

C. LE CONTE DE POLY

Graphes d'amitié et plans en blocs symétriques

Mathématiques et sciences humaines, tome 51 (1975), p. 25-33

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1975__51__25_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GRAPHES D'AMITIE ET PLANS EN BLOCS SYMETRIQUES

C. LE CONTE DE POLY^{*}

Un graphe d'amitié (friendship graph) de degré λ est un graphe dans lequel deux sommets distincts quelconques ont exactement λ voisins communs. Le cas où $\lambda = 1$ était entièrement élucidé dès 1966 [3]. Pour λ quelconque, il est clair que le graphe complet à $\lambda+2$ sommets est un graphe d'amitié. Lors d'un séminaire international [1], A. Kotzig a signalé comme question ouverte la détermination des graphes d'amitié, autres que les graphes "banals" mentionnés ci-dessus.

En fait, la question avait fait l'objet d'une étude très pénétrante de R.C. Bose et S.S. Shrikhande [4]. Puisque l'information semble avoir mal circulé, il n'est peut-être pas inutile de revenir sur le sujet, ne serait-ce que pour apporter quelques compléments et tenter d'en éclairer de façon nouvelle quelques aspects.

On donne une nouvelle preuve du fait que pour $\lambda \geq 2$ les graphes d'amitié sont réguliers. Tous peuvent se construire à partir d'une classe de plans en blocs symétriques : ceux dont la matrice d'incidence est symétrisable avec une trace nulle.

Une formule assez contraignante obtenue en faisant l'analyse spectrale de la matrice d'adjacence indique que pour λ donné les graphes d'amitié sont peu nombreux. Pour $\lambda=2$ on retrouve et on étudie les deux graphes d'amitié non banals : ils ont chacun seize sommets. G.Th. Guilbaud donne une nouvelle présentation d'exemples pour les cas $\lambda=3$ et $\lambda=4$. Tous les graphes indiqués sont de rang trois à l'exception de l'un des deux graphes pour $\lambda=2$, dont le groupe d'automorphismes est de rang quatre.

* Centre de Mathématique Sociale, EHESS.

Ce travail a bénéficié des observations que m'a présentées A. Lentin lors d'un premier exposé que j'en avais fait à son séminaire. Je lui en exprime ma gratitude et je remercie également les participants pour leurs remarques.

I. POUR $\lambda \geq 2$ UN GRAPHE D'AMITIE EST REGULIER

Notation . On notera V_x l'ensemble des voisins d'un sommet x .

L'égalité $|V_x| = |V_y|$ s'obtient en comptant de deux façons les arêtes reliant les sommets de V_x aux sommets de V_y .

Soit $|V_x| = k$ et $|V_y| = k'$.

Premier cas : x et y non voisins.

Tout sommet de V_x doit avoir λ voisins communs avec y . Ces λ voisins communs sont des éléments de V_y . Si q est le nombre d'arêtes du sous-graphe engendré par $V_x \cap V_y$, le nombre d'arêtes entre V_x et V_y est $k\lambda - q$.

De même, tout sommet de V_y a λ voisins communs avec x . Ces voisins sont éléments de V_x et il y a $k'\lambda - q$ arêtes entre V_x et V_y .

D'où $k\lambda - q = k'\lambda - q$ et par conséquent $k = k'$.

Deuxième cas : x et y voisins

Tout sommet de V_x est encore relié par λ arêtes à V_y sauf y lui-même qui est relié par k' arêtes.

Il y a donc $(k-1)\lambda + k' - q$ arêtes entre V_x et V_y et, de façon analogue, tout sommet de V_y est relié par λ arêtes à V_x , sauf x qui est relié par k arêtes.

Soit : $(k'-1)\lambda + k - q$ arêtes entre V_y et V_x . D'où

$$(k-1)\lambda + k' - q = (k'-1)\lambda + k - q$$

$$k(\lambda-1) = k'(\lambda-1)$$

$$\text{soit} \quad k = k' \quad \text{pour } \lambda \neq 1$$

II. NOMBRE DE SOMMETS D'UN GRAPHE D'AMITIE

Si $|V_x| = k$. Soit $X = \{x\} \cup V_x$. Soit encore $\bar{X}$ l'ensemble des sommets du graphe n'appartenant pas à X . Posons $|\bar{X}| = q$.

