

B. LECLERC

B. MONJARDET

Problèmes ouverts. Représentation graphique d'un graphe

Mathématiques et sciences humaines, tome 26 (1969), p. 51-57

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1969__26__51_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES OUVERTS

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UN GRAPHE

par

B. LECLERC et B. MONJARDET

INTRODUCTION.

Dans *Sémiologie graphique* [16], J. Bertin étudie les buts et les moyens de la représentation graphique définie comme transcription dans le système graphique de signes d'une pensée, d'une « information » connue par l'intermédiaire d'un système de signes quelconques. Cette transcription devra être aussi fidèle que possible, ce qui se traduit en langage mathématique par la notion d'homomorphisme. Il y a quelques années, *Mathématiques et Sciences Humaines* avait publié un article de M. Barbut sur ce thème des homomorphismes dans le plan, baptisés par l'auteur idéogrammes [17]. On pourra s'y reporter pour avoir une vue d'ensemble sur les rapports entre mathématiques et représentation graphique. Nous nous limiterons dans cette note, à exposer un aspect particulier concernant la représentation graphique d'un graphe. Cette question, très importante pour les rédacteurs graphiques, pose deux problèmes mathématiques intéressants ; le premier est original, à notre connaissance ; nous nous contenterons de quelques remarques préliminaires à son étude ; le second est par contre classique : il comprend comme cas particulier le problème de la reconnaissance des graphes planaires ; nous donnons les indications bibliographiques correspondantes.

Pour le premier, nous souhaitons que des mathématiciens « graphistes » s'y intéressent, et bien entendu nous publierons tout résultat obtenu dans ce domaine (ou toute information sur des résultats déjà connus).

LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UN GRAPHE.

La donnée de base à représenter est un graphe $G = (E, R)$ où E est un ensemble, R une relation binaire sur E . G sera donné, par exemple, par sa matrice d'incidence :

	a	b	c	d	e
a	0	0	0	1	1
b	1	0	0	1	1
c	1	0	0	1	1
d	1	0	1	0	1
e	0	1	1	1	0

(Le premier élément du couple est en ligne.)

On peut évidemment, représenter graphiquement un tel graphe de multiples façons ; J. Bertin en donne 17 dans [16], page 270. On va s'intéresser ici à deux modes de représentation dénommés respectivement (par J. Bertin) linéaire et en semis.

REPRÉSENTATION LINÉAIRE.

Les sommets du graphe sont représentés par des points du plan alignés sur une droite ; les arêtes par des lignes courbes joignant les points en correspondance. La droite définit un ordre sur les sommets (par exemple, de gauche à droite), et par convention les arêtes seront dessinées au-dessus ou au-dessous de la droite suivant qu'elles sont ou non en conformité avec l'ordre sur les sommets.

Par exemple, le graphe précédent se représente ainsi :

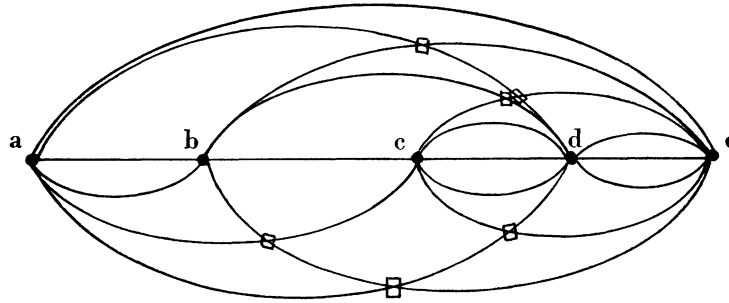


Fig. 1

REPRÉSENTATION EN SEMIS.

Les sommets du graphe sont représentés par des points du plan ; on peut supposer qu'un, au moins, des points est à « l'intérieur » des autres, c'est-à-dire situé dans leur fermeture convexe ; ceci, si l'on veut exclure les configurations de type polygonal. Les sommets en relation sont joints par des lignes : si deux sommets sont joints dans un sens on utilisera une ligne orientée ; s'ils sont joints dans les deux sens on utilisera deux lignes orientées, ou une seule ligne non orientée.

