MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. TH. GUILBAUD
P. ROSENSTIEHL

Analyse algébrique d'un scrutin

Mathématiques et sciences humaines, tome 4 (1963), p. 9-33
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1963__4__9_0>

G. Th. GUILBAUD
et P. ROSENSTIEHL

ANALYSE ALGEBRIQUE D'UN SCRUTIN

SOMMAIRE

- - - - - - - - - -

I. PREMIERE ANALYSE DES FAITS

Sept candidats : a, b, c, d, e, f et g.

Quinze "juges" désignés par des numéros (1 à 15) : chacun a déclaré son ordre de préférence

1 :	b	c	d	f	e	a	g
2 :	d	e	g	b	a	f	c
3 :	d	a	c	e	f	g	b
4 :	c	d	e	f	g	a	b
5 :	a	b	c	d	e	f	g
6 :	d	e	c	f	b	a	g
7 :	b	a	d	c	e	f	g
8 :	a	b	c	g	d	e	f
9 :	d	c	a	e	f	b	g
10 :	b	e	a	c	f	(g et d : ex aequo)	
11 :	c	b	d	f	a	e	g
12 :	c	f	g	b	a	e	d
13 :	a	c	g	d	e	f	b
14 :	b	g	f	a	c	d	e
15 :	f	b	e	a	c	d	g

Comment analyser ces résultats? On peut dire d'abord :

1°) Les mérites des candidats sont estimés ainsi :

a : est jugé
1er par : 5, 8 et 13
2e par : 3 et 7
3e par : 9 et 10
4e par : 14 et 15
5e par : 2, 11 et 12
6e par : 1, 4 et 6
dernier par personne

b :
1er : 1, 7, 10, 14
2e : 5, 8, 11, 15
3e : personne
4e : 2, 12
5e : 6
6e : 9
7e : 3, 4, 13

et ainsi de suite.

Mais :

2°) On peut aussi abréger
(abrégé qu'on peut croire significatif parce que les rôles de premier et de dernier sont sans doute plus notables que les autres.

	jugé premier par	jugé dernier par
a	5 8 13	(personne)
b	1 7 10 14	3 4 13
c	4 11 12	2
d	2 3 6 9	12 (et 10)
e	(personne)	14
f	15	8
g	(personne)	1 5 6 7 9 11 15 (et 10)

et on peut tirer quelques premières impressions, de ces renseignements et de quelques analogues.

Mais il faut aller plus loin.

Car on demande, à partir des opinions individuelles, de former quelque chose qu'on puisse appeler une opinion collective (ou générale).

Laissons de côté la méthode de Borda qui consiste à remplacer les rangs des candidats en notes qu'on devrait additionner, pour en faire une moyenne: cette arithmétique mélange l'ordinal et le cardinal, et si c'est une procédure connue, ce n'est peut-être pas la meilleure.

II. LA METHODE DE CONDORCET

A. Statistiques sur les avis exprimés

Nous convenons d'appeler opinion tout ce qu'a dit un juge: ici c'est un ordre de classement des candidats.

Mais pour comparer entre elles les diverses opinions il faut les analyser, les décomposer en éléments simples; décidons, avec CONDORCET, de nous arrêter aux éléments simples de la façon suivante:

Diviser l'opinion de chacun en un système d'affirmations telles que "c est meilleur que g" qu'on écrira: c > g, et qu'on appellera un Avis.

Ainsi :
c > g est l'avis de 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 et 15
g > c est celui de 2 et 14.
On dira que l'avis c > g est soutenu par 13 voix contre 2.

On va donc examiner de cette façon toutes les comparaisons par paires (il y en a 21) en retenant pour chacune l'avis de la majorité; mais cette majorité peut être plus ou moins forte, on notera donc pour chacune le nombre des voix "pour". On en profitera pour noter aussi, dans chaque cas, les votants qui sont contre l'avis majoritaire.

Avis de la majorité	Nombre de voix pour	Votants qui sont contre : 2,4,12	6,13,14	3,9,15	1,11,8,10	7,5
c > g	13	2 – –	– – 14			
c > f	12	2 – –	– – 14	– – 15	– – – –	
d > e	12	– – 12	– – –	– – 15	– – – 10	
e > g	11	– – 12	– 13,14	– – –	– – 8 –	
c > e	11	2 – –	6 – –	– – 15	– – – 10	
d > f	11	– – 12	– – 14	– – 15	– – – 10	
a > g	11	2,4,12	– – 14	– – –	– – – 10	
f > g	10	2 – –	– 13,14	– – –	– – 8 –	7
e > f	10	– – 12	– – 14	– – 15	1,11 – –	–
c > d	10	2 – –	6 – –	3,9 –	– – – –	7
d > g	10	– – 12	– 13,14	– – –	– – 8,(10)	–
b > g	9	2,4,12	– 13 –	3,9 –	– – – –	
b > a	9	– 4 –	– 13 –	3,9 –	– – 8 –	– 5
b > d	9	2,4 –	6,13 –	3,9 –	– – – –	
a > c	9	– 4,12	– – –	– 9 –	1,11 – –	
a > e	9	2,4 –	6 – –	– – 15	1 – – 10	
b > e	9	– 4 –	6,13 –	3,9 –	– – – –	
b > c	8	– 4,12	6,13 –	3,9 –	– 11 – –	
a > f	8	– 4,12	6 – 14	– – 15	1,11 – –	
a > d	8	2,4 –	6, – –	3 – –	1,11 – –	
b > f	8	– 4,12	6,13 –	3,9,15	– – – –	
Nombre des oppositions à l'opinion majoritaire...		(10 ou 11),	(9),	(8),	(4 ou 5),	(2,1)

Remarques:

1) Les votants ont été rangés selon l'importances de leur opposition à l'opinion majoritaire.

4 et 12 s'opposent onze fois et 2: dix fois
6,13 et 14 - neuf fois
3, 9 et 15 - huit fois etc.
jusqu'à 5 qui ne s'y oppose qu'une seule fois.

2) Pour l'avis $d > g$ on a compté "contre" le votant n° 10 qui a déclaré $g = d$. C'est une convention, on peut en faire d'autres. Comme, dans le cas présent, il n'y a qu'une seule occurrence d'exaequo, peu importe.

B. Reconstitution d'une opinion collective
(toujours selon Condorcet).

En commençant par les avis les plus nettement affirmés (c'est-à-dire par les majorités les plus fortes):

13 voix	$c > g$	
12 voix	$c > f$	
12 voix	$d > e$	d'où il résulte:
11 voix	$e > g$	1°) (d et c) $> e > g$
11 voix	$c > e$	
11 voix	$d > f$	2°) (c et d) $> f$
11 voix	$a > g$	3°) $a > g$

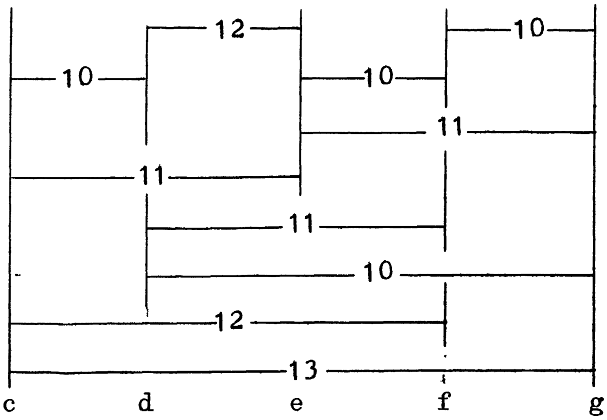
Cela ne suffit pas pour fixer une opinion collective qui soit un ordre complet. Il faut donc poursuivre (bien que les avis soient maintenant moins sûrement déterminés):

10 voix :	$f > g$	
10 voix :	$e > f$	
10 voix :	$c > d$	d'où : $c > d > e > f > g$
10 voix :	$d > g$	n'apporte qu'une confirmation.

On remarquera que jusqu'ici la position du candidat (a) n'est indiquée que par : $a > g$, et qu'on ne sait rien pour (b).

Tandis que les cinq candidats: c, d, e, f, g sont classés (dans cet ordre).

Relevons les "intensités" des avis composants de cet ordre: (c d e f g).



Les divers éléments sont affirmés avec des intensités (nombre des voix) comparables. Si l'on regarde de plus près, il semble même qu'un segment de l'échelle contenu dans un autre (tel: cf ou fg, dans : eg) est, le plus souvent, un peu moins sûr, comme il est normal. Exceptions:

dg a dix voix, alors que eg et df en ont onze,

df et ce ont onze voix, alors que de en a douze mais ces différences sont trop faibles pour être taxées d'incohérence.