Chaque élément de $\bar{X}$ a λ voisins communs avec x . Il y a donc $q\lambda$ arêtes entre $\bar{X}$ et V_x . Chaque sommet de V_x a λ voisins communs avec x et est voisin de x .

Il y a donc $k - (\lambda + 1)$ arêtes entre chaque sommet de V_x et $\bar{X}$, soit $k(k - (\lambda + 1))$ arêtes entre V_x et $\bar{X}$.

$$q\lambda = k(k - (\lambda + 1)) \quad \text{ce qui implique} \quad q = \frac{k(k-1)}{\lambda} - k.$$

Si v est le nombre de sommets du graphe $v = 1 + k + q$, soit :

$$(1) \quad v = 1 + \frac{k(k-1)}{\lambda}$$

III. GRAPHS D'AMITIÉ ET PLANS EN BLOCS SYMÉTRIQUES

La matrice d'adjacence (sommets $\times$ sommets) M d'un graphe d'amitié de paramètres k et λ a les propriétés suivantes :

M est symétrique, sa trace est nulle, chaque ligne et chaque colonne contient k fois 1 et deux lignes ou deux colonnes quelconques ont λ fois 1 en commun.

On appellera matrice d'amitié une telle matrice.

Réciproquement, toute matrice ayant ces propriétés est matrice d'adjacence d'un graphe d'amitié.

En interprétant chaque sous-ensemble V_x comme un bloc, l'ensemble des blocs ainsi construits constitue un plan en blocs avec, selon les notations classiques relatives aux plans en blocs, ces égalités :

$$v = b \qquad k = r \qquad \lambda = \mu .$$

De tels plans en blocs sont dits symétriques [7]. La matrice d'incidence (variétés $\times$ blocs) est égale à M .

La donnée d'un graphe d'amitié détermine donc un plan en blocs symétrique dont la matrice peut se mettre sous forme d'une matrice d'amitié.

Réciproquement si la matrice d'incidence M d'un plan en blocs est une matrice d'amitié on peut en déduire un graphe d'amitié : celui dont la matrice d'adjacence est M et pour lequel on a identifié la i ème variété et le i ème bloc, pour tout i .

L'étude des graphes d'amitié peut se ramener à celle des plans en blocs symétriques dont la matrice d'incidence est symétrisable, avec une trace nulle.

Tout plan en bloc symétrique n'a pas une matrice symétrisable, par contre la matrice de certains plans en blocs symétriques peut se symétriser de plusieurs façons donnant naissance à plusieurs graphes d'amitié non isomorphes comme l'indique l'exemple $v = 16$, $k = 6$, $\lambda = 2$ traité plus loin. Dans le contexte des plans en blocs symétriques la formule (1) est bien connue [6],[7].

Valeurs propres des matrices d'amitié

L'étude des multiplicités des valeurs propres des matrices d'amitié fournit des conditions liant k et λ , conditions nécessaires d'existence de telles matrices, donc aussi de graphes d'amitié et de plans en blocs symétriques à matrice d'incidence symétrisable.

La matrice M^2 a la valeur k sur toute la diagonale et λ en dehors.
Les valeurs propres de M sont :

$$\begin{aligned} & k \text{ avec la multiplicité } 1 \\ & \sqrt{k-\lambda} \text{ avec la multiplicité } \alpha_1 \\ & -\sqrt{k-\lambda} \text{ avec la multiplicité } \alpha_2 . \end{aligned}$$

La nullité de la trace de M implique :

$$k + (\alpha_1 - \alpha_2) \sqrt{k-\lambda} = 0$$

et la régularité de M implique :

$$1 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1 + \frac{k(k-1)}{\lambda}$$

Ainsi :

Une condition nécessaire d'existence d'un graphe d'amitié de paramètres k et λ ou, de façon équivalente, d'un plan en blocs symétrique dont la matrice est symétrisable avec une trace nulle est que α_2 soit un entier avec :

$$(2) \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{k}{\sqrt{k-\lambda}} + \frac{k(k-1)}{\lambda} \right] \text{ et } \frac{k(k-1)}{\lambda} \in \mathbb{N} .$$

Si on pose $u = \sqrt{k-\lambda}$, on vérifie qu'il existe des entiers naturels n, m et :

$$k = nu \quad \lambda = mu$$

et que l'ensemble des solutions de (2) se déduit de l'ensemble des solutions de :

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{m} \in 2\mathbb{N}; \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Pour les premières valeurs de λ le tableau suivant donne les seules valeurs possibles pour k et v et les graphes d'amitié trouvés (les valeurs marquées * n'ont pas été essayées).

