MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. LEMAIRE

Agrégation typologique de données de préférences

Mathématiques et sciences humaines, tome 58 (1977), p. 31-50
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__58__31_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Math. Sci. hum. (15e année, n°58, *1977*, p.31-50)

AGREGATION TYPOLOGIQUE DE DONNEES DE PREFERENCES (*)

J. LEMAIRE (**)

1. INTRODUCTION

On rencontre fréquemment des données de préférences en Marketing , dans les procédures de test de produits , en gestion, dans les problèmes de choix multicritères , en psychologie mathématique, dans l'analyse des questionnaires, en politique, dans les problèmes de scrutins ...

De telles données sont souvent constituées par une famille de relations binaires sur l'ensemble des objets à comparer noté ici X avec p=card(X). Parmi les types de relations utilisées, les modèles d'ordres ou de préordres totaux apparaissent féquemment car il sont facilement manipulables, tant au niveau du recueil des données qu'au niveau de leur traitement. Un préordre total définit un classement des objets de X comportant éventuellement des groupes d'objets équivalents et un ordre total est un préordre total qui n'introduit pas de notion d'équivalence (M. BARBUT et B. MONJARDET (1970)). Une relation w de préordre total sur X pourra donc être notée :

$$x_1 \underset{w}{=} \cdots \underset{w}{=} x_{k_1} \underset{w}{>} x_{k_1+1} \underset{w}{=} \cdots \underset{w}{=} x_{k_2} \underset{w}{>} \cdots \underset{w}{>} x_{k_{q-1}+1} \underset{w}{=} \cdots \underset{w}{=} x_{k_q}$$

(pour simplifier les notations, on omettra parfois w). Cette notation indique la présence de q groupes d'objets équivalents:

$$G_1 = \{x_1, \ldots, x_{k_1}\}$$

(*) Présenté au Congrès Européen des Statisticiens de Grenoble (Sept. 1976)

(**)LASSY , I.U.T. , 41 Bd Napoléon III , 06041 NICE CEDEX .

$$G_2 = \{ x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2} \}$$
$$\ldots$$
$$G_q = \{ x_{k_{q-1}+1}, \ldots, x_{k_q} \}$$

formant une partition de X et que tout élément de G_i a été préféré strictement à tout élément de G_j dès que $i < j$. Conformément à la notation ci-dessus nous poserons:

$x \underset{w}{>} y$ (x préféré strictement à y) si $(x,y) \in w$ et $(y,x) \notin w$,

$x \underset{w}{=} y$ (x et y équivalents) si $(x,y) \in w$ et $(y,x) \in w$,

$x \underset{w}{\geq} y$ (x préféré largement à y) si $(x,y) \in w$.

EXEMPLE

$X = \{1, \ldots, 7\}$ modélise 7 essences végétales naturelles:

1 Géranium
2 menthe
3 marjolaine
4 citral
5 romarin
6 ylan-ylan
7 néroli

et 40 individus donnent sur X un préordre total:

NO 1	4 > 7 > 2 > 5 > 1 > 3 > 6
NO 2	5 = 7 > 6 = 2 = 4 > 3 > 1
NO 3	6 > 7 > 2 > 4 > 5 > 3 > 1
NO 4	7 > 1 > 4 > 5 > 3 > 2 > 6
NO 5	4 > 6 > 5 > 3 > 7 > 2 > 1
NO 6	6 > 2 > 5 > 7 > 1 > 4 > 3
NO 7	2 > 4 > 3 > 5 > 7 > 6 > 1
NO 8	2 > 6 > 5 > 7 > 4 = 1 > 3
NO 9	2 > 5 > 6 > 3 > 7 > 4 > 1
NO 10	4 > 2 > 6 > 7 > 5 > 3 > 1
NO 11	4 = 2 > 5 = 7 > 1 > 3 > 6
NO 12	7 > 2 > 4 > 5 = 3 = 1 = 6
NO 13	6 > 4 > 7 = 5 > 2 > 3 > 1
NO 14	2 > 4 > 5 = 6 > 3 = 7 = 1
NO 15	7 > 5 > 6 > 2 > 3 > 4 > 1
NO 16	2 > 4 > 5 > 6 > 7 = 3 > 1
NO 17	4 = 7 > 2 > 6 = 3 > 5 = 1
NO 18	4 > 2 > 5 > 6 > 7 > 3 > 1
NO 19	4 > 6 > 7 > 5 > 2 > 3 > 1
NO 20	4 > 6 > 3 > 2 > 1 > 7 > 5
NO 21	4 > 2 > 7 > 5 > 1 > 3 > 6
NO 22	6 > 2 > 5 > 4 > 3 = 7 > 1
NO 23	2 > 6 > 7 = 5 > 4 > 3 > 1

NO 24	6 > 5 > 2 > 4 > 7 > 3 > 1
NO 25	4 > 2 > 3 = 5 = 6 > 7 > 1
NO 26	4 > 7 > 6 > 5 > 3 > 2 > 1
NO 27	6 > 7 > 1 > 3 > 2 > 5 > 4
NO 28	6 > 2 > 4 > 3 > 7 > 1 > 5
NO 29	4 > 2 = 5 > 6 > 3 = 7 > 1
NO 30	6 > 4 > 2 > 5 > 3 > 7 > 1
NO 31	4 = 2 = 5 > 6 = 3 > 7 = 1
NO 32	4 > 7 > 5 > 2 > 6 > 3 > 1
NO 33	6 = 7 > 2 = 4 > 5 = 1 = 3
NO 34	7 > 6 > 5 > 2 > 4 > 3 > 1
NO 35	4 > 2 > 6 > 5 > 7 > 3 > 1
NO 36	5 > 2 > 4 > 7 > 3 > 6 > 1
NO 37	6 = 7 > 3 = 2 = 4 = 5 > 1
NO 38	6 > 4 > 2 > 5 > 7 > 3 > 1
NO 39	3 > 6 > 5 > 7 > 1 > 2 > 4
NO 40	4 > 5 > 3 > 6 > 7 > 2 > 1

Agréger une famille $(w_i)_{i\in I}$ de préordres totaux sur X consiste à synthétiser les classements qu'ils induisent sur X en les résumant au mieux par un ou plusieurs classements.

EXEMPLE: <u>ordre total médian</u>

En mesurant l'écart entre deux préordres totaux sur X par le cardinal de leur différence symétrique :

$$d(w,w') = \mathrm{card}(w \,\Delta\, w')$$

on appelle ordre total médian, toute solution du problème:

$$\min_{w \text{ ordre total}} \sum_{i\in I} d(w_i, w)$$

Dans l'exemple précédent , ce problème n'admet qu'une seule solution:

$$4 \underset{w}{>} 2 \underset{w}{>} 6 \underset{w}{>} 5 \underset{w}{>} 7 \underset{w}{>} 3 \underset{w}{>} 1$$

dont la qualité peut être mesurée par la moyenne des tau de KENDALL entre w et chaque w_i:

$$\tau_I(w) = \frac{1}{\mathrm{card}(I)} \sum_{i\in I} \tau(w,w_i)$$

Avec: $$\tau(w,w_i) = 1 - 2\, d(w,w_i)/(p(p-1))$$

Ici, $\tau_I(w) = 0{,}44$.