On acceptera donc comme opinion générale, nettement exprimée:

$$c > d > e > f > g$$

Quant au candidat a, il n'a été nommé qu'une seule fois, et b pas du tout. Ce sont donc des cas contestés, il faudra faire appel à des avis peu nettement exprimés:

9 voix	$b > a$	
9 voix	$b > g$	donc
9 voix	$b > d$	
9 voix	$a > c$	$b > a > c > d > e > f > g$
9 voix	$a > e$	
9 voix	$a > g$	

On peut appuyer cet ordre sur les avis obtenus de justesse (huit voix contre sept).

$$b > (f \text{ et } c)$$
$$a > (f \text{ et } d)$$

L'ordre définitif est: b a c d e f g. Les candidats de tête, a et b sont les plus contestés: ce n'est pas raisonnable!

Par ailleurs il n'y a pas de contradictions dans ce vote (pas d'intransitivités, pas d'effet Condorcet), comme il aurait pu y en avoir si par exemple d était préféré à a par (7).

III. ORGANISATION DE L'ENSEMBLE DES OPINIONS

A. Les schémas symétriques de distances

Méthode des désaccords: nous allons regarder non pas les avis, mais les candidats, en comparant les ordres de préférence. Remarquons pour cela qu'un ordre de préférence peut être considéré comme une certaine permutation des lettres a, b, ..., g.

Il faut donc structurer l'ensemble de permutations de n objets (il y en a n !), de façon générale.

Soient par exemple les trois objets a, b, c, (l'ordre alphabétique n'étant pas significatif). Posons:

$$a > b > c = P$$
$$a > c > b = Q$$
$$b > a > c = R$$
$$b > c > a = S$$
$$c > a > b = T$$
$$c > b > a = U$$

Il est facile d'organiser l'ensemble de ces six opinions (c'est aussi bien l'ensemble des 3 ! = 6 permutations de trois objets).

Ainsi P et U sont "diamétralement opposées" de même Q et S ainsi que R et T.

On peut parler d'opinions plus ou moins éloignées les unes des autres.

Appliquons la décomposition de Condorcet

$P = a > b > c$	c'est-à-dire :	$(a > b)$ et $(a > c)$ et $(b > c)$
$S = b > c > a$	c'est-à-dire :	$(b > c)$ et $(b > a)$ et $(c > a)$

Ayant ainsi décomposé les opinions en avis, comptons les désaccords, en désignant par D (x,y) le nombre de désaccords entre x et y dit "distance entre x et y". On trouve ainsi:

$D(P,S) = 2$

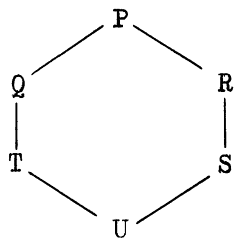
et de même: $D(P,Q) = 1$ (voisins)

$D(P,U) = 3$ (opposés)

(c'est le maximum)

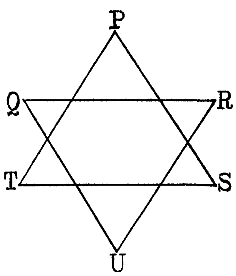
Cette distance entre les opinions engendre une structure:

- Schéma des distances égales à l'unité

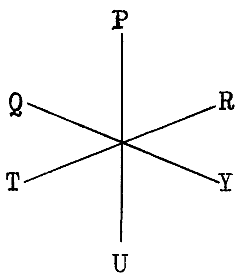


Remarquons que mettre sur un même plan la différence entre P et Q et entre P et R pose un certain problème, mais nous n'insisterons pas là-dessus.

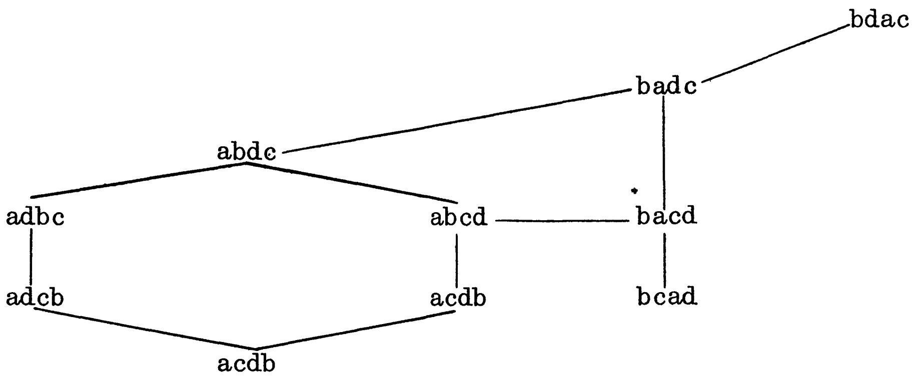
- Schéma des distances égales à 2



- Schéma des distances égales à 3



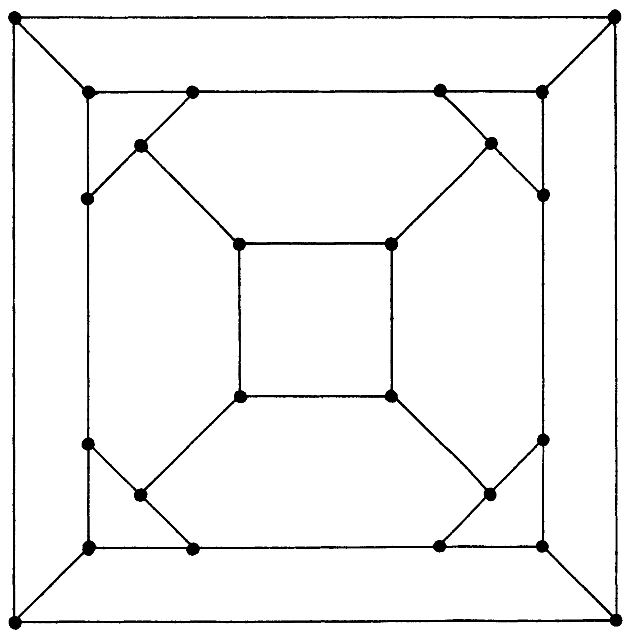
Pour le cas n = 4, le début du schéma des distances égales à une unité (un seul désaccord) se présente de la manière suivante :



Il existe des fermetures hexagonales: car dans S_4 il y a des sous-groupes isomorphes à S_3.

On s'aperçoit qu'il existe aussi des fermetures carrées (sous-groupes d'ordre 4).

Voici le schéma plan complet des distances égales à un :



6 carrés

8 hexagones

B. Orientation du réseau des opinions

Retenons ce schéma (ou graphe) des distances égales à un (on dit aussi permutations voisines).

Choisissons une permutation OP_0 parmi les n !; elle est maintenant privilégiée; il s'agit d'un ordre imposé. On prendra par exemple (abcd) dans le cas n=4. On demande d'organiser le système des autres permutations autour de P_0.

Toute ligne P, P' (distance unité: un seul désaccord) sera orientée de P vers P' si la transposition de lettres dans le passage de P à P' contredit l'ordre alphabétique P_0 (et sinon de P' vers P): et cette ligne orientée on l'appellera "arc" (P,P')*. Tout arc représente en quelque sorte un avis opposé à P_0, ce que nous avons appelé aussi une opposition.

Portons notre attention sur les chemins de ce graphe orienté (voir figure ci-après). Il apparaît que :

1. Le graphe ne comporte pas de circuit car le cumul d'oppositions successives ne saurait ramener à une opinion origine.
2. Tout sommet P du graphe est l'extrémité d'au moins un chemin issu de P_0. Par exemple, à partir de P_0 on peut joindre (dcab) par transfert progressif de d d'abord en première place (3 arcs), puis de c en seconde place (2 arcs).

   P_0 est en quelque sorte l'ancêtre de tous les sommets P, et inversement l'opinion diamétralement opposée à P_0 est le descendant commun de tous.
3. Tous les chemins $\left[P_0, P\right]$ ont la même longueur, égale à la quantité d'oppositions de P vis-à-vis de P_0. On placera ainsi pour n = 4, P_0 sur un niveau o, les permutations obtenues à partir d'un parcours d'une unité sur un niveau 1, celles obtenues à partir de P_0 à partir de chemins de deux sur un niveau 2 etc..., enfin (dcba), seul sur le niveau 6, se trouve à distance 6 de (abcd).

