MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

HENRI DURUP

Graphes et plans d'expériences temporels, mots circulaires et plans toriques

Mathématiques et sciences humaines, tome 18 (1967), p. 1-31

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1967__18__1_0>

Henri DURUP *

GRAPHES ET PLANS D'EXPERIENCES TEMPORELS, MOTS CIRCULAIRES ET PLANS TORIQUES

INTRODUCTION

Il ne s'agit pas ici des plans à grand nombre de sujets entre lesquels sont réparties diverses combinaisons des traitements, tels que ceux qu'on utilise en agronomie ou en psychologie avec l'intention d'une exploitation par les méthodes de l'analyse de la variance; de tels plans ont fait l'objet de multiples ouvrages. Il s'agit au contraire de plans destinés à des expériences portant sur un petit nombre de sujets subissant un grand nombre d'épreuves consécutives. On cherche alors à équilibrer l'ordre des épreuves de façon à compenser les effets (mnémoniques ou autres) des épreuves subies sur les épreuves ultérieures. COX (1958) ne consacre qu'une demi-page à cette catégorie de plans, qui n'ont fait l'objet que d'un nombre minime de travaux.

Dans une certaine mesure, les séries très connues proposées par GELLERMANN (1933) se rattachent à ce groupe. Ce sont des séries de dix éléments appartenant à deux catégories, par exemple g et d pour indiquer les côtés successifs où doit être placée la récompense dans un dispositif à apprentissage discriminatif. Sur les 1024 séries possibles à priori, l'auteur retient 44 séries qui satisfont à 5 critères; il ajoute une règle d'enchaînement des séries. Les séries de GELLERMANN ont été beaucoup utilisées par les psychologues (ce sont pratiquement les seules citées). Si les fréquences des deux éléments différents sont égales sur les 44 séries (elles le sont dans chaque série), par contre, les fréquences des doublets, triplets et quadruplets divergent de façon importante; en s'exprimant en fréquences conditionnelles (la barre verticale signifiant "après"), on obtient, pour l'ensemble des 44 séries:

$f\,(d \mid d) = 0{,}445,$	$f\,(d \mid ddd) = 0,$
$f\,(d \mid g) = 0{,}555;$	$f\,(d \mid gdd) = 0{,}22,$
$f\,(d \mid dd) = 0{,}18,$	$f\,(d \mid ddg) = 0{,}34,$
$f\,(d \mid dg) = 0{,}36,$	$f\,(d \mid gdg) = 0{,}41,$
$f\,(d \mid gd) = 0{,}64,$	$f\,(d \mid dgd) = 0{,}59,$
$f\,(d \mid gg) = 0{,}82;$	$f\,(d \mid ggd) = 0{,}66,$
	$f\,(d \mid dgg) = 0{,}78,$
	$f\,(d \mid ggg) = 1.$

* Chargé de recherche au C.N.R.S.- Institut de Neurophysiologie et Psychophysiologie (Département du Comportement Animal) - Marseille.

FELLOWS (1967) a également critiqué ces séries et formulé une proposition de séries à 12 termes.

Les autres travaux se rapportent à la méthode des "bioassays". FINNEY & OUTHWAITE (1956) ont proposé des séquences formées de blocs où chaque élément figure une fois et une seule, et telles que chaque paire ordonnée possible de deux éléments soit présente une fois et une seule dans les paires d'éléments consécutifs de la séquence. Les propriétés de ces séquences, qui peuvent ou non comporter les paires consistant dans le redoublement d'un élément, ont été étudiées par SAMFORD (1957).

Notre propre but est essentiellement l'élimination, dans une expérience de psychologie, des indications que le sujet peut trouver dans la série des situations qu'on lui a présentées, pour "deviner" certaines caractéristiques de la situation suivante. En particulier s'il s'agit de sujets animaux, nous dirons qu'une certaine série antérieure peut "faciliter" une réponse au détriment d'une autre, introduisant un biais dans l'expérience, s'il y a une corrélation entre les réponses ainsi facilitées et les réponses correctes. Nous ne prétendons pas supprimer toute influence du passé sur les réponses, ce qui est évidemment impossible, mais nous nous fixons pour objectif de supprimer toute influence systématique, compte tenu d'une certaine limitation supposée de la mémoire du sujet.

On rejette les plans purement aléatoires, seuls à garantir l'imprévisibilité absolue, pour des raisons évidentes. Un plan purement aléatoire peut présenter une distribution très irrégulière des différentes variables. D'autre part, il peut comporter certaines régularités séquentielles excessives, auxquelles le sujet sera amené à réagir, ce qui retardera le moment où il portera son attention sur les indices pertinents dans la situation. Mais, bien entendu, à partir du moment où on se donne des contraintes pour déterminer un plan d'expérience, dans le sens d'une imitation, à petite échelle, de l'homogénéité que le hasard fournit sur un nombre infini d'épreuves, on est obligé d'introduire des hétérogénéités en ce qui concerne d'autres aspects du plan. C'est en fonction du problème concret qu'il convient de déterminer l'optimum.

Quelques définitions

Nous considérons des situations beaucoup plus complexes que celles qui ont été envisagées par les auteurs que nous avons cités. Ce que ces auteurs appellent "traitement" dans la théorie des plans d'expériences correspond ici à une ou plusieurs variables de la situation expérimentale (positions des réponses correctes dans les compartiments ordonnés, délai entre deux signaux, stimulation d'une structure du S.N.C., etc .), dont l'ensemble constitue un "élément" uni- ou pluridimensionnel, $\mathcal{A} = ({}^{1}a, {}^{2}a, \ldots, {}^{r}a, \ldots, {}^{b}a)$, qui sera reproduit avec des valeurs différentes "étapes" du plan. Nous employons le terme "étape" afin de désigner l'unité temporelle élémentaire du plan, dont la structure éventuellement complexe est ensuite régulièrement répétée dans le temps pour former le plan; une étape peut comporter plusieurs épreuves consécutives pour chaque sujet; lorsque plusieurs sujets subissent la même expérience, nous appelons "parcours" l'étape relative à un sujet, le terme "étape" s'appliquant à l'ensemble des sujets. Un "élément" du plan est donc, par définition, relatif à un "parcours". Si tous les sujets subissent exactement la même succession d'épreuves avec les mêmes valeurs des variables élémentaires, "parcours" et "étape" se confondent, et un élément du plan est relatif à une étape.

Un "élément" e est donc un multiplet de "variables élémentaires" ${}^{r}a$ qui peuvent éventuellement prendre leurs valeurs (${}^{r}a^{k} \epsilon {}^{r}A$) sur un même ensemble ($a^{k} \epsilon A$). Dans ce dernier cas, nous appelons les variables élémentaires des "points". C'est le cas où un élément est formé de la succession des positions fixées pour la clef correcte dans un groupe d'épreuves successives analogues (parcours): chaque "point" ${}^{r}a^{k}$ est défini par le rang r de l'épreuve dans le parcours (par exemple rang du compartiment dans une chaîne de compartiments semblables) et la position a^{k} correspondante de la clef correcte. Deux points appartenant à deux éléments différents sont identiques lorsque la même position est correcte pour l'épreuve de même rang dans le parcours.

Les plans les plus généraux que nous envisagerons sont des ensembles d'éléments doublement ordonnés (par exemple par rapport aux étapes successives et par rapport aux différents sujets). Nous appelons "élément local" un élément situé dans le plan et de même "variable locale" une variable élémentaire située dans le plan.

Un plan d'expérience est défini par un <u>graphe primaire</u> indépendant des valeurs qui sont attribuées aux variables locales qui figurent dans le plan, et qui ne dépend que du protocole expérimental général, du groupement des essais, du nombre des sujets, du nombre total des essais, etc. Si on attribue aux variables locales des valeurs purement aléatoires, indépendantes les unes des autres, le plan n'a pas d'autre structure. Si, au contraire, on impose des conditions qui interdisent au multiplet représentant <u>toutes</u> les variables locales du plan de prendre certaines valeurs (dans le domaine qui est le produit de ceux des différentes variables), on munit le plan d'expérience d'une nouvelle structure, que nous appelons <u>structure secondaire</u>.

Nous analyserons les structures de ces plans d'expériences d'un point de vue algébrique dans un prochain article. Nous utilisons donc ici un langage moins technique, mais un peu lâche.

Les conditions qui caractérisent le plan d'expérience se répartissent, dans le cas où les éléments sont "composés", en conditions <u>internes</u> (intra-élément) et conditions <u>externes</u> (inter-éléments). Elles portent soit sur les <u>distributions</u> des valeurs des variables élémentaires ou des éléments, soit sur les <u>relations</u> entre les valeurs des variables élémentaires ou des éléments occupant certaines positions relatives dans le plan, c'est-à-dire sur ce que nous appelons les <u>transitions</u>. Les principales transitions que nous considérerons appartiennent à deux catégories bien différentes: transitions "modales" et transitions "exhaustives".

Transitions modales

Considérons une fonction qui est définie pour toute paire de deux éléments. Ce peut être, par exemple, dans le cas d'éléments formés de plusieurs points, le nombre des points identiques pour ces deux éléments. Considérons la distribution des valeurs de cette fonction pour tous les couples d'éléments possibles. Si cette distribution présente un mode, et si nous imposons aux éléments voisins dans le plan d'expérience d'être tels que la fonction correspondante prenne la valeur exacte du mode, nous dirons que nous avons fondé le plan sur une "relation modale" entre éléments voisins, ou, plus brièvement, sur une "transition modale".

Par exemple, pour deux parcours corrects choisis au hasard parmi les parcours possibles dans une chaîne de huit compartiments à quatre portes chacun dont une seule correcte, le nombre le plus probable de coïncidences entre portes correctes est 2. La condition suivant laquelle deux parcours voisins doivent avoir exactement 2 points en coïncidence est une relation modale.

Deux parcours voisins dans le plan d'expérience sont en particulier les parcours consécutifs pour un même sujet. Il est souvent souhaitable que le sujet ne rencontre ni plus ni moins de coïncidences entre parcours successifs que ce que donnerait en moyenne le hasard (ici la moyenne coïncide avec le mode); ainsi, on peut espérer que le sujet sera peu attentif aux traces non significatives de ses passages antérieurs, contrairement à ce qui se passerait avec un plan purement aléatoire où le hasard fournirait occasionnellement des parcours consécutifs à grand nombre de coïncidences. Dans la mesure où il est connu (cf. en particulier DURUP, 1964) que les petits Mammifères, placés dans un dispositif du genre labyrinthe, sont très attentifs aux points de passage de leurs congénères, la même relation modale doit être appliquée aux parcours voisins des différents sujets de l'expérience.

Transitions exhaustives

Nous avons vu que les fréquences conditionnelles dans les séries de GELLERMANN sont très différentes entre elles, ce qui permet à un sujet qui est informé du caractère correct ou incorrect de ses essais et qui a subi un certain nombre d'épreuves fondées sur ces séquences, de réagir peu à peu en fonction du fait que les alternances sont plus fréquentes que les redoublements, etc., et donc d'obtenir une note significative même en l'absence de discrimination.

Les séquences de FINNEY et OUTHWAITE comportent un équilibre des fréquences conditionnelles du premier ordre (c'est-à-dire compte tenu de l'élément précédent), par le fait qu'elles contiennent toutes les paires possibles d'éléments une fois et une seule. C'est la généralisation de ce principe à des transitions "complexes", c'est-à-dire englobant plus de deux éléments, qui constitue le principe des plans que nous appelons "à transitions exhaustives".