On peut améliorer la qualité du résumé trouvé en recherchant des résumés plus complexes: par exemple, des ordres partiels (A. ASTIE (1973)),

des tournois (J.C. BERMOND (1972)), des quasi-ordres (R.D. LUCE (1956), F.S. ROBERTS (1971), J. MENUET (1974), E. JACQUET-LAGREZE (1975)), des tresses (C. FLAMENT (1962) et (1971), Y. KERGALL (1974))... Ce faisant, on prend le risque d'alourdir considérablement les algorithmes. Nous proposons, dans cette publication, une démarche conservant les modèles d'ordres ou de préordres totaux pour les résumés mais qui permet d'obtenir des résumés locaux. On les obtient en recherchant simultanément:

- une partition de I en k classes $C_1,\ldots,C_k$,
- un ou plusieurs résumés pour chacune des sous-familles $(w_i)_{i\in C_j}$.

EXEMPLE

Avec 3 classes, dans l'exemple précédent, cette démarche conduit aux résumés:

- classe C_1= {5,7,9,10,14,16,18,20,25,28,29,30,31,35,36,38,40}
  un ordre total médian: w_1 4>2>5>6>3>7>1
  $\tau_{C_1}(w_1) = 0,66$
- classe C_2= {2,3,6,8,13,15,19,22,23,24,26,27,33,34,37,39}
  un ordre total médian: w_2 6>7>5>2>4>3>1
  $\tau_{C_2}(w_2) = 0,59$
- classe C_3= {1,4,11,12,17,21,32}
  un ordre total médian: w_3 4>7>2>5>1>3>6
  $\tau_{C_3}(w_3) = 0,68$

Pratiquement, les résumés locaux sont obtenus en intégrant une procédure d'agrégation - dans l'exemple précédent, celle de la recherche des ordres totaux médians - dans la phase de recherche des noyaux d'un algorithme du type nuées dynamiques (E. DIDAY (1971)). Cette démarche généralise une procédure proposée par E. JACQUET LAGREZE (1971) dans le cas de deux classes.Par ailleurs, elle peut s'étendre à d'autres méthodes d'agrégation ordinale. Cette publication en détaille quelques unes classiques:

- modèles de R.A. BRADLEY et M.E. TERRY (1952)
- méthode de BORDA
- méthode de codage optimal de DE LEEUW, TAKANE, YOUNG (1975)

ou nouvelle à notre connaissance, suggérée par la formalisation même du problème:

- méthode du permutoèdre.

Pour une étude plus systématique, on pourra se reporter à la référence: J. LEMAIRE (1976). Dans ces exemples, la forme des résumés nous a conduit à distinguer deux principaux types de modèles pour exprimer les tendances locales:

- les <u>modèles directs</u> où les résumés sont des ordres ou des préordres totaux sur X,
- les <u>modèles tampons</u> où ces résumés sont des couples (w,k) avec w préordre total ou ordre total et k codage admissible de w.

L'aptitude d'un résumé w ou (w,k) à représenter un des préordres totaux de la famille $(w_i)_{i\in I}$ sera mesurée par une quantité $q(w_i,w)$ ou $q(w_i,(w,k))$. Dans le second cas, $q(w_i,(w,k))$ ne dépendra que de k et de w_i ce qui confère à k un rôle tampon entre w et w_i (d'où le nom du modèle). Les meilleurs résumés associés aux préordres d'une sous-famille $(w_i)_{i\in C}$ (C est une partie de I) sont les solutions du problème:

$$\min_{w} \quad q_C(w) = \frac{1}{\mathrm{card}(C)} \sum_{i\in C} q(w_i,w) \quad \text{ou} \quad \min_{(w,k)} \quad q_C(w,k)$$

Après avoir précisé les concepts de base dans le paragraphe 2, nous donnerons, dans le paragraphe suivant, quelques indications sur les différentes méthodes d'agrégation envisagées précédemment. La formalisation de la recherche des tendances locales sera détaillée dans le paragraphe 4. Nous y préciserons la forme des noyaux retenus dans le schéma des nuées dynamiques et nous étendrons à ce type de noyaux les théorèmes de convergence énoncés par E. DIDAY (1971). Une analyse critique sera présentée dans le paragraphe 5 et le dernier paragraphe illustrera cet exposé avec le traitement de l'exemple de l'introduction.

2. CONCEPTS DE BASE

Dans toute la suite, W désignera l'ensemble des préordres totaux sur X et W° celui des ordres totaux.

Une représentation synthétique des préordres totaux est donnée par le concept de <u>fonction score</u> basé sur un calcul de rangs moyens (M. BESSON (1975)). Si $w\in W$ et $x\in X$, on pose:

$$s_w(x) = \frac{\mathrm{card}\{y\in X;\ x \underset{w}{>} y\} + \mathrm{card}\{y\in X;\ x \underset{w}{\geq} y\} - 1}{2}$$

Pratiquement, on constate facilement que:

$$s_w(x) = \mathrm{card}\{y\in X;\ x \underset{w}{>} y\} \quad \text{si w est un ordre total,}$$

$s_w(x)$ = moyenne des $s_{w^\circ}(y)$ sur l'ensemble des objets y équivalents à x si w° est un ordre total compatible avec w .

EXEMPLE

X = {a,b,c,d,e} et w est le préordre : a = e > b > c = d

On peut choisir comme ordre total w° : a > e > b > c > d

$$\begin{array}{lccccc} s_{w^\circ}: & \underbrace{4 \quad 3} & 2 & \underbrace{1 \quad 0} \\ s_w: & 3,5 \quad 3,5 & 2 & 0,5 \quad 0,5 \end{array}$$

Ces représentations sont caractéristiques:

$$x \underset{w}{>} y \iff s_w(x) > s_w(y)$$
$$x \underset{w}{=} y \iff s_w(x) = s_w(y)$$

et on déduit aisément de la construction précédente que la moyenne des valeurs prises par une fonction score est égale à 0+1+...+p-1 = p(p-1)/2.