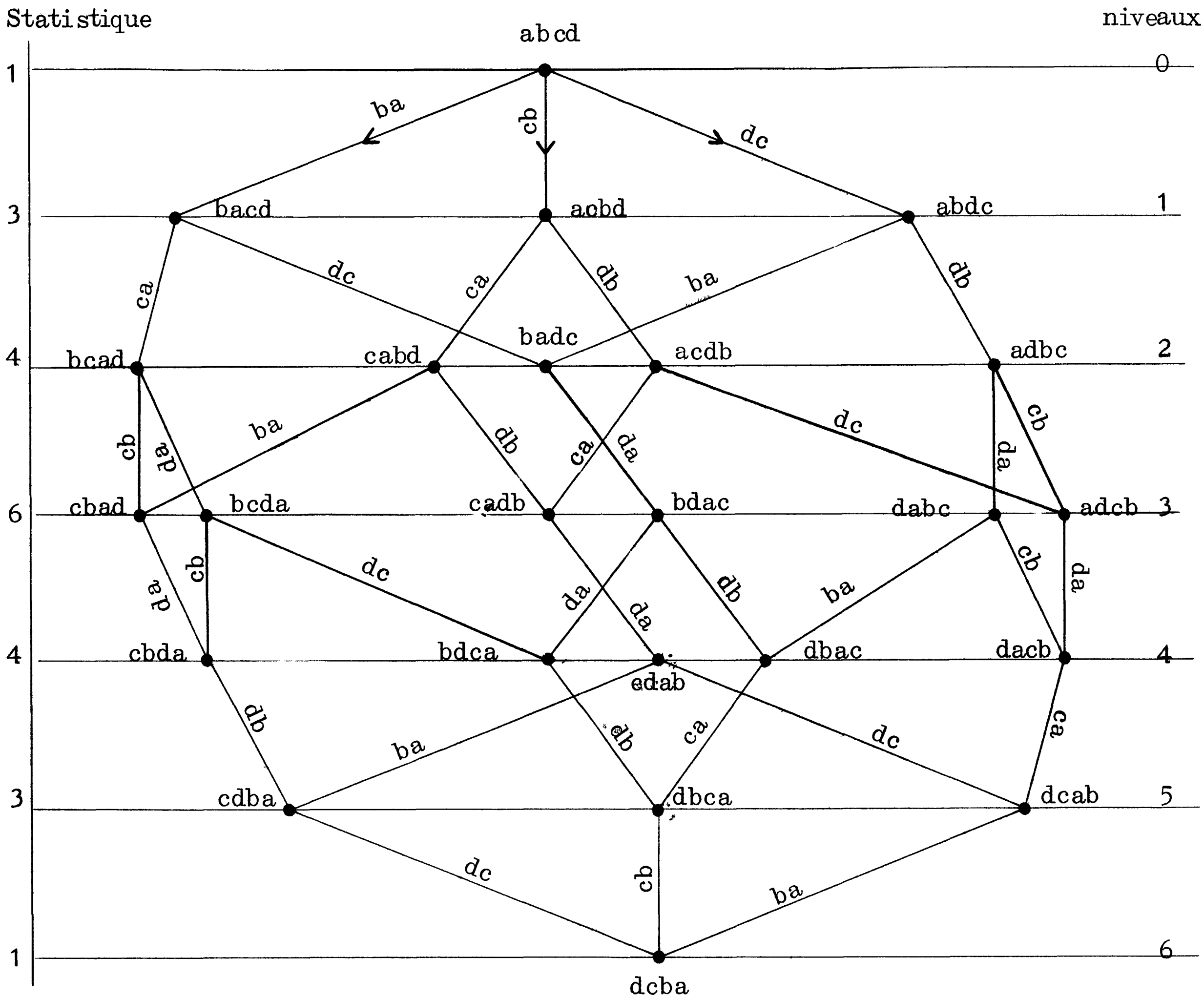
<u>Attention:</u>

De ce que (bdca) et (dcab) se trouvent respectivement aux niveaux 4 et 5, on ne peut en déduire la distance de l'un à l'autre. Celle-ci est de 3. On remarquera même que dans le niveau médian, (le niveau 3) toute opinion y trouve son opinion diamétralement opposée (distance 6).

Nous allons maintenant dénombrer les sommets niveau par niveau.

---

* certains préfèrent dire "flèche".



<u>Ensemble des permutations de quatre lettres mises en ordre par rapport à la permutation (abcd) prise pour origine.</u>

Chaque arc de la figure orienté de haut en bas, correspond à l'intervention dans l'opinion origine de l'opposition (par rapport à abcd) nécessaire pour obtenir l'opinion extrémité. Dans la mesure où la géométrie plane le permet les oppositions identiques sont représentées par des arcs parallèles. dcab par exemple situé au niveau 5 présente 5 oppositions par rapport à abcd. On remarquera les chemins (au nombre de 5) qui vont de abcd à dcab; ils font apparaître toutes les opinions qui incluent les accords de dcab avec abcd.

C. Statistique des distances

Faisons la statistique des objets à une distance donnée de l'un d'eux.

n = 3 (hexagone)

distances	nombre d'opinions
0	1 1
1	2
2	2
3	1
	6 = 3!

n = 4 (voir figure ci-dessus)

distances	nombre d'opinions
0	1
1	3
2	5
3	6
4	5
5	3
6	1
	24 = 4!

La récurrence (passage de 3 à 4 se fait de la manière suivante:

1	2	2	1				
	1	2	2	1			quatre fois 1221 qui est la statistique pour n = 3
		1	2	2	1		
			1	2	2	1	
1,	3,	5,	6,	5,	3,	1	(qui est la statistique pour n = 4)

Chaque statistique engendre la suivante par cette méthode qui exprime aussi le fait que la fonction génératrice est engendrée par des produits de polynomes $(1+x+x^2+\text{etc..})$. On peut aisément l'établir en remarquant que les arrangements de n lettres à distance d d'un arrangement donné seront classés selon que la première lettre reste la première quand on passe d'un arrangement à l'autre, ou devient la seconde, ou devient la troisième, etc...

n = 5

distance	nombre d'objets
0	1
1	4
2	9
3	15
4	20
5	22
6	20
7	15
8	9
9	4
10	1
	120 = 5!

..... etc...

L'histogramme a la forme d'une cloche, et quand n est grand la distribution peut être remplacée par une loi normale (voir Kendall, Rank correlation methods, London, 1948).

$$\text{Moyenne} = \frac{1}{4}\, n\,(n-1)$$

$$\text{Variance} = \frac{1}{12}\, n\,(n-1)\,(2n+5).$$

Le tau de Kendall: prenons $n = 5$ pour fixer les idées. L'échelle des distances d va de 0 à 10 :

$$d \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

On va tout ramener à une échelle indépendante de n.

Dans le cas général en effet $0 \leqslant d \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

L'échelle standard choisie est l'échelle $[-1, +1]$.

$$\begin{array}{cccc} & +1 & 0 & -1 \\ d & & & \\ & 0 & \frac{n\,(n-1)}{4} & \frac{n(n-1)}{2} = D \end{array}$$

+1 représente l'accord complet,
-1 représente l'opposition "diamétrale", le désaccord total

tau est proportionnel à d, ce qui implique

$$\boxed{\text{tau} = \tau = 1 - \frac{2\,d}{D}}$$

L'intérêt du tau de Kendall est qu'il se comporte à peu près comme un coefficient de corrélation linéaire. C'est-à-dire comme un cosinus.

On peut en effet se figurer les écarts entre opinions comme des écarts angulaires: c'est déjà ce que suggère l'expression courante d'opinions diamétralement opposées.

On appellera angle de deux opinions, l'angle défini par

$$\cos(\alpha) = \text{tau} = 1 - 2\,d/D$$

On verra plus loin ce que signifie l'orthogonalité - c'est un aspect de l'indépendance en probabilité.

On ajoutera ici que la loi fondamentale de la trigonométrie (dite sphérique) à savoir

$$\cos a = \cos b \ \cos c + \sin b \ \sin c \ \cos A$$

permet de calculer des angles A qui conduisent à la notion de corrélation partielle, comme à l'ordinaire.