Par exemple, le graphe précédent se représente ainsi :

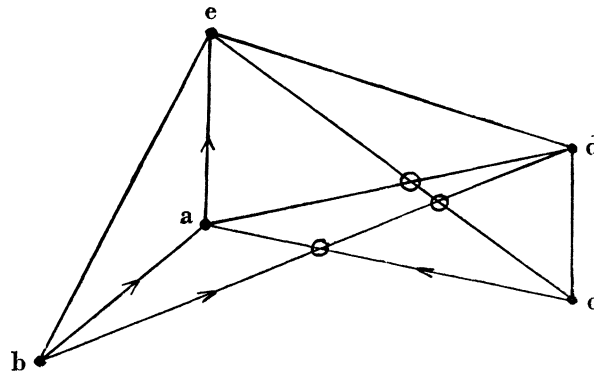


Fig. 2

LE PROBLÈME CENTRAL.

Les deux représentations précédentes utilisent des points et des lignes ; ces lignes se coupent aux points représentatifs des sommets, mais elles peuvent aussi se couper en d'autres points, que nous avons entourés d'un cercle dans les deux figures précédentes. Le problème de la représentation graphique consiste alors à trouver une disposition des points et des lignes minimisant le nombre des points non significatifs. Aux deux représentations précédentes correspondent donc deux problèmes mathématiques.

PROBLÈME 1.

Il s'agit de trouver un ordre sur les sommets du graphe minimisant dans la représentation linéaire correspondant à cet ordre, le nombre d'intersections des arêtes.

Ainsi, pour le graphe G pris comme exemple, on trouve la solution suivante :

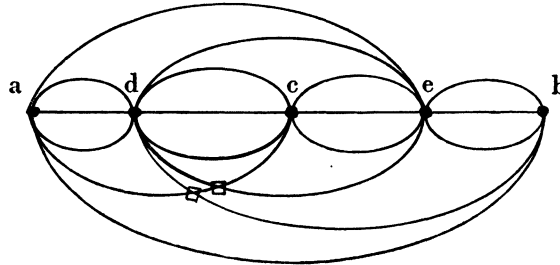


Fig. 2 bis

PROBLÈME 2.

Il s'agit de trouver une disposition des sommets du graphe dans le plan minimisant le nombre d'intersections — non à leurs extrémités — des arêtes. En particulier s'il existe une disposition pour laquelle il n'y ait aucune intersection, le graphe est par définition planaire ; c'est le cas du graphe de l'exemple :

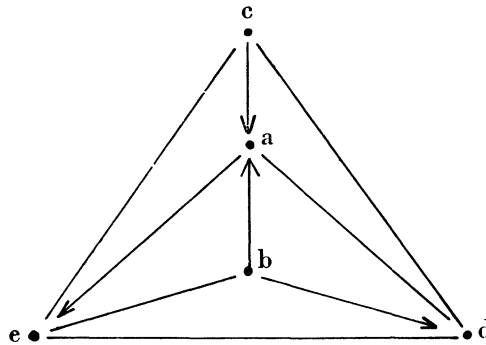


Fig. 3

REMARQUES SUR LE PROBLÈME 1.

Soit $G = (E, R)$ un graphe à n sommets ; on pose :

$$O_n = \{ \text{ordres totaux } T \text{ sur } E \}$$

$I_G(T)$ = nombre d'intersections des arêtes dans la représentation linéaire de G correspondant à l'ordre T .

L'intersection de deux arêtes (supérieures dans le dessin) correspond aux données suivantes :

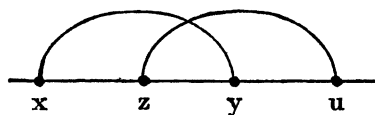


Fig. 4

$$x < z < y < u \text{ pour l'ordre } T$$

$$(x, y) \in R \text{ et } (z, u) \in R.$$

On dira que $\{x, z, y, u\}$ forme une sous-chaîne alternée de T .

Posons $c_G(T)$ = nombre de sous-chaînes alternées et soit \bar{T} l'ordre inverse de l'ordre T ; on a :

$$I_G(T) = c_G(T) + c_G(\bar{T}).$$

Pour un graphe donné G , on doit :

- trouver $I_G = \min [c_G(T) + c_G(\bar{T})] \quad T \in O_n$;
- construire effectivement la ou les solutions correspondant à ce minimum.

