MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

R. CHENON

Bi-ordres

Mathématiques et sciences humaines, tome 5 (1964), p. 27-32
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1964__5__27_0>

R. CHENON

BI-ORDRES

L'article suivant se rattache à celui que Mr GUILBAUD a fait paraître dans le n° 1 de cette revue sous le titre "Un exercice sur les permutations"; il comprend 3 parties: Dans la première on montre qu'au lieu de partir de 2 permutations - pour obtenir les ordres "croissants" et "décroissants" de l'article cité - on peut, à l'envers, partir de ces deux ordres; l'intérêt de ce renversement est la possibilité de généralisation à des k-ordres ($k > 2$) qui ne peuvent en général s'obtenir à partir de permutations (Mais cette généralisation n'est pas abordée ici).

Dans une deuxième partie on pose et résoud un problème nouveau: celui de couvrir l'ensemble avec un nombre minimum de chaînes toutes croissantes (ou toutes décroissantes). Il se trouve que cette question est liée simplement à celle des chaînes de longueur maximum (cf. Théorème 1).

Dans une dernière partie enfin on se pose le problème de couvrir l'ensemble avec un nombre minimum de chaînes monotones (indifférement croissantes ou décroissantes), et l'on indique une limite supérieure de ce nombre (limite qui est la meilleure possible). Donnons un exemple numérique: si on écrit les 101 premiers nombres dans un ordre quelconque on peut toujours épuiser la permutation obtenue en en extrayant au plus 13 chaînes monotones. Ce qui donne en quelque sorte une mesure de l'"ordre résiduel" dans tout désordre possible. Signalons un problème que nous n'avons pas su résoudre: trouver un algorithme qui donne un recouvrement minimum par des chaînes monotones, (la démonstration du théorème 1 donne un tel algorithme pour les chaînes croissantes (ou décroissantes)).

- - - - - - - - - - - - - -

DEFINITION I - Un ensemble E sera dit bi-ordonné si:

1°) Entre deux éléments quelconques mais distincts a et b de E existe toujours une - et une seule - des quatre relations suivantes:

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} a < b \\ b < a \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\ \begin{cases} a \ll b \\ b \ll a \end{cases}$$

2°) $\forall a \in E$: $a < a$ et $a \ll a$.

3°) Chacune des deux relations $<$ et $\ll$ est transitive.

DEFINITION 2 – Définissons alors deux nouvelles relations

1°) $a \longrightarrow b$ $\quad (a < b$ <u>ou</u> $a \ll b)$

2°) $a \to\to b$ $\quad (a < b$ <u>ou</u> $b \ll a)$

PROPOSITION 1 – Chacune des deux relations $\longrightarrow$ et $\to\to$ est un ordre total sur E.

Montrons le pour la relation $\longrightarrow$:

α) Pour deux éléments a b distincts de E on a bien

soit $a \to b$ soit $b \to a$

β) la relation $\longrightarrow$ est transitive:

$a \to b$ et $b \to c \implies a \to c$

c'est-à-dire :

$(a < b$ ou $a \leqslant b)$ et $(b < c$ ou $b \leqslant c) \implies (a < c$ ou $a \leqslant c)$

en effet il y a 4 cas possibles:

1°) $a < b$ et $b < c \implies a < c$

2°) $a \ll b$ et $b \ll c \implies a \ll c$

3°) $a < b$ et $b \ll c$ ne peut entraîner $c < a$ car $c < a$ et $a < b \implies c < b$ [alors que $b \ll c$] ; $a < b$ et $b \ll c$ ne peut entraîner $c \ll a$ car $b \ll c$ et $c \ll a \implies b \ll a$ [alors que $a < b$] donc $a < b$ et $b \ll c \implies a < c$ ou $a \ll c$

4°) même démonstration pour :

$a \ll b$ et $b < c \implies a < c$ ou $a \ll c$

DEFINITION 3 – Réciproquement soit deux ordres totaux sur E notés $\longrightarrow$ et $\to\to$ [c'est-à-dire encore deux permutations de E].