D. Permutoèdre

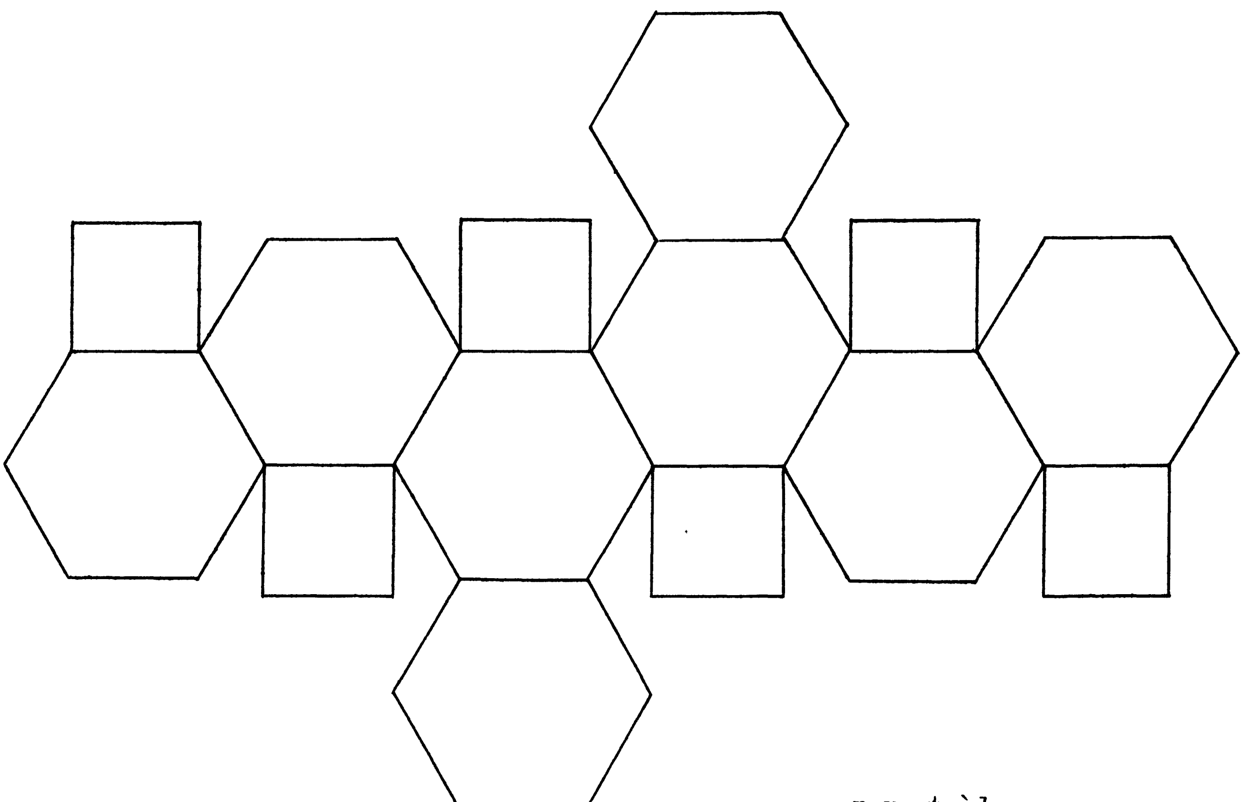
On pourrait poursuivre dans cette voie: ne pas se contenter de dessiner le réseau de connexions entre les (n!) ordres, mais donner du "Relief", de l'épaisseur à cette structure. Contentons-nous ici d'indications schématiques, en reprenant (voir plus haut) le réseau des 24 ordres de 4 objets. On y a repéré facilement des quadrilatères et des hexagones: c'est-à-dire qu'au lieu de lire le réseau comme un simple "graphe", c'est-à-dire un ensemble de couples (chaque couple étant marqué par une arête) - on continu la structuration en associant les arêtes entre elles pour former des facettes. Il y a alors:

1 polyèdre
14 faces (6 quadr. et 8 hexag.)
36 arêtes
24 sommets

et en complétant (comme toujours) par l'ensemble vide, on vérifie que la somme alternée est nulle :

$$1 - 14 + 36 - 24 + 1$$

Pour réaliser ce polyèdre (qui fait partie de la collection archimédienne) dans un espace euclidien, le plus simple est de choisir toutes les arêtes égales; rien n'empêche alors que les faces soient des polygones réguliers. On a figuré, ci-après, ce développement à plat de la surface de polyèdre. Le mot de permutoèdre est barbare, mais il est facile à retenir: soumettons le aux critiques des lecteurs.



permutoèdre
à plat

IV. COMPARAISON DES JUGES

A. Parenté et singularité

Nous pouvons comparer deux juges, c'est-à-dire deux opinions, par le nombre (et éventuellement la qualité) des désaccords.

Ainsi on a pu voir (Tableau 4, ci-dessus) que le votant n° 2 s'était opposé onze fois à l'opinion commune (bien entendu ces onze désaccords pourront être ultérieurement qualifiés selon leur importance: grosso modo, il est plus significatif de voter c < g contre treize autres, que de voter b < f contre sept). Comparons alors (de la même façon) mais <u>entre eux</u>, les principaux opposants.

<u>Méthode graphique</u>: disposer parallèlement les opinions exprimées par les votants:

(2) :	d	e	g	b	a	f	c
(12) :	c	f	g	b	a	e	d
(4) :	c	d	e	f	g	a	b
(2) :	d	e	g	b	a	f	c

joindre les lettres de même nom dans deux lignes contigües et compter les intersections (en observant du coin de l'oeil la forme de la figure ainsi formée, ce qui peut être utile pour la suite).

Mais, bien entendu, on peut se dispenser du graphique en comptant accords et désaccords sur le tableau 4.

Appelons (provisoirement) écart entre deux opinions ou distance, le nombre des oppositions. Et notons pour commencer que ce nombre, ici, peut varier entre zéro et $D = 21 = 7 \times 6 : 2$. Quand l'écart est zéro, c'est l'accord complet (tau = + 1), quand il est égal au maximum (21) c'est le désaccord complet (tau = -1).

Voici les résultats du dénombrement:

écart	(2) - (12)	= 17
	(4) - (12)	= 10
	(2) - (4)	= 10

Si l'on fait les mêmes opérations pour (6), (13) et (14), on trouve des résultats très analogues:

(6) - (13)	= 11
(13) - (14)	= 12
(6) - (14)	= 18

Et si l'on compare enfin les deux groupes de trois:

	(2)	(4)	(12)
(6)	9	6	13
(13)	12	8	10
(14)	12	16	8

Ainsi les six principaux opposants s'accordent fort peu entre eux. D'une façon plus précise, puisque 0 marque l'accord et 21 l'opposition complète, les valeurs du milieu (10 et 11, ou même 9 et 12) désignent une relation qu'on notera naturellement sous le nom d'indépendance (ou d'orthogonalité): or c'est la plus fréquente dans notre ensemble des six opposants.

Pour manier commodément ces notions on a coutume de faire appel à un schéma probabiliste, lequel s'introduit naturellement comme suit:

Il y a 7! = 5040 façons de ranger sept candidats. Pour un ordre quelconque (opinion exprimée) il n'y a qu'un seul rangement qui soit l'accord complet et un seul qui soit l'opposition complète - mais il y a six rangements qui manifesteront une seule opposition - et (par symétrie) six qui manifesteront 20 oppositions.

On peut continuer et répartir les 5040 ordres par rapport à l'un d'entre eux, en fonction du nombre des oppositions. Voici, grosso modo, les résultats

(tau = + 1 ou - 1)

0 ou 21 :	1 sur 5040			
1 ou 20 :	6 sur 5040 c'est-à-dire environ 1 pour mille			
2 ou 19 :	environ	4	pour mille	(20 sur 5040)
3 ou 18 :	-	10	-	(49 sur 5040)
4 ou 17 :	-	20	-	
5 ou 16 :	-	33	-	
6 ou 15 :	-	51	-	
7 ou 14 :	-	72	-	
8 ou 13 :	-	90	-	
9 ou 12 :	-	105	-	

(tau = + ou -1/21)

10 ou 11 : environ 114 pour mille.

On voit par conséquent, que si étant donnée une opinion quelconque, l'opinion collective calculée plus haut par exemple, on choisit <u>au hasard</u> un rangement des 7 candidats, il y aura 23 chances sur cent pour que l'on y trouve 10 ou 11 oppositions - et 44 % qu'on y trouve 9, 10, 11 ou 12.

C'est pourquoi il sera prudent de n'attribuer a priori (sauf raisons formelles) aucune signification particulière aux nombres d'oppositions médians (entre 9 et 12) : un tel phénomène peut se produire presque une fois sur deux dans un tirage au sort. Par contre un petit nombre (1 ou 2 par ex.) ou bien un grand nombre (19 ou 20) d'oppositions devra attirer l'attention.

B. Pouvoir d'un juge

On suppose qu'un juge vienne à se raviser (= changer un avis). Toutes les opinions restant égales par ailleurs que va-t-il pouvoir imposer à la communauté?

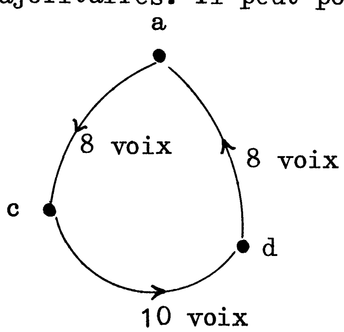
Cette situation est particulièrement plausible si le président qui dépouille le scrutin a découvert un effet Condorcet dans l'opinion majoritaire et demande à un juge de se raviser afin de l'éliminer.