C'est évidemment un algorithme de construction d'une solution optimale pour un graphe quelconque qui intéresserait le plus les rédacteurs graphistes (on peut d'ailleurs se limiter aux graphes connexes). A ce propos, il est clair qu'on diminuera le nombre de chaînes alternées, en choisissant un ordre T vérifiant la condition : le nombre d'arêtes entre deux éléments consécutifs de T communes avec G est maximum ; ce critère revient pour la matrice d'incidence de G à maximiser le nombre des éléments sur les deux lignes transversales au-dessus et au-dessous de la diagonale. C'est ce critère qui a été utilisé par J. Bertin, pour trouver la solution de l'exemple. Mais ce critère est insuffisant car il peut conduire à des solutions multiples et non optimales ; c'est en particulier le cas si G est un graphe de tournoi (antisymétrique et total) ; en effet, le nombre d'éléments sur les deux transversales précédentes est alors fixé.

Un cas particulier intéressant est celui où le graphe à représenter est le graphe d'une relation d'ordre T sur n éléments ; il faut alors choisir un autre ordre pour représenter linéairement T .

En effet, $I_T(T) = \binom{n}{n-4}$ nombre très au-dessus du minimum I_T . Par exemple, pour l'ordre (alphabétique) sur cinq éléments, on obtient $I_{T_6} = 1$; on a représenté ci-dessous une des solutions possibles :

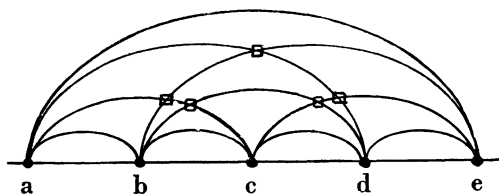


Fig. 5

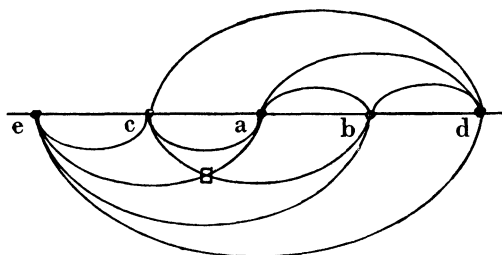


Fig. 6

Cette solution a été obtenue au moyen d'un algorithme qui, s'il donne une solution optimale, conduirait aux valeurs :

$$I_{T_6} = 4 \qquad I_{T_7} = 11$$

et de façon générale à :

$$I_{T_{2p}} = 4 \sum_{k=2}^{p-1} (p-k)(k-1)^2 \qquad I_{T_{2p+1}} = \sum_{k=1}^{p-1} (p-k)(2k-1)^2.$$

On peut aussi remarquer qu'en général, le nombre d'intersections n'est pas invariant par une permutation circulaire de l'ordre de la représentation linéaire. D'autre part :

$$c(G) \leq I(G)$$

où $c(G)$ est le nombre minimum d'intersections pour le problème 2.

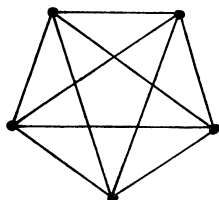
Enfin, il faut signaler que le problème de la représentation linéaire d'un graphe est un cas particulier d'un problème plus général de représentation suivant une figure du plan ; par exemple, on pourrait s'intéresser au problème de la représentation circulaire d'un graphe.

BIBLIOGRAPHIE DU SECOND PROBLÈME.

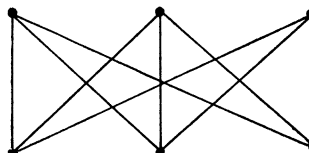
L'aspect le plus simple du deuxième problème est celui-ci : un graphe G quelconque étant donné, dire s'il est planaire, c'est-à-dire s'il peut être tracé sur le plan ou, ce qui revient au même, sur la sphère, sans que deux quelconques de ses arêtes se coupent, et en donner éventuellement un tel tracé.

Diverses conditions nécessaires et suffisantes ont été données :

Condition de Kuratowski [1] (donnée dans Berge [6]). G est planaire si et seulement s'il ne contient pas de sous-graphe homéomorphe à K_5 ou à $K_{3,3}$, K_i étant le graphe complet à i sommets et $K_{j,l}$ le graphe bichromatique complet à j et l sommets.



