MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. KREWERAS

Une dualité élémentaire souvent utile dans les problèmes combinatoires

Mathématiques et sciences humaines, tome 3 (1963), p. 31-41
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1963__3__31_0>

G. KREWERAS

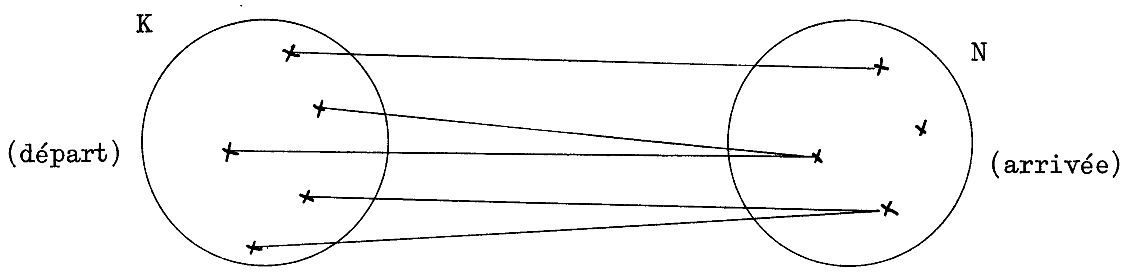
UNE DUALITE ELEMENTAIRE SOUVENT UTILE DANS LES PROBLEMES COMBINATOIRES

Lacunes	–	Doubles emplois
Injections	–	Surjections
Parties	–	Partitions
Pascal	–	Stirling
Sous-Ensemble	–	Ensemble-Quotient
Sélection	–	Classification

A.- APPLICATIONS D'UN ENSEMBLE DANS UN AUTRE

1) Pour illustrer la notion d'application d'un ensemble K (de k éléments) dans un ensemble N (de n éléments), nous utiliserons indifféremment

soit: a) la représentation classique à l'aide de flèches partant de K (départ) pour aboutir en N (arrivée)



de chaque élément de K part une flèche et une seule vers quelque élément de N, mais en un élément de N il se peut qu'aboutisse exactement une flèche, ou qu'il n'en aboutisse aucune, ou qu'il en aboutisse plusieurs.

soit: b) l'image d'une équipe de k employés emménageant dans un étage de n bureaux; chaque employé s'installe dans un bureau et un seul, mais il peut y avoir des bureaux occupés par un seul employé, d'autres vides, d'autres occupés par plusieurs employés.

2) Une application est injective (ou est une injection) si pour tout élément de N le nombre de flèches qui y aboutissent est inférieur ou égal à 1 (jamais plusieurs flèches de même extrémité).

Une application est surjective (ou est une surjection) si pour tout élément de N le nombre de flèches qui y aboutissent est supérieur ou égal à 1 (jamais d'élément où n'en aboutit aucune).

Il y a emménagement injectif si chaque employé a un bureau pour lui tout seul; il y a emménagement surjectif si aucun bureau n'est laissé vide.

3) Pour qu'une application de K dans N puisse être injective, il faut que $k \leqslant n$. Pour qu'elle puisse être surjective il faut que $k \geqslant n$. Mais bien entendu ces conditions ne sont pas suffisantes: une application définie sans précautions particulières a de fortes chances de n'être ni injective ni surjective. Il peut enfin exister des applications de K dans N à la fois injectives et surjectives (on les appelle bijectives): il est pour cela nécessaire (mais toujours pas suffisant) que $k = n$.

4) Il est bien connu que, K et N étant donnés, il existe n^k applications distinctes de K dans N; en effet, pour en définir une, on fait à partir de chacun des k points de K un choix entre n possibilités, d'où au total n^k manières de caractériser l'ensemble de ces choix.

$$\text{Appl } (k \longrightarrow n) = n^k$$

B.- PARTIES ET PARTITIONS

1°) Dans un ensemble N de n éléments, chacun sait ce que c'est qu'une partie de N. On dit aussi sous-ensemble au lieu de partie (*).

Il est utile de considérer que N a deux parties un peu spéciales: une "partie pleine", composée de n éléments, qui n'est autre que N lui-même; et une "partie vide", définie conventionnellement comme composée de zéro élément.