Reprenons le scrutin que nous avons dépouillé plus haut. Et imaginons que le juge 7 dont l'opinion était b a d c e f g ait en fait voté b d c e a f g; il avait en effet l'impression, après discussion avec ses collègues, que b et a arriveraient en définitive en tête de liste, b l'emportant de justesse sur a; or il préférait de beaucoup b à a et il a pensé (peut-être à tort) assurer mieux la victoire de b en repoussant a en cinquième position.

Les effets de ce nouveau vote du juge 7 sur le dépouillement sont:

1. de rendre minoritaire a > d et du coup faire apparaître l'effet Condorcet dans les avis majoritaires: a > c > d > a.
2. de faire passer de 9 à 8 voix les avis majoritaires a > c et a > e, ce qui n'a pas d'effet sur l'opinion collective mais la rend plus fragile.

Notre président veut avant tout détruire le circuit constaté dans les avis majoritaires. Il peut pour cela chercher à faire perdre une voix soit à a > c soit à d > a, qui ne sont majoritaires qu'à 8 voix contre 7. Il ne pense pas à rompre en effet le circuit en renversant c > d, car il lui faudrait contacter pour cela au moins trois juges. C'est au juge 3 que le président va demander de se raviser, par exemple parce qu'il est le seul, de ceux qui ont préféré le candidat d au candidat a, à les avoir placés côte à côte. Le juge 3 a maintenant la liberté de reviser son opinion et cela avec la connaissance du reste du scrutin. On demande de mesurer son pouvoir.



Effet Condorcet observé si 7 vote b d c e a f g

Il découvre qu'en inversant ses deux candidats de tête, il détruit le circuit redouté et décide de l'opinion collective b a c d e f g. Mais peut-être peut-il faire plus? Avant de se prononcer, il se demande quelles sont toutes les opinions collectives qu'il est en mesure d'imposer à la collectivité par révision de son vote. Son attention se porte donc sur les avis de faible majorité (huit voix seulement), et qu'il a soutenus; à savoir:

a > c, a > e, a > f, et d > a.

Il en conclut que, quoi qu'il fasse, b viendra en tête, g en queue, et qu'il ne peut pas rompre l'ordre c d e f. Il ne lui reste plus que la possibilité de choisir le rang de (a) entre 2ème et 6ème. Le juge 3 a le pouvoir d'imposer les opinions collectives:

b a c d e f g

b c a d e f g

b c d a e f g

b c d e a f g

b c d e f a g,

et cela en votant par exemple exactement selon l'opinion qu'il veut imposer.

Nous dirons que le juge 3 a un pouvoir électoral de 5 unités. Et d'une façon générale, nous appellerons pouvoir électoral d'un juge le nombre d'opinions collectives (dépouillement Condorcet) qu'il peut imposer en modifiant son vote, tous les autres votes restant par ailleurs inchangés.

Reste encore un problème pour le juge 3. Une fois qu'il a pris conscience de son pouvoir électoral et choisi l'opinion collective qu'il préfère (par exemple une des plus "proches" de son vote initial), quels sont les différents votes qu'il peut se permettre d'exprimer pour atteindre ses buts? Peut-être voudra-t-il connaître cette liberté. Il s'agit de trouver les ordres totaux compatibles avec l'ordre partiel des avis qui ont dû être renversés de 8-7 à 7-8 pour satisfaire l'opinion collective retenue par lui. On montrerait que ces ordres totaux forment sur le permutoèdre une plage de sommets voisins. Et on pourrait s'intéresser sur cette plage à ceux qui sont les plus "proches" de l'opinion initialement exprimée par le juge 3 (par souci de discrétion dans la manière de réviser son vote).

V. COMMENT A PARTIR D'AVIS SE CONSTRUIRE UNE OPINION

A. Permutoèdre et simplexe

Revenons à la constitution d'une opinion.

Dans la tête du juge les candidats sont comparés deux à deux. Sur les 21 paires des candidats il lui faut statuer. Séparément, indépendamment? Non, nous savons que le juge doit être cohérent, c'est-à-dire qu'il doit être transitif.

Précisons cette idée.

	a	b	c	d	e	f	g
a		−	+	−	−	+	−
b	+		+	−	−	+	−
c	−	−		−	−	−	−
d	+	+	+		+	+	+
e	+	+	+	−		+	+
f	−	−	+	−	−		−
g	+	+	+	−	−	+	

Opinion "degbafc" du juge 2.

Dans le tableau carré (candidats x candidats) on trouve les 7x7 couples de candidats (x,y); mais la diagonale peut être négligée et on sait que si notre juge décide f > c (il préfère f à c) il décide aussi c < f et donc les cases (f,c) et (c,f) portent des informations opposées: on placera le signe plus dans (f,c) et le signe moins dans (c,f). On voit qu'il lui faut remplir les 21 cases situées au-dessus de la diagonale pour définir son opinion: choisir parmi l'ensemble K des 21 paires de candidats une partie qui représente les ordres alphabétiques +, K^+; les paires restantes seront appelées K^-.

Attention: Chaque paire de K^+ sera écrite dans l'ordre alphabétique et chaque paire de K^- dans l'ordre opposé; ordres qui correspondent à l'ordre de préférence exprimé. L'écriture des éléments de l'ensemble K s'en déduit.

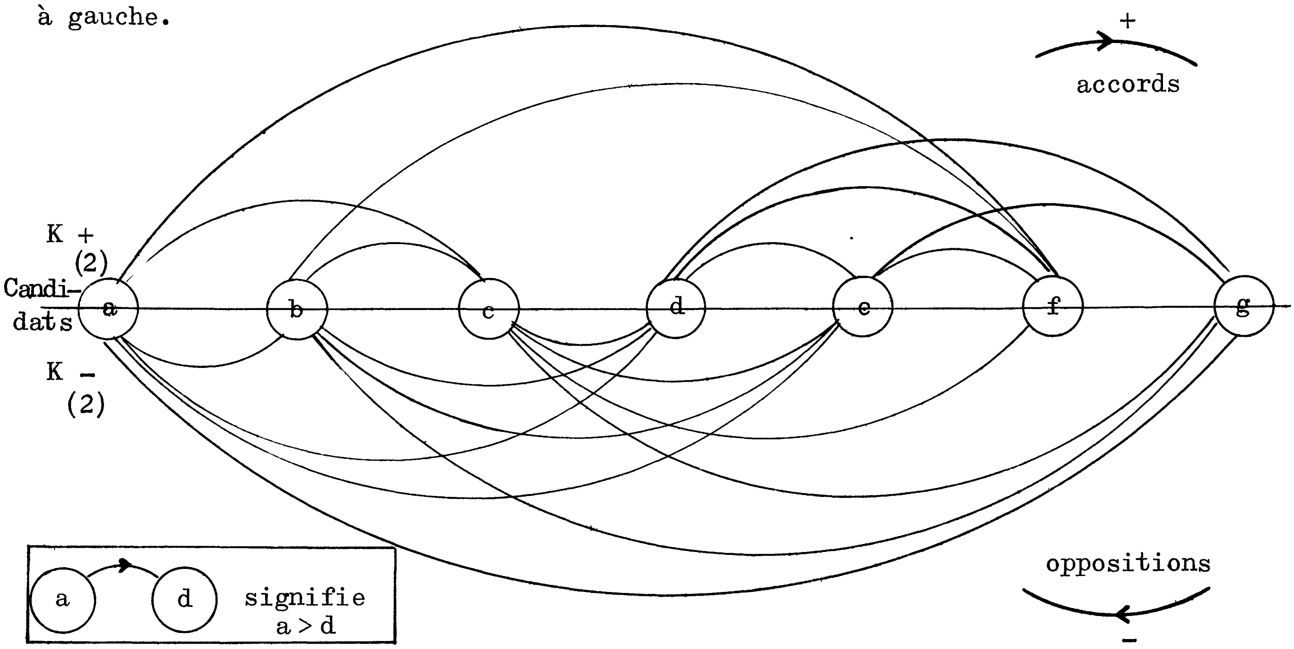
Cette partition en deux classes nous suggère une nouvelle écriture de la permutation P_2, l'opinion du juge 2,

$$P_2 = \left| K^+_{(2)}, K^-_{(2)} \right|$$

$$\text{avec } K^+_{(2)} = \{ ac, af, bc, bf, de, df, dg, ef, eg \}$$

$$K^-_{(2)} = \{ ba, da, db, dc, ea, eb, ec, fc, ga, gb, gc, gf \}$$

et une présentation pratique du graphe de P_2 où les arcs $K^+_{(2)}$ situés au-dessus de la ligne des sommets vont de gauche à droite, ceux situés en dessous de droite à gauche.



<u>Remarque</u>: Il nous suffit d'avoir les arcs situés d'un côté de la ligne des sommets pour avoir les autres par complémentation.

