MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

C. FLAMENT

Arêtes maximales des cocycles d'un graphe préordonné

Mathématiques et sciences humaines, tome 51 (1975), p. 5-12

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1975__51__5_0>

Math. Sci. hum. (*13*^{e} année, n°51, *1975*, p.5-12)

ARETES MAXIMALES DES COCYCLES D'UN GRAPHE PREORDONNE*

C. FLAMENT**

INTRODUCTION

Il est maintenant classique de considérer un graphe $G = (X,U)$ dont U est muni d'un *ordre total* (cf. Rosenstiehl, 1967). Des problèmes concrets d'analyse de données en sciences sociales nous ont amenés à nous intéresser à des graphes munis de *préordres* (généralement *partiels*) (cf. Degenne et Vergès, 1973).

Le problème peut se présenter ainsi :

Soit $H = (X, \mathcal{E})$ un hypergraphe ; nous dirons que H est *arboré* si et seulement s'il existe un *arbre* $A = (X,V)$ tel que, pour toute arête E de H, le sous-graphe A_E soit *connexe* ($\mathcal{E}$ correspond à une famille de parties connexes de l'arbre A).

Définissons une application α de l'ensemble $\mathcal{P}_2(X)$ des paires de X dans le treillis $\mathcal{P}(\mathcal{E})$: $\alpha(x,y) = \{E \mid E \in \mathcal{E}, \{x,y\} \subset E\}$; on peut alors munir le graphe $G = (X,U = \mathcal{P}_2(X))$ du préordre défini par :

$$(x,y) \geqslant (z,t) \iff \alpha(x,y) \subset \alpha(z,t),$$

et on montre que H est *arboré* sur un arbre $A = (X,V)$ si et seulement si A est un *arbre maximum* de G.

Mais comme nous devons parfois analyser des hypergraphes non arborés, nous avons dû étudier, non seulement les arbres maximums d'un graphe préordonné, mais aussi ses arbres maximaux.

Nous nous intéressons ici aux propriétés extrémales des arêtes dans les cycles et cocycles du graphe. Une autre approche repose sur l'étude des ordres totaux dont la combinaison donne le préordre considéré (Leclerc, 1975).

---

* Travail réalisé dans le cadre du contrat DGRST n°74-7-0353

** Laboratoire de Psychologie Sociale du Département de Psychologie (associé au CNRS)
Université de Provence

RAPPELS

$G = (X,U)$ est un graphe ayant $|X| = n$ sommets, $|U| = m$ arêtes, et p composantes connexes ($p = 1$ si G est connexe).

R1 - A étant une partie de X, le *cocycle* $\omega(A)$ est la partie des arêtes de U ayant une extrémité en A et l'autre extrémité en $(X-A)$. La différence symétrique (Δ) de deux cocycles est un cocycle. (Un cocycle peut être vide).

R2 - On appellera *cycle* φ toute partie de U ayant une intersection de cardinal pair avec tout cocycle (A quelques conventions près, on retrouve la notion habituelle de cycle). La définition présente permet

. de montrer que la différence symétrique de deux cycles est un cycle (un cycle peut être vide)

. et surtout d'utiliser le raisonnement suivant : si l'intersection $(\omega \cap \varphi)$ d'un cocycle ω et d'un cycle φ contient une arête u, elle en contient (au moins) une deuxième, v (sinon, le cardinal de l'intersection ne serait pas pair).

R3 - Un *arbre* V de G est une partie de U sans cycle et de cardinal $(n-p)$ (c'est-à-dire : $n - 1$ si G est connexe).

R4 - Le complémentaire d'un arbre V dans U est un *coarbre* $W = U-V$.

R5 - Pour toute arête u d'un arbre V, il existe un cocycle unique, noté ω_u^V , dont toute arête, autre que u, est dans le coarbre complémentaire de V.

R6 - De même, pour toute arête v d'un coarbre complémentaire d'un arbre V, il existe un cycle unique, noté φ_v^V , dont toute arête, autre que v, est dans l'arbre V.