2°) Dans un ensemble K de k éléments, on appelle partition R un système cohérent de réponses à toutes les questions de la forme "x et y sont-ils ou non de la même classe?", ou en abrégé "a-t-on ou non xRy?" x et y désignent l'un et l'autre dans ces questions des éléments quelconques de K. Par système cohérent de réponses, nous entendons que l'on a toujours

xRx	(réflexivité)
si xRy, alors yRx	(symétrie)
si xRy et yRx, alors xRz	(transitivité).

(*) On employait autrefois le mot "combinaison", dans une locution promise à la désuétude mais qui laisse des traces persistantes: quand une partie de N se composait de p éléments ($p \leqslant n$), on l'appelait curieusement "combinaison de n éléments p à p". Ce langage est à écarter comme équivoque et quasiment absurde.
Nous utiliserons cependant plus loin, pour une raison de commodité, la lettre C bien qu'elle ne soit pas l'initiale du mot "partie".

Une partition R de K étant donnée, on appelle classe l'ensemble de tous les éléments x de K pour lesquels on a $x \mathrm{R} a$, a étant un élément donné quelconque. Deux classes distinctes n'ont pas d'éléments communs et la réunion de toutes les classes forme K. (C'est pourquoi une partition est aussi appelée relation classificatoire, ou encore relation d'équivalence). S'il y a p classes distinctes, (aucune n'est vide) nous dirons que R est une partition en p classes ($p = 1, 2, \ldots, k$). L'ensemble de ces p classes est appelé l'ensemble quotient de K par la partition R, et se note souvent K/R. Si à chaque élément de K on fait correspondre la classe à laquelle il appartient, on définit ce que l'on appelle l'application canonique de K dans K/R.

C.- NOTATIONS ET CONVENTIONS DE CALCUL

Dans ce qui suit, nous appellerons

(Si $k \leqslant n$)
- C_n^k le nombre de parties de N composées de k éléments (sélection ou choix de k parmi n)
- I_n^k le nombre d'injections de K dans N

(Si $k \geqslant n$)
- P_n^k le nombre de partitions de K en n classes (classification de k en n)
- S_n^k le nombre de surjections de K dans N

Nous supposerons connu le fait que si $k = n = p$, on a

$$I_n^k = S_n^k = I_p^p = p\,!$$

c'est le nombre des bijections.

Nous admettrons en outre par convention (plus ou moins naturelle)

(α) que si $k > n$, $C_n^k = I_n^k = o$

(β) qui si $k < n$, $P_n^k = S_n^k = o$

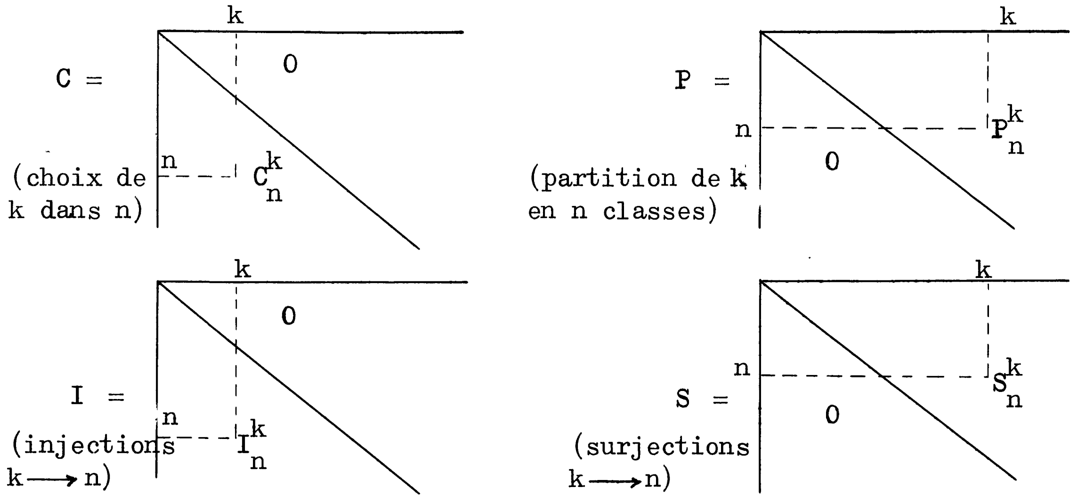
(γ) que $I_n^o = 1$ quel que soit $n \geqslant o$