Revenons à la transitivité. Nous savons que l'on ne peut pas constituer une opinion en traçant au hasard des arcs (jusqu'à concurrence de 21) au-dessus de la ligne des sommets et en complétant ensuite en-dessous de cette ligne. En effet l'ensemble des signes plus du tableau carré, c'est-à-dire d'ailleurs l'ensemble des couples écrits dans K^+ et K^-, doit constituer un ensemble transitif.

Par exemple puisque e a $\in K^-_2$, on doit trouver (ec) et non (ce) dans K; effectivement e c $\in K^-_2$.

En définitive toute permutation P de n candidats est définie par une partie des $n(n-1)/2$ paires de candidats mais, inversement, toute partie de cet ensemble ne représente pas une permutation. Exploitons cette application des n ! permutations dans les $n(n-1)/2$ parties de K.

Le passage d'une opinion P_2 = d e g b a f c

à une opinion voisine P_{22} = d <u>g e</u> b a f c

plus éloignée de l'ordre alphabétique correspond sur les parties de K au transfert de la paire g e de K^+ à K^-, où elle vient s'écrire e g. Il s'en suit que : $K^+_{(2)}$ $K^+_{(22)}$, l'ensemble deuxième membre ayant un élément de plus que l'ensemble premier membre.

Nous concluons qu'à l'arc d'opposition $P_2 \longrightarrow P_{22}$ du permutoèdre correspond l'arc d'inclusion $K^+_2 \longrightarrow K^+_{22}$ du simplexe des parties de K.

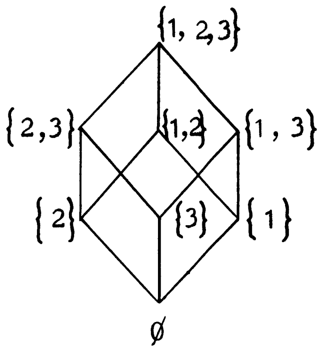
On en conclut que le permutoèdre à n lettres peut être plongé dans le simplexe d'ordre n(n-1)/2.

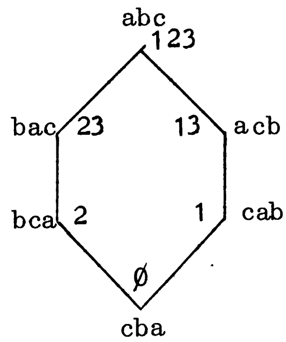
Exemple k = 3

a b = 1

b c = 2

a c = 3





On ne s'étonnera pas de trouver tant de carrés et d'hexagones sur un hypercube !

B. Théorèmes de comptabilité

Enonçons deux théorèmes sur les conditions pour que les n(n-1)/2 avis possibles entre n candidats constituent effectivement une opinion.

Théorème 1

Une condition nécessaire et suffisante pour que n lettres ordonnées deux à deux s'en trouvent totalement ordonnées est que les ordres deux à deux ne constituent pas de circuit.

Démonstration: la condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante car :

a) Il y a au moins une lettre qui n'est préférée à aucune autre (absence de circuit),
b) Cette lettre est unique (elles ont toutes été comparées deux à deux).
   Cette lettre vient en dernier dans l'ordre total qui est induit (nous voulons le découvrir) par les ordres deux à deux.
   On oubliera cette dernière lettre et on appliquera à nouveau les points a et b jusqu'à épuisement de toutes les lettres. On aura bien montré que les avis exprimés constituent une opinion.

Application: Le dépouillement du scrutin d'un nombre impair de juges de même poids conduit à un ordre majoritaire entre toute paire de candidats. En l'absence d'effet Condorcet - nous dit le théorème 1 - l'ensemble de ces ordres deux à deux définit une opinion.

Théorème 2

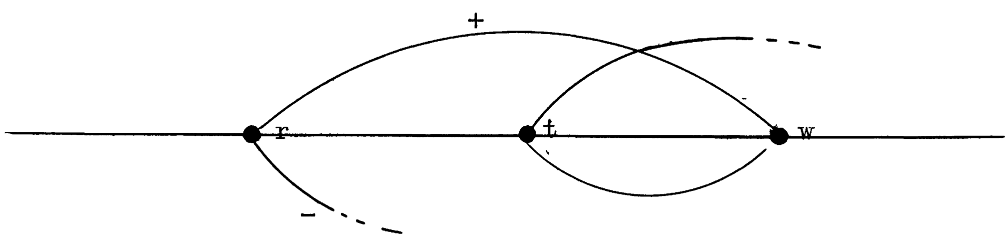
Une condition nécessaire et suffisante pour que n lettres ordonnées deux à deux s'en trouvent totalement ordonnées est que séparément l'ensemble K^+ des couples conformes à l'ordre alphabétique et l'ensemble K^- des couples non conformes à l'ordre alphabétique soient des ensembles fermés transitivement.

Démonstration: Si l'ensemble K des ordres deux à deux induit un ordre total dans l'ensemble des lettres, K est un ensemble transitif de couples et toute partie de K, K^+ comme K^-, est également nécessairement transitive.

Nous allons montrer que réciproquement la transitivité de K^+ et K^- séparément interdit l'existence de circuit. Grâce au théorème 1, la condition énoncée sera alors déclarée également suffisante.

La présence d'un circuit est-elle incompatible avec la transitivité de K^+ et K^-? Imaginons un circuit sur le schéma des arcs + et des arcs − (situés de part et d'autre de la ligne des lettres rangées par ordre alphabétique). Un circuit est une succession d'arcs plus et d'arcs moins, et certainement des deux types, puisque ceux du premier type nous font avancer dans l'alphabet et les autres reculer. Si nous rencontrons deux arcs consécutifs de signe + remplaçons les par un seul en vertu de la transitivité de K^+. On fera de même pour les arcs de signe −. On voit en définitive que, si l'ensemble des ordres deux à deux induit au moins un circuit, il en existe un qui est totalement alterné en signes: [+−+−...+−] On en considère un morceau [(r,w,t)].

Que nous disent les "ordres deux à deux" à propos du couple (r,t)?



a) Soit $t < r$, c'est-à-dire $(t,r) \in K^-$; et donc par transitivité de K^+ : $(w,r) \in K^-$; et donc w est préféré à r alors que dans l'hypothèse r est préféré à w.

b) Soit $r > t$, c'est-à-dire $(r,t) \in K^+$, ce qui nous permet de supprimer la lettre w de notre circuit. Construisant de la sorte un circuit toujours plus petit nous ne pouvons qu'aboutir à l'absurdité de a): deux lettres sont ordonnées à la fois dans l'ordre alphabétique et l'ordre contraire (circuit de longueur 2).

Sur le tableau carré des n^2 couples rempli de signes + et de signe − hormis la diagonale, le théorème 2 signifie que pour construire une permutation il faut et il suffit que séparément les signes + situés au-dessus et en dessous de la diagonale soient fermés transitivement; ou encore par raison de symétrie, il faut et il suffit que, au-dessus de la diagonale, séparément les signes + et les signes − soient fermés transitivement.

Ce deuxième théorème va nous permettre de reconnaître économiquement si un ensemble d'avis constitue une opinion. Il nous faut bien remarquer ici que point suffit d'annoncer des avis cohérents s'opposant à l'ordre établi (K^- transitif) et d'ajouter que par ailleurs on se conformera à l'ordre établi. En effet notre démonstration met nécessairement en jeu la transitivité de K^+, que n'implique pas celle de K^-.

VI. RECHERCHE D'UN COMPROMIS ENTRE DEUX COALISIONS DE JUGES

Imaginons que l'opinion collective en vigueur soit P_0 = a b c d e f g; il s'agit là de l'ordre résultant des dernières élections, ou encore d'un statu-quo -ante. Deux groupes de pression entendent le modifier,

l'un proposant P_1 = e d a b c f g

l'autre proposant P_2 = d a c e b f g

Ils vont négocier, au sujet des cinq premiers candidats. De leur accord résultera le nouveau statu-quo. On demande de préparer la négociation?