Un autre concept, celui de <u>relation probabiliste</u>, s'introduira naturellement dans les calculs de moyennes. Sur X, une relation probabiliste -appelée aussi relation floue de préférences (A. KAUFMANN (1975))- est une application p de X×X dans l'intervalle [0,1] telle que:

$$\forall\, x,y \in X:\ p(x,y) + p(y,x) = 1$$

Concrêtement, p(x,y) définit une intensité de préférence de x à y, celle-ci étant d'autant plus forte que p(x,y) est proche de 1 et la notion d'indifférence correspond à la valeur 1/2. Tout préordre total w peut être caractérisé par une relation probabiliste p_w en posant:

$$p_w(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \underset{w}{>} y \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \underset{w}{=} y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le lien entre ces deux types de représentation est immédiat :

$$s_w(x) = \sum_{\substack{y \in X \\ y \neq x}} p_w(x,y)$$

Les relations probabilistes à valeurs dans {0,1} sont appelées <u>tournois</u>.

3. EXEMPLES DE PROCEDURES D'AGREGATION

Les deux premiers exemples s'intègrent dans le cadre des modèles directs. Les suivants, dans le cadre des modèles tampons.

3.1. Méthode des ordres médians

Les résumés sont des ordres totaux. Suivant les notations de l'introduction, on pose:

$$q(w_i,w) = \mathrm{card}(w_i \Delta w)$$

Il est facile d'exprimer $q(w_i,w)$ à l'aide des relations probabilistes associées à w_i et w:

$$q(w_i,w) = \sum_{x,y \in X} | p_{w_i}(x,y) - p_w(x,y) |$$

Par un calcul facile, il vient alors que (E. JACQUET-LAGREZE):

$$q(w_i,w) = p(p-1)/2 - \sum_{x \underset{w}{>} y} (p_{w_i}(x,y) - p_{w_i}(y,x))$$

(On rappelle que w est un ordre total). Ainsi:

$$q_C(w) = p(p-1)/2 - \sum_{x \underset{w}{>} y} (p_C(x,y) - p_C(y,x))$$

où p_C est la moyenne des relations probabilistes de la famille $(p_{w_i})_{i \in C}$.
La minimisation de $q_C(w)$ par rapport à $w \in W^\circ$ est donc équivalente à:

$$\max_{w \in W^\circ} \sum_{x \underset{w}{>} y} (p_C(x,y) - p_C(y,x))$$

E. JACQUET-LAGREZE (1969) propose une heuristique pour approcher les solutions de ce problème. Celles-ci peuvent être obtenues exactement en prolongeant cette heuristique par un algorithme de BRANCH AND BOUND. (J.C. PEYROUX (1975), J. DE CANI (1972), J. LEMAIRE (1976)). J.C. BERMOND (1972) et (1976) propose un algorithme qui peut s'étendre à d'autres résumés -des préordres totaux par exemple-. Néanmoins, dans ces extensions, les calculs deviennent vite très lourds.

3.2. Méthode du permutoèdre

On admet cette fois les préordres totaux comme résumés. Cette méthode est l'analogue de la précédente en considérant les fonctions scores. Dans $\mathbb{R}^X$, ensemble des fonctions numériques définies sur X, l'image de l'application $w \in W \longrightarrow s_w$ est le permutoèdre (M. BARBUT et B. MONJARDET (1970), J.P. BENZECRI (1971), A. DEGENNE (1972)). On choisira ici:

$$q(w_i,w) = \| s_{w_i} - s_w \|^2$$

où $\| . \|$ désigne la norme euclidienne classique sur $\mathbb{R}^X$. Grâce au théorème d'HUYGHENS, la minimisation de $q_C(w)$ par rapport à $w \in W$ se ramène au problème suivant:

$$\min_{w \in W} \| s_C - s_w \|^2$$

où s_C désigne la moyenne des fonctions scores de la famille $(s_{w_i})_{i \in C}$. On notera que la moyenne de la fonction s_C est toujours égale à $p(p-1)/2$. En fait, s_C constitue la partie codée du résumé auquel conduit la méthode de BORDA, la partie ordinale étant le préordre total induit par s_C:

$$x \underset{w_B}{\geqslant} y \quad \text{si et seulement si } s_C(x) \geqslant s_C(y)$$

w_B présente souvent l'inconvénient d'introduire des notions de préférences strictes entre x et y même lorsque les scores moyens $s_C(x)$ et $s_C(y)$ sont voisins.

EXEMPLE

$X=\{a,b,c,d,e\}$ et s_C: 0 1,8 2,1 4 2,1. Bien que les scores moyens de b,c et e soient voisins, la méthode de BORDA conduit au préordre total :

$$w_B: d > c = e > b > a$$

par contre, la méthode du permutoèdre dont il est ici question aboutit -on va le voir plus loin- au préordre total:

$$w_P: d > c = e = b > a$$

et comme: s_{w_P}: 4 2 2 2 0 , $\| s_C - s_{w_P} \|^2 = 0{,}06$.

Pour résoudre le problème $\min_{w \in W} \| s_C - s_w \|^2$, on se ramène à un problème de recherche de plus court chemin dans un graphe valué. Selon G. KREWERAS (1969), au préordre total w induisant comme groupes d'objets équivalents : $G_1, \ldots, G_q$ avec $x \underset{w}{\geq} y$ si $x \in G_i$, $y \in G_j$ et $i < j$, on peut associer le chemin:

$$C_w = (X,\ X-G_1,\ X-G_1 \cup G_2,\ \ldots,\ X-G_1 \cup \ldots \cup G_q = \emptyset)$$

d'origine X et d'extrêmité $\emptyset$ dans le graphe admettant pour sommets les parties de X et pour arcs les couples (A,B) pour lesquels $A \supset B$. On définit ainsi une correspondance bijective entre les préordres totaux sur X et l'ensemble de ces chemins. Pour formuler le problème précédent dans les termes annoncés, il suffit de valuer ce graphe de telle sorte que la valuation du chemin C_w soit égale à $\| s_C - s_w \|^2$. Pour cela il suffit de poser:

$$v(A,B) = \sum_{x \in A-B} \left(\frac{\text{card}(A)+\text{card}(B)-1}{2} - s_C(x) \right)^2$$

pour tout arc (A,B) de ce graphe. En fait, grâce à la proposition suivante, on peut se restreindre au sous-graphe défini par les sommets du chemin C_{w_B}.

PROPOSITION

<u>Toute solution du problème</u> $\min_{w \in W} \|s_C - s_w\|^2$ <u>contient le préordre total induit par</u> s_C.

