MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

S. RÉGNIER

Problèmes de combinatoire musicale

Mathématiques et sciences humaines, tome 40 (1972), p. 29-34
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1972__40__29_0>

Math. Sci. hum. (10e année, no 40, 1972, pp. 29-34)

PROBLÈMES DE COMBINATOIRE MUSICALE

par
S. RÉGNIER [1]

1. INTRODUCTION

La théorie musicale traditionnelle reconnaît à chaque son quatre caractéristiques principales : durée, hauteur, timbre et intensité. Le physicien les nomme : durée, fréquence, spectre et énergie par seconde. Le champ propre à chacune est en principe continu, mais une certaine tradition veut, pour les trois premières, qu'une même œuvre n'utilise qu'une partie discrète de ce champ. L'échelle discrète des durées permises sera étalonnée à partir du « tempo ». Celle des hauteurs à partir du diapason commun aux instruments concertants. Celle des timbres est fixée par l'instrumentation utilisée. Notre premier propos est d'évaluer le nombre des échelles de hauteurs possibles, dans le cadre bien sûr de la tradition en question.

Le fait même d'isoler le champ des hauteurs constitue, il faut le dire, un premier parti pris stylistique. J'admets ensuite que l'échelle des hauteurs doit être choisie dans un univers de fréquences formant une progression géométrique de raison $2^{1/n}$. Si $n = 12$, ce sera le « total chromatique » d'un « clavier bien tempéré », 2 étant le rapport des fréquences de l'intervalle d'octave, $2^{1/12}$ celui d'un demi-ton tempéré.

Dans les échelles traditionnelles, résultant de l'emploi d'une tonalité majeure ou mineure, cet intervalle d'octave joue un rôle privilégié : l'échelle des fréquences se répète identique à elle-même, à un facteur 2 ou 1/2 près, quand on joue à l'octave supérieure ou inférieure. Nous dirons que l'échelle est octaviante. De plus, le nombre de termes à l'intérieur d'un octave est toujours 7. Nous dirons qu'elle est de degré 7. Notre premier propos sera d'évaluer combien il existe d'échelles octaviantes de degré k, et plus précisément combien de formes d'échelle *à la transposition près*. Transposer une échelle ou un morceau de musique c'est multiplier toutes les fréquences par un même facteur, toutes choses égales d'ailleurs. L'oreille humaine est peu sensible à ces transpositions quand ce facteur est inférieur à 3/2. Tout se manipule à la transposition près, à telle enseigne que l'évolution du diapason depuis le 18e siècle n'a pas empêché les diverses tonalités de garder les mêmes colorations culturelles. (Si mineur triste, sol mineur éclatant, etc.) C'est pourquoi nous n'avions besoin de spécifier aucun terme de l'univers $\mathscr{U}$ des fréquences en progression géométrique.

Nous allons maintenant identifier $\mathscr{U}$ avec l'ensemble isomorphe :

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{l} 0,\ 1,\ 2,\ \text{etc.} \\ \quad\ -1\ -2,\ \text{etc.,} \end{array}$$

ce qui équivaut à mesurer les hauteurs par les logarithmes des fréquences (avec une unité suffisamment petite). La transposition devient une translation. On notera en passant que le son représenté par le

1. Centre de Mathématiques Appliquées et de Calcul, Maison des Sciences de l'Homme.

nombre zéro n'est pas plus « neutre » que les autres. Seuls importent les intervalles, représentés dans **Z** par les différences de deux logarithmes. Par contre la différence « n » est musicalement privilégiée : par convention dans la construction du modèle, elle représente l'intervalle d'octave.

2. DEUX ÉNONCÉS MATHÉMATIQUES ÉQUIVALENTS

2.1. *Énoncé algébrique*

Dans le cadre de **Z**, ensemble de tous les nombres entiers de signes quelconques, nous arrivons aux concepts suivants :

Une échelle est une partie quelconque de **Z**. Si la fonction indicatrice associée est périodique, l'échelle sera dite périodique. Si la plus petite période divise n, alors l'échelle est dite octaviante. Le cardinal de l'intersection de l'echelle E et de l'intervalle $(1, 2, \ldots n)$ s'appelle le degré de l'échelle.

Deux échelles sont dites de *même forme* s'il existe une translation de **Z** transformant l'une en l'autre.

Comme les translations forment un groupe, la relation *être de même forme* est une équivalence, et les classes d'équivalences constituent par définition les formes d'échelles.

Nous cherchons le nombre des formes d'échelles octaviantes et de degré k, soit F_n^k.

