MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

CLAUDE FLAMENT

Équilibre d'un graphe. Quelques résultats algébriques

Mathématiques et sciences humaines, tome 30 (1970), p. 5-10

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1970__30__5_0>

M.S.H. (8e année, n° 30, 1970, p. 5-10)

ÉQUILIBRE D'UN GRAPHE QUELQUES RÉSULTATS ALGÉBRIQUES

par

Claude FLAMENT[1]

On rencontre souvent, en sciences humaines, des ensembles munis de deux relations binaires, à la fois liées et opposées : amitié et inimitié entre des individus, par exemple. On parle alors de relations « positive » et « négative ». On peut souvent formaliser la situation en considérant un graphe $G = (A, U)$, où A est l'ensemble considéré, et U l'ensemble des couples d'éléments de A qui vérifient la relation, qu'elle soit « positive » ou « négative ». Les raisonnements portant surtout sur la relation « négative », il suffit alors de distinguer (de colorier) une partie N de U correspondant à la relation « négative ».

On privilégie alors certaines parties N de U si certaines configurations sont vérifiées (par exemple, « les amis de mes amis sont mes amis ») : on dit que le graphe G est ***équilibré*** pour N, ou ***N-équilibré***[2].

Les propriétés d'un graphe N-équilibré ont été étudiées notamment par Harary (cf. Harary, Norman, Cartwright, 1965). Le but de cet article est de retrouver les résultats connus en utilisant certaines propriétés ***algébriques*** par ailleurs connues sur les graphes.

STRUCTURE ALGÉBRIQUE SUR UN GRAPHE

Soit un graphe $G = (A, U)$, A étant l'ensemble des sommets, et U l'ensemble des arêtes ; chaque arête a pour extrémités deux sommets, pas toujours distincts.

Considérons l'ensemble $\mathscr{P}(U)$ des parties de U :

— Appelons somme, notée $+$, la différence symétrique dans $\mathscr{P}(U)$. $(\mathscr{P}(U), +)$ est un ***groupe abélien*** ; cette somme est en effet, associative et commutative ; l'ensemble vide en est l'élément neutre, et chaque partie S de U est son propre inverse :

$$S + S = \emptyset.$$

— Ajoutons l'intersection ensembliste $\cap$: $(\mathscr{P}(U), +, \cap)$ est un ***anneau booléen*** ; rappelons que l'intersection est distributrive par rapport à la somme : pour toute partie R, S, T de U :

$$(R + S) \cap T = (R \cap T) + (S \cap T).$$

1. Laboratoire de Psychologie sociale, Aix-en-Provence.
2. Il convient de distinguer cet équilibre *relatif*, des formes d'équilibre *intrinsèque* définies par Berge (1969) ou par Roy (1969).

— Le groupe ($\mathscr{P}$ (U), $+$) peut être considéré comme un *espace vectoriel* sur le corps **2** des entiers modulo 2 ; on peut notamment définir un *produit scalaire* :

$$< R, S > = \text{Card}\,(R \cap S) \qquad\qquad \text{(modulo 2).}$$

R et S, parties de U, sont des vecteurs *orthogonaux* si et seulement si $< R, S > = 0$, c'est-à-dire si et seulement si R et S ont en commun un nombre *pair* d'arêtes. Nous verrons que cette orthogonalité est au centre de notre problème.

PARTIES ET FAMILLES DE PARTIES REMARQUABLES

Un *chemin* entre deux sommets x et y est une suite d'arêtes :

$$(x, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_i, x_{i+1}), (x_{i+1}, y).$$

Un *cycle* est un chemin tel que $x = y$.

Cette définition habituelle du *cycle* doit être un peu modifiée pour pouvoir doter l'ensemble des cycles d'une structure intéressante : nous admettrons comme cycle l'ensemble vide, et aussi l'union de plusieurs cycles disjoints, et nous refuserons les cycles où une même arête figure plus d'une fois. Dans ces conditions, on voit que la somme de deux cycles est un cycle, et que l'ensemble Φ des cycles du graphe est un sous-groupe de $\mathscr{P}$ (U).

B étant une partie de l'ensemble A des sommets, le cocycle ω (B) est l'ensemble des arêtes ayant une et une seule extrémité en B. En notant $\oplus$ la différence symétrique dans A, B et C étant des parties de A, on a :

$$\omega\,(B \oplus C) = \omega\,(B) + \omega\,(C)\,;$$

l'ensemble Ω des cocycles du graphe est un sous-groupe de $\mathscr{P}$ (U).

Notons qu'à tout cocycle non vide correspond une bipartition de A en B et $(A \oplus B)$ telle que $\omega\,(B) = \omega\,(A \oplus B)$ soit l'ensemble des arêtes ayant une extrémité en B et l'autre en $(A \oplus B)$. (Le cocycle vide peut s'écrire : $\omega\,(A)$.)