<u>Démonstration</u> : pour simplifier, on pose $s=s_C$. Dans la suite, on utilisera la définition de la fonction score d'un préordre total donnée dans le paragraphe 2 et on notera: $F_w = \|s-s_w\|^2$ pour tout préordre $w \in W$. Il faut d'abord prouver que si $w°$ est une solution du problème posé:

$$s(x) > s(y) \Rightarrow s_{w°}(x) \geq s_{w°}(x)$$

Considérons pour cela le préordre total w. construit à partir de $w°$ en inversant les rôles de x et y. On arrive aisément à la relation:

$$F_{w.} = F_{w°} + 2(s(x)-s(y))(s_{w°}(x)-s_{w°}(y))$$

dont résulte l'implication précédente. Ensuite , il faut prouver que:

$$s(x) = s(y) \Rightarrow s_{w°}(x) = s_{w°}(y)$$

Pour cela, posons $s.= s(x) = s(y)$ et $B = \{z \in X;\ s(z)=s.\}$. Soient $s_1 > \ldots > s_q$ les différentes valeurs de $s_{w°}$ sur B et $B_j = \{z \in X;\ s_{w°}(z)=s_j\}$. On va démontrer successivement que les trois éventualités: $q > 3$, $q = 3$, $q = 2$ sont impossibles. Raisonnons par l'absurde en supposant d'abord que $q > 3$. Les ensembles $B_2, \ldots, B_{q-1}$ constituent des classes d'équivalence successives de $w°$ car si $s_1 > s_{w°}(z) > s_q$, alors $z \in B$; en effet, si $s_{w°}(u) = s_1$ et $s_{w°}(v) = s_q$, d'après l'implication démontrée précédemment, on a: $s(u) \geq s(z) \geq s(v)$ donc aussi $s(z) = s.$ puisque $s(u) = s(v) = s.$. Considérons alors le préordre total w. construit à partir de $w°$ en réunissant les classes B_2 et B_3 . En posant $b_j = \mathrm{card}(B_j)$, on obtient aisément:

$$F_{w.} = F_{w°} - \frac{b_2 b_3}{4}(b_2 + b_3)$$

cequi contredit le caractère optimal de $w°$. La première éventualité est donc impossible. Supposons maintenant que $q=3$. Soient $A = \{z \in X-B;\ s_{w°}(z)=s_1\}$ et $C = \{z \in X-B;\ s_{w°}(z)=s_q\}$. Un raisonnement analogue au précédent montrerait que les ensembles: $A \cup B_1$, B_2, $C \cup B_3$ constituent des classes d'équivalence successives de $w°$. Si A ou C est vide, la démarche précédente appliquée aux classes B_1 et B_2 ou B_2 et B_3 conduit à une contradiction. Sinon, considérons les deux préordres totaux w_1 et w_2 obtenus en:

- réunissant B_1 et B_2 et isolant A pour w_1,
- réunissant A, B_1, B_2 pour w_2.

On établit aisément que:

$$F_{w_1} = F_{w^\circ} + b_1(m + \frac{(a-b_2)(a+b_1+b_2)}{4})$$

$$F_{w_2} = F_{w^\circ} + b_2(-m - \frac{(a+b_1)(a+b_1+b_2)}{4})$$

où a, b_1, b_2 désignent les cardinaux respectifs de A, B_1, B_2 et m la somme $\sum_{x \in A} s. - s(x)$. Là encore, on aboutit à la contradiction:

$$b_2 - a \leq -b_1 - a$$

qui rend cette seconde éventualité impossible. Supposons enfin que q=2. Comme précédemment, on démontre d'abord que les ensembles $A \cup B_1$ et $C \cup B_2$ constituent des classes d'équivalences successives du préordre w°. De même, si A ou C est vide, la démarche précédente conduit à une contradiction. Sinon, considérons les deux préordres totaux w_1 et w_2 construits à partir de w° en:

- réunissant $A \cup B_1$ et B_2 et isolant C pour w_1,
- réunissant $C \cup B_2$ et B_1 et isolant A pour w_2.

On établit aisément que:

$$F_{w_1} = F_{w^\circ} + b_2(-m-n+(c-a-b_1)\frac{a+b_1+b_2+c}{4})$$

$$F_{w_2} = F_{w^\circ} + b_1(m+n-(c-a+b_2)\frac{a+b_1+b_2+c}{4})$$

où c=card(C) et n désigne la somme $\sum_{x \in C} s. - s(x)$. Là encore, le caractère optimal de w° conduit à:

$$c-a-b_1 \geq c-a+b_2$$

ce qui est impossible. L'éventualité q=2 est donc elle aussi impossible.

EXEMPLE

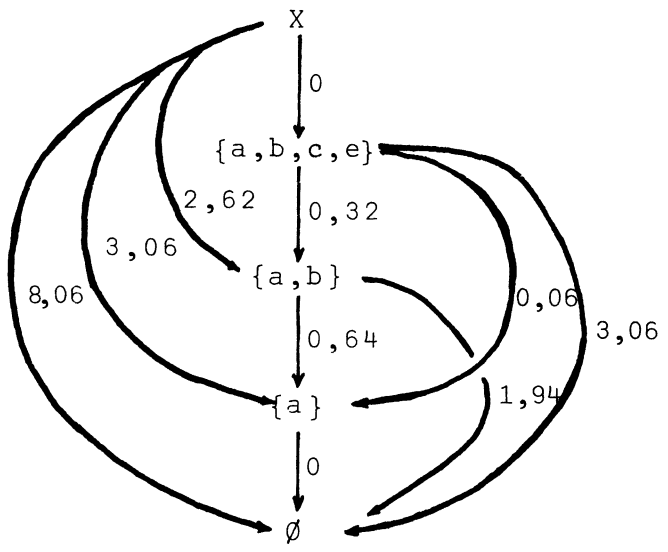
Avec les données de l'exemple précédent, on obtient le sous-graphe de la page suivante. Il n'y a qu'un seul chemin de valuation minimum:

$$C_{w^\circ} = (X, \{a,b,c,e\}, \{a\}, \emptyset)$$

dont la valuation est égale à 0,06. Il correspond au préordre:

$$w^\circ : \quad d > c = e = b > a$$

et $\|s_C - s_{w^\circ}\|^2 = 0{,}06.$



3.3. Méthode 1 de BRADLEY et TERRY

(Références: R.A. BRADLEY et M.E. TERRY (1952), R. RUSSEL et W.A. THOMPSON (1966), A. ASTIE (1973)). Ici, les résumés sont du type (w,p) où w est un ordre total sur X et p une relation probabiliste compatible avec w au sens suivant :

$$\forall\, x,y \in X: \quad x \underset{w}{>} y \quad \Rightarrow \quad p(x,y) \geq 1/2$$

Cette notion de compatibilité équivaut à une notion de transitivité faible sur les relations probabilistes: p est compatible avec un ordre total si et seulement si:

$$\forall\, q,\ \forall\, x_1,\ldots,x_q \in X: p(x_1, x_2) > 1/2 \text{ et } \ldots \text{ et } p(x_{q-1}, x_q) > 1/2$$
$$\Rightarrow \quad p(x_1, x_q) \geq 1/2$$

