

Le saturé d'un facteur élémentaire peut donc être réécrit comme l'emboîtement de ce facteur dans le croisement des saturés de ses successeurs dans l'ordre d'emboîtement $(Z,<)$. Appliquons cette règle de réécriture aux facteurs $\bar{E}_1, .., \bar{E}_k$, puis aux saturés des successeurs de ces facteurs, etc.; finalement nous obtiendrons une écriture développée du facteur $\bar{E}$ contenant tous les composants élémentaires de ce facteur, et que nous appellerons une <u>formule</u> de pqcm. (Le processus de développement est fini puisque E n'a qu'un nombre fini de majorants; une branche du développement se termine lorsque l'on obtient un terme $\bar{E}_j$ pour lequel E_j est maximal (est un sommet terminal de l'arbre de racine E), d'où $\bar{E}_j = E_j$.)

4.4. Formules de pqcm

Soit F un facteur saturé ; $F = \bar{R}_1 * \bar{R}_2 * .. * \bar{R}_k$ où les R_i sont les composants élémentaires minimaux de F (cf. §4.2); en remplaçant $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2, ...,$ $\bar{R}_k$ par une expression développée selon l'algorithme ci-dessus on obtiendra une formule du plan quasi-complet minimal F. Une telle formule contient toutes les lettres désignant les composants élémentaires de F, liées par les symboles $<,>$ et $*$ de l'emboîtement et du croisement.

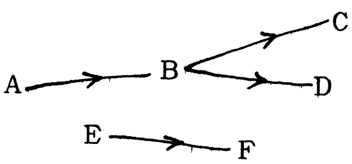
A chaque pqcm on pourra associer une classe d'équivalence de formules puisque tout croisement de k termes peut être représenté par l'une quelconque des k! expressions équivalentes correspondant aux k! ordres d'écriture de ces termes.

4.5. Construction du treillis des facteurs saturés

Pour construire le treillis $(\mathcal{S},\sqsubseteq)$ il suffit tout d'abord d'écrire une formule de pqcm pour chacun des facteurs de base, c'est-à-dire, pour chaque $E\in Z$, d'écrire $\bar{E}$ sous forme développée; les éléments sup-réductibles du treillis $(\mathcal{S},\sqsubseteq)$ sont alors les croisements de toutes les familles de facteurs de base séparés. La représentation de chaque facteur saturé par une formule pqcm fait apparaître explicitement l'ensemble de ses facteurs élémentaires donc la construction de $(\mathcal{S},\sqsubseteq)$ isomorphe au treillis d'inclusion des parties finissantes de $(Z,\leqslant)$ s'effectue ensuite sans difficulté.

EXEMPLE. On pourra construire le treillis des facteurs saturés de l'un des sous-plans du type pqcm du plan ABCORS, par exemple celui du plan ABCS étudié précédemment et qui peut s'écrire $S<A>*B<C>$ ou de manière équivalente $B<C>*S<A>$.

Nous illustrerons la construction par un exemple plus complexe. Soit l'ordre d'emboîtement $(Z,<)$ donné par le graphe de succession ci-dessous :



Si P est un pqcm dont cet ordre $(Z,<)$ est l'ordre d'emboîtement on a :

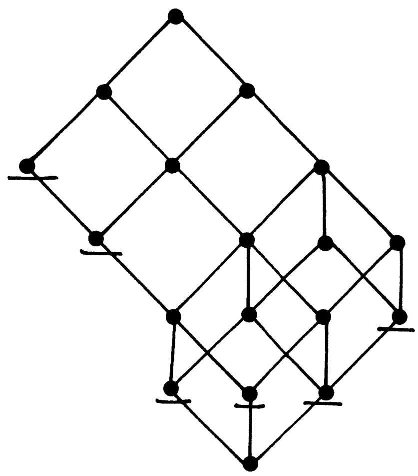
(1) $P = \bar{A}*\bar{E}$ car A et E sont les racines des deux composantes connexes de Z.

(2) $P = A<\bar{B}>*E<F>$ car B succède à A, d'où : $\bar{A} = A<\bar{B}>$, et F succède à E, d'où : $\bar{E} = E<\bar{F}>$ mais F est un sommet terminal, d'où : $\bar{E} = E<F>$.

(3) $P = A<B<C*D>>*E<F>$ car C et D succèdent à B, d'où : $\bar{B} = B<\bar{C}*\bar{D}>$ mais C et D sont terminaux, d'où la formule.

En permutant les termes des croisements on aurait pu obtenir par exemple la formule équivalente : $P = E<F>\ast A<B<D\ast C>>$.

Les 6 facteurs de base de $\mathcal{S}$ sont :
$\bar{A} = A<B<C\ast D>>$, $\bar{B} = B<C\ast D>$, $\bar{C} = C$, $\bar{D} = D$, $\bar{E} = E<F>$ et $\bar{F} = F$.
Les facteurs saturés sont les croisements de familles de facteurs de base séparés, d'où le treillis $\mathcal{S}$ ci-dessous (que l'on pourra étiqueter soit au moyen des formules de pqcm convenables représentant les facteurs saturés, soit au moyen des croisements (qui sont des formules de plans complets) des parties libres de $(Z,\leqslant)$; on a souligné les sommets correspondants aux facteurs de base, i.e. aux éléments sup-irréductibles de $(\mathcal{S},\sqsubseteq)$).