Un *arbre* est une partie V de U qui rencontre tout cocycle non vide du graphe, et est minimale pour cette propriété ; on retrouve la définition habituelle de l'arbre si le graphe est connexe.

Un *coarbre* est une partie W de U qui rencontre tout cycle non vide du graphe, et est minimale pour cette propriété. La propriété P_1 précisera plus loin ce qu'est un coarbre.

Ces définitions étant rappelées, nous donnons une liste de propriétés bien connues, ou faciles à démontrer (cf. Berge et Ghouila-Houri, 1962 ; Ghouila-Houri, 1964; Rosenstiehl, 1967; Berge, 1970).

P_1 : Le complémentaire dans U de tout arbre de G est un coarbre de G, et réciproquement.

Pour tout arbre V et tout coarbre W de G, Φ étant l'ensemble des cycles de G, et Ω l'ensemble de ses cocycles :

P_2 : Φ et $\mathscr{P}$ (V) sont des sous-groupes (sous-vectoriels) *supplémentaires* de $\mathscr{P}$ (U) ;
P_3 : Ω et $\mathscr{P}$ (W) sont des sous-groupes (sous-vectoriels) *supplémentaires* de $\mathscr{P}$ (U).

Si G a n sommets, m arêtes et p composantes connexes :

P_4 : Φ et $\mathscr{P}$ (W) sont des sous-groupes (sous-vectoriels) isomorphes, de dimension $s = m - n + p$
s est le *nombre cyclomatique* de G (Berge, 1958).
P_5 : Ω et $\mathscr{P}$ (V) sont des sous-groupes (sous-vectoriels) isomorphes, de dimension : $r = n - p$.

En notant $\mathscr{F}^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à chaque vecteur de $\mathscr{F}$, famille de parties de U :

P_6 : $\Omega^{\perp} = \Phi$ et $\Phi^{\perp} = \Omega$.

Notons que P_6 ne veut nullement dire que la partie commune à Ω et Φ se réduit au vecteur nul (partie vide) : un cycle non vide peut très bien être un cocycle.

Rappelons une manière commode de construire une *base* du groupe Φ des cycles : on choisit arbitrairement un arbre V de G ; son complémentaire dans U est le coarbre W ; prenons séparément chaque arête de W et replaçons-la dans V : on obtient un cycle et un seul ; l'ensemble des cycles ainsi formés successivement constitue une base de Φ, que nous nommerons *base associée à l'arbre V*.

ÉQUILIBRE D'UN GRAPHE

Un graphe $G = (A, U)$ ayant une partie N de ses arêtes considérées comme « négatives », on dit que G est équilibré (pour N) si et seulement si aucun des cycles de G ne comporte un nombre *impair* d'arêtes « négatives » ; ce que nous traduisons :

Définition. — Un graphe G est N-équilibré si et seulement si N est orthogonal à tous les cycles de G.

D'où, par P_6 :

Théorème I (Harary). — Un graphe G est N-équilibré si et seulement si N est un cocycle de G.

Harary n'a pas énoncé ce théorème en parlant de cocycle, mais en utilisant la bipartition de A que nous avons notée à propos des cocycles.

Par ailleurs, on sait qu'un vecteur est orthogonal à un sous-vectoriel si et seulement si il est orthogonal aux vecteurs d'une base du sous-vectoriel ; d'où :

Théorème II (Bramsen). — Un graphe G est N-équilibré si et seulement si N est orthogonal à tous les cycles d'une base de Φ.

Bramsen (1968) a démontré ce théorème par raisonnement combinatoire sur une base de cycles associée à un arbre.

DÉSÉQUILIBRE D'UN GRAPHE

Si un graphe G n'est pas N-équilibré, on recherchera un ensemble N', éventuellement aussi « proche » que possible de N, et tel que G soit équilibré pour N'. Cela revient à « changer de signe » les arêtes de $(N + N')$, certaines arêtes « positives » devenant « négatives », certaines arêtes « négatives » devenant « positives » ; on cherchera souvent à minimiser le nombre de ces « changements de signe », c'est-à-dire qu'on recherchera N' tel que Card $(N + N')$ soit minimum.

Appelons *ensemble d'équilibration* de N, l'ensemble $E = N + N'$. Nous savons que N' doit être un cocyle. Soit $\mathscr{E}$ la famille des ensembles d'équilibration de N. $\mathscr{E}$ s'obtient en sommant N à chaque cocycle de Ω, mais cela ne définit pas un isomorphisme entre $\mathscr{E}$ et Ω.