(J. LEMAIRE (1976)). Le choix suivant correspond à un critère de maximum de vraissemblance lorsque les w_i sont des ordres totaux:

$$q(w_i, (w,p)) = - \sum_{x,y \in X} p_{w_i}(x,y) \operatorname{Log} p(x,y)$$

Evidemment: $$q_C(w,p) = - \sum_{x,y \in X} p_C(x,y) \operatorname{Log} p(x,y)$$

Si w est fixé dans W°, la minimisation de cette quantité par rapport à p est réalisée pour l'unique relation probabiliste:

$$p_w^\circ(x,y) = \begin{cases} \max(1/2,\ p_C(x,y)) & \text{si } x \underset{w}{\geq} y \\ \min(1/2,\ p_C(y,x)) & \text{si } y \underset{w}{\geq} x \end{cases}$$

Il reste donc à déterminer la ou les solutions du problème $\min_{w \in W^\circ} q_C(w,p_w^\circ)$. comme il peut se mettre sous la forme:

$$\max_{w \in W^\circ} \sum_{x \underset{w}{\geq} y} p_C(x,y) \text{ Log } \max(\tfrac{1}{2}, p_C(x,y)) + p_C(y,x) \text{ Log } \min(\tfrac{1}{2}, p_C(y,x))$$

il suffira, pour le résoudre d'utiliser un des algorithmes évoqués dans le paragraphe 3.1.

3.4. Méthode 2 de BRADLEY et TERRY

(Références: R.A. BRADLEY et M.E. TERRY (1952), L.R. FORD (1957), A. ASTIE (1970)). Cette seconde méthode présente des propriétés d' exhaustivité statistique (A. ASTIE (1970)). Ici, les résumés sont du type (w,s) où w est un préordre total et s une fonction de $\mathbb{R}^X$ telle que:

$$\forall\ x \in X:\ s(x) > 0\ ,\ \sum_{x \in X} s(x) = 1\ ,\ s \text{ induit } w$$

Cette fois:

$$q(w_i,(w,s)) = -\sum_{x,y \in X} p_{w_i}(x,y) \text{ Log } \frac{s(x)}{s(x) + s(y)}$$

La minimisation de $q_C(w,s)$ sera donc obtenue en maximisant la quantité:

$$\sum_{x,y \in X} p_C(x,y) \text{ Log } \frac{s(x)}{s(x) + s(y)}$$

par rapport à $s \in \mathbb{R}^X$ vérifiant les deux premières conditions ci-dessus. Pour ce dernier problème, nous renvoyons le lecteur à l'article de L.R. FORD (1957).

3.5. Méthode de BORDA

C'est certainement la plus utilisée des méthodes d'agrégation puisqu'elle conduit, ainsi que nous l'avons déja annoncé au paragraphe 3.2. au classement défini par la moyenne des fonctions scores. Les résumés sont du type (w,s) où w est un préordre total et s une fonction de $\mathbb{R}^X$ induisant w. On choisit comme mesure d'adéquation:

$$q(w_i,(w,s)) = \| s_{w_i} - s \|^2$$

D'après le théorème d'HUYGHENS, la minimisation de $q_C(w,s)$ conduit à l'unique solution:

$$(w_B = \text{préordre total induit par } s_C,\ s_C)$$

G. KREWERAS (1969) propose une interprétation géométrique de cette méthode.

3.6. Méthode de codage optimal

(Référence: J. DE LEEUW, Y. TAKANE, F. YOUNG (1975)). Dans ce dernier exemple les résumés sont du type (w,s) où w est un ordre total et s une fonction de $\mathbb{R}^X$, de moyenne nulle, de norme 1 et induisant w. La mesure d'adéquation est définie par:

$$q(w_i,(w,s)) = \|P_{w_i}(s) - s\|^2$$

où P_{w_i} est le projecteur orthogonal sur le cône K_{w_i} des fonctions de $\mathbb{R}^X$ qui sont compatibles avec w_i:

$$s \in K_{w_i} \text{ si et seulement si } \forall\, x,y \in X:\ x \underset{w_i}{\geq} y \Rightarrow s(x) \geq s(y)$$

(Pour déterminer $P_{w_i}(s)$, on peut utiliser l'algorithme de J.B. KRUSKAL (1964)) Comme précédemment, la minimisation de $q_C(w,s)$ est obtenue en résolvant:

$$\min_{\substack{s \in \mathbb{R}^X \\ \text{moy. } s = 0 \\ \|s\| = 1}} \sum_{i \in C} \|P_{w_i}(s) - s\|^2$$

puis en associant à toute solution, le préordre total qu'elle induit. Ce problème étend à des cônes une technique d'analyse canonique généralisée proposée par D.J. CAROLL et J.J. CHANG (1972). La normalisation de la norme est nécessaire pour éviter la solution triviale s=0, mais elle détruit la nature convexe du problème. Pour aborder ce problème, on peut utiliser l'algorithme suivant:

<u>initialisation</u>: $s_i^{(1)} \in K_{w_i}$ de moy. nulle

<u>itération n</u> : $s^{(n)} = m/\|m\|$ où m désigne la moyenne des $s_i^{(n)}$ pour $i \in C$,

$s_i^{(n+1)} = P_{w_i}(s^{(n)})$ pour $i \in C$

En posant: $\mathbb{R}_o^X$ = ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^X$, de moyenne nulle, $U = (\mathbb{R}_o^X)^C$, $|||(s_i)|||^2 = \frac{1}{\text{card}(C)} \sum_{i \in C} \|s_i\|^2$, $K = \prod_{i \in C} K_{w_i} \cap U$, V l'ensemble des éléments $(s_i)_{i \in C}$ de U tels qu'il existe $s \in \mathbb{R}_o^X$ vérifiant $s_i = s$ pour tout $i \in C$ et S la sphère unité de V, on peut interpréter l'algorithme précédent en termes de projections successives sur le cône K et sur S. En posant:

$$X_n = (s_i^{(n)})_{i \in C} \quad \text{et} \quad Y_n = (s^{(n)})_{i \in C}$$

l'itération n de l'algorithme consiste à déterminer:

$$Y_n = \text{projection de } X_n \text{ sur } S$$
$$X_{n+1} = \text{projection de } Y_n \text{ sur } K$$

On peut alors énoncer le résultat suivant de convergence:

PROPOSITION

<u>la suite</u> $|||X_n - Y_n|||_{n \geq 1}$ <u>converge en décroissant vers une limite notée e. Les suites</u> $(X_n - X_{n+1})_{n \geq 1}$ <u>et</u> $(Y_n - Y_{n+1})_{n \geq 1}$ <u>convergent vers 0. Tout point d'accumulation</u> (X,Y) <u>de la suite</u> $(X_n, Y_n)_{n \geq 1}$ <u>est tel que:</u>

<u>X est la projection de Y sur K</u>

<u>Y est la projection de X sur S</u>

<u>et</u> $e = |||X - Y|||$.