R7 - V étant un arbre, l'ensemble des cocycles associés constitue une *base du groupe* des cocycles ; donc, si ω est un cocycle quelconque, et que $(V \cap \omega) = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, on a :

$$\omega = \omega_{u_1}^V \,\Delta\, \omega_{u_2}^V \,\Delta \ldots \Delta\, \omega_{u_k}^V \quad .$$

R8 - Diverses propriétés :

. $v \notin V \;\Rightarrow\; (V \cup \{v\})$ contient un seul cycle : φ_v^V ;

. $u \in (V \cap \varphi_v^V) \;\Leftrightarrow\; v \in (W \cap \omega_u^V)$;

. $u \in (V \cap \varphi_v^V) \iff V' = ((V - \{u\}) \cup \{v\})$ est un arbre (on dira que V et V' sont *voisins*.

TERMINOLOGIE

$G = (X,U)$ est un graphe *préordonné* si l'ensemble U des arêtes est muni d'un préordre ; entre deux arêtes u et v de U, on peut avoir

. $u > v$: u strictement supérieure à v ;

. $u \equiv v$: u et v équivalentes ;

. $u < v$: u strictement inférieure à v (: $v > u$);

. u et v incomparables.

Par regroupement des cas :

. $u \geqslant v$: $u > v$, ou $u \equiv v$;

. $u \not> v$: $u < v$, ou $u \equiv v$, ou u et v incomparables.

. etc.

Si $u \in T \subset U$, on peut avoir :

. u minim*ale* dans T : $u \not> v$ pour tout v de T ;

. u minim*um* dans T : $u \leqslant v$ pour tout v de T ;

. u *seule* minimale (ou : seule minimum) dans T : $u < v$ pour tout v de T (distincte de u).

. De façon duale, on a les notions en "maxi".

<u>Remarque</u>. Ces notions sont utilisables dans tout ensemble préordonné : ainsi si nous définissons un préordre sur la famille $\mathcal{V}$ des arbres d'un graphe G, nous pourrons parler d'arbre V maximum de G : $V \geqslant V'$ pour tout V' de $\mathcal{V}$.

RELATIONS ENTRE ARBRES D'UN GRAPHE

* <u>Définition</u>. G étant un graphe préordonné, V et V' deux arbres de G, on écrira : $V \geqslant V'$, si et seulement si il existe une bijection β entre V et V' telle que pour toute arête u de V, on ait : $u \geqslant \beta(u)$.

. Cette relation est évidemment une relation de préordre (éventuellement partiel) sur la famille des arbres de G. Cette famille admet donc des arbres maximaux ; mais ces arbres (sauf cas particuliers)partagent les propriétés qui nous intéressent avec d'autres arbres de G, et que nous appellerons *arbres localement maximaux (ALM)* de G (les arbres maximaux étant un cas particulier d'*ALM*).

Pour étudier ces *ALM*, nous aurons besoin de propriétés non spécifiques des *ALM*, et dont nous ne donnerons pas la démonstration ici :

* <u>PG1</u> : U étant un ensemble préordonné, V et V' deux parties de U ayant même cardinal, s'il existe entre V et V' une bijection β telle que pour tout élément u de V, on a : $u \geqslant \beta(u)$, alors il n'existe pas entre V et V' de bijection β' telle que pour tout u de V : $u \leqslant \beta'(u)$, avec un élément u_0 de V pour lequel : $u_0 < \beta'(u_0)$.

. <u>Conséquence</u> : si $(V-V') = \{u\}$ et $(V'-V) = \{v\}$, on a $V > V'$ si et seulement si $u > v$: il suffit de poser : $\beta(u) = u$ si $u \in (V \cap V')$
et $\beta(u) = v$ pour $u \in (V - V')$.

* <u>PG2</u> : V et V' étant deux arbres d'un même graphe, il existe une bijection γ entre V et V' telle que :

. $u \in (V \cap V')$: $\gamma(u) = u$;

. $u \in (V - V')$: $\gamma(u) \in \omega_u^V$.