Considérons un plan dont la structure primaire est constituée par une simple séquence ordonnée d'éléments unidimensionnels, bouclés sur elle-même de façon à former un circuit orienté. Soit <u>n</u> le cardinal de l'ensemble des valeurs qui peuvent être prises par les éléments. Considérons les "m-uplets" formés de <u>m</u> éléments consécutifs dans le circuit. La relation primaire met en rapport chaque élément avec le m-uplet qui le précède. Contrairement à ce qui se passait dans le cas des transitions modales, la structure secondaire sera définie, non pas par une relation restreignant le domaine des possibles séparément pour chaque couple (m-uplet, élément), mais par une relation sur l'ensemble de ces couples: tous les couples différents possibles devront être présents une fois et une seule dans le circuit. La relation secondaire n'est évidemment compatible avec la relation primaire que si la longueur du circuit est égale au nombre des couples possibles, soit n^{m+1}. Nous appelons circuit à transitions exhaustives du m^e ordre, ou en abrégé "circuit exhaustif", un circuit qui satisfait à ces conditions. Nous appelons "séquence exhaustive" une séquence obtenue par coupure d'un tel circuit en un point; son type, caractérisé par les nombres n et m, sera désigné par Q_n^m.

Supposons que nous utilisions toujours le même circuit comme plan d'expérience pour un grand nombre d'expériences avec le même sujet (cas des expériences programmées automatiquement). Si la mémoire du sujet ne peut contenir que les $\underline{m}$ éléments antérieurs du plan au moment où le sujet est soumis à l'épreuve caractérisée par l'élément suivant, il lui est impossible de prévoir la valeur de cet élément, qui prend dans le circuit toutes les valeurs possibles après les $\underline{n}$ occurences de chaque m-uplet. C'est notre collègue C. TREVARTHEN qui a eu l'idée d'utiliser ce type de séquences dans les expériences de psychologie; nous avons alors étudié ensemble leurs propriétés générales en relation avec les nécessités de l'expérimentation, et cette étude devrait paraître prochainement. Par conséquent, nous décrirons surtout ici des plans plus complexes qui, s'ils font intervenir de telles séquences, possèdent des propriétés supplémentaires, et en particulier nous consacrerons la dernière section aux plans exhaustifs à deux dimensions.

Séquences, circuits, cycles et structures cycliques

Une séquence est une suite ordonnée d'éléments que nous écrivons dans l'ordre où ils se suivent, par exemple:

c a b b d a b.

Un circuit est une suite ordonnée rebouclée sur elle-même; en le coupant en un point, on obtient une séquence; nous représentons un circuit par l'une des séquences qui s'en déduit ainsi par coupure, et en répétant entre parenthèses la lettre qui suit la coupure et figure au début de l'écriture; ainsi les deux écritures:

c a b b d a b (c)

et b d a b c a b (b)

représentent le même circuit.

Un cycle est un circuit non orienté, que nous désignons par la lettre C suivie entre parenthèses d'une séquence quelconque obtenue par coupure du cycle en un point; ainsi les deux écritures:

C (c a b b d a b)

et C (d b b a c b a)

représentent le même cycle.

Une structure cyclique est la famille des cycles qui se correspondent par permutation entre les catégories d'éléments; nous la représentons à partir de l'écriture de l'un quelconque des cycles de la famille en remplaçant la lettre C par la lettre S; ainsi les deux écritures:

S (c a b b d a b)

et S (c a a b d a b)

représentent la même structure cyclique: la seconde séquence entre parenthèses se déduit de la première par changement de sens (→ badbbac), changement d'origine dans le circuit (→ dbbacba), permutation des lettres a et b d'une part, c et d d'autre part (→ caabdab).

Classement et caractéristiques des plans

Nous avons recherché en premier lieu des plans à transitions modales (ou de type analogue) et à deux dimensions externes, c'est-à-dire que la localisation des éléments est à deux dimensions (individus, étapes), cependant qu'une troisième dimension du plan correspond à la répartition des variables élémentaires sur l'élément (ces variables peuvent être soumises à une condition de transitions exhaustives interne à l'élément). Cette catégorie de plans a été étudiée pour nos propres besoins expérimentaux, à propos de dispositifs constitués le plus souvent par une chaîne de compartiments pour apprentissage de discrimination. La méthode la plus générale de recherche de ces plans consiste à déterminer l'ensemble des valeurs possibles des éléments, compte tenu des conditions internes, puis à construire le "graphe secondaire" qui caractérise, sur cet ensemble, les transitions permises, enfin à distribuer les valeurs sur le plan ("graphe primaire") de façon que les éléments voisins aient des valeurs liées sur le graphe secondaire.

Nous avons recherché en second lieu des plans à transitions exhaustives et à une dimension externe, les éléments du plan étant éventuellement complexes. La méthode de recherche de ces plans commence par l'établissement d'un graphe dont un circuit eulérien servira de base à la construction du plan. Ces plans à "circuits exhaustifs", ou "plans cycliques exhaustifs" car leurs propriétés ne dépendent pas du sens du circuit, concernent en général des expériences programmées, et les éléments complexes éventuels sont constitués de variables de natures distinctes; les conditions de transitions exhaustives peuvent être multiples pour un même plan, portant sur différentes variables élémentaires, isolées ou impliquées ensemble.

Enfin, nous avons cherché à généraliser à deux dimensions les plans cycliques exhaustifs à éléments simples. Nous avons par conséquent abordé l'étude des plans "toriques" exhaustifs, la structure torique étant la généralisation de la structure cyclique de la même façon qu'une matrice est la généralisation d'un vecteur.

Nous avons groupé les plans que nous avons construits en trois sections:

A - Plans à deux dimensions externes et à relations simples.

B - Plans cycliques exhaustifs.

C - Plans toriques exhaustifs.

Les plans "exhaustifs" étudiés sont en général à transitions <u>complexes</u>, c'est-à-dire portant simultanément sur plusieurs éléments. Au contraire, les plans "modaux" étudiés sont toujours à transitions <u>simples</u>.

A - PLANS A DEUX DIMENSIONS EXTERNES ET A RELATIONS SIMPLES

En général ces plans concernent des parcours de plusieurs animaux dans des "labyrinthes variants" formés d'une chaîne de compartiments analogues comportant chacun un certain nombre de "clefs" (qui peuvent être par exemple des portes d'issue) dont une seule est correcte. Un "élément local" du plan correspond alors à la liste des positions (numérotées par exemple de gauche à droite) des clefs correctes dans les compartiments successifs, pour un sujet et une étape déterminés, autrement dit pour un parcours déterminé. Dans ce cas, nous appelons "séquences" les éléments du plan.

Nous désignerons ces plans par "a x b (xc)"; a est le nombre des valeurs possibles pour chaque variable élémentaire (par exemple nombre de clefs par compartiment) et b le nombre des variables élémentaires de l'élément (ici nombre d'épreuves par étape, par exemple nombre de compartiments du dispositif); c est le nombre des sujets ou, pour le dernier plan, le nombre des indices (éléments du stimulus): c'est le nombre des valeurs possibles sur l'une des dimensions externes (sur l'autre dimension externe, l'ordre de grandeur du nombre des étapes de l'expérience est déterminé mais leur nombre exact n'est pas fixé à priori). Le nombre c est entre parenthèses parce que sa valeur n'influe pas sur le début du protocole de recherche du plan.

Plan 2 × 6 (× 3)

Les conditions désirées sont les suivantes:

a) distribution interne:

1) chacune des positions (1 ou 2) figure 3 fois dans chaque séquence.

b) relations internes:

2) on souhaite que la fréquence des redoublements se rapproche de 1/2, une fois les autres conditions remplies;

c) distribution externe:

3) on désire utiliser pour chaque sujet le plus grand nombre possible de séquences distinctes, avec des fréquences égales de chacun des 12 points.

d) relations externes:

4) on définit une relation entre les séquences de la façon suivante: deux séquences "liées" ont deux points communs (deux séquences satisfaisant la première condition ne peuvent avoir qu'un nombre pair de points communs); cette condition de

"liaison" doit s'appliquer aux couples de séquences proches, en nombre aussi grand que possible, dans deux dimensions (pour un même sujet et pour une même étape).

Le nombre des séquences possibles est ici assez limité: $C_6^3 = 20$. Ce sont les suivantes:

a :	111222	f :	121212	k :	211122	p :	212211
b :	112122	g :	121221	l :	211212	q :	221112
c :	112212	h :	122112	m :	211221	r :	221121
d :	112221	i :	122121	n :	212112	s :	221211
e :	121122	j :	122211	o :	212121	t :	222111

Il nous faut étudier la structure déterminée par la relation "avoir deux points en commun", qui correspond à deux séquences que nous appelons "liées".

Le graphe de cette relation est représenté par la fig. 1, où les éléments, ou "sommets", désignés par les lettres sont les séquences, les traits, ou "arêtes", constituant les liaisons. Ses propriétés sont les suivantes. Chaque séquence est liée à neuf autres séquences. Deux séquences liées entre elles sont liées toutes les deux à quatre séquences, elles-mêmes liées deux à deux. Trois séquences liées mutuellement (c'est-à-dire chacune liée aux deux autres) sont liées toutes les trois à une même séquence. Les sous-graphes complets maximaux ont donc quatre sommets; ils sont au nombre de 30, et deux d'entre eux ont au maximum une arête commune: ils apparaissent comme des tétraèdres sur la figure, par exemple a p h r et a p q i qui ont été représentés avec un trait plus épais.

Ces sous-graphes complets, appelés aussi "cliques", peuvent être considérés comme ensembles intérieurement stables maximaux du graphe complémentaire (cf. BERGE, 1958). Mais dans le cas présent, où les cliques sont petites, on les obtient directement avec facilité.

Les cliques de 3 séquences (nous les appellerons ici "triades") sont uniquement des sous-graphes des cliques de 4 séquences (que nous appellerons "tétrades"); elles sont donc au nombre de 120, groupées quatre par quatre dans les 30 tétrades, elles-mêmes répartissables en 15 groupes de deux tétrades n'ayant aucune liaison entre elles.

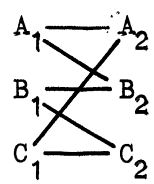
Deux triades ne peuvent avoir tous leurs éléments ("sommets") liés deux à deux, mais chaque élément de l'une peut être lié à un élément de l'autre (par exemple p h r et q o j) ou à deux éléments de l'autre (par exemple p h r et d f k). On peut ainsi obtenir une succession de six triades telles qu'il y ait six liens entre deux triades consécutives et trois liens entre deux triades séparées par une (et on peut relier en boucle la dernière à la première en conservant ces propriétés), par exemple, avec une colonne par étape:

k	r	g	j	c	n
f	h	b	o	m	s
d	p	l	q	e	i

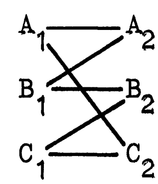
On utilise ainsi tous les éléments possibles sauf deux opposés, a et t, qui constituent d'ailleurs un noyau du graphe (ensemble de sommets non liés entre eux et tels que tout autre sommet est lié à l'un d'entre eux). La condition (3) sera satisfaite si chaque sujet est soumis à ces 18 séquences qui, dans le bloc ci-dessus, ne représentent encore que 6 séquences par sujet.