Avant de démontrer ce résultat, remarquons que la convergence sera acquise dès l'instant où ces points d'accumulation sont dénombrables ce qui doit sans doute se produire sauf peut être dans des cas très particuliers (faces parallèles ...). Par contre, rien ne garantit qu'un point d'accumulation soit solution du problème posé. On trouvera dans J. LEMAIRE (1976), un exemple montrant l'influence du choix initial sur cette propriété. La démonstration qui suit s'inspire d'une récente publication de J.DE LEEUW (1977) qui généralise le résultat précédent au cas de 2 cônes.

<u>Démonstration</u>: pour simplifier, on notera $|.|$ la norme $|||.|||$ sur U. La décroissance de la suite $|X_n - Y_n|$ et donc sa convergence est évidente. Soit (X, Y) un point d'accumulation de la suite (X_n, Y_n). Comme S est borné ainsi que son image par projection sur K, il existe une sous-suite $(X_{n'}, Y_{n'})$ telle que:

$$X_{n'} \to X \ , \ Y_{n'} \to Y \ , \ X_{n'+1} \to X' \text{ et } Y_{n'+1} \to Y'$$

Par continuité de la norme, on a d'abord:

$$e = |X - Y| = |X' - Y'|$$

puis, vu que pour tout n', $A \in K$ et $B \in S$:

$$|X_{n'} - Y_{n'}| \leq |X_{n'} - B| \ , \ |X_{n'+1} - Y_{n'}| \leq |A - Y_n| \text{ et } |X_{n'+1} - Y_{n'+1}| \leq |X_{n'+1} - B|$$

on déduit par passage à la limite:

$$|X - Y| \leq |X - B| \ , \ |X' - Y| \leq |A - Y| \text{ et } |X' - Y'| \leq |X' - B|$$

Y est donc la projection de X sur S, X' celle de Y sur K et Y' celle de X' sur

S. Conséquence:

$$|X' - Y'| \leq |X' - Y| \leq |X - Y|$$

Les deux extrêmes étant égaux et les projections uniques, on a donc $X' = X$ et $Y' = Y$. En particulier, on déduit aussi de ce qui précède qu'on peut toujours extraire d'une sous-suite $(X_{n'}, Y_{n'})$ une sous-suite $(X_{n''}, Y_{n''})$ telle que:

$$X_{n''} \to X \quad , \quad X_{n''+1} \to X \quad , \quad Y_{n''} \to Y \quad \text{et} \quad Y_{n''+1} \to Y$$

Il est donc impossible que les suites $(X_n - X_{n+1})$ et $(Y_n - Y_{n+1})$ ne tendent pas vers 0.

4. ALGORITHME D'AGREGATION-PARTITIONNEMENT

$\underline{C} = (C_1, \ldots, C_k)$ désignera une partition en k classes de I où k est un entier positif. $\mathbb{P}_k$ désignera l'ensemble des partitions en k classes de I. $\mathbb{L}$ sera l'ensemble des noyaux destinés à représenter les classes. Comme les différentes méthodes d'agrégation envisagées dans le paragraphe précédent peuvent conduire à plusieurs résumés ordinaux pour synthétiser les préférences de la sous-famille $(w_i)_{i \in C}$, $\mathbb{L}$ sera en fait l'ensemble des parties finies de l'ensemble des résumés ordinaux. $\underline{L} = (L_1, \ldots, L_k)$ désignera un k-uplet de noyaux. La qualité de la représentation des classes d'une partition de $\mathbb{P}_k$ par un k-uplet de noyaux sera mesurée par :

$$W(\underline{C},\underline{L}) = \sum_{j=1}^{k} \text{card}(C_j) \frac{1}{\text{card}(L_j)} \sum_{r \in L_j} q_{C_j}(r)$$

Les meilleurs couples sont les solutions du problème:

$$\min_{\underline{C} \in \mathbb{P}_k} \; \min_{\underline{L} \in \mathbb{L}_k} W(\underline{C},\underline{L})$$

Le schéma des nuées dynamiques proposé par E.DIDAY (1971) permet de l'aborder:

initialisation: $\underline{C}^0 \in \mathbb{P}_k$

itération n : $\underline{L}^n$ solution de $\min_{\underline{L} \in \mathbb{L}_k} W(\underline{L},\underline{C}^{n-1})$

$\underline{C}^n$ solution de $\min_{\underline{C} \in \mathbb{P}_k} W(\underline{L}^n, \underline{C})$

Les sous-problèmes précédents peuvent être facilement solutionnés moyennant une hypothèse supplémentaire pour les modèles tampons:

(T) Pour toute partie C de I et toute partie ordinale w d'un résumé, le problème: $\min_k q_C(w,k)$ avec k codage admissible de w n'admet qu'une solution.

PROPOSITION

Si $\underline{C} \in \mathbb{P}_k$, la solution maximum (au sens de l'inclusion) du problème suivant: $\min_{L \in \mathbb{L}_k} W(\underline{C},\underline{L})$ est définie par:

$$L_j^\circ = \{r;\ r \text{ minimise } q_{C_j}(r)\}$$

Démonstration: le caractère additif de W montre que $\underline{L}^\circ$ est solution du problème précédent si et seulement si pour tout j, L_j° minimise $\frac{1}{\mathrm{card}(L_j)} \sum_{r \in L_j} q_{C_j}(r)$. Le k-uplet $\underline{L}^\circ$ défini dans la proposition est donc bien solution du problème posé. De plus, si $\underline{L}^+$ est une autre solution, pour tout j:

$$\frac{1}{\mathrm{card}(L_j^+)} \sum_{r \in L_j^+} q_{C_j}(r) = \min_r q_{C_j}(r)$$

Ceci n'est possible que si $q_{C_j}(r)$ est minimum pour tout $r \in L_j^+$, autrement dit si $L_j^+ \subset L_j^\circ$.

Remarque: le problème de la minimisation de $q_C(r)$ admet toujours un nombre fini de solutions. C'est évident pour les modèles directs considérés. Pour les modèles tampons, cela résulte de l'hypothèse (T) qui est satisfaite dans tous les exemples considérés sauf peut être dans le dernier dans des cas très particuliers.

La seconde proposition est classique (E. DIDAY (1971)):

PROPOSITION

Si $\underline{L} \in \mathbb{L}_k$, une solution du problème $\min_{\underline{C} \in \mathbb{P}_k} W(\underline{C},\underline{L})$ est définie par:

$$C_j^\circ = \{i \in I;\ j \text{ plus petite solution de } \min_l \frac{1}{\mathrm{card}(L_l)} \sum_{r \in L_l} q(w_i,r)\}$$

Enfin, moyennant de tels choix à chaque itération de l'algorithme, on obtient les résultats suivants de convergence (pratiquement, une dizaine d'itérations suffit):

PROPOSITION

Les suites $(W(\underline{C}^n, \underline{L}^n))$ et $(\underline{C}^n, \underline{L}^n)$ sont toutes deux stationnaires, la première étant de plus décroissante.