ARBRES LOCALEMENT MAXIMAUX

<u>Définition</u>. Dans un graphe G préordonné, V est un *ALM* (arbre localement maximal) si et seulement si, pour tout autre arbre V' de G tel que $|V \Delta V'| = 2$, on a : $V \nless V'$.

<u>Remarque 1</u>. Si $|V \Delta V'| = 2$, c'est qu'il y a une arête u de V, et une arête v du cocycle associé ω_u^V, telles que : $V' = (V - \{u\}) \cup \{v\}$.

<u>Remarque 2</u>. La famille des arbres de G étant préordonnée, il y a toujours au moins un arbre maximal, qui est un *ALM* particulier.

* <u>P1</u> : Dans un graphe G préordonné, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(a) V est un *ALM* de G ;

(b) Toute arête u de V est maximale dans le cocycle associé ω_u^V ;

(c) Toute arête v du coarbre W de V est minimale dans le cycle associé φ_v^V.

. Ceci découle directement de la Remarque 1 et de la conséquence de <u>PG1</u>.

* <u>P2</u> : Dans un graphe G préordonné :

(a) toute arête est : soit seule maximum dans un cocycle, soit minimale dans un cycle ;

(b) toute arête est : soit seule minimum dans un cycle, soit maximale dans un cocycle ;

(c) toute arête est : soit seule maximum dans un cocycle, soit seule minimum dans un cycle, soit maximale dans un cocycle *et* minimale dans un cycle.

.(a) Soit u une arête, $S = \{v \mid v < u\}$ l'ensemble des arêtes strictement inférieures à u, et $S' = S \cup \{u\}$.

Si dans S' existe un cocycle contenant u, u est seule maximum dans ce cocycle. Sinon, c'est qu'il existe dans G une chaine γ joignant les extrémités de u, avec $\gamma \cap S = \emptyset$, c'est-à-dire : pour tout v de γ, on a : $u \nless v$, et u est minimale dans le cycle $(\gamma \cup \{u\})$.

Les deux possibilités sont exclusives l'une de l'autre ; supposons u minimale dans un cycle φ et seule maximum dans un cocycle ω : $(\varphi \cap \omega)$ contient u, et donc au moins une autre arête : v ; mais, dans φ, on a : $v \nless u$, et dans ω, $v < u$.

.(b) est dual de (a).

.(c) résulte de la combinaison de (a) et (b).

* <u>P3</u> : Dans un graphe G préordonné :

(a) une arête seule maximum dans un cocycle figure dans tout *ALM* de G ;

(b) une arête seule minimum dans un cycle ne figure dans aucun *ALM* de G ;

(c) une arête minimale dans un cycle et maximale dans un cocycle figure dans au moins un *ALM* de G, et ne figure pas dans au moins un *ALM* de G.

.(a) Soit u une arête seule maximum dans un cocycle : par <u>P2a</u>, elle ne peut être minimale dans un cycle ; or, si u ne figurait pas dans un *ALM* V, par <u>P1c</u>, u serait minimale dans le cycle associé φ_u^V.

.(b) Raisonnement dual, en utilisant <u>P2b</u> et <u>P1b</u>.

.(c) Si une arête u n'est ni seule maximum dans un cocycle, ni seule minimum dans un cycle, par <u>P2c</u>, elle est maximale dans un cocycle ω_0 *et* minimale dans un cycle φ_0 ; soit V un *ALM* de G :

1) si $u \in V$, alors (<u>P1b</u>), u est maximale dans le cocycle associé ω_u^V ; $(\omega_u^V \cap \varphi_0)$, contenant u, contient au moins une deuxième arête, v ; dans ω_u^V, on a : $u \nless v$, et dans φ_0, on a : $u \ngtr v$; il s'en suit que u et v sont soit équivalentes, soit incomparables. Par ailleurs, u est la seule arête de ω_u^V figurant en V ; donc, $V' = (V - \{u\}) \cup \{v\}$ est un arbre, et, étant donné l'ordre entre u et v, V' est un *ALM* de G, où u ne figure pas.