Définissons :

1°) $a < b \iff (a \to b$ <u>et</u> $a \to\to b)$ (c'est-à-dire $a < b$ si dans les deux permutations a et b ne présentent pas d'inversion).

2°) $a \ll b \iff (a \to b$ et $b \to\to a)$ (c'est-à-dire a b si dans les deux permutations a et b présentent une inversion). On a alors la :

PROPOSITION 3 – $<$ et $\ll$ définissent un bi-ordre.

(De plus, si $\longrightarrow$ et $\to\to$ sont obtenus par la définition (2) à partir d'un bi-ordre initial, alors la définition (3) redonne ce même bi-ordre).

– – – – – – – – – – – – – –

CHAINES

[Dans tout ce qui suit E sera un ensemble fini.]

Une 1-chaîne (ou chaîne "croissante") est une partie de E ordonnée uniquement par la relation $<$. Une 1-chaîne est donc totalement ordonnée et possède une origine et une extrémité.

Nous nommerons longueur d'une 1-chaîne le nombre de ses éléments.

Tout élément de E constitue une 1-chaîne de longueur 1.

Une 1-chaîne est maximale s'il n'existe pas de 1-chaîne différente la contenant.

Toute 1-chaîne non maximale est donc contenue dans au moins une 1-chaîne maximale.

Mêmes considérations pour les 2-chaînes ou chaînes décroissantes ordonnées par $\ll$.

Remarquons encore qu'une 1-chaîne et une 2-chaîne ne peuvent pas avoir plus de un élément commun.

Les origines (les extrémités) de toutes les 1-chaînes maximales constituent une (2)-chaîne (donc non vide mais qui peut être réduite à un point).

Nous noterons A_1 (et B_1) ces (2)-chaînes.

(Mêmes choses pour les 2-chaînes maximales qui définissent les 1-chaînes A_2 et B_2).

THEOREME I

Soit C la longueur maximum de toutes les 1-chaînes, d la longueur maximum des 2-chaînes.

Nous noterons C le nombre minimum de 1-chaînes qui sont nécessaires pour recouvrir E et de même D pour les 2-chaînes. On a alors les égalités:

$$\boxed{C = d \qquad \text{et} \qquad D = c\,.}$$

- - - - - - - - - - -

Démontrons par exemple l'égalité $C = d$; pour cela nous allons faire une récurrence sur les valeurs de d.

Le théorème est vrai pour $d = 1$ car dans ce cas E est entièrement ordonné par $<$ et par conséquent $C = 1$.

Supposons alors le théorème démontré jusqu'à la valeur $d = N$ et soit E un bi-ordre pour lequel

$$d = N + 1$$

Dans E toutes les 2-chaînes de longueur $N + 1$ sont maximales et ont donc leur origine dans A_2.

Otons de E tous les éléments de A_2, nous obtenons un bi-ordre E' pour lequel $d' = N$ et par conséquent pour lequel $C' = d' = N$.

Or (puisque les éléments de A_2 forment une 1-chaîne)

$$C = \leqslant N + 1$$

c'est-à-dire

$$C \leqslant d$$

Mais on a toujours $d \leqslant C$ [en effet une 2-chaînes ne peut rencontrer chacune des C 1-chaîne en plus de 1 point].

Finalement:

$$C = d$$

COROLLAIRE DU THEOREME I

Les C 1-chaînes suffisent pour recouvrir E, mais chacune de ces 1-chaînes a une longueur $< c$ donc:

$$C \cdot c \geqslant N$$

c'est-à-dire:

$$d \cdot c \geqslant N$$

[On reconnait ici le résultat énoncé dans l'article de Mr Guilbaud.]

EXEMPLES: Bi-ordres fibrés et Bi-ordres triangulaires

Considérons une partition de E en sous ensembles (non vides) $E_1, E_2, \dots E_p$ [qui seront les "fibres"].