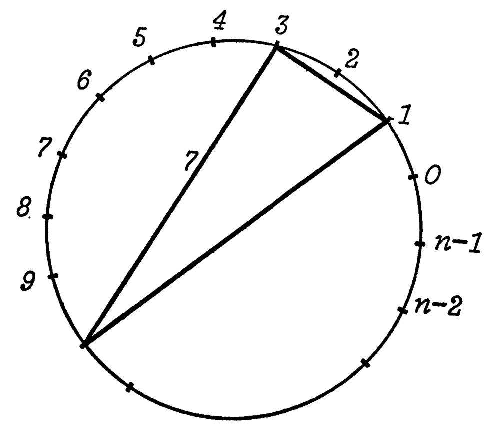


Figure 1

2.2. *Énoncé géométrique*

On peut naturellement reposer le problème dans le groupe additif fini **Z**/n. Cela ne nous aidera pas pour la résolution proposée ci-après, mais il est très éclairant d'en tirer l'énoncé géométrique suivant :

Considérons les n sommets d'un polygone régulier de n côtés, autrement dit n points également répartis sur un cercle. On connaît le nombre de sous-ensembles constitués de k sommets, c'est :

$$\binom{n}{k}, \text{ alias } C_n^k = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}$$

Nous cherchons le nombre des formes géométriques (ou figures) résultantes, en considérant que deux parties sont de *même forme* si et seulement si l'on passe de l'une à l'autre par au moins une rotation.

F_n^3 par exemple sera le nombre des formes de triangles.

F_n^4 celui des formes de quadrilatères convexes, etc.

3. SOLUTION

Repartons de l'énoncé algébrique 2.1. La forme d'une échelle $E \subset \mathbf{Z}$, c'est donc *la classe* des échelles translatées :

$$\text{Classe de } E = \{ E' \mid \underset{\in \mathbf{Z}}{\exists\, z}, E' = E + z \}$$[1].

Nous allons compter l'effectif de chaque classe, et d'autre part, le nombre total d'échelles. Le premier dépend évidemment de la périodicité éventuelle de E. La plus petite période est par définition :

$$p\,(E) = \underset{z}{Inf}\,[z > 0 \quad \text{et} \quad E = E + z]$$

nombre positif infini pour une échelle non périodique, et la classe de E a pour cardinal p.

Si E_p^k désigne le nombre d'échelles de période p avec k élément par période, leurs diverses classes ont même cardinal p, et nous voyons que le nombre de formes correspondantes est E_p^k/p.

Les échelles octaviantes de degré k sont celles dont la plus petite période divise n ; $p = \frac{n}{d}$, avec $\frac{k}{d}$ éléments par période.

Par conséquent le nombre de formes cherché est :

$$F_n^k = \sum_{d \text{ divise } n \text{ et } k} E_{n/d}^{k/d} \Big/ \left(\frac{n}{d}\right) \tag{1}$$

D'autre part, il y a de toute évidence C_n^k échelles octaviantes de degré k parmi lesquelles $E_{n/d}^{k/d}$ de période $p = n/d$.

Donc :

$$C_n^k = \sum_{d \text{ divise } n \text{ et } k} E_{n/d}^{k/d} \qquad \text{où} \qquad C_n^k = \frac{n\,!}{k\,!\; n - k\,!} \tag{2}$$

Cette 2e formule permet de calculer de proche en proche les quantités E_p^k et d'en déduire les sommes F_n^k. On notera d'ailleurs que $E_p^k = E_p^{p-k}$, parce que deux parties complémentaires ont mêmes périodes. De même $F_n^k = F_n^{n-k}$.

4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Si n et k sont premiers entre eux, $C_n^k = E_n^k$. En particulier $E_n^0 = 1$ et $E_n^1 = n$.

$$\begin{array}{llll} C_4^2 = \ \ 6 = E_2^1 + E_4^2 & \text{nous donne} & E_4^2 = & 4 \\ C_6^2 = 15 = E_3^1 + E_6^2 & \quad — & E_6^2 = & 12 \\ C_6^3 = 20 = E_6^3 + E_2^1 & \quad — & E_6^3 = & 18. \end{array}$$

1. { ... } signifie ensemble des...

En opérant de même, on calcule facilement que :

$$E_{12}^2 = 60 \qquad E_{12}^3 = 216 \qquad E_{12}^4 = 480 \qquad E_{12}^5 = 792 \qquad \text{et} \qquad E_{12}^6 = 900.$$

On en déduit par exemple que :

$$\begin{aligned} F_{12}^7 &= F_{12}^5 = E_{12}^5/12 = 66 \\ F_{12}^8 &= F_{12}^4 = E_{12}^4/12 + E_6^2/6 + E_3^1/3 = 43 \\ F_{12}^9 &= F_{12}^3 = E_{12}^3/12 + E_4^1/4 = 19 \\ F_{12}^{10} &= F_{12}^2 = E_{12}^2/12 + E_6^1/6 = 6. \end{aligned}$$

5. COMMENTAIRE

66 est le nombre de types à quoi se ramènent par transposition, toutes les échelles octaviantes extraites d'un clavier bien tempéré avec 7 notes par octave. Deux types particuliers correspondent aux gammes majeures d'une part et aux gammes mineures harmoniques. La gamme mineure mélodique ascendante est un troisième type (tandis que ut mineur mélodique descendant dérive par translation de ut majeur).