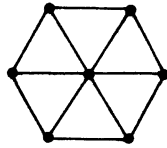
$\lambda = 2$	$k = 3 \quad v = 5$ $k = 6 \quad v = 16$	(graphe complet) (graphes fig.I et fig.II)
$\lambda = 3$	$k = 4 \quad v = 5$ $k = 12 \quad v = 45$	(graphe complet) (45 triangles sur une surface cubique cf. IV.b)
$\lambda = 4$	$k = 5 \quad v = 6$ $k = 8 \quad v = 15$	(graphe complet) (un seul graphe cf.IV.c)
$\lambda = 5$	$k = 6 \quad v = 7$ * $k = 30 \quad v = 175$	(graphe complet)
$\lambda = 6$	$k = 7 \quad v = 8$ $k = 10 \quad v = 16$ $k = 15 \quad v = 36$ * $k = 42 \quad v = 288$	(graphe complet) (un seul graphe cf.IV.d) (un graphe [2] p.112)

R.C. Bose et S.S.Shrikhande donnent des exemples de familles infinies de graphes d'amitié [4].

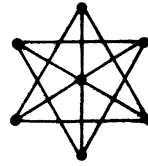
IV. QUELQUES GRAPHS D'AMITIÉ

a) Cas $\lambda = 2$

On trouve seulement deux graphes pour $\lambda = 2$ $k = 6$ $v = 16$ (cf. fig. I et II). En effet des considérations locales : sous-graphes engendrés par un sommet x et ses voisins V_x et l'exigence que tout point de V_x ait deux voisins communs avec x indiquent que ces sous-graphes ne sont que de deux types possibles:



Type I



Type II

et on peut vérifier que la construction d'un graphe d'amitié admettant un sous-graphe de type I ou II est entièrement déterminée par ce sous-graphe. Les graphes I et II peuvent aussi s'obtenir par le procédé indiqué plus haut, en partant de la matrice d'incidence du seul plan en blocs symétrique existant pour $v = 16$ $k = 6$ $\lambda = 2$ [5]. Cette matrice peut se symétriser de plusieurs façons donnant naissance aux seuls graphes I et II.

Le graphe II est signalé par Biggs ([2], p.111) dans la classe des *graphes transitifs sur les distances* ("distance transitive") c'est-à-dire des graphes Γ dont le groupe d'automorphismes G est tel que :

$$(\forall u, v, x, y \in \Gamma) \quad d(u, v) = d(x, y) \Rightarrow \exists g \in G$$

et $u^g = x \quad v^g = y$.

Le graphe II est le graphe de couples (lattice graph) défini en prenant pour ensemble des sommets $V = T \times T$, où $T = \{1, 2, 3, 4\}$, deux sommets étant voisins s'ils ont une coordonnée commune. Son groupe d'automorphismes est le produit en couronne du groupe symétrique S_4 par le groupe symétrique S_2 . Ce graphe est aussi un *graphe de rang 3* c'est-à-dire un graphe dont le groupe d'automorphismes G est tel que pour tout sommet x le sous-groupe G_x des automorphismes qui fixent x a trois orbites.

Le graphe I est un exemple de graphe d'amitié qui n'est pas de rang 3 : son groupe d'automorphismes G est transitif mais, pour tout sommet x , G_x (qui est isomorphe, en tant que groupe abstrait, au groupe diédral à douze éléments de l'hexagone) a quatre orbites : G est de rang 4.