Si $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$, on n'a pas :

$$(N + \omega_1) + (N + \omega_2) = (N + \omega_3),$$

mais :

$$(N + \omega_1) + (N + \omega_2) = \omega_3.$$

On appelle *degré de N-déséquilibre* de G le cardinal du plus petit ensemble d'équilibration de N :

$$\delta_N (G) = \min_{E \in \mathscr{E}} (\text{Card } E).$$

On appelle *degré de déséquilibre* de G le nombre :

$$\delta (G) = \max_{N \subset U} (\delta_N(G))$$

On ne sait pas encore déterminer ce nombre caractéristique du graphe.

Théorème III (Bramsen). — Le degré de déséquilibre d'un graphe G est au plus égal au nombre cyclomatique s de G.

Soit un coarbre quelconque W ; Ω et $\mathscr{P}$ (W) étant supplémentaires (cf. P_3), toute partie N de U peut être décomposée, de façon unique, en un cocycle ω de Ω et une partie W' de W : $N = \omega + W'$, d'où : $W' = N + \omega$; W' est donc un ensemble d'équilibration de N ; comme tout coarbre W est de cardinal s, nombre cyclomatique de G (cf. P_4) W', partie de W est au plus de cardinal s.

Mais on connaît des types de graphe pour lesquels le degré de déséquilibre est inférieur à s (cf. Flament, 1965).

ENSEMBLES MININAUX D'ÉQUILIBRATION

Divers algorithmes peuvent être proposés pour rechercher les ensembles minimaux d'équilibration d'un ensemble N ; ils ne semblent pas optimaux. Décrivons-en un, facilement programmable.

Soit une base de cycle, composé des cycles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i, \ldots, \varphi_s$. Pour toute partie S_j de U, définissons un « vecteur-cycle» v (S_j), de s composantes $a_i^j = < S_j, \varphi_i >$. Par la linéarité du produit scalaire, on a :

$$< S_j + S_k, \varphi_i > = < S_j, \varphi_i > + < S_k, \varphi_i > \qquad \text{(modulo 2).}$$

On peut donc définir une somme sur ces vecteurs-cycles, et :

$$v (S_j + S_k) = v (S_j) + v (S_k).$$

Pour toute arête u_j de U, on construira son vecteur v (u_j), et le vecteur d'une partie de S de U s'obtiendra par :

$$v (S) = \sum_{u_j \in S} v (u_j).$$

On voit que G est N-équilibré si et seulement si $v (N) = 0$. Par ailleurs, E est un ensemble d'équilibration de N si et seulement si $v (E) = v (N)$.

On considérera donc successivement, les parties de U, en commençant par les plus petites, et leurs vecteurs-cycles, que l'on comparera à v (N). Dès qu'on trouve une partie S de k arêtes, telle que v $(S) = v$ (N), on sait que δ_N $(G) = k$, et l'exploration de toutes les combinaisons d'arêtes k à k donne tous les ensembles minimaux d'équilibration.

Mais l'algorithme peut être simplifié par un choix heureux de la base de cycle.

Par exemple, on pourra rechercher une base ne comportant qu'un seul cycle non orthogonal à N, ce qui est toujours très facile.

Une propriété du calcul linéaire dit que si nous remplaçons un vecteur d'une base par une combinaison de ce vecteur avec d'autres vecteurs de la base, l'ensemble ainsi construit est encore une base. Prenons donc une base de cycle quelconque, et identifions les cycles non orthogonaux à N ; supposons que φ_1 ne soit pas orthogonal à N ; si φ_i $(i \neq 1)$ est non orthogonal à N, remplaçons-le par le cycle $(\varphi_i + \varphi_1)$ qui est alors orthogonal à N, puisque :

$$< N, \varphi_1 + \varphi_i > = < N, \varphi_1 > + < N, \varphi_i >.$$

On obtient ainsi une base où seul φ_1 est non orthogonal à N ; les vecteurs v' relatifs à cette nouvelle base s'obtiennent aisément en utilisant l'équation qu'on vient de rappeler.

Il est alors clair que tout ensemble d'équilibration de N comportera un nombre impair d'arêtes de φ_1, et un nombre quelconque d'arêtes ne figurant pas en φ_1 : on réduit ainsi le nombre de combinaisons d'arêtes qu'il faut examiner.

APPLICATIONS

1) Dans un ensemble d'individus, il existe des relations d'amitié, d'inimitié, d'indifférence. On estime souvent que ce groupe est socialement équilibré si chacun peut dire :

a) « les amis de mes amis sont mes amis (ou me sont indifférents) » ;

b) « les ennemis de mes ennemis sont mes amis (ou me sont indifférents) ».

Si on représente cette situation par un graphe $G = (A, U)$, A étant l'ensemble des individus, U l'ensemble de leurs relations (amicales ou hostiles), et N étant l'ensemble des relations hostiles, on vérifie facilement que le groupe est socialement équilibré si et seulement si son graphe est N-équilibré. C'est du reste à propos de ce problème que Harary a développé sa théorie de l'équilibre d'un graphe.