Nous avons inscrit ces éléments de façon symétrique, c'est-à-dire en plaçant côte à côte les éléments non liés, sur chaque ligne. Si nous désirons utiliser chaque ligne pour un sujet, il faut choisir l'un des schémas de liaison suivants entre deux triades-colonnes:

x



y



L'utilisation de ces dispositions x et y mêlées permet le raccordement avec deux nouveaux blocs obtenus par permutation entre les lignes du bloc précédent, fournissant ainsi un plan pour 18 étapes, à condition d'utiliser les schémas <u>x</u> et <u>y</u> suivant une suite appropriée, comme par exemple xxyyyyxxyyyyxxyyy, d'où le plan (qui peut être ensuite bouclé sur lui-même):

k	h	l	o	c	i	f	p	g	q	m	n	d	r	b	j	e	s
f	p	g	q	m	n	d	r	b	j	e	s	k	h	l	o	c	i
d	r	b	j	e	s	k	h	l	o	c	i	f	p	g	q	m	n

Ainsi, on a utilisé pour chaque sujet 18 séquences sur 20, mais on n'a employé que 6 triades sur 120. Peut-on améliorer le résultat en ne choisissant pas en partie au hasard comme ce fut le cas ? Ici intervient d'abord la condition (2).

L'ensemble des 20 séquences comporte 40 redoublements et 60 alternances, ce qui est néfaste puisque le comportement d'alternance est ainsi favorisé. En choisissant comme noyau éliminé celui composé des éléments <u>f</u> et <u>o</u> qui ne comportent aucun redoublement, nous ramenons le nombre d'alternances à 50 (avec toujours 40 redoublements) pour 18 séquences.

Les triades correspondant au noyau (f, o) sont au nombre de 12, la moitié appartenant à des tétrades ayant <u>f</u> pour sommet, la moitié à des tétrades ayant <u>o</u> pour sommet; en séparant encore ces deux moitiés en groupes n'ayant pas d'élément répété, on peut les répartir en quatre groupes (à gauche, éléments liés à <u>f</u>; à droite, éléments liés à <u>o</u>):

b	d	i	s	q	l
m	n	k	h	g	j
t	r	p	a	c	e

b	d	i	s	q	l
p	k	m	e	j	h
r	t	n	c	a	g

On pourra à volonté utiliser les six triades du haut ou les six triades du bas. Avec ces dernières, on obtiendra par exemple, d'une façon analogue à la précédente, le plan:

l	t	c	i	q	b	g	k	s	n	a	p	h	d	e	m	j	r
g	k	s	n	a	p	h	d	e	m	j	r	l	t	c	i	q	b
h	d	e	m	j	r	l	t	c	s	q	b	g	k	s	n	a	p

Lorsqu'on désire des suites pour plus de 18 étapes et qu'on ne veut pas reprendre la même, le problème de la succession de ces blocs se pose. On dispose du bloc que l'on peut écrire de façon parallèle à partir des six triades du haut. Et on peut recopier ces blocs de droite à gauche. D'autre part, le bloc initial a été obtenu à partir d'une suite arbitraire de schémas de transition x et y. Or ces suites sont au nombre de 15 possibles, constituées chacune par la répétition de trois suites identiques de 6 éléments x et y dont 2 x et 4 y ou 2 y et 4 x (par exemple x x y y y y que nous avons utilisée dans notre exemple). Ainsi, on peut écrire 60 blocs des 3 x 18 séquences qui satisfont aux conditions recherchées.

Plan 3 × 6 (× 3)

Les conditions désirées sont analogues à celles du plan précédent:

a) distribution interne:

1) chaque position (1, 2 ou 3) est présente 2 fois dans chaque séquence.

b) relations internes:

2) on souhaite que la fréquence des redoublements se rapproche de 1/3, une fois les autres conditions remplies;

c) distribution externe:

3) on désire utiliser pour chaque sujet le plus grand nombre possible de séquences distinctes, avec des fréquences égales de chacun des 18 points;

d) relations externes:

4) deux séquences seront dites "liées" lorsqu'elles ont deux points communs (deux fois une même position à un même rang de la séquence); on désire obtenir des blocs où les séquences proches dans deux dimensions soient liées.

Le nombre des séquences possibles est plus élevé que précédemment : $\frac{6!}{2^3} = 90.$

Le nombre des séquences liées à chaque séquence est évidemment une constante, puisque toutes les séquences se déduisent les unes des autres par permutations sur les rangs des chiffres 1, 2 et 3. Considérons donc par exemple la séquence 11·22·33, que nous avons décomposée en 3 doublets par des points; toute séquence qui lui est liée ne peut appartenir qu'à deux groupes: a) 11·33·22 et les deux séquences qui s'en déduisent par permutation circulaire des doublets, ou, ce qui revient au même, des chiffres 1, 2 et 3; b) (23)·(12)·(31), où les parenthèses représentent des combinaisons pouvant chacune donner lieu à deux arrangements (d'où 8 arrangements), et les 16 arrangements qui s'en déduisent par permutation circulaire des doublets (ou des chiffres, ce qui revient encore au même). Il existe donc en tout 27 séquences liées à chaque séquence. On voit aussi d'après ce qui précède que, si deux séquences sont liées, les trois séquences obtenues par permutation circulaire entre les trois chiffres de l'une sont liées avec celles de l'autre.

Il suffit par conséquent de n'étudier que les séquences qui commencent par exemple par 1, et qui ne sont plus qu'au nombre de 30:

a : 112233	g : 121233	m : 122133	q : 122313	y : 122331
b : 112323	h : 121323	n : 123123	t : 123213	z : 123231
c : 112332	i : 121332	o : 123132	u : 123312	α : 123321
d : 113223	j : 131223	p : 132123	v : 132213	β : 132231
e : 113232	k : 131232	q : 132132	w : 132312	γ : 132321
f : 113322	l : 131322	r : 133122	x : 133212	δ : 133221

Chacune d'entre elles est liée à 9 autres. Le graphe de l'ensemble des liaisons est représenté par la fig. 2 d'une façon économique nécessitée par leur très grand nombre: deux éléments, ou sommets, reliés par l'intermédiaire d'un "carrefour" (désigné par une capitale) sont liés, et d'autre part les éléments "opposés" sont liés bien que cela ne soit pas figuré (sont "opposés" les éléments situés dans la position relative de a et f, ou de b et e ou de x et s). Le cercle F' doit être considéré comme un carrefour au même titre que les autres points.

Les cliques (sous-graphes complets) maximales sont ici formées de 5 sommets et seront donc désignées comme "pentades". Une pentade est représentée par la lettre capitale associée au carrefour relié à ses éléments. Elles sont au nombre de douze.

Chaque sommet (séquence désignée par une lettre minuscule) du graphe appartient à deux pentades qui n'ont que ce sommet en commun; par exemple, a appartient aux pentades D' et F, ce qui signifie qu'il est lié d'une part à x, i, n et γ, eux-mêmes liés entre eux, et d'autre part à h, o, w et δ, eux-mêmes liés entre eux; il est d'autre part lié à son "opposé" f.

On peut répartir les carrefours en deux ensembles A, B, C, D, E, F et A', B', C', D', E', F' tels que chaque carrefour d'un ensemble est lié (à travers un sommet du graphe) à cinq carrefours de l'autre ensemble et aucun carrefour du même ensemble (le seul carrefour de l'autre ensemble auquel il n'est pas lié est son opposé). Si on considère le graphe réduit dont les sommets sont les carrefours, chacun de ces deux ensembles de carrefours est un noyau. Nous appellerons "pairs" les carrefours A, B, C, ... et "impairs" les carrefours A', B', C' ...

Partons de trois éléments de la pentade paire A, par exemple la triade (r, i, b). Ils appartiennent d'autre part aux pentades impaires C', D' et E'. Tout élément lié avec r et qui n'appartient pas à A doit appartenir à C' (sauf son opposé m). La triade suivante doit dépendre de l'un des carrefours pairs reliés à C', D' et E'; ce sont B et F, outre A. On obtient ainsi un carré de 9 éléments tous reliés entre eux par lignes et par colonnes:

	(C')	(D')	(E')
(A)	r	i	b
(B)	c	x	g
(F)	h	a	δ

Les éléments qu'on retient ainsi ne font partie que d'une zone limitée du graphe, et on ne peut passer à un autre carré sans abandonner certaines propriétés. Considérons le carré obtenu à partir des carrefours opposés aux précédents (notre graphe permet de l'obtenir instantanément, chaque élément étant au milieu de la droite joignant les carrefours désignant la ligne et la colonne):

	(C)	(D)	(E)
(A')	m	j	e
(B')	d	s	l
(F')	k	f	y

Les éléments de ce carré sont les opposés de ceux du carré précédent. On peut donc accoler ces carrés. Nous n'utilisons ainsi que 18 séquences sur 30, mais, avec les permutations circulaires sur les chiffres 1, 2 et 3 qui composent les séquences, on dispose en réalité déjà de 54 séquences différentes. On peut donc s'en contenter et chercher s'il existe des raisons de choisir l'un plutôt que l'autre parmi les 20 carrés possibles correspondant aux C_6^3 groupements des carrefours de même parité, car il est rare qu'on ne gagne pas quelque chose en imposant une condition supplémentaire favorable plutôt que de choisir au hasard: nous chercherons à satisfaire la condition (2).

La fréquence des redoublements est de 0,20 si on considère l'ensemble des 30 séquences retenues, alors que le hasard donnerait une fréquence de 1/3. Il importe donc de l'augmenter. En choisissant 18 séquences, on en élimine 12, qui comportent un nombre de redoublements variant entre 4 et 20. C'est justement les séquences que nous avons choisies qui n'éliminent que 4 redoublements, de sorte que la fréquence des redoublements dans les séquences conservées passe à $\frac{26}{90} = 0{,}29$.

Poursuivons donc avec les carrés optimaux qui étaient ceux choisis. Nous pouvons les accoler verticalement ou horizontalement, par exemple, avec une colonne par étape, et une ligne par sujet (on a figuré par un tiret simple les liens entre les deux carrés et par un tiret double les liens qui sont transitifs lorsque adjacents et alignés):

```
- r = c = b - e = j = m -
  "   "   "   "   "   "
- c = x = g - l = s = d -
  "   "   "   "   "   "
- h = a = δ - y = f = k -
```

Chaque lettre sera ensuite successivement affectée de trois indices pour désigner les permutations circulaires. On pourra choisir au hasard l'ordre de ces indices, pourvu que chacun figure une fois pour chaque lettre.

Le bloc des séquences sera par exemple:

r_2	i_3	b_3	e_2	j_3	m_2	r_1	i_2	...
c_1	x_2	g_1	l_1	s_3	d_1	c_3	x_1	...
h_3	a_2	δ_1	y_2	f_2	k_3	h_2	a_3	...

dont les autre premières colonnes représentent les séquences:

211233	-	313221	-	331212	-	221313	-	...
112332	-	211323	-	121233	-	131322	-	...
313212	-	223311	-	133221	-	233112	-	...