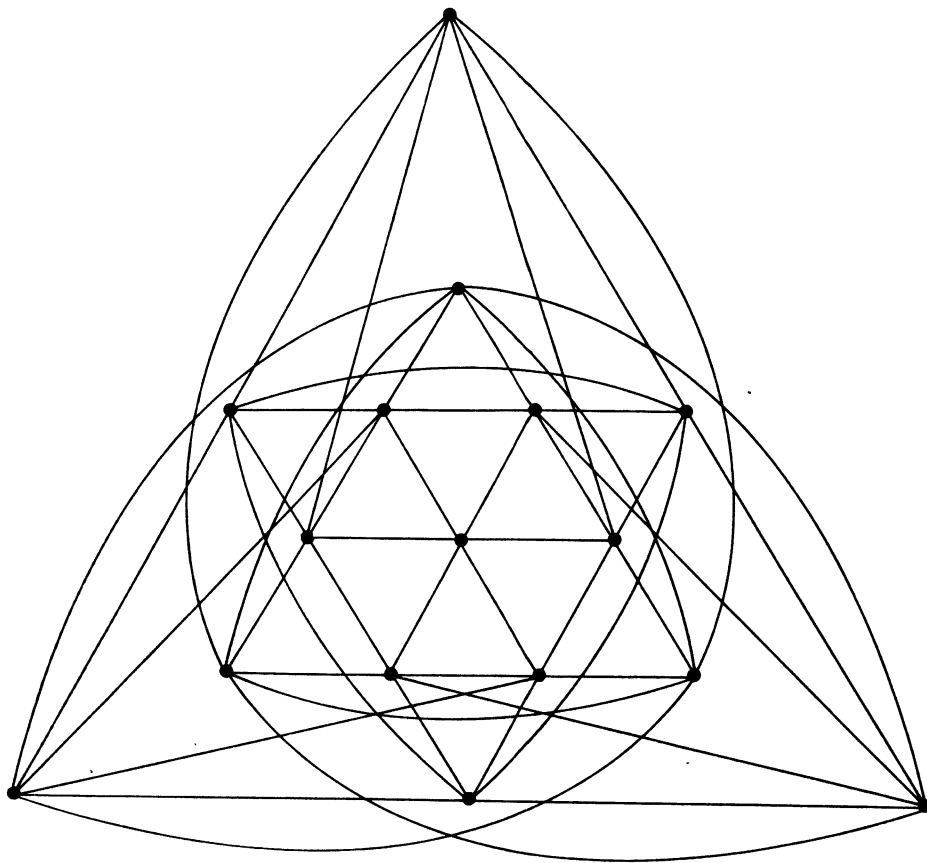


Fig. I

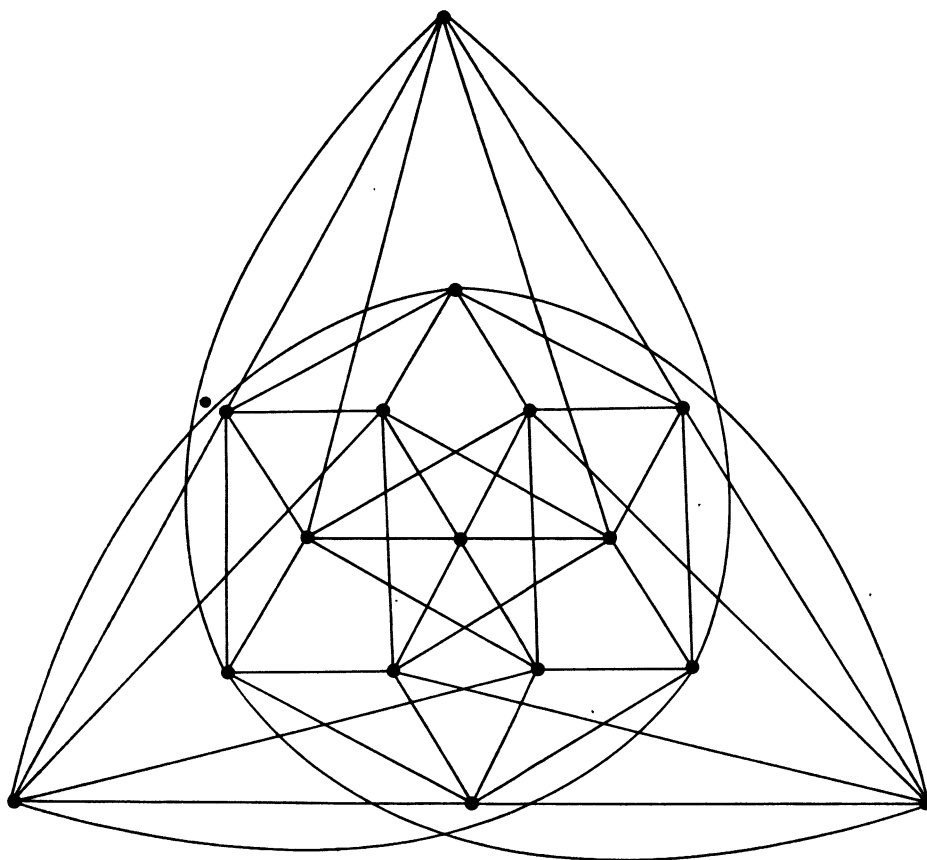


Fig. II

Le graphe I est de genre 1.