K_5
Fig. 7



$K_{3,3}$
Fig. 8

Condition de H. Whitney [2]. G connexe, à m sommets et n arêtes, est planaire si et seulement s'il contient $m - n + 1$ cycles, indépendants pour la différence symétrique, tels que toute arête appartienne à deux au plus de ces cycles.

Une troisième condition classique est à la base de nombreux algorithmes. Exprimée pour un problème plus général par Tutte, puis Ghouila-Houri, on la trouve dans [9]. De formalisation plus complexe que les deux précédentes, elle exprime que pour tout cycle élémentaire φ d'un graphe planaire G , on peut construire deux graphes planaires G_1 et G_2 tels que :

$$G_1 \cup G_2 = G \qquad G_1 \cap G_2 = \varphi$$

et que G_1 et G_2 peuvent être tracés planairement en laissant vide l'une des deux régions du plan définies par φ . (φ est une face de G_1 et de G_2 .)

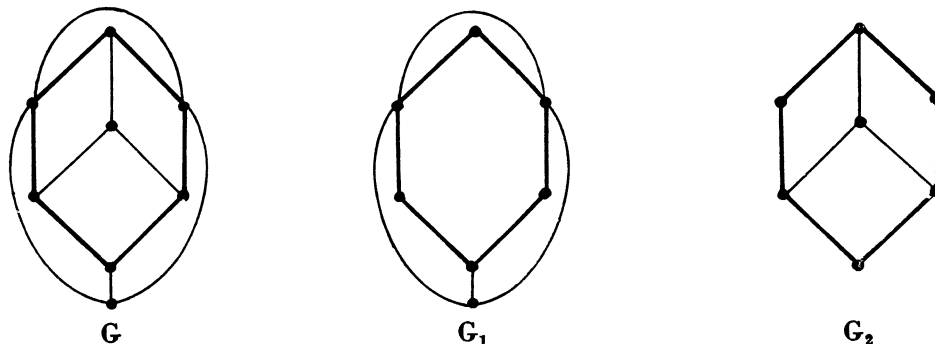


Fig. 9

La reconnaissance d'un graphe planaire s'effectue, en fait, en faisant fonctionner un algorithme de tracé sur le plan, observant si le graphe entier peut être ainsi construit. De tels algorithmes sont maintenant assez nombreux. Leur formulation est toujours assez lourde, lorsqu'elle est complète. Nous donnons cinq références [5], [9], [13], [14] et [15] et deux autres [4], [12] pour un problème un peu plus général. Les algorithmes décrits dans [4], [5] et [13] sont très proches. Le premier est incomplètement, mais clairement formulé. C'est celui que le lecteur aura d'abord intérêt à regarder pour un survol. L'algorithme [9], dont [15] donne une variante, nous paraît particulièrement intéressant.

Diverses généralisations de ce qui précède ont été proposées. Le problème qui nous intéresse le plus ici est de déterminer $c(G)$, le nombre minimal d'intersections deux à deux des arêtes de G tracé sur le plan, ainsi que le tracé correspondant. Pour un graphe planaire, on a $c(G) = 0$. Pour le graphe bichromatique complet, Zarankiewicz [3] a montré que :

$$c(K_{2m,2n}) = (m^2 - m)(n^2 - n)$$

$$c(K_{2m,2n+1}) = (m^2 - m)n^2$$

$$c(K_{2m+1,2n+1}) = m^2 n^2.$$

Pour le graphe complet, Harary et Hill [7] ont, par une construction explicite, établi :

$$c(K_n) \leq \frac{1}{64} (n-1)^2 (n-3)^2 \quad n \text{ impair,}$$

$$c(K_n) \leq \frac{1}{64} n (n-4) (n-2)^2 \quad n \text{ pair.}$$

Cette borne supérieure est la valeur exacte dans les cas connus.

Deux autres nombres attachés à un graphe peuvent être recherchés : $h(G)$, épaisseur du graphe G , est le nombre minimal de graphes planaires dont G est l'union. $\gamma(G)$, genre du graphe, est le genre minimal d'une surface orientable sur laquelle il peut être tracé sans que deux de ses arêtes ne se coupent (si l'on considère une surface orientable S comme une « sphère munie d'anses », le genre de S est son nombre d'anses. Le genre du tore est 1, celui du bretzel à deux trous 2, etc.).