Plan 3 x 9 (x 6)

Nous désirons, sur ces longues séquences de 9 positions, des propriétés d'homogénéité supplémentaires par rapport aux exemples précédents, propriétés concernant donc les transitions internes et relevant du principe développé dans la section B pour la dimension externe. Les conditions à satisfaire sont les suivantes:

a) distribution interne:

1) chaque position (1, 2 ou 3) figure 3 fois dans la séquence;

b) relations internes:

2) dans chaque séquence, chaque position (ou chiffre) est suivie une fois par chacune des autres (en considérant que la première position succède à la dernière, si l'on boucle la séquence sur elle-même);

c) distribution externe:

3) les 27 points (correspondant aux 3 positions dans les 9 compartiments) doivent figurer le même nombre de fois dans un certain bloc de séquences consécutives relatives à un même sujet;

d) relations externes:

4) en appelant "liées" les séquences qui ont en commun trois points, le plus grand nombre possible de séquences proches dans le bloc à deux dimensions (sujets et étapes) doivent être liées;

5) pour 3 étapes consécutives, les séquences d'un même sujet ne peuvent comporter une même position de porte pour un même compartiment (sauf à la transition entre les blocs élémentaires qui composeront le plan);

6) pour un sujet, les rangs des trois coïncidences entre points de deux séquences consécutives doivent être aussi variés que possible.

Les conditions ainsi classées de façon systématique ne sont pas nécessairement indépendantes. En particulier, dans le cas présent, la condition (2) implique la condition (1); la séquence est une "séquence exhaustive " Q_3^1 (cf. p. 4), qui ne peut appartenir qu'à l'une de deux classes, caractérisées par exemple par les séquences 1 1 2 3 2 2 1 3 3 et 1 1 2 1 3 2 2 3 3, à partir desquelles, par permutation entre les chiffres (permutation circulaire ou entre deux chiffres), par changement de sens et par décalage de l'origine (en supposant la séquence bouclée sur elle-même), on peut obtenir 216 séquences distinctes. Considérons les 24 circuits orientés distincts qui correspondent aux séquences bouclées sur elles-mêmes, compte non tenu de l'origine, circuits que nous désignerons comme les séquences mais avec le premier élément reporté entre parenthèses à l'extrémité de l'écriture. Envisageons un groupe de 8 d'entre eux à partir desquels les autres s'obtiennent par permutation circulaire sur les chiffres. Ce groupe peut, par exemple, être construit de la façon suivante.

Un "circuit exhaustif" peut être obtenu à partir du graphe représenté par la fig. 3, en prenant un circuit hamiltonien de ce graphe (c'est-à-dire un circuit qui passe une fois et une seule fois par chaque sommet), tel que A E C D I G F H B (A) et en écrivant la série des chiffres de droite (ou de gauche, cela revient au même) qui correspondent à ces lettres: 3 3 2 2 3 1 1 2 1 (3). Ce même circuit exhaustif peut également être obtenu à partir du graphe représenté par la fig. 4, en prenant l'un des circuits eulériens du graphe (c'est-à-dire des circuits qui empruntent une fois et une seul chaque arc): A E C D I G F H B (A). Nous utiliserons ce dernier procédé. Si on considère donc le second graphe, en laissant d'abord de côté les boucles D, E et F, il n'y a que trois circuits possibles: 1 2 3 1 3 2 (1), 2 3 1 2 1 3 (2) et 3 1 2 3 2 1 (3). Or les deux derniers se déduisent du premier par une permutation circulaire sur les chiffres. Les 8 circuits-types d'un groupe (à partir desquels les autres circuits s'obtiendront par permutation circulaire) se construisent alors en intercalant dans le circuit 1 2 3 1 3 2 (1) les boucles D, E et F à tous les emplacements possibles, de façon à former des circuits eulériens:

a:	112233132 (1)	e:	122331132 (1)
b:	112231332 (1)	f:	122311332 (1)
c:	112331322 (1)	g:	123311322 (1)
d:	123133221 (1)	h:	123113322 (1)

Nous désignerons par a', ..., h', les circuits qui s'en déduisent par la permutation $(1 \to 2 \to 3 \to 1)$, et par a", ..., h", ceux qui s'en déduisent par la permutation $(1 \to 3 \to 2 \to 1)$.

Revenant à présent aux séquences qu'on peut écrire en suivant le circuit à partir de l'un ou l'autre de ses points, nous utiliserons, pour distinguer les 9 séquences correspondant à un même circuit, les lettres capitales A à G (dans une signification sans rapport avec leur emploi sur les graphes précédents): nous désignerons par a_A, ..., h_A, les séquences écrites ci-dessus pour représenter les circuits; nous désignerons par a_B, ..., h_B, les séquences commençant par le terme écrit au 2ème rang de <u>a</u>, ..., <u>h</u>; et ainsi de suite. D'autre part, les lettres accentuées auront pour les séquences la même signification que pour les circuits. On aura ainsi, par exemple:

$$a_A = 112233132 \qquad d'_A = 231211332$$

$$a_C = 223313211 \qquad d'_B = 312113322$$

Ainsi se trouvent classées et désignées les 216 séquences déterminées par les conditions internes. Considérons maintenant les "liaisons" définies par la condition (4). Nous avons représenté sur la fig. 5 les graphes des liaisons entre les 9 séquences qui correspondent à un même circuit exhaustif, en fonction des indices des séquences. Le graphe de gauche (I) est valable pour les circuits a, d, e, h; le graphe de droite (II) est valable pour les circuits b, c, f, g (et bien entendu b', etc.). Ces deux groupes correspondent aux deux séquences fondamentales que nous avons évoquées plus haut.

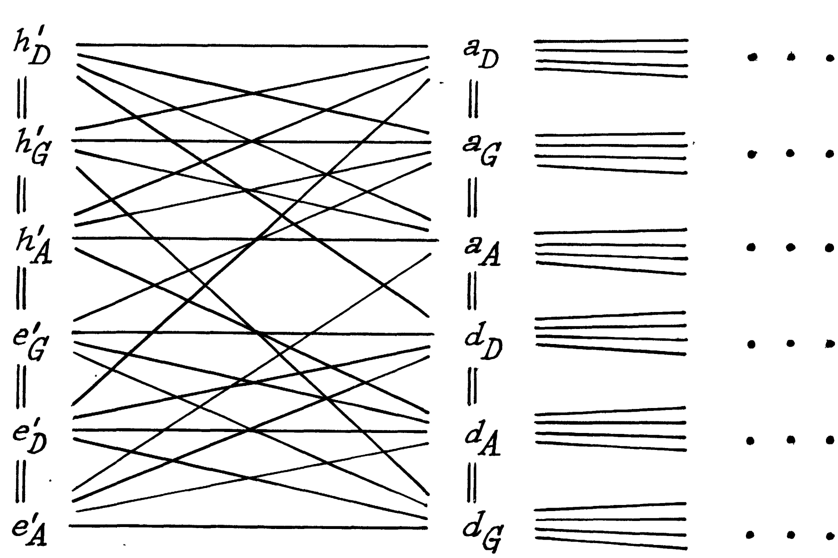
C'est la disposition des liaisons du graphe I qui permet de grouper les séquences en familles comportant le plus grand nombre de liaisons dans deux dimensions. En utilisant seulement les indices A, D et G, nous pouvons obtenir une famille de 9 séquences toutes liées entre elles sauf celles de même indice: $\{a_A, a_D, a_G, a'_A, a'_D, a'_G, a''_A, a''_D, a''_G\}$. Toutes les séquences de cette famille sont liées à toutes les séquences des familles formées de la même façon avec <u>d</u> et avec <u>h</u>, elles-mêmes liées avec toutes les séquences de la famille formée avec <u>e</u>. Entre les séquences des familles formées avec <u>a</u> et avec <u>e</u>, ou bien celles des familles formées avec <u>d</u> et avec <u>h</u>, il n'y a de liaison que si elles ont le même indice. En négligeant cette liaison partielle, les liaisons totales entre les familles (c'est-à-dire entre toutes les séquences de l'une et toutes les séquences de l'autre), que nous désignerons par des lettres cursives, peuvent se représenter ainsi:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{E} \arrow[d, dash] \\ \mathcal{A} \arrow[r, dash] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Pour obtenir un plan d'expérience avec 6 sujets, nous parcourrons ce groupe de quatre familles dans un sens pour 3 sujets et en sens inverse pour les 3 autres, par exemple ainsi:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{A} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{D} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{E} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{H} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \dots \\ \mathcal{E} \arrow[r, dash] & \mathcal{D} \arrow[r, dash] & \mathcal{A} \arrow[r, dash] & \mathcal{H} \arrow[r, dash] & \mathcal{E} \arrow[r, dash] & \dots \end{tikzcd}$$

Nous choisirons pour les étapes successives une suite entre les accentuations, et, pour une étape, les trois séquences prises dans une même famille auront des indices inférieurs différents, par exemple, les doubles traits représentant des liaisons transitives:



Nous construirons ainsi un bloc de 12 étapes pour 6 sujets, en lui imposant la propriété que le demi-bloc inférieur soit identique au demi-bloc supérieur lu de droite à gauche. Puis, par permutation circulaire entre les sujets après chaque série de 12 étapes, nous obtiendrons pour chaque sujet une série de 36 séquences consécutives qui seront les 36 séquences du demi-bloc. Pour que la condition (3) soit satisfaite sur cette série de 36 séquences, il suffit que le demi-bloc contienne une fois et une seule chacune des séquences appartenant aux familles $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$. Ces séquences peuvent d'autre part être disposées de façon à satisfaire la condition (5) à l'intérieur du demi-bloc et la condition (6) pour chaque tiers de ce demi-bloc: pour un sujet, les 9 clefs correctes qui, pour une suite de quatre séquences, occupent la même position dans deux séquences consécutives, appartiennent chacune à un compartiment différent.

Voici un demi-bloc qui possède ces propriétés:

$$
\begin{array}{lll}
h'_D\ a_D\ d''_G\ e''_A & g_G\ a'_A\ d'_D\ e_D & h''_D\ a''_D\ d_G\ e'_A \\
h'_G\ a_G\ d''_A\ e''_D & h_A\ a'_D\ d'_G\ e_G & h''_G\ a''_G\ d_A\ e'_D \\
h'_A\ a_A\ d''_D\ e''_G & h_D\ a'_G\ d'_A\ e_A & h''_A\ a''_A\ d_D\ e'_G
\end{array}
$$

Le plan définitif constitue alors le tableau suivant, où les sujets sont désignés par les chiffres romains I à VI et où les rangs des étapes sont indiqués par bloc de 12 étapes, le p^e bloc correspondant aux sujets disposés suivant les lignes (p^o).

	Sujets			Blocs
	I	II	III	(1°)
Rangs	III	I	II	(2°)
	II	III	I	(3°)
01	221133231	133231221	231221133	12
02	233132112	132112233	112233132	11
03	113312322	312322113	322113312	10
04	311223321	223321311	321311223	09
05	322123113	123113322	113322123	08
06	223311213	311213223	213223311	07
07	211332231	332231211	231211332	06
08	331132122	132122331	122331132	05
09	332211312	211312332	312332211	04
10	122321331	321331122	331122321	03
11	221123133	123133221	133221123	02
12	233112213	112213233	213233112	01
(1°)	IV	V	VI	
(2°)	V	VI	IV	Rangs
(3°)	VI	IV	V	
Blocs	Sujets			

Plan 4 × 8 (× 2)

La relation externe entre les séquences peut être un peu plus complexe que la fixation d'un certain effectif de coïncidences. C'est en particulier le cas où, les points des séquences représentant des positions, on désire une homogénéité des positions relatives des points homologues de deux séquences consécutives. Nous en donnerons brièvement un exemple où les points sont des points cardinaux, que nous désignerons par N, S, E, W.