A. La fermeture transitive des accords communs

Imaginons dans le graphe des permutations les ancêtres de P_1 (A partir du permutoèdre orienté à quatre lettres dessiné plus haut on imaginera celui à sept lettres). Il s'agit de permutations P_i liées par un chemin (P_i, P_1) à P_1; ce qui signifie que les accords que P_i peut avoir avec P_0 incluent ceux de P_1; écrivons le :

$$K^+_{(i)} \supset K^+_{(1)}$$

Imaginons maintenant celles des permutations P_i qui sont à la fois ancêtre de P_1 et de P_2. Il y en a au moins une, à savoir P_0. Il y en aura en général plusieurs. Elles incluent à la fois les accords de P_1 et de P_2 avec P_0 :

$$K^+_{(i)} \supset K^+_{(1)} \qquad \text{et} \qquad K^+_{(i)} \supset K^+_{(2)}$$

Tous ces ancêtres communs sont situés évidemment dans le graphe à des niveaux supérieurs (d'indice moindre) à ceux de P_1 et P_2. Nous allons montrer que parmi eux, l'un joue un rôle privilégié: il est situé à un niveau plus bas que tous les autres. Cette permutation privilégiée nous l'écrirons

$$P_{(1v2)} = \left| K^+_{(1v2)},\ K^-_{(1v2)} \right|$$

Nous avons dit que P_{1v2} devait avoir aussi peu d'accords que possible avec P_0 (être basse), et cependant inclure tous les accords de P_1 et P_2 avec P_0 (être ancêtre commun de P_1 et P_2); en d'autres termes :

$$K^+_{(1v2)} \supset K^+_{(1)} \cup K^+_{(2)},$$

et même puisque tout K^+ est transitif

$$K^+_{(1v2)} \supset \widehat{K^+_{(1)} \cup K^+_{(2)}}.$$

Montrons que l'on peut effectivement définir cette permutation privilégiée par

$$K^+_{(1v2)} = \widehat{K^+_{(1)} \cup K^+_{(2)}}$$

Il nous suffit de montrer que la partition

$$\left| \widehat{K^+_{(1)} \bigcup K^+_{(2)}},\ \overline{\widehat{K^+_{(1)} \bigcup K^+_{(2)}}} \right| \text{ de } K$$

est bien une permutation; étant évidemment la plus basse que l'on puisse construire elle sera alors l'être privilégié recherché.

Pour montrer que la partition en deux classes écrite ci-dessus est bien une permutation on s'appuiera sur le théorème 2: la classe $\mho$: $\widehat{K^+_{(1)} \cup K^+_{(2)}}$ est bien transitive; reste à montrer qu'il en est de même pour son complément $\bar{\mho}$, la seconde classe. Cela n'est pas évident.

Nous raisonnons par l'absurde :

$$\begin{array}{lll} \text{supposons que} & (z,y) \in \bar{\mho} & (1) \\ & (y,x) \in \bar{\mho} & (2) \\ \text{et} & (z,x) \notin \bar{\mho} & (3) \end{array}$$

On déduit de (1) que (z,y) appartient à $K^-_{(1)}$ et $K^-_{(2)}$,

On déduit de (2) que (y,x) appartient à $K^-_{(2)}$ et $K^-_{(2)}$,

et donc que (z,x) appartient à $K^-_{(1)}$ et $K^-_{(2)}$ puisque les K^- sont transitifs.

Donc (z,x), n'appartenant ni à $K^+_{(1)}$, ni à $K^+_{(2)}$, a été obtenu dans $\mho$ – comme l'affirme l'hypothèse (3) – par fermeture transitive de la réunion des accords, notée :

$$R = K^+_1 \cup K^+_2 .$$

Il nous suffit maintenant de démontrer que l'existence d'un chemin [x,z] dans R (engendrant l'arc (x,z) par fermeture transitive) est incompatible avec les hypothèses (1) et (2) et (3).

Supposons l'existence d'au moins un chemin [x,z] de R. Un tel chemin est constitué d'arcs bleus provenant de K^+_1 ou d'arcs rouges provenant de K^+_2 ou enfin d'arcs à la fois bleu et rouge. Le chemin n'est pas totalement bicolore sinon (x,z) appartiendrait à K^+_1 par exemple, et donc à $\mho$ ce qui n'est pas.

Si notre chemin comporte deux arcs successifs de même couleur, bleu par exemple, on les remplacera par un seul en vertu de la transitive de K^+_1. Cette remarque nous conduit à supprimer les arcs bicolores et même en définitive à dire que s'il n'existe dans R au moins un chemin [x,z] il en est un de couleurs alternées. Et c'est l'existence de celui-ci que nous allons prouver absurde. Ce chemin $[x, u_1, u_2, \ldots, u_n, z]$ sera appelé μ.

<u>Une remarque</u>: si $t > s$ selon P_1
et $s > t$ selon P_2 alors, soit $(s,t) \in R$ soit $(t,s) \in R$.

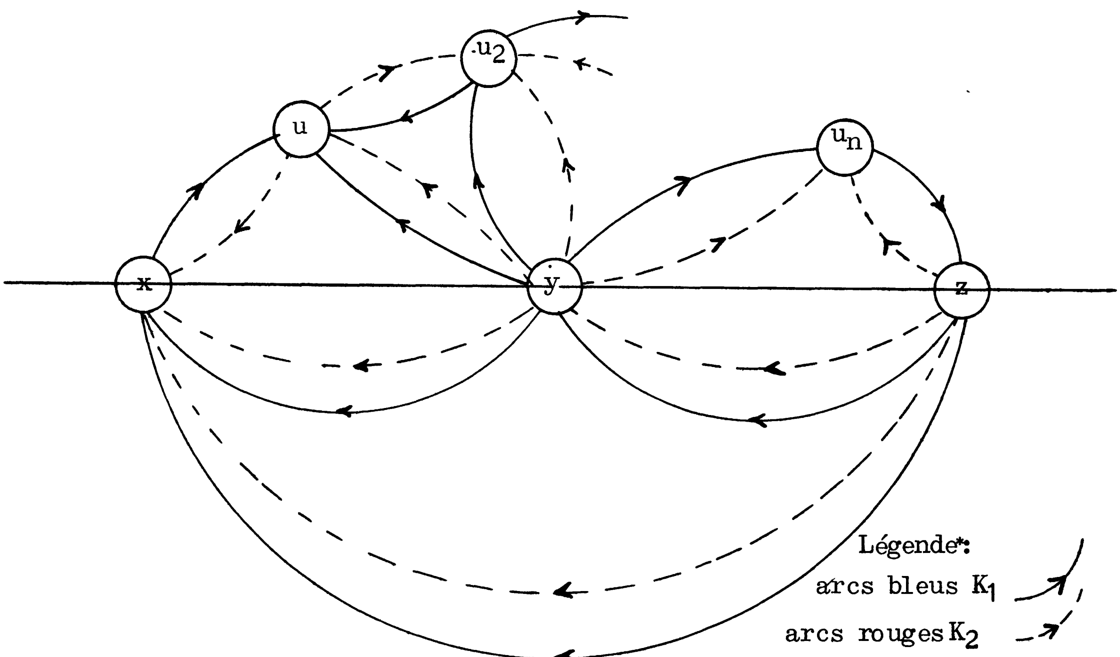
Considérons maintenant comment y est lié aux sommets $u_1, u_2, \ldots u_n$ dans P_1, dans P_2 et dans P_{1v2}.

Supposons que le premier arc de μ, (x, u_1), soit bleu par exemple, (y,u_1) est alors bleu par transitivité de P_1.

Si (u_1,y) était rouge, en vertu de la remarque ci-dessus R contiendrait soit un chemin [x,y], soit un chemin [y,z] et donc $\hat{R}$ contiendrait soit l'arc (x,y) soit l'arc (y,z) ce qui infirme (1) et (2). La paire y,u est donc colorée en bleu comme en rouge de y vers u_1.

Le deuxième arc de μ, (u_1,u_2), est rouge, et donc par transitivité des rouges, la paire y, u_2 est colorée en rouge de y vers u_2. Il en est de même de la couleur bleue sinon la remarque ci-dessus conduirait à une absurdité.

On raisonnera de même jusqu'à u_n qui doit lui aussi "venir après" y dans P_1 comme dans P_2. Alors si le dernier arc (u_n,z) est bleu, par exemple, par transitivité des bleus, (y,z) est bleu ce qui infirme (1).



* Le lecteur aura avantage à colorier sa propre figure

B. Conclusions sur le support algébrique de la négociation

1. A toute paire d'opinions $P_1 = \left| K^+_{(1)}, K^-_{(1)} \right|$, $P_2, \left| K^+_{(2)}, K^-_{(2)} \right|$ on sait associer une troisième contenant les accords de P_1 et P_2 séparément avec l'ordre établi P_0, et tenant compte par ailleurs au maximum de leurs revendications respectives. On la note $P_{1\vee 2}$ et elle est définie par :

$$K^+_{(1\vee 2)} = \widehat{K^+_{(1)} \cup K^+_{(2)}}$$

Exemple: Nous pouvons oublier dans le calcul les candidats f et g que nos deux coalitions de juges placent d'un commun accord en queue et selon l'ordre alphabétique.