Les gammes effectivement utilisées par les compositeurs semblent soumises à une contrainte particulière qui limite beaucoup le nombre de types possibles. Il faut éviter que deux demi-tons se succèdent. De plus les gammes présentant des intervalles supérieurs au ton entier sont considérées comme peu mélodiques. En ajoutant ces deux contraintes, on ne retiendra des 66 types à 7 notes que deux types, et des 43 types à 8 notes un seul, dont la période exacte est 3, où tons et demi-tons alternent régulièrement. Cette gamme au charme très particulier apparaît épisodiquement dans « la danse de Puck», prélude de Claude Debussy. Olivier Messiaen en a fait un usage plus systématique.

Le résultat $F_{12}^3 = 19$ montre qu'il n'existe (à la transposition près) que 19 accords de 3 sons à l'intérieur d'une octave. Le nombre de mélodies correspondantes est évidemment 3 ! fois plus grande ($19 \times 6 = 114$) avant même de tenir compte du rythme. Fort heureusement celui-ci joue un rôle essentiel et multiplie presque à l'infini le nombre des possibilités sur 3 notes données. Il suffit d'y penser en morse pour entrevoir quelles richesses restent disponibles. Le choix « brève ou longue» multiplie les possibilités par 8. Une autre dimension du rythme consiste à répartir l'accent tonique...

6. FONCTION GÉNÉRATRICE DES E_p^k

D'après sa définition, $E_p^k = 0$ pour $k > p$ et pour $k = 0$ sauf $E_1^0 = 1$. E_0^0 n'a pas de sens.

Essayons alors de déterminer la fonction génératrice $h(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} E_p^k x^p y^k$, à l'aide de la relation 2, qui reste vraie pour $k = 0$ sous la forme :

$$C_n^0 = 1 = E_{n/n}^0 + 0 + 0, \text{ etc.}$$

Nous savons que, pour $|x(1+y)| < 1$

$$\sum_{n>0} \sum_{k \geqslant 0} C_n^k x^n y^k = \frac{x(1+y)}{1 - x(1+y)}, \text{ soit } g(x, y)$$

car :

$$\sum_k C_n^k y^k = (1+y)^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n>0} v^n = \frac{v}{1-v}$$

pour $|v| < 1$.

On a donc, en posant $p = n/d$ et $q = k/d$:

$$g(x, y) = \sum_{n>0,\, k\geqslant 0} x^n y^k \sum_{d>0} E_{n/d}^{k/d} = \sum_{p>0,\, q\geqslant 0} \sum_{d>0} x^{pd} y^{qd} E_p^q.$$

En permutant les deux sommations, nous voyons que :

$$g(x, y) = \sum_{\text{d entier} > 0} h(x^d, y^d)$$

Il ne nous semble pas possible d'en dire plus concernant la fonction h. Mais d'autres part :

$$\sum_{d>0} x^{pd} y^{qd} = \frac{x^p y^q}{1 - x^p y^q}$$

pour $|x|$ et $|y| < 1$.

Par conséquent :

$$g(x, y) = \sum_{p>0,\, q\geqslant 0} E_p^q \frac{x^p y^q}{1 - x^p y^q}$$

et ce développement constitue une autre sorte de fonction génératrice, où les monomes $x^p z^q$ sont remplacés par des fractions rationnelles.

On peut vérifier ces deux formules pour $x = 0$, car :

$$g(0, y) = 0 \quad \text{et} \quad h(0, y) = 0$$

et pour $y = 0$ car :