Nous supposons que deux séquences Q et Q' de 8 points chacune représentent les positions successives de deux indices différents (un par séquence) présents simultanément, occupant chacun successivement (condition 1) toutes les positions cardinales possibles (chacune 2 fois) et (condition 2) présentant toutes les positions relatives possibles (chacune 2 fois). Nous désignerons les positions relatives du second point, par rapport au premier point homologue, par les signes: 0, − (−90°), + (+ 90°) et D (diamétralement opposés). D'autre part (condition 3), on s'impose l'absence de redoublement d'une même position en deux rangs consécutifs d'une même séquence. On désire (condition 4) que la relation entre les séquences consécutives relatives à un même indice soit la même que celle entre les séquences simultanées relative aux deux indices. Enfin, on veut (condition 5) que les 16 doublets possibles des positions des deux indices figurent dans deux paires consécutives des deux séquences. Le plan est relatif à un seul individu; nous ne ferons donc pas figurer l'indice i dans l'expression des conditions.

Les conditions (1), (2) et (3) peuvent être satisfaites de la façon suivante. En désignant par 1234 toute permutation circulaire des points cardinaux lus dans le sens direct et en considérant les doublets suivants relatifs aux positions des deux indices ordonnés: a = 11, b = 22, c = 14, d = 23, e = 31, f = 42, g = 34, h = 43, si on pose: A = a v c v g v e et B = b v h v d v f, les deux séquences seront données par l'une des structures suivantes: S (ABABABAB), S (AABBAABB), S (ABABAABB), S (ABAABABB), où a à h doivent figurer chacun une fois, où AB et BA sont quelconques compatibles avec la définition de A et B, mais où AA = ag v ga v ce v ec et BB = bh v hb v df v fd exclusivement.
On obtient ainsi par exemple:

A	B	A	B	A	B	A	B	
a	f	e	b	g	d	c	h	
1	4	3	2	3	2	1	4	
1	2	1	2	4	3	4	3	
0	D	D	0	+	+	−	−	
W	N	E	S	E	S	W	N	(Q_1)
W	S	W	S	N	E	N	E	(Q'_1)

Pour les deux séquences suivantes, on utilisera le même procédé à partir des doublets: a' = 21, b' = 12, c' = 24, d' = 13, e' = 41, f' = 32, g' = 44, h' = 33, regroupés de la même façon dans A' et B'. La structure de la relation entre A, B, A', B', et les indices, est la suivante:

		1er indice			
		1	2	3	4
	1	A	A'	A	A'
2^e indice	2	B'	B	B'	B
	3	B'	B	B'	B
	4	A	A'	A	A'

Trois autres structures auraient été possibles, conduisant à d'autres groupements des doublets. Leur utilisation permet d'obtenir la relation voulue entre les paires de séquences consécutives. Nous n'entrerons pas dans le détail et donnerons seulement l'amorce du plan. La paire de séquences suivante, dont les doublets sont complémentaires des précédents, sera:

B	B	A	A	B	B	A	A	
d'	f'	c'	e'	b'	h'	a'	g'	
1	3	2	4	1	3	2	4	
3	2	4	1	2	3	1	4	
D	-	D	+	+	0	-	0	
W	E	S	N	W	E	S	N	(Q_2)
E	S	N	W	S	E	W	N	(Q'_2)

Les relations entre les séquences correspondantes des deux paires consécutives sont bien du type homogène:

W	N	E	S	E	S	W	N	(Q_1)	W	S	W	S	N	E	N	E	(Q'_1)
W	E	S	N	W	E	S	N	(Q_2)	E	S	N	W	S	E	W	N	(Q'_2)
0	-	-	D	D	+	+	0		D	0	-	-	D	0	+	+	

B - PLANS CYCLIQUES EXHAUSTIFS

Ces plans se répartissent en deux catégories suivant que les éléments qui les constituent sont simples ou complexes. Dans le premier cas, la difficulté peut provenir des conditions supplémentaires qu'on impose. Dans le second cas, où les éléments sont constitués par plusieurs variables qualitativement différentes correspondant à un protocole expérimental complexe, la difficulté provient de la nécessité de réaliser simultanément plusieurs circuits exhaustifs interdépendants.

Pour les plans simples, les propriétés se conservent par changement de sens, et en général aussi par permutation entre les catégories d'éléments, de sorte que le problème revient à la recherche de cycles exhaustifs, et même en général de structures cycliques exhaustives.

Dans une structure cyclique exhaustive du m^e ordre (c'est-à-dire où figurent une fois et une seule tous les arrangements avec répétition de $m + 1$ éléments distincts), les distributions des arrangements avec répétition de $\underline{k}$ éléments, avec $k \leqslant m$, sont nécessairement rectangulaires (à fortiori donc, elles sont "exhaustives" au sens courant du terme, mais le lecteur a pu constater que nous avons, pour alléger le vocabulaire, utilisé le terme exhaustif comme un raccourci pour "exhaustif et de longueur minimale").

Nous considérerons rapidement en premier lieu le cas général pour la famille des plans à éléments simples, c'est-à-dire le cas où aucune condition supplémentaire n'est imposée. Le mode de construction de circuits exhaustifs correspondant à ce cas est classique, bien que ces circuits n'aient pas; à notre connaissance, été appliqués en psychologie avant TREVARTHEN, puis nous-même (cf. article à paraître); des circuits à transitions du premier ordre ont été utilisés en biologie par FINNEY & OUTHWAITE (1956) comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, et récemment des circuits à transitions du second ordre ont été employés en psychologie par BARBUT et BOVET (communication personnelle). Le mode de construction est donné par BERGE (1958), comme exemple de circuit eulérien sur un graphe (ces circuits que nous appelons "exhaustifs", et que l'auteur attribue à POSTHUMUS, ont été utilisés dans les domaines des télécommunications et de la cryptologie). La bibliographie se trouve indiquée par BARBUT dans les n° 16 et 17 de " Mathématiques et Sciences humaines".

1. *Plans à éléments simples*

Dans les plans à éléments simples, les éléments n'ont pas de structure interne: l'élément est constitué par une seule variable. Les éléments correspondent par exemple aux différentes positions possibles de la clef de réponse correcte (par exemple: gauche et droite), ou bien à des délais variables avant l'apparition d'un signal.

a) Cas général

Il est aisé de construire des plans cycliques exhaustifs à éléments simples, lorsqu'on accepte que la longueur du cycle soit égale à n^{m+1}, en fonction du nombre $\underline{n}$ d'éléments différents et du nombre $\underline{m}$ tel que tous les (m+1)-uplets possibles soient présents et non tous les (m+2)-uplets, et lorsqu'on ne se donne aucune autre condition.

On établit d'abord le graphe des successions chevauchantes possibles entre les n^m m-uplets, c'est-à-dire le graphe des successions possibles entre un m-uplet dont le premier élément est au rang $\underline{t}$ dans la séquence et un m-uplet dont le premier élément est au rang t+1 (par exemple, si n = 2 et m = 4, le m-uplet $\underline{0110}$ ne peut être suivi que par l'un des m-uplets $\underline{1100}$ et $\underline{1101}$), puis on parcourt ce graphe d'une façon non systématique mais cependant relativement homogène (il est préférable de ne pas isoler excessivement un groupe particulier de sommets) en vue d'obtenir soit directement un circuit eulérien, soit un "facteur" composé d'un certain nombre de circuits qu'on coupera et raccordera ensuite de manière à former un circuit eulérien. Tout circuit eulérien sur un tel graphe détermine une solution du problème.

Par exemple, sur le graphe représenté par la fig. 6, relatif au cas où n = 3 et m = 2, on peut, en utilisant une seule fois chacun des 27 arcs, effectuer le parcours suivant qui définit un facteur formé de 2 circuits:

ACDICIEGAGFFH$\underline{\text{B}}$AEECBF (A)

GHDD$\underline{\text{B}}$HI (G)

Ces circuits peuvent être raccordés en tout point commun. En choisissant comme point de raccord le point B là où nous l'avons souligné dans chaque circuit, nous obtenons le circuit eulérien suivant:

ACDICIEGAGFFHBHIGHDDBAEECBF (A),

qui définit le circuit exhaustif:

022020010111212012221000211 (0).

Ce circuit constitue bien un plan cyclique exhaustif simple: 21 est suivi une fois par 0, une fois par 1, une fois par 2, et il en est de même pour chaque doublet. On constate d'autre part, sur cet exemple, une répartition assez hétérogène des éléments; sur la séquence déduite du circuit par la coupure entre 211 et 022, les rangs moyens des éléments 0, 1 et 2 sont respectivement 12,4 , 16,2 et 13,3; sur le circuit, les nombres maximaux d'éléments consécutifs respectivement différents de l'élément 0, de l'élément 1 et de l'élément 2 sont relativement élevés: 6, 7 et 7. Il est naturel d'introduire des conditions supplémentaires tendant à une meilleure répartition des éléments dans le circuit ou la séquence. Nous examinerons donc maintenant deux plans comportant chacun une condition supplémentaire de nature différente.

b) Plan à rangs compensés

Nous appelons plan à rangs compensés un plan séquentiel (circuit coupé en un point) tel que les rangs moyens des divers éléments soient peu différents (il ne nous paraît pas très utile de chercher à obtenir une égalisation exacte); il s'agit toujours, bien entendu, d'un plan fondé sur un circuit exhaustif.

Il ne nous semble pas nécessaire, pour un tel problème, de trouver des algorithmes rigoureux. La technique consistera donc à construire, de la façon qui vient d'être indiquée, une séquence exhaustive Q_n^m quelconque, puis à remanier cette séquence sans supprimer la propriété d'exhaustivité, en jouant d'abord sur le point de coupure du circuit et (sauf si n = 2) sur les successions d'éléménts qui correspondent aux boucles du graphe (successions de m+1 éléments identiques) et qui comportent donc un élément aisément transposable.

Voici un exemple de plan à rangs compensés que nous avons construit pour n = 8 et m = 1:

AECFGDABHEEFBDGHHCCAGGFFDBBCEHAD ...

... DFHBGCBFAHGEDCHDEACGBEBAAFCDHFEG.

Les rangs moyens des éléments sont compris dans l'intervalle 32,5 $\pm$ 0,04.

c) Plan à lacunes minimales

Nous appelons "lacune maximale" d'un circuit "relative à un élément" la plus longue séquence du circuit qui ne comporte pas cet élément (elle n'est pas nécessairement unique). Nous appelons "lacune maximale absolue" d'un circuit la plus longue des lacunes maximales relatives aux différents éléments (elle n'est pas nécessairement unique).

Nous appelons "circuits à lacunes minimales", ou "μ-circuits", les circuits qui, parmi tous les circuits exhaustifs correspondant à un même couple de valeurs des paramètres m et n, ont la plus courte lacune maximale absolue et, parmi ceux qui remplissent cette première condition, présentent le plus petit nombre de lacunes de cette longueur. Le sens du circuit n'intervient pas dans ce problème, qui se ramène donc à la recherche des μ-cycles. Toute permutation entre les n catégories distinctes d'éléments conserve la propriété d'exhaustivité et conserve les lacunes. Le problème consiste donc, en fin de compte, dans la recherche des "μ- structures" cycliques (nous avons défini la "structure cyclique" dans l'introduction).