Ordonnons chacun des E_i par une relation d'ordre notée $<$ et rangeons ces E_i dans un certain ordre (total) noté $\ll$ (ordre de la "base").

On définit alors un Bi-ordre sur E de la façon suivante: si a et b appartiennent à un même E_i ils sont ordonnés par $<$.

si $a \in E_i$ $b \in E_j$ et $E_i \ll E_j$ alors $a \ll b$

Nous dirons qu'un bi-ordre E est triangulaire d'ordre p (soit E (p)) s'il est fibré et si les fibres E_1 $E_2 \dots E_p$ ont les longueurs $1, 2, 3 \dots p$. E contient donc

$$N = \frac{p\,(p + 1)}{2} \quad \text{éléments}$$

Pour E (p) on a évidemment:

$$c = d = C = D = p.$$

Soit E un bi-ordre quelconque, nous noterons Γ le minimum de chaînes-indifféremment (1) ou (2) qui sont nécessaires pour recouvrir E.

Parmi tous les bi-ordres ayant N éléments il y en a (Bi-ordres "maximaux") pour lesquels Γ est maximum.

Nous noterons Φ ce Γ maximum.

Φ est donc une fonction de N (et bien évidement $\Phi(N)$ est une fonction non décroissante).

PROPOSITION 4 -

Les Bi-ordres triangulaires $E(p)$ sont maximaux, c'est-à-dire:

$$\Phi \frac{(p(p+1))}{2} = p$$

Soit en effet E un bi-ordre maximal à $N = \frac{p(p+1)}{2}$ éléments.

Si E ne contenait pas de chaînes [(1) ou (2)] de longueur $\geqslant p$ en vertu du Théorème 1 E se laisserait recouvrir par des chaînes [toutes (1) ou toutes (2)] en nombre $\leqslant p-1$: E ne serait pas alors un bi-ordre maximal (puisque $\Phi(N) \geqslant p$).

Donc E contient au moins une chaîne de longueur p.

Otons cette chaîne de E nous obtenons un bi-ordre E qui a

$$N' = \frac{(p-1)p}{2} \text{ éléments.}$$

Si E' ne contenait pas de chaînes de longueur $\geqslant p-1$ E' se laisserait recouvrir par des chaînes en nombre $\leqslant p-2$ donc E se laisserait recouvrir avec au plus

$$p-2+1 = p-1 \text{ chaînes}$$

et E ne serait pas maximal.

Donc E' contient au moins 1 chaîne de longueur $p-1$.

En ôtant cette chaîne de E' etcontinuant le même raisonnement on voit que finalement tout bi-ordre maximal E d'ordre $N = \frac{p(p+1)}{2}$ se laisse recouvrir par des chaînes de longueurs $p, p-1, \ldots 1$. Donc $\Phi(N) \leqslant p$

Et par conséquent:

$$\Phi(N) = p$$

PROPOSITION 5 -

Soit N un nombre non "triangulaire":

$$\frac{p(p+1)}{2} < N < \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

on a

$$\Phi(N) = p$$

En vertu de la non décroissance de la fonction il suffit de montrer que:

$$\Phi\left(\frac{(p+1)\quad(p+2)}{2} - 1\right) \quad = \quad p$$

or en répétant le raisonnement de la proposition 4, on arrive à un dernier ensemble qui contient non pas 1 élément (comme dans le cas de la proposition 4), mais 2 éléments. Or 2 éléments appartiennent toujours à 1 même chaîne:

Si donc nous convenons de nommer racine triangulaire de l'entier N, l'entier p qui vérifie:

$$\frac{p\ (p+1)}{2} \leqslant N < \frac{(p+1)\quad(p+2)}{2}$$

soit $p = \sqrt[T]{N}$ $\left[\sqrt[T]{N} = E\left(\frac{-1+\sqrt{8N+1}}{2}\right)\right.$ où E (2) désigne la partie entière de $\left.x\right]$. On a:

THEOREME 2

Pour tout bi-ordre de N éléments :

$$\Gamma < \Phi\ (N) = \sqrt[T]{N}$$