$$g(x, 0) = \frac{x}{1 - x} \quad \text{et} \quad h(x, 0) = x.$$

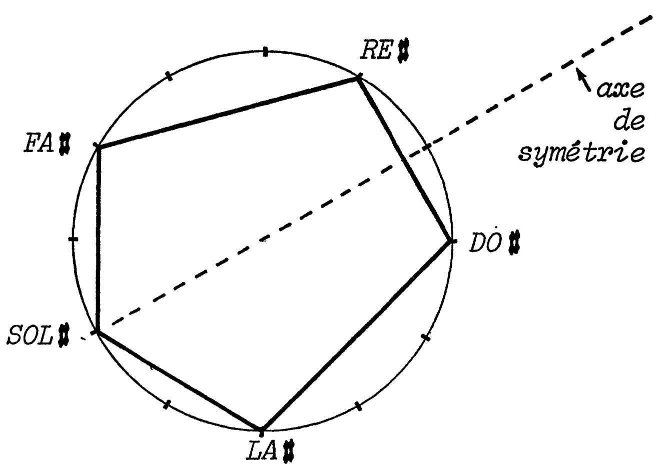
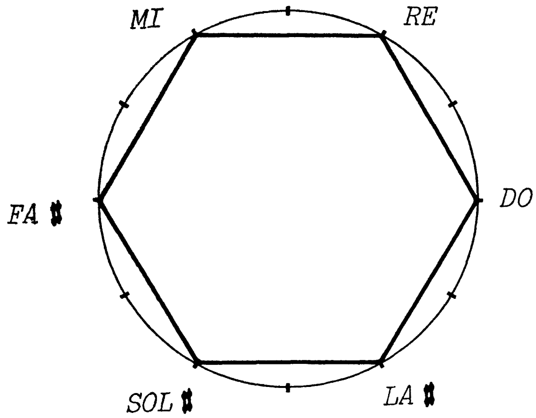


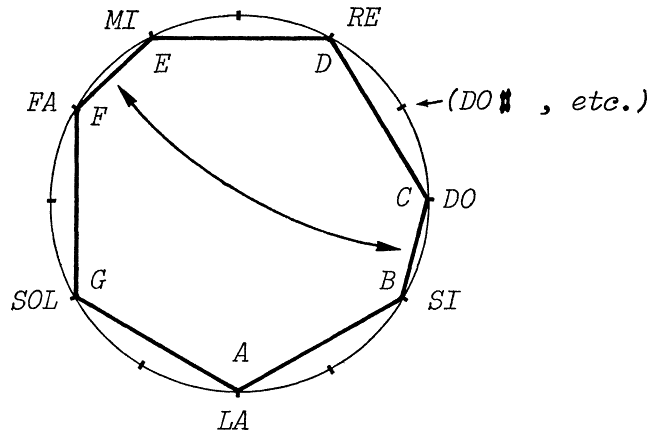
Figure 2

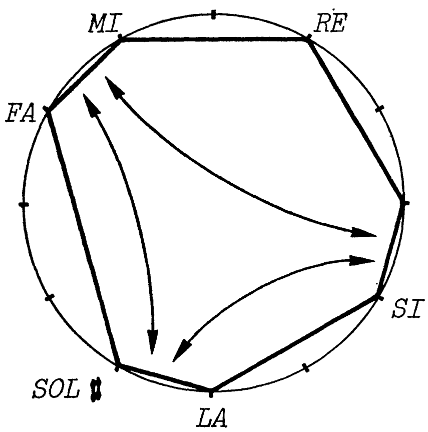
Échelle pentatonique, approximation tempérée d'une gamme chinoise
(Ex. Ravel, « Laideronette, impératrice des pagodes », *Ma mère L'oye)*

Hexagone régulier « Gamme par tons »
(Claude Debussy)

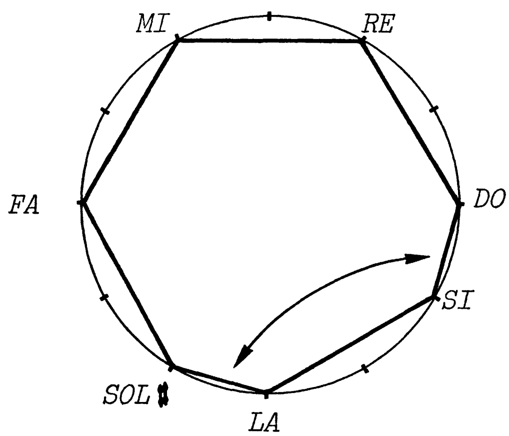


Échelle majeure = Échelle de la gamme mineure mélodique descendante





Échelle mineure harmonique (3 demi-tons)



Échelle mineure mélodique ascendante

Figure 3

Représentation enroulée de quelques échelles octaviantes extraites du total chromatique tempéré **(*cf.* § 2.2.)**

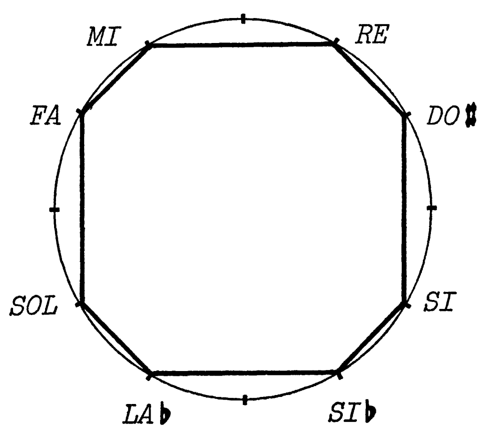


Figure 4

L'échelle de **« La danse de Puck», (*cf.* § 5)**