2) si $u \notin V$: raisonnement dual, en utilisant φ_u^V et ω_0 ; on obtient $V'' = (V - \{v\}) \cup \{u\}$, qui est un *ALM* de G, où figure u.

* <u>Définition</u>. On appellera *RALM* d'un graphe G préordonné l'ensemble des arêtes de G qui sont maximales dans un cocycle.

. Par <u>P3</u>, on voit que le *RALM* de G est la *réunion des ALM de G*.

ARBRES MAXIMUMS

Si les *ALM* d'un graphe G préordonné constituent une classe unique d'équivalence (pour l'ordre sur la famille des arbres de G), ils sont les arbres maximums (et non seulement : maximaux) de G.

* P4 : Dans un graphe G préordonné, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(a) V est un arbre maximum de G ;

(b) Toute arête u de V est maximum dans le cocycle associé ω_u^V ;

(c) Toute arête v du coarbre W de V est minimum dans le cycle associé φ_v^V .

. (b) $\Leftrightarrow$ (c) : évident.

. (a) $\Rightarrow$ (b) : soit u une arête de V, et v une arête de ω_u^V, distincte de u; $V'=(V - \{u\}) \cup \{v\}$ est un arbre de G, et on a : $V \geqslant V'$; pour cela, il faut et il suffit que $u \geqslant v$; donc, u est maximum dans ω_u^V .

. (b) $\Rightarrow$ (a) : V et V' étant deux arbres de G, il existe une bijection β de V vers V' telle que :

$$. \ u \in V \cap V' : \beta(u) = u$$

$$. \ u \in V - V' : \beta(u) = v \quad \text{et } v \in (\omega_u^V \cap V').$$

Si V vérifie (b), alors β est une bijection de V vers V' telle que, pour tout u de V, on a : $u \geqslant \beta(u)$; et donc : $V \geqslant V'$.

* P5 : Un graphe préordonné G admet (au moins) un arbre maximum si et seulement si, pour toute arête u du *RALM* de G, pour tout cocycle ω où u est maximale, il existe un cocycle ω^*où u est maximum, et tel que toutes les arêtes de ω^* équivalentes à u sont dans ω.

. Condition nécessaire

Soit u une arête d'un arbre maximum V de G, et ω un cocycle où u est maximale. Soit $S = (\omega \cap V)$: u figure en S, et toute arête v de S est maximum dans le cocycle associé ω_v^V, où ne figure aucune autre arête de V. L'ensemble des cocycles associés à un arbre constituant une base du groupe des cocycles, on a:

$$\omega = \mathop{\triangle}_{v \in S} \omega_v^V \quad \text{(cf. Rappel R7)}.$$

Posons $T = \{v \mid v \in S, v \leqslant u\}$, où figure u, et soit : $\omega^* = \mathop{\triangle}_{v \in T} \omega_v^V$: si $w \in \omega^*$,

c'est que w appartient à un cocycle ω_v^V, et donc : $w \leqslant v$; mais $v \leqslant u$: u est maximum dans ω^*.

Soit x une arête maximum en ω^* : on a $x \equiv u$.

Si x figure dans un ω_v^V pour $v \in (S - T)$, alors $v \geqslant x$ et $x \equiv u$ donne : $v \geqslant u$; mais u étant maximale dans ω , on a $v \equiv u$ *et* $v \in T$.
D'où, $x \notin \omega' = \underset{v \in (S-T)}{\triangle} \omega_v^V$, et $x \in \omega = \omega^* \Delta\, \omega'$.

. Condition suffisante

Soit V un *ALM* de G ; notons de u_1 à u_{n-1} les arêtes de V, et $\omega_i = \omega_{u_i}^V$ $(i=1,2,\dots,n-1)$, les cocycles associés. V étant un *ALM*, u_i est maximale dans ω_i, qui par ailleurs, ne contient aucune autre arête de V.