Cependant, on considère en général un graphe *orienté*, l'arc $(x\, y)$ représentant les sentiments de x vis-à-vis de y, qui peuvent être différents des sentiments de y vis-à-vis de x, représentés par l'arc $(y\, x)$. Mais la théorie de Harary ne tient pas compte de l'orientation : on est donc bien ramené au problème étudié dans cet article, à condition d'admettre (ce qui ne pose aucun problème) qu'il peut y avoir deux arêtes entre deux points.

On admet qu'un groupe socialement déséquilibré sera le lieu d'une dynamique tendant, de façon économique, à modifier certaines relations pour atteindre un état d'équilibre : c'est le problème des ensembles minimaux d'équilibration.

Notons cependant que la présente théorie de l'équilibre n'est pas toujours vraie dans la réalité psychologique; notamment des deux formules *a* et *b* citées plus haut, la première semble beaucoup plus importante que la seconde ; pour tenir compte de ces faits, il faut alors recourir à d'autres formalisations (cf. Flament, 1968).

2) Dans de nombreux problèmes de sciences humaines, on considère un ensemble A de variables x_i, et leurs corrélations $r\,(x_i\, x_j)$. Pour divers types d'analyses [1], il est souhaitable que ces corrélations soient positives.

1. En analyse de similitude notamment, cf. Flament (1962) et : Degenne, Flament, Verges, *l'Analyse de similitude* (ouvrage en préparation).

Nous dirons que nous « inversons » une variable x si nous la remplaçons par :

$$x' = a\,x, \qquad \text{avec} \qquad a < 0 ;$$

il est clair que :

$$r\,(x_i\,x_j) = -\,r\,(x'_i\,x_j) = r\,(x'_i\,x'_j).$$

Le problème est de trouver, si elle existe, une partie B des variables, qui inversées, rendront toutes les corrélations positives.

Construisons un graphe $G = (A, U)$, A étant l'ensemble des variables, les arêtes de U correspondant aux corrélations suffisamment différentes de zéro (selon un critère à fixer par ailleurs) ; N, partie de U, correspond aux corrélations *négatives.*

Supposons que G soit N-équilibré ; N est alors un cocycle, auquel correspond une bipartition de A en B et $(A \oplus B)$. Si nous inversons les variables de A, toutes les corrélations sont alors positives.

Si G n'est pas N-équilibré, notre problème n'a pas de solution parfaite. On recherchera un ensemble d'équilibration E, et $N' = N + E$ déterminera une bipartition de A en B' et $(A \oplus B')$; en inversant les variables de B', on obtiendra qu'une corrélation soit négative si et seulement si elle correspond à une arête de E.

Dans certains problèmes, on recherchera donc un ensemble E minimal ; dans d'autres, on acceptera un ensemble E non minimal, mais correspondant à des corrélations de valeur absolue aussi faible que possible.

Un algorithme (sans doute non optimal) consiste à *valuer* le graphe G par les valeurs absolues des corrélations, à rechercher l'arbre maximum V de G (cf. Rosenstiehl, 1967) et à prendre pour N' le cocycle contenant $(V \cap N)$ et aucune autre arête de V.

BIBLIOGRAPHIE

Berge C. — *Théorie des graphes et ses applications*, Paris, Dunod, 1958.

Berge C. — « The rank of a family of sets and some applications to graph theory », *in : Recent progress in combinatorics*, New York, Academic Press, 1969.

Berge C. — *Graphes et hypergraphes*, Paris, Dunod, 1970.

Berge C., Ghouila-Houri A. — *Programmes, jeux et réseaux de transport*, Paris, Dunod, 1962.

Bramsen J. — « Fundamental systems of cycles and the theory of balance », Dept. Sociol. Univ. Chicago (polycopié), 1968.

Flament C. — « L'analyse de similitude », *Cahiers de recherche opérationnelle* (Bruxelles), *4*, 63-97, 1962.

Flament C. — *Théorie des graphes et structures sociales*, Paris, Mouton et Gauthier-Villars, 1965.

Flament C. — « Structural balance theories », *in : Algebraic models in psychology*, Univ. de Leyde, 1968.

Ghouila-Houri A. — « Flots et tensions dans un graphe », *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, *81*, 267-339, 1964.

Harary F., Norman R. Z., Cartwright C. — *Structural models : An introduction to the theory of directed graphs*, New York, Wiley, 1965.

Rosenstiehl P. — « L'arbre minimum d'un graphe », *in : Journées Internationales sur la Théorie des Graphes, I.C.C., Rome, 1966*, Paris, Dunod, 1967.

Roy B. — *Algèbre moderne et théorie des graphes*, Paris, Dunod, 1969.