Si l'on représente le tore par un hexagone dont les côtés parallèles, orientés dans le même sens, sont identiques, on obtient par le graphe I la figure III.

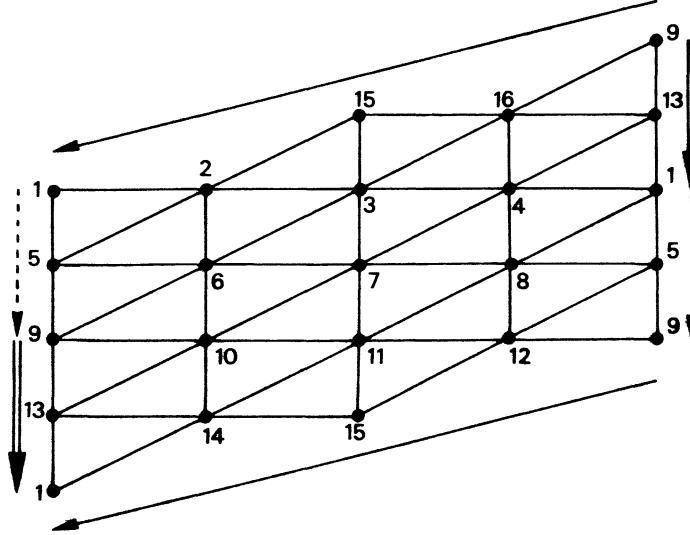


Fig. III

b) cas $\lambda = 3$, $k = 12$, $v = 45$

Le graphe obtenu est en relation avec les quarante-cinq triangles que déterminent les vingt-sept droites situées sur la surface cubique générale. Un sommet du graphe correspond à un triangle, deux sommets sont reliés si et seulement si les deux triangles ont une droite commune.

S'inspirant d'un passage de Jordan ([9] p.316 et 368), G.th. Guilbaud présente l'analyse de cette configuration dans un tableau (figure IV) propre à visualiser, autant que faire se peut, le groupe d'automorphismes. Un sommet est représenté par une partie à trois éléments d'un ensemble à vingt-sept éléments (une ligne du tableau). Deux sommets sont voisins s'ils ont une colonne en commun.

Ce graphe (quarante-cinq triangles sur une surface cubique) est de rang 3 [2].

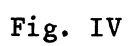


Fig. IV

Un seul graphe d'amitié : G.Th. Guilbaud a démontré que toutes les façons de symétriser la matrice d'incidence du seul plan en blocs ayant ces paramètres (cf. tables [5]) donne naissance à un seul graphe d'amitié : le graphe de paires (triangle graph) défini à partir de $T = \{1, 2, \dots, 6\}$ et en prenant pour ensemble des sommets l'ensemble des paires de T .

Deux sommets sont voisins si les paires associées ont un élément commun.

Ce graphe est de rang 3 ([2] p.111).

Dans ce cas encore, le seul plan en blocs ayant ces paramètres (tables [5]) donne naissance à un seul graphe.

- [1] Seminar on Automorphisms groups of graphs held at Simon Fraser University on August 27, 1974 during the Vancouver Meeting of the international congress of Mathematicians.
- [2] N. BIGGS, *Finite groups of automorphisms*, Cambridge University Press, 1971.
- [3] N. BIGGS, *Algebraic graph theory*, Cambridge University Press, 1974.
- [4] R.C. BOSE and S.S. SHRIKHANDE, "Graphs in which each pair of vertices is adjacent to the same number d of other vertices", *Studia scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 5 (1970), 181-195.
"Some further constructions for $G_2(d)$ graphs", 6 (1971), 127-132.
- [5] FISHER and YATES, *Statistical tables for biological, agricultural and medical research*, London, Oliver and Boyd, 1957.
- [6] G.Th. GUILBAUD, "Petite introduction à la combinatoire,. Chapitre I, Les plans en blocs", *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, 24 (1962).
- [7] M. HALL, Jr., *Combinatorial theory*, Toronto, London, Blaisdell Publishing Company, 1967.
- [8] M.D. HESTENES, "On the use of Graphs in Group Theory", *New directions in theory of graphs*, Edited by Frank Harary, Academic Press 1973.
- [9] C. JORDAN, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris, Gauthier-Villars, nouveau tirage 1957.