Le problème ne se pose qu'à partir de n= 3, car pour n = 2 les lacunes maximales relatives à chaque élément sont toujours de longueur m+1, nombre maximum d'éléments identiques consécutifs.

Pour n = 3 et m = 1, il n'y a que deux structures exhaustives différentes, 001211022 et 001021122, dont les lacunes maximales absolues sont de longueur 5 dans chaque cas et relativement à un seul élément; les deux structures sont donc équivalentes devant la définition d'une μ-structure. Le problème ne se pose donc vraiment qu'à partir du cas n = 3, m = 2, pour lequel il y a 31.104 structures exhaustives différentes (cf. fig. 6).

En procèdant de façon systématique, on constate qu'il est impossible d'obtenir une structure sans aucune lacune de longueur 5. Par conséquent, une structure qui comporte une seule lacune de longueur 5 est une μ-structure. Nous n'en avons pas effectué la recherche systématique. En voici un exemple:

S (221000211102001122010121202).

La lacune de longueur 5 est relative à l'élément 1 et se trouve à l'emplacement de la coupure de l'écriture.

2. *Plan à éléments composés*

Dans ce cas, l'élément a lui-même une certaine structure interne. Les relations externes peuvent concerner diverses parties de l'élément, isolées ou combinées. Nous illustrerons ce cas par un seul exemple, pris dans une expérience de temps de réaction de choix.

L'élément est (z, s, l), où <u>l</u> désigne la latéralisation de la réponse correcte (<u>g</u> ou <u>d</u>), <u>s</u> le délai jusqu'au signal (1 à 4), <u>z</u> la stimulation éventuelle d'une structure centrale au cours du délai (0 ou 1).

Comme relations internes, on s'impose celles qui assurent l'indépendance des variables élémentaires deux à deux.

Comme distributions externes, on désire des distributions rectangulaires pour <u>s</u> et <u>l</u>, et une fréquence 1/4 de $z = 1$.

Enfin, on souhaite les relations externes suivantes:

(a) indépendance entre l_t et les 5 valeurs précédentes prises par <u>l</u> ;

(b) indépendance entre s_t et la valeur précédente prise par <u>l</u> ;

(c) indépendance entre s_t et les 2 valeurs précédentes prises par <u>s</u> ;

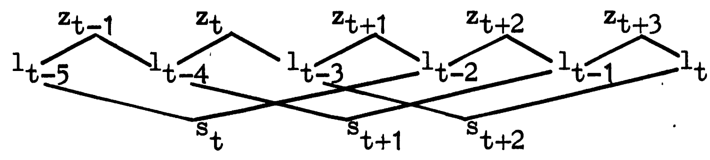
(d) indépendance entre l_t et l'ensemble de la valeur précédente prise par <u>l</u> et de la valeur intermédiaire prise par <u>s</u> ;

(e) jamais deux stimulations consécutives.

Pour construire un plan qui réponde à cet ensemble de conditions, nous prendrons comme point de départ un circuit exhaustif qui satisfait la condition (a), et nous le <u>codifierons</u> pour obtenir <u>z</u> et <u>s</u>. Ainsi, les éléments l_{t-5} à l_t étant "indépendants", c'est-à-dire que les 64 arrangements binaires des lettres <u>g</u> et <u>d</u> figurent dans le circuit exhaustif, nous codifierons le segment $(l_{t-5}\ ,\ l_t)$ de la façon suivante:

$$l_{t-5},\ l_{t-2} = d,\ d \Longrightarrow s_t = 1\ ,$$
$$l_{t-5},\ l_{t-2} = g,\ g \Longrightarrow s_t = 2\ ,$$
$$l_{t-5},\ l_{t-2} = g,\ d \Longrightarrow s_t = 3\ ,$$
$$l_{t-5},\ l_{t-2} = d,\ g \Longrightarrow s_t = 4\ ;$$
$$l_{t-4},\ l_{t-3} = g,\ d \Longrightarrow z_t = 1\ ,$$
$$l_{t-4},\ l_{t-3} = g,\ d \Longrightarrow z_t = 0\ .$$

Les relations d'indépendance souhaitées se lisent sur le diagramme suivant, où deux multiplets formés d'éléments distincts sont nécessairement indépendants puisque le nombre d'éléments ne dépasse pas 6 et que la séquence de $2^6 = 64$ éléments est supposée exhaustive:



Le choix du doublet non consécutif (g, d) pour $z_t = 1$ assure que deux valeurs consécutives de z ne peuvent être égales à 1. Les relations de distribution externe sont, on le voit, également satisfaites.

C - PLANS TORIQUES EXHAUSTIFS

Nous terminerons cette recherche de plans à séquences équilibrées par une brève étude des possibilités de généraliser à deux dimensions les plans cycliques exhaustifs. Nous appelons "tableau torique" un tableau rectangulaire dont les lignes et les colonnes sont supposées bouclées sur elles-mêmes et qui est par conséquent inscriptible sur un tore.

Il existe une solution triviale évidente au problème du plan torique exhaustif; elle consiste à choisir arbitrairement deux circuits exhaustifs qui constituent la première ligne et la première colonne du plan, puis à prendre pour chaque ligne la permutation circulaire des chiffres de la première ligne qui est compatible avec le chiffre figurant dans la première colonne en tête de la ligne à déterminer; il en résulte un tableau dont, d'autre part, les colonnes sont des permutations circulaires des chiffres de la première colonne. La propriété d'exhaustivité se conservant par permutation circulaire sur les chiffres, on obtient bien ainsi un plan torique exhaustif. Voici trois exemples de plans triviaux, un plan carré symétrique, un plan carré asymétrique et un plan rectangulaire:

00011101	011221020	001102212
00011101	011221020	112210020
00011101	200110212	112210020
11100010	122002101	112210020
11100010	200110212	001102212
11100010	200110212	112210020
00011101	011221020	001102212
11100010	122002101	001102212
	122002101	

Ces plans triviaux présentent le grave inconvénient de comporter un grand nombre de lignes et de colonnes identiques entre elles. Nous avons donc recherché des plans toriques <u>non triviaux</u> qui ne présentent pas cet inconvénient; ils sont assez malaisés à obtenir. En voici trois exemples, où les répétitions sont plus rares (en considérant les séquences non bouclées en circuits):

11010001	212001102	00101110
10001011	020112210	10100011
00101110	210011202	11010001
10001011	101220021	01011100
01110100	021122010	
00101110	020112210	
01110100	102200121	
11010001	101220021	
	212001102	

Une autre solution triviale consiste dans la permutation circulaire des rangs (et non plus des chiffres), à partir d'une seule séquence, par exemple:

011221020
112210200
122102001
221020011
210200112
102001122
020011221
200112210
001122102

Cette fois tous les circuits des lignes et des colonnes sont identiques, ce qui rend ce plan sans intérêt pratique, mais les séquences (non bouclées) qui forment le carré sont toutes différentes et, de plus, dans chaque groupe de deux colonnes adjacentes, les 9 nombres ternaires lus horizontalement sont différents. Nous appelons "bandes exhaustives" les groupes de colonnes (ou lignes) adjacentes présentant cette propriété, et nous désignons un tel plan, dont à la fois les rangées et les bandes sont exhaustives, comme "massivement exhaustif" (en abrégé: m-exhaustif), par opposition aux plans que nous avons considérés précédemment et dont seules les rangées isolées (lignes et colonnes) sont exhaustives (nous les appelons "plans r-exhaustifs").

L'intérêt d'un plan massivement exhaustif non trivial est évident. Cependant, il peut arriver qu'on ne soit intéressé que par la propriété d'exhaustivité des bandes. Nous appelons "plan b-exhaustif" un plan dont les bandes verticales et horizontales sont exhaustives alors que les rangées ne le sont pas. Nous avons construit deux plans toriques qui entrent dans cette catégorie (celui de gauche est symétrique, celui de droite quelconque):

01001011	002012112
10000111	211002210
00011110	221201001
00101101	120022011
10110100	110120220
01111000	100221102
11100001	201100122
11010010	022110021
	012211200

Dans d'autres circonstances, il peut être souhaitable d'utiliser un plan exhaustif mixte, satisfaisant la condition d'exhaustivité des rangées pour une direction (verticale ou horizontale) et la condition d'exhaustivité des bandes pour une direction (soit la même que pour les rangées, soit l'autre). Nous distinguerons donc deux catégories de plans mixtes: les plans p-exhaustifs et les plans o-exhaustifs. Nous appelons "plan p-exhaustif" un plan à lignes (ou colonnes) exhaustives, à bandes exhaustives parallèles à ces lignes (ou colonnes) , à colonnes (ou lignes) présentant une distribution rectangulaire des différents chiffres, et dont le nombre des lignes (ou colonnes) est un multiple quelconque du nombre de chiffres différents. Voici un exemple de plan torique p-exhaustif, à 6 lignes exhaustives, à 6 bandes horizontales (de 3 lignes) exhaustives et à distribution rectangulaire pour chaque colonne (trois 0 et trois 1):

11100010
01000111
01110001
00011101
10111000
10001110

Sont plus intéressants, et moins simples à construire, les"plans o-exhaustifs", c'est-à-dire à bandes exhaustives orthogonales aux rangées exhaustives (et dont les distributions des chiffres pour chaque rangée sont alors nécessairement rectangulaires). Voici un plan torique o-exhaustif, à lignes exhaustives et bandes verticales exhaustives (d'autre part, 6 colonnes sur 8 et 6 bandes horizontales sur 8 sont ici exhaustives):

11101000
11000101
01110001
10100011
01011100
00010111
00111010
10001110

Enfin, il est possible, bien que nettement plus difficile car nous ne disposons pour l'instant d'aucun algorithme pour cette recherche, d'obtenir certains plans toriques massivement exhaustifs non triviaux. Nous avons construit le plan suivant:

00011101
01110100
00101110
11100010
01000111
11010001
10001011
10111000

Les huit nombres binaires 000 à 111 figurent une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne de ce tableau (tableau torique, donc lignes et colonnes considérées comme bouclées sur elles-mêmes), ainsi que, lus horizontalement, dans chaque bande de 3 colonnes adjacentes, et, lus verticalement, dans chaque bande de 3 lignes adjacentes.

Remarquons qu'à tout plan torique o-exhaustif correspond un carré latin * dont les éléments désignent les nombres binaires, ou ternaires, etc ..., qui, lus par exemple horizontalement, figurent de façon unique et exhaustive dans chaque ligne exhaustive et chaque bande verticale exhaustive du plan. La réciproque n'est pas vraie: il s'agit d'une classe de carrés latins bien particuliers. A tout plan massivement exhaustif, qui possède la propriété d'o-exhaustivité dans les deux directions, correspondent deux carrés latins distincts. Voici les carrés liés au plan que nous avons donné:

* Voir dans le même numéro du M.S.H.: article de B. Monjardet.

40137652	41576302
13765240	02365714
01253764	15742630
37640125	23604571
52401376	57410263
76524013	36021457
64012537	74153026
25376401	60237145

On remarquera que dans chaque circuit horizontal (ligne bouclée lue de gauche à droite) du carré de gauche et dans chaque circuit vertical (colonne bouclée lue de haut en bas) du carré de droite figurent les mêmes groupements: 401, 376 et 25 ou 52. Cela reflète la propriété, pour les circuits exhaustifs, d'être des circuits eulériens sur les graphes que nous avons envisagés dans la section précédente.