Pour un graphe planaire on a donc $h(G) = 1$ et $\gamma(G) = 0$. J. W. T. Youngs a montré qu'une surface sur laquelle G est tracé est de genre minimal si et seulement si ce tracé la « découpe » en cellules, sans « anses » ni « trous », et en nombre maximal. La plupart des résultats précis sur $h(G)$ et $\gamma(G)$ ont été obtenus sur des graphes du type K_n et $K_{n,p}$. On en trouvera un grand nombre dans [7].

Note.

Le problème de $c(K_{i,j})$ a été rouvert en 1968, divers auteurs ayant remarqué une faille dans la démonstration du théorème de Zarankiewicz. Les valeurs données ci-dessus ne peuvent être considérées en général que comme des bornes supérieures. Elles sont cependant exactes pour les cas connus ($i \leq 6$, $j \leq 8$). Le point de la question a été fait par R. K. Guy [19] qui signale que de nouveaux résultats ont été annoncés, à paraître prochainement dans le *Journal of Combinatorial Theory*.

RÉFÉRENCES

- [1] KURATOWSKI C. — “Sur le problème des courbes gauches en topologie”, *Fund. Math.*, 15, 271-283. 1930.
- [2] WHITNEY H. — “Non separable and planar graph”, *Trans. Am. Math. Soc.*, 34, 339-362. 1932.
- [3] ZARANKIEWICZ K. — “On a problem of P. Turan concerning graphs”, *Fund. Math.*, 41, 137-145. 1954.
- [4] TUTTE W. T. — “An algorithm for graphic binary matroids”, *Proc. Am. Math. Soc.*, 11, 905-917. 1960.

- [5] ANSLANDER L. & PORTER S. V. — “On embedding graphs in the sphere”, *J. Math. Mech.*, 10, 517-523. 1961.
- [6] BERGE C. — *Théorie des graphes et ses applications*, Paris, Dunod, 1963.
- [7] HARARY F. & HILL A. — “On the number of crossings in the complete graph”, *Proc. Edimburgh Math. Soc.*, 13, 333-338. 1963.
- [8] YOUNGS J. W. T. — “Minimal embeddings and the genus of a graph”, *J. Math. Mech.*, 12, 303-315. 1963.
- [9] DEMOUCHEON G., MALGRANGE T. & PERTUISET R. — « Graphes planaires : reconnaissance et construction de représentations planaires topologiques », *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, 8, 34-37. Avril 1964
- [10] GHOUILA-HOURI A. — « Flots et tensions dans les graphes », Parag. 2, *Annales Sci. E.N.S.*, 81, 267-339. 1964.
- [11] HARARY F. — “Recent results in topological graph theory”, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 15, 405-412. 1964.
- [12] TUTTE W. T. — “From matrices to graphs”, *Canad. J. of Math.*, 16, 108-127. 1964.
- [13] FISHER G. J. & WING O. — “Computer recognition and extraction of planar graphs from the incidence matrix”, *IEEE Trans. CT.B*, 154-163. 1966.
- [14] LEMPEL A., EVEN S. & CEDERBAUM J. — “An Algorithm for planarity testing of graphs” - Théorie des graphes”, *Journées Internationales d'Étude*, Rome, juillet 1966. Paris, Dunod, 1967.
- [15] HOTZ G. — “Einbettung von Streckenkomplexen in die Ebene”, *Math. Ann.*, 214-233. 1967.
- [16] BERTIN J. — *Sémiologie graphique*, Paris, Gauthier-Villars et Mouton, 1967.
- [17] BARBUT M. — « Idéogrammes, graphiques et géométrie », *Mathématiques et Sciences Humaines*, 6, 29-36. 1964.
- [18] GUY R. K. — *The crossing number of the complete graph*, Mathematics Department, Univ. of Calgary, Calgary, Alberta, Research Paper n° 8, January 1967.
- [19] GUY R. K. — “The decline and fall of Zarankiewicz’s theorem”, in *Proof Techniques in Graph Theory*, ed. by F. Harary, New York et Londres, Academic Press. 1969.