5. CLASSIFICATION DES PLANS QUASI-COMPLETS

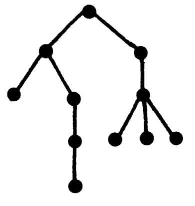
5.1. Il résulte de la proposition 3.3.3 que dans la classe des pqcm la correspondance $(Z,<) \mapsto (\mathcal{S},\sqsubseteq)$ conserve l'isomorphisme, autrement dit que deux pqcm P et P' ont la même structure de finesse si et seulement si ils sont isomorphes pour l'ordre d'emboîtement sur l'ensemble de leurs composants élémentaires. Comme la construction précédente l'a montré, l'ordre d'emboîtement sur Z détermine la structure de finesse, et la réciproque est évidemment vraie (l'ordre $(Z,\leqslant)$ est isomorphe à l'ordre induit par la finesse sur l'ensemble des facteurs de base).

Pour dénombrer, énumérer et classer les types de pqcm (pour la finesse) il suffit donc de dénombrer, énumérer et classer les types d'ordres (finis) dont chaque composante est un arbre.

5.2. D'autre part, en définissant formellement* la <u>classe des formules de pqcm</u> et le <u>type d'une formule</u> on montrera que la correspondance Pqcm $\longrightarrow$ Formules constitue une représentation conforme de la structure d'emboîtement et donc de la structure de finesse des plans quasi-complets.

La conformité de cette représentation vient de ce que une relation hiérarchique (un arbre) peut être représentée par un système de parenthèses emboîtées, à partir de la règle suivante (isomorphe à celle qui nous a permis de développer l'écriture du saturé d'un facteur élémentaire) : si l'élément x a pour successeurs dans l'ordre hiérarchique les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_m$, on écrit cette relation : $x(x_1 x_2 \ldots x_m)$; en réécrivant de la sorte les successeurs de x, puis les succeseurs de ces successeurs, etc. on obtient une représentation conforme de l'arbre.

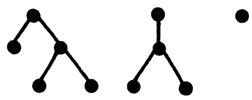
Un <u>type</u> de relation hiérarchique pourra être représenté par un <u>schéma</u> de telles formules parenthésées (i.e. par une expression sans étiquettes). Par exemple le type d'ordre ci-dessous, à 5 niveaux



pourra être représenté par le schéma terminal (n°5) de la suite de schémas :

1 •
2 •(••)
3 •(•(•)•(••))
4 •(•(•(•••))•(•(•)•))
5 •(•(•(•••))•(•(•(•))•))

Les schémas de formules de pqcm s'obtiennent à partir de ces représentations en remplaçant les parenthèses par des chevrons <,> et en séparant les sous-formules du type •( ) dont la racine se situe au même niveau hiérarchique (y compris au niveau zéro : il s'agit alors des racines des composantes connexes de (Z,≼)) par des symboles * du croisement. Par exemple au type d'ordre d'emboîtement ci-dessous :



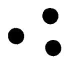
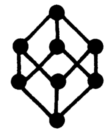
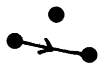
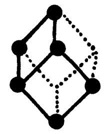
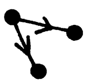
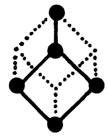
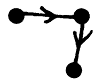
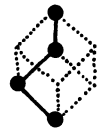
correspond le schéma de formule de pqcm :

•<•*•<•*•>>*•<•<•*•>>*•

(ou tout autre schéma équivalent obtenu à partir de celui-ci en permutant les termes des croisements).

5.3. Pour illustrer la correspondance entre types d'ordre d'emboîtement sur l'ensemble des facteurs élémentaires, structures de finesse et schémas de formules de pqcm, nous indiquons ci-dessous ces trois représentations pour chacun des 4 types de pqc à 3 facteurs de base (i.e. pour chacun des 4 types de pqcm à 3 facteurs élémentaires).

REMARQUE. En poursuivant l'énumération on trouvera 9 types de pqc à 4 facteurs, 20 types à 5 facteurs, 48 types à 6 facteurs, etc. On notera que les types d'ordre à k éléments dont chaque composante connexe est un arbre correspondent bijectivement aux types d'arbres à k+1 éléments, ce qui fournit un procédé d'énumération.

Type de plans	Type d'emboîtement	Structure de finesse	Schéma de formules
Croisement (plan complet)			•*•*•
Croisement d'un facteur et d'un emboîtement			•<•>*•
Emboîtement d'un facteur dans un croisement			•<•*•>
Double emboîtement			•<•<•>>

On a fait apparaître les structures de finesse de ces types de plans comme sous-treillis du simplexe d'ordre 3, qui est le treillis de composition d'un plan à 3 facteurs élémentaires et le treillis de finesse d'un plan complet à 3 facteurs de base, ce qui concrétise le sens du qualificatif "quasi".

GLOSSAIRE

des termes et symboles introduits dans la seconde partie

(les n° sont ceux des §)

Complet (plan -) 1.1
    (plan - pour une famille de facteurs) 1.2

Croisé(e)s (facteurs -; partitions -) 2.1

Croisement (relation de -;) 2
    (- d'une famille de facteurs) 2.3

Emboîtement (ordre d'-) 3.2

Finissante (fermeture -; partie -) 3.3.2

Formule de pqcm 4.3 et 4.4