AUTEURS CITES

BERGE (C.), 1958. Théorie des graphes et ses applications. Paris, Dunod. 269 p.

COX (D.R.), 1958. Planning of experiments. New York, Wiley. 308 p.

DURUP (H.), 1964. Influence des traces odorantes laissées par le Hamster lors de son apprentissage d'un labyrinthe à discrimination olfactive. Psychol.française, 9, 165-180.

DURUP (H.), 1966. Etude du comportement de choix considéré comme un processus stochastique: modèle probabiliste, analyse expérimentale chez le Hamster doré.
Thèse de Doctorat ès Sciences, Marseille. 277 p.

DURUP (H.), TREVARTHEN (C.), 1967 ? Sequences of trial conditions for the most efficient analysis of behavior. (A paraître).

FELLOWS (B.J.), 1967. Chance stimulus sequences for discrimination tasks. Psychol. Bull., 67, 87-92.

FINNEY (D.J.), OUTHWAITE (A.D.), 1956. Serially balanced sequences in bioassay. Proc. roy. Soc. B., 145, 493-507.

GELLERMANN (L.W.), 1933. Chance orders of alternating stimuli in visual discrimination experiments.
J. genet. Psychol., 42, 206-208.

SAMPFORD (M.R.), 1957. Methods of construction and analysis of serially balanced sequences. J. roy. statist. Soc. B., 19, 286-304.

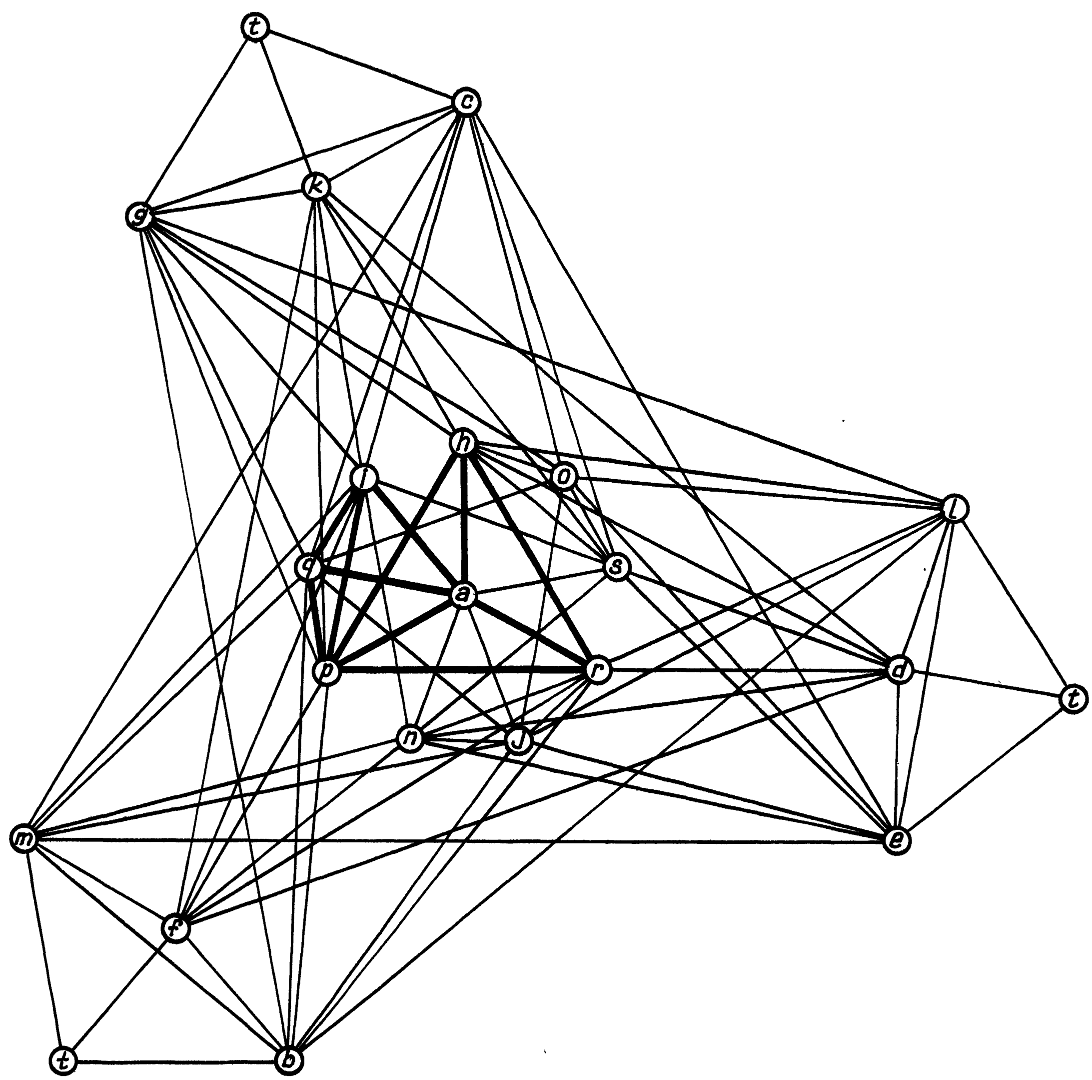


Fig. 1. - Graphe de la relation secondaire du plan modal 2 x 6 .

Le sommet <u>t</u> a été figuré trois fois pour faciliter la lisibilité du graphe. Les tétraèdres à arêtes épaisses représentent deux "cliques".

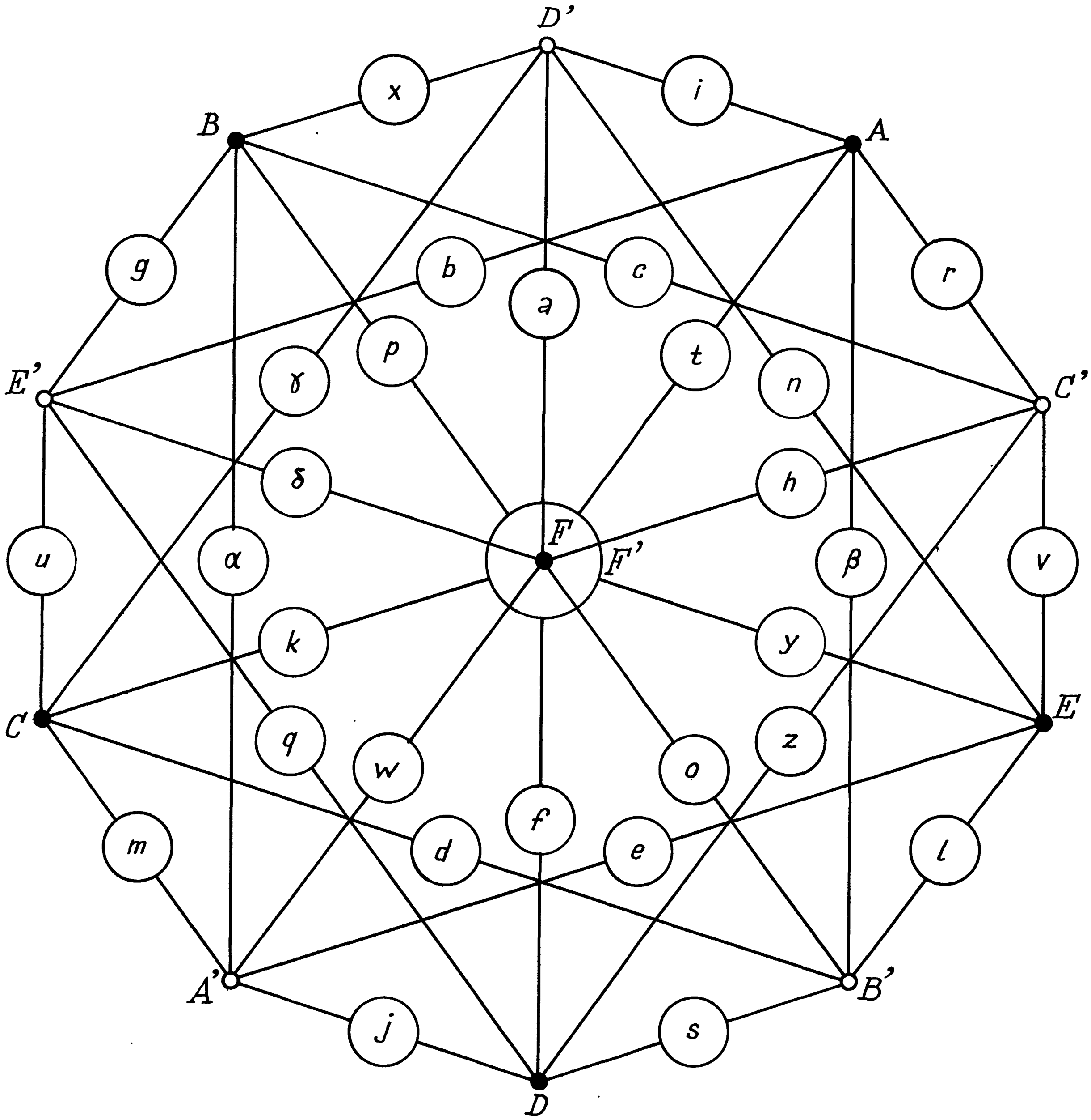


Fig. 2. - Graphe de la relation secondaire du plan modal 3 x 6.

Deux sommets (lettres minuscules) du graphe sont liés soit lorsque les segments qui les portent aboutissent à un même"carrefour" (lettre majuscule), auquel cas ils appartiennent à une même clique, soit lorsqu'ils sont diamétralement opposés sur la figure (comme a et f, b et e, x et s).