P_0 = a b c d e (f g)

P_1 = e d a b c (f g) $\qquad K^+_{(1)} = \{$ a b, a c, b c $\}$

P_2 = d a c e b (f g) $\qquad K^+_{(2)} = \{$ a b, a c, a e, c e, d e $\}$

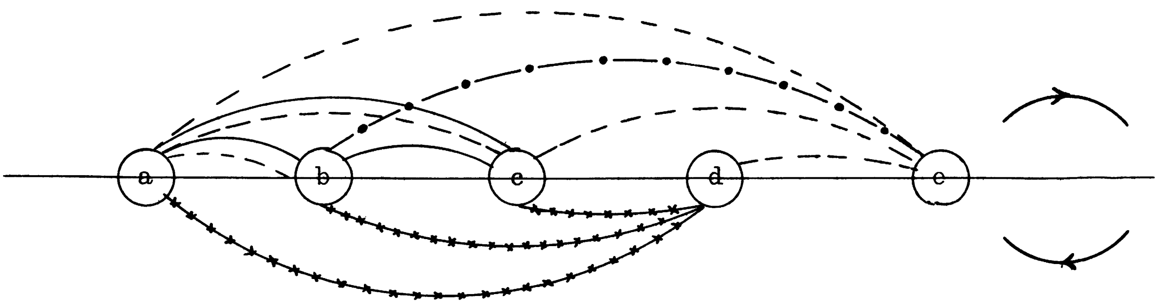
$K^+_{(1)} \cup K^+_{(2)} = \{$ a b, a c, a e, b c, c e, d e $\}$

$K^+_{(1\vee 2)} = \widehat{K^+_{(1)} \cup K^+_{(2)}} = \{$ idem + b e $\}$

Remarque: (b e) est la fermeture de (b c) et de (c e).

d'où

$$P_{(1v2)} \quad = \quad d\ a\ b\ c\ e\ (f\ g)$$



légende:

arcs K^+_1	arcs K^+_2	arcs de fermeture transitive de $K^+_1 \cup K^+_2$	arcs $\overset{*}{R}$	$P_{1\times 2}$
bleu	rouge			n'importe quel trait

2. A toute paire d'opinions P_1 et P_2 on sait associer une quatrième opinion contenant toutes les revendications de P_1 et P_2 par rapport à P_0, et tenant compte par ailleurs au maximum de leurs accords respectifs avec P_0. On la note P_{1v2}, et elle est définie par

$$K^-_{(1v2)} \quad = \quad \widehat{K^-_{(1)} \cup K^-_{(2)}}$$

Exemple:

$P_0 = a\ b\ c\ d\ e$

$P_1 = e\ d\ a\ b\ c \qquad K^-_{(1)} \quad = \{ da,\ db,\ dc,\ ea,\ eb,\ ec,\ ed \}$

$P_2 = d\ a\ c\ e\ b \qquad K^-_{(2)} \quad = \{ cb,\ da,\ db,\ dc,\ eb \}$

$K^-_{(1)} \cup K^-_{(2)} = \{ cb,\ da,\ db,\ dc,\ ea,\ eb,\ ec,\ ed \}$

$$K^-_{(1v2)} \quad = \quad \widehat{K^-_{(1)} \cup K^-_{(2)}} \quad = \quad \{ \text{idem} \}$$

Remarque: la fermeture n'introduit pas ici d'arc supplémentaire - (cas particulier).

d'où

$$P_{1v2} \quad = \quad e\ d\ a\ c\ b$$

Remarque: en nous fondant sur l'invariance de structure du permutoèdre dans l'inversion de tous ses arcs, on a déduit la conclusion 2 de la conclusion 1.

Nous avons défini sur l'ordre partiel du permutoèdre, l'algèbre de treillis:

$$P_{1v2} \quad = \quad P_1 \ v \ P_2$$

et

$$P_{1\wedge 2} \quad = \quad P_1 \wedge P_2$$

Remarque fondamentale

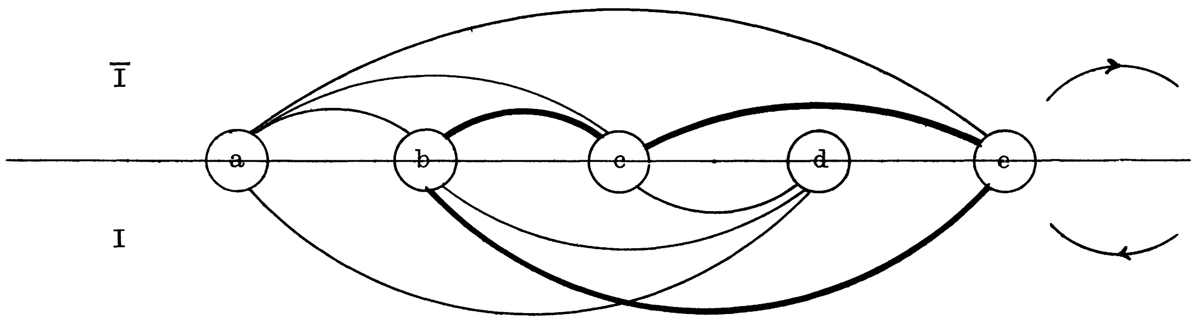
On pourrait être tenté de vouloir construire l'opinion de compromis de P_1 et P_2 la plus conciliante avec l'ordre établi en ne retenant comme oppositions que les oppositions communes de P_0 et P_1.

On proposerait alors la partition $|\bar{I}, I|$

avec $$I = K_1^- \cap K_2^-$$

Cette partition n'est pas en général une permutation. En effet I est bien une classe transitive en tant qu'intersection de deux K^-; $\bar{I}$ ne l'est pas en général. Pour l'exemple considéré ci-dessus, nous aurions:

$I = \{d\ a,\ d\ b,\ d\ c,\ e\ b\}$ ce qui donne pour la partition $|\bar{I}, I|$:

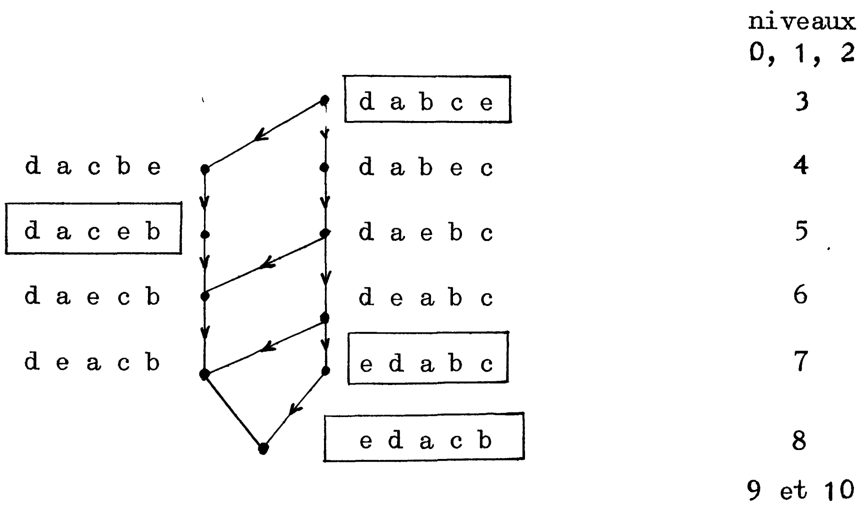


On découvre un circuit marqué en trait gras: cette partition n'est pas une opinion.

Faute d'une opération possible pour tout couple d'opinions, l'opération d'intersection des avis concordants (ou des avis discordants) avec l'opinion établie, ne définit pas une structure algébrique.

3. Les deux opinions défendues par nos deux groupes de pression pour remettre en cause l'ordre établi P_0 étant P_1 et P_2, la négociation se situera dans une partie seulement du permutoèdre. Cette partie, appelons là intervalle d'extrêmités ou de pôles $P_{1\vee 2}$, $P_{1\wedge 2}$. On peut se le représenter comme l'ensemble des chemins qui vont dans le permutoèdre de $[P_{1\vee 2}$ à $P_{1\wedge 2}]$. Ayant lui-même évidemment la structure de treillis, cet intervalle est un sous-treillis du permutoèdre.

Pour l'exemple précédent c'est l'intervalle d a b c e, e d a c b qui nous importe :



Tel est le support de la négociation, duquel il n'est pas raisonnable pour l'une et l'autre des parties de sortir. Le compromis se situera-t-il au pôle nord -(conservateur) ou au pôle sud (réformateur), ou quelque part ailleurs dans l'intervalle? En d a e b c par exemple? Nous laissons au lecteur le soin d'imaginer certains marchandages.

Mais que celui-ci soit rassuré: quelles que soient les deux positions de départ, la négociation se limitera toujours à une promenade dans un sous-treillis.

BIBLIOGRAPHIE

G. Th. GUILBAUD - Les théories de l'Intérêt Général et le problème logique de l'Agrégation - *Economie Appliquée, 1952, pp. 501-584.*

G. KREWERAS - Les décisions collectives - *Math. & Sc. Hum., n° 2, pp. 25-35.*