La condition affirme qu'il existe un cocycle ω_i^* où u_i est maximum ; de plus, si ω_i^* contient une arête v équivalente à u_i, cette arête figure dans ω_i : cette arête v n'est donc pas une arête de V. Donc, si ω_i^* contient une arête u_j de V $(j \neq i)$, on a $u_j < u_i$. Par commodité, notons $\omega_i^o = \omega_i^*$, et soit Ω_o l'ensemble des (n-1) cocycles ω_i^o .
Ayant construit un ensemble Ω_{k-1} de cocycles, notés ω_i^{k-1} , construisons l'ensemble Ω_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ des cocycles ω_i^k, de la façon suivante : si, pour $i > k$, ω_i^{k-1} contient u_k, posons $\omega_i^k = \omega_i^{k-1} \,\Delta\, \omega_k^{k-1}$; il est clair que l'on a, pour $k = 0,1,\dots,n-1$, pour $i = 1,\dots,n-1$:

. u_i est maximum dans ω_i^k
. $\forall j > k,\ u_j \in \omega_i^k \Rightarrow u_j < u_i$
. $\forall j \leqslant k,\ u_j \notin \omega_i^k$

Donc, dans Ω_{n-1}, un cocycle ω_i^{n-1} possède les propriétés suivantes :

. u_i est maximum dans ω_i^{n-1}
. $(\omega_i^{n-1} \cap V) = \{u_i\}$;

en fait, on a : $\omega_i^{n-1} = \omega_{u_i}^V$, et, par P4b, V est un arbre maximum de G.

ARBRE MAXIMUM UNIQUE

* P6 : Dans un graphe G préordonné, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(a) V est l'arbre maximum (unique) de G ;

(b) Toute arête u de V est seule maximum dans le cocycle associé ω_u^V ;

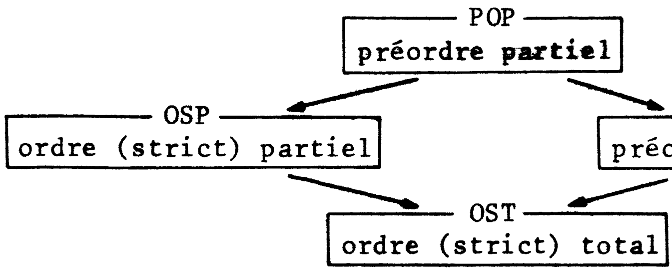
(c) Toute arête v du coarbre W de V est seule minimum dans le cycle associé φ_v^V.

* P7 : Un graphe G préordonné admet un arbre maximum unique si et seulement si toute arête de G est : soit seule maximum dans un cocycle, soit seule minimum dans un cycle.

. Ces propriétés peuvent se démontrer comme P4 et P5 (en remplaçant $\geqslant$ par $>$); ou à partir de P4 et P5 ; ou encore, directement à partir de P3.

PREORDRES ET ORDRES

Les résultats précédents ont été obtenus en considérant des préordres quelconques, pouvant être partiels ; les cas particuliers portaient sur des propriétés dans les cycles et cocycles. Nous allons considérer ici des structures ordinales particulières, selon le schéma :



* OSP : Dans un graphe *G* partiellement ordonné, un arbre maximum est nécessairement unique ; un tel arbre existe si et seulement si toute arête de *G* est soit maximum dans un cocycle soit minimum dans un cycle.

* POT : Un graphe *G* totalement préordonné admet toujours au moins un arbre maximum ; celui-ci est unique dans la condition P7.

* OST : Un graphe *G* totalement ordonné admet toujours un unique arbre maximum.

BIBLIOGRAPHIE

DEGENNE A., VERGES P., "Introduction à l'analyse de similitude", *Revue Française de Sociologie*, *14* (1973), 471-512.

LECLERC B., *Arbres minimaux*, Paris, Centre de Mathématique Sociale, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, doc. multig., 1975.

ROSENSTIEHL P., "L'arbre minimum d'un graphe", *in* : P. ROSENSTIEHL (Ed.), *Théorie des graphes, Rome, I.C.C.*, Paris, Dunod, 1967, 357-368.