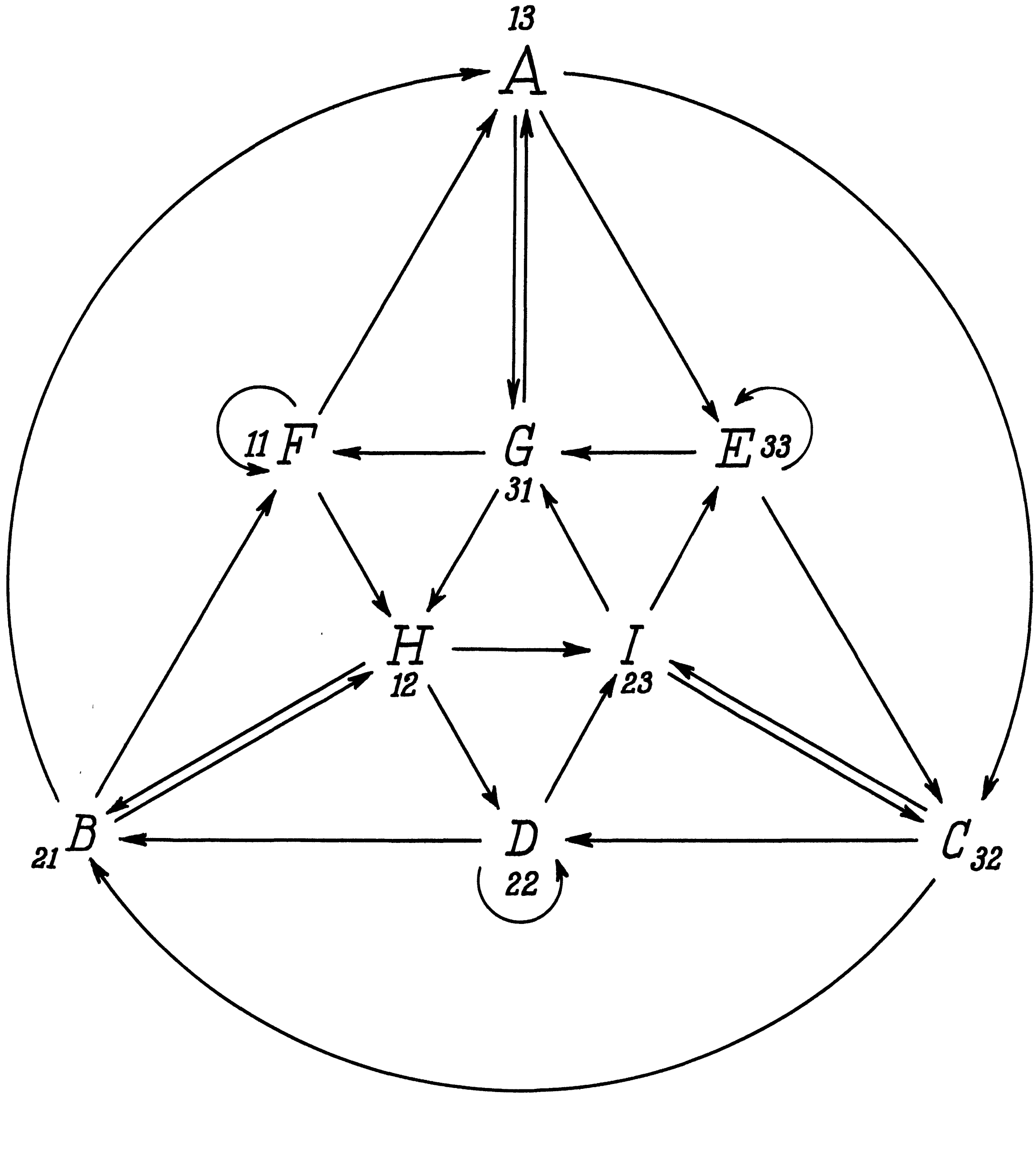


Fig. 3. - Graphe dont les circuits hamiltoniens déterminent des circuits exhaustifs pour n = 3 et m = 1 (et dont les circuits eulériens déterminent des circuits exhaustifs pour n = 3 et m = 2).

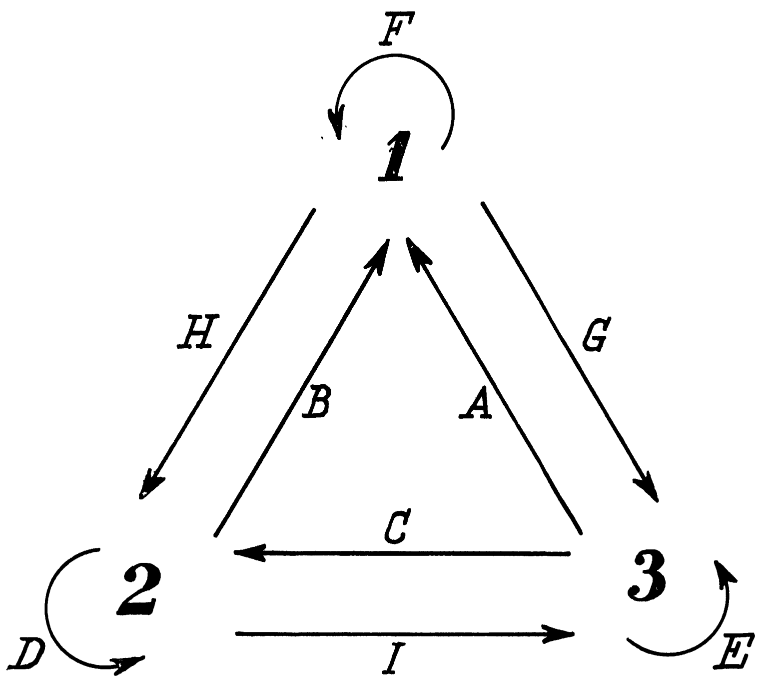


Fig. 4. - Graphe dont les circuits eulériens déterminent des circuits exhaustifs pour n = 3 et m = 1.

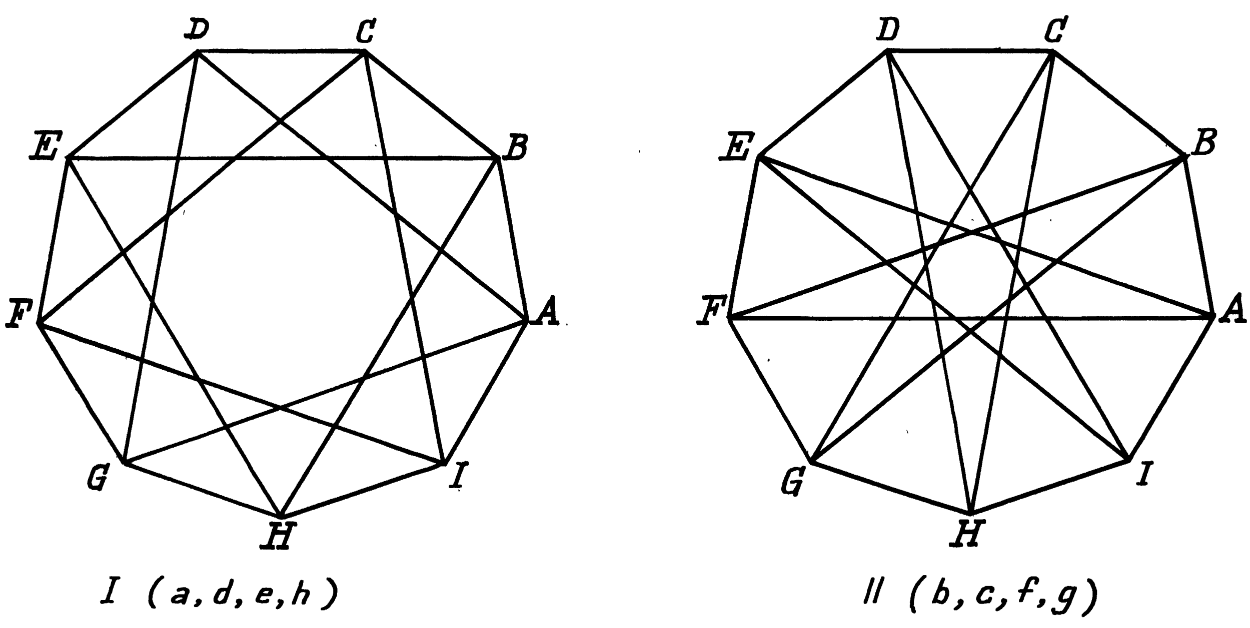


Fig. 5. - Graphes de la relation secondaire entre les éléments séquentiels dérivés d'un même circuit par coupure en un point, pour le plan modal à éléments séquentiels exhaustifs 3 x 9 (cas I et II suivant le type d'élément séquentiel).

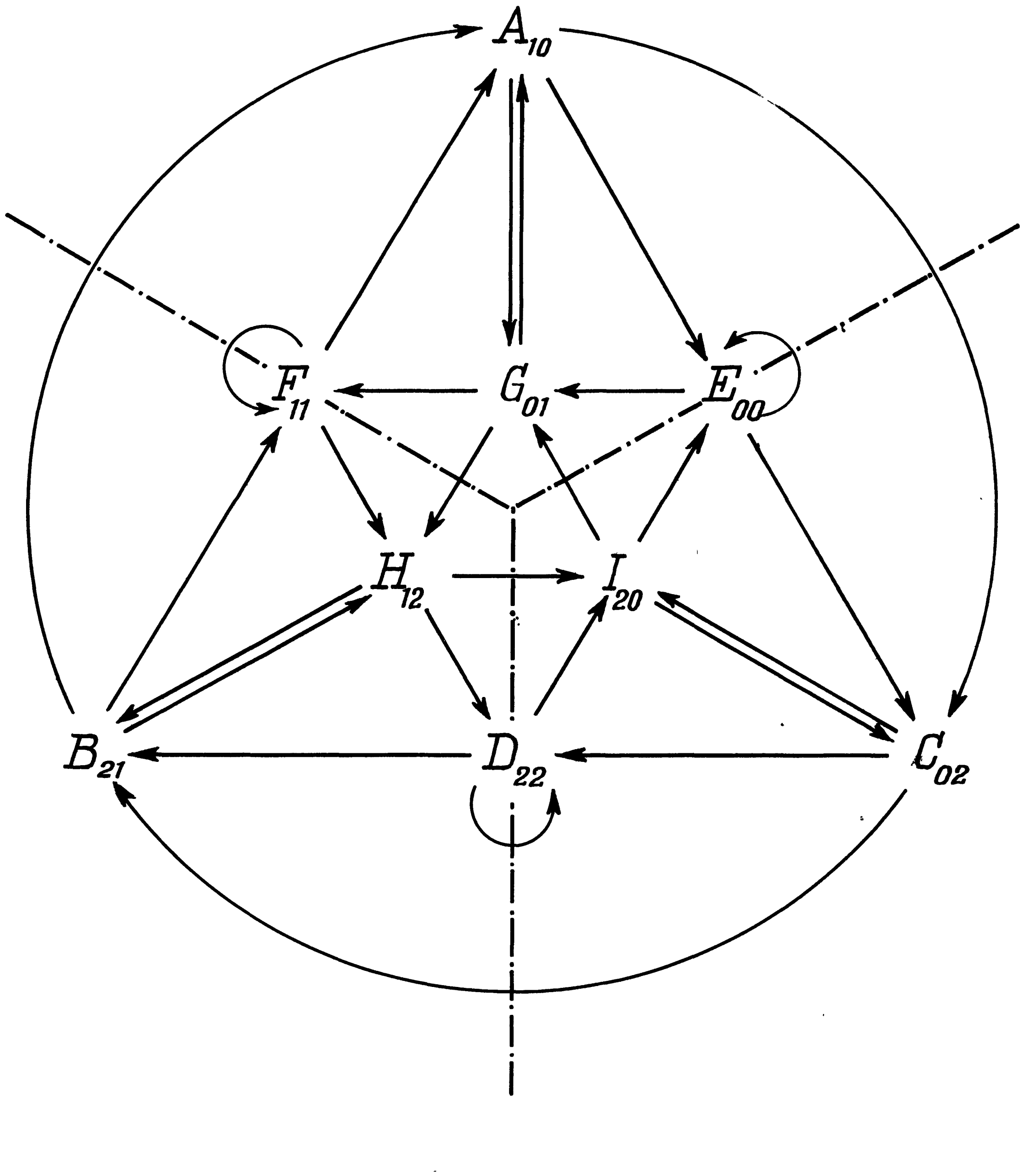


Fig. 6. - Graphe dont les circuits eulériens déterminent des circuits exhaustifs pour n = 3 et m = 2.

Sur cette figure, qui représente le même graphe que la fig. 3, on a délimité les zones correspondant aux lacunes relatives à chaque élément.