Démonstration: par construction, on obtient pour tout n:

$$W(\underline{C}^n, \underline{L}^n) \leq W(\underline{C}^{n-1}, \underline{L}^n) \leq W(\underline{C}^{n-1}, \underline{L}^{n-1})$$

Ceci assure la décroissance de la première suite. De plus comme $\mathbb{P}_k$ est fini et $W(\underline{C}^{n-1}, \underline{L}^n) = \min_{\underline{L} \in \mathbb{L}_k} W(\underline{C}^{n-1}, \underline{L})$, la suite $(W(\underline{C}^{n-1}, \underline{L}^n))$ est stationnaire. Il en est donc de même de la première suite de la proposition grâce aux inégalités

précédentes. Pour n assez grand, on a donc :

$$W(\underline{C}^{n-1}, \underline{L}^{n}) = W(\underline{C}^{n-1}, \underline{L}^{n-1})$$

Comme $\underline{L}^n$ minimise $W(\underline{C}^{n-1}, \underline{L})$, il résulte du caractère maximal de $\underline{L}^n$ au sens de l'inclusion que $\underline{L}^{n-1}$ est contenu dans $\underline{L}^n$. La suite $(\underline{L}^n)$ est donc croissante pour n assez grand. Son caractère stationnaire résulte alors des hypothèses de finitude: $\mathbb{L}$ est fini dans le cas des modèles directs et on utilise l'hypothèse (T) dans le cas des modèles tampons. La stationnarité de la suite $(\underline{C}^n)$ en résulte immédiatement.

<u>Remarque:</u> toute limite $(\underline{C}^\circ, \underline{L}^\circ)$ de la suite $(\underline{C}^n, \underline{L}^n)$ vérifie donc:

$$\underline{L}^\circ \text{ est solution de } \min_{\underline{L}\in\mathbb{L}_k} W(\underline{C}^\circ, \underline{L})$$

$$\underline{C}^\circ \text{ est solution de } \min_{\underline{C}\in\mathbb{P}_k} W(\underline{C}, \underline{L}^\circ)$$

C'est un élément <u>non biaisé</u> (E. DIDAY (1971)).

5. CONCLUSION

Il apparaît clairement que le schéma des nuées dynamiques peut s'adapter à de nombreuses méthodes d'agrégation. Parmi celles décrites au paragraphe 3, la première, la troisième et la quatrième présentent l'avantage d'opérer directement sur les relations w_i ou sur les relations probabilistes associées. Néanmoins, si l'on ne se contente pas d'heuristiques, elles mettent en oeuvre des algorithmes assez lourds qui posent parfois des problèmes de dégénérescence (L.R. FORD (1957)). Par ailleurs, dans le cadre des préordres totaux, l'usage des fonctions score ne nous paraît pas constituer un <u>a priori</u> très criticable et les deux méthodes basées sur ce concept sont aisément réalisables. Cet <u>a priori</u> disparaît complètement dans la méthode de codage optimal. Nous la déconseillons néanmoins à cause de sa tendance à détruire les préférences strictes: très souvent, lorsque $x \underset{w_i}{>} y$ on aura $P_{w_i}(s)(x) = P_{w_i}(s)(y)$; à cause des problèmes de convergence qu'elle soulève et des cas de dégénérescence qu'elle peut engendrer dans le cadre typologique (J. LEMAIRE (1976)); et enfin parce qu'elle conduit souvent à des résultats nettement différents de ceux donnés par les autres méthodes qui, de ce point de vue, paraissent souvent s'accorder. Dans le cas des préordres totaux, nous préférerons donc les méthodes basées sur le concept de fonction score . Il convient enfin de mentionner que les deux méthodes décrites: m. de BORDA et m. du permutoèdre ont conduit à des résultats très voisins même dans le cadre typologique.

6. EXEMPLE

On peut visualiser assez bien la structure des données de l'introduction en réalisant une analyse en composantes principales sur les fonctions score des préordres à agréger (figure 1). Dans le plan des axes 1 et 2, nous avons délimité les groupes et les tendances locales obtenus par la méthode des ordres médians. 3 classes apparaissent assez nettement. On peut le voir avec une analyse hiérarchique qui, tout en donnant des indications sur la valeur optimum de k permet aussi d'amorcer l'algorithme des nuées dynamiques. On peut aussi le voir en examinant les cercles des corrélations. Celui relatif au plan des axes 1 et 2 révèle trois essences nettement corrélées avec les deux premières composantes principales. Elles déterminent 3 groupes qui sont chacuns caractérisés en gros par le rejet de l'une de ces trois essences. Sur la figure, ces trois groupes ont été déterminés en retenant le meilleurs passage parmi 10 correspondant respectivement à 10 partitions de départ. La méthode du permutoèdre fournit pratiquement les même groupes à 6 individus près, marginaux. Quant aux tendances, elle conduit à:

4 = 6 = 2 > 5 > 7 = 3 > 1
6 > 7 = 2 = 5 > 4 = 3 > 1
4 = 7 = 2 > 5 > 3 = 1 = 6

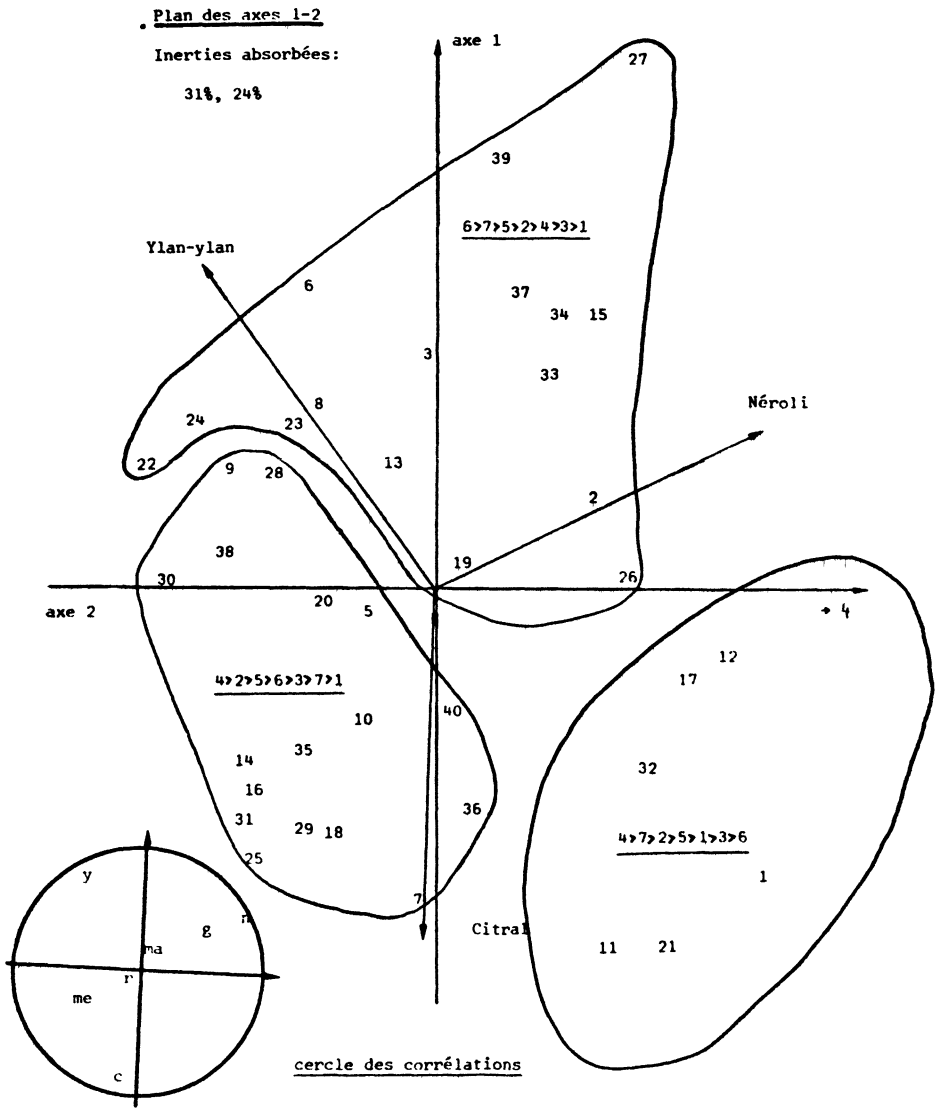


Figure 1

BIBLIOGRAPHIE

[1] ASTIE A., "Comparaisons par paires et problèmes de classement: estimation et tests statistiques", *Math. Sci. hum.*, 32, (1970), 17-44.

[2] ASTIE A., "Comparaisons par paires. Recherche d'un classement ou d'un ensemble de classements des objets comparés", *Rev. Statist. appl.*, 21, n°3, (1973), 51-63.

[3] BARBUT M., MONJARDET B., *Ordre et Classification, Algèbre et Combinatoire*, Paris, Hachette, 1970.

[4] BENZECRI J.P., "Sur l'analyse des préférences", *in Ordres totaux finis*, Paris, Gauthier-Villars et Mouton, 1971.

[5] BERGE C., *Graphes et Hypergraphes*, Paris, Dunod, 1970.

[6] BERMOND J.C., "Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux", *Math. Sci. hum.*, 37, (1972),5-25.

[7] BERMOND J.C., KODRATOFF Y., "Une heuristique pour le calcul de l'indice de transitivité d'un tournoi", *RAIRO Informatique théorique*, 10, n°3, 1976.

[8] BESSON M., "Rang moyen et agrégation de classements", *RAIRO*, 9, (1975), 37-59.

[9] BRADLEY R.A., TERRY M.E., "The rank analysis of incomplete block designs. 1. The method of paired comparisons", *Biometrika*, 41 (1952), 502-537.

[10] CAROLL J.D., CHANG J.J., "Simules : simultaneous linear equation scaling", *in Proc. 80th annual convention A.P.A.*,PP.11-12, 1972.

[11] DE CANI J.S., "A branch and bounded algorithm for maximum likelihood paired comparison ranking", *Biometrika*, 59, n°1, (1972), 131-135.

[12] DE LEEUW J., *A normalized cone regression approach to alternating least squares algorithms*, Leiden, *Publ. Dep. Data Theory*, Université de Leiden, Pays-Bas, 1977.

[13] DE LEEUW J., TAKANE Y., YOUNG F., *Additive structure in qualitative data ; an alternating least squares method with optimal scaling feature*, The L.L. Thurstone Psychometric Lab., Univ. of North Carolina, report number n°140, 1975.

[14] DIDAY E., "Une nouvelle méthode en classification automatique et reconnaissance des formes", *Rev. Statist. appl.*, 19, n°2, (1971).

[15] FENELON J.P., "Un cas d'analyse de préférences en esthétique", *in Ordres totaux finis*, Paris, Gauthier-Villars et Mouton, 1971.

[16] FISHBURN P.C., "Lexicographic orders. Utilities and decision rules. A survey", *Manag. Sci.*, 20, n°11, (1974), 1442-1471.

[17] FLAMENT C., *L'analyse booléenne de questionnaire*, Paris-La Haye, Mouton, 1976.

[18] FLAMENT C., "Tresses de Guttman", *in Ordres totaux finis*, Paris, Gauthier-Villars et Mouton, 1971.

[19] FORD L.R. JR., "Solution of a ranking problem from binary comparisons", *Amer. Math. Monthly.*, 64, (1957), 28-33.

[20] JACQUET-LAGREZE E., "L'agrégation des opinions individuelles", *Informat. Sci. hum.*, 4, (1969).

[21] JACQUET-LAGREZE E., "Analyse d'opinions valuées et graphes de préférences", *Math. Sci. hum.*, 33, (1971), 33-55.

[22] JACQUET-LAGREZE E., *Méthodes et programmes en analyse des données ordinales*, SEMA Direction scientifique, Rapport synthèse et formation n°81, 1973.

[23] JACQUET-LAGREZE E., *La modélisation des préférences. Préordres, quasi-ordres et relations floues*, SEMA Direction scientifique, rapport de recherche n°80, 1975.

[24] KAUFMANN A., *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*, tome 3, Paris, Dunod, 1975.

[25] KERGALL Y., "Etude des tresses de Guttman en algèbre à p valeurs", *Math. Sci. hum.*, 46, (1974), 5-19.

[26] KREWERAS G., "Représentation polyédrique des préordres complets finis et application à l'agrégation des préférences", *in La Décision (2): Agrégation et dynamique des ordres de préférence*, Paris, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, 1969, 137-151.

[27] KRUSKAL J.B., "Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a non-metric hypothesis", *Psychometrica*, 29, (1964), 1-27.

[28] LEMAIRE J., *Agrégation typologique des préférences*, Thèse de troisième cycle, Université de Nice, 1976.

[29] LUCE R.D., "Semi-orders and a theory of utility discrimination", *Econometrica*, 24, (1956), 178-191.

[30] MENUET J., *Quasi-ordres et modélisation des préférences*, SEMA Direction scientifique, note de travail n°197, 1974.

[31] PEYROUX C., *Agrégation d'opinions individuelles*, Thèse de troisième cycle, Université de Paris-6, 1975.

[32] REMAGE RUSSEL, THOMPSON W.A., "Maximum likelihood paired comparisons", *Biometrika*, 53, n°1-2, (1966), 143-149.

[33] ROBERIS F.S., "Homogeneous families of semi-orders and the theory of probabilistic consistency", *J. math. psychol.*,8, (1971), 248-263.

[34] DEGENNE A., *Techniques ordinales en analyse de données: Statistique*, Paris, Hachette, 1972.