(δ) que $S_o^o = 1$ et que $S_o^k = o$ quel que soit $k \geqslant 1$

(δ') que $P_o^o = 1$ et que $P_o^k = o$ quel que soit $k \geqslant 1$

(ε) que $0^o = 0\,! = 1$

Nous choisirons enfin de présenter les tableaux numériques des 4 familles de nombres (C_n^k, I_n^k, P_n^k, S_n^k) de manière que le nombre X_n^k soit inscrit dans la case où se coupent la <u>ligne n</u> et la <u>colonne k</u>; il résultera alors des conventions (α) et (β) que dans les tableaux C et I tous les nombres au "nord-est" de la diagonale sont nuls et que dans les tableaux P et S tous les nombres au "sud-ouest" de la diagonale sont nuls (l'habitude générale est de ne pas écrire ces zéros) :



Pour chacun de ces quatre tableaux numériques nous établirons une relation de "double récurrence" qui permettra d'en remplir les cases de proche en proche; nous verrons que ces quatre relations, toutes très simples, ont de grandes ressemblances entre elles.

On peut ajouter un cinquième tableau, noté B (<u>bijection</u>), et qui sera défini par: $B_n^k = o$, si $n \neq k$; et $B_n^n = n! = S_n^n = I_n^n$.

D.- COMPTAGE DES PARTIES ET DES INJECTIONS

D1 La relation la plus connue est

$$(1) \qquad \boxed{C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k}$$

On l'établit en considérant que les C_n^k parties de N formées de k éléments sont de deux sortes.

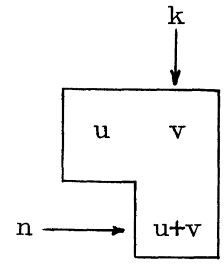
1°) Celles qui comprennent un certain élément a de N, fixé à l'avance: chacune d'elles peut se définir par ses éléments autres que a, lesquels sont au nombre de k-1 prélevés parmi les n-1 éléments de N autres que a. Le nombre de parties de cette première sorte est donc C_{n-1}^{k-1}.

2°) Celles qui ne comprennent pas a : chacune d'elles est définie par un prélèvement de k éléments parmi les n-1 éléments de N autres que a. Le nombre de parties de cette deuxième sorte est donc C_{n-1}^{k}.

On a donc bien la formule (1), qui permet de former de proche en proche le célèbre "triangle de Pascal" :

C =

	k=o	1	2	3	4	5
n=o	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1



(règle de formation)

D2

Le nombre I_n^k peut, on le sait, s'obtenir par un calcul direct simple à partir de n et k : c'est le produit de k entiers consécutifs décroissants à partir de n, $I_n^k = n\,(n-1)\,\ldots.\,(n-k+1)$. Nous ne nous servirons pratiquement pas de cette formule, qui n'intervient pas dans la dualité qui nous intéresse, et établirons plutôt la relation de double récurrence

$$(2) \qquad \boxed{I_n^k = k\, I_{n-1}^{k-1} + I_{n-1}^{k}}$$

Elle résulte, si l'on veut, du fait que, parmi les I_n^k injections de K dans N, il y en a de deux sortes.

1°) Celles pour lesquelles un bureau particulier a de l'étage N est occupé. Pour en définir une, on peut d'abord désigner l'employé unique qui occupera le bureau a (ce qui donne k possibilités), puis répartir les k-1 employés restants injectivement dans les n-1 bureaux restants (ce qui donne I_{n-1}^{k-1} possibilités); en tout donc $k\, I_{n-1}^{k-1}$ injections de ce type.

2°) Celles pour lesquelles le bureau a est laissé vide et où l'on répartit les k employés injectivement dans les n-1 autres bureaux, ce qui donne I_{n-1}^{k} injections.

La formule (2) est ainsi établie. Le tableau numérique qu'elle permet de former est le suivant (qui n'a pas de nom traditionnel) :

I =

	k=o	1	2	3	4	5
n=o	1					
1	1	1				
2	1	2	2			
3	1	3	6	6		
4	1	4	12	24	24	
5	1	5	20	60	120	120

$$\begin{array}{ccc} & & k \\ & & \downarrow \\ & u & v \\ n \longrightarrow & & ku+v \end{array}$$

(règle de formation)

D3

Une parenté presque évidente entre C et I consiste en ce que la colonne k de I peut s'obtenir en multipliant par k! la colonne k de C, ce qui peut s'écrire

$$\boxed{(3) \qquad I_n^k = C_n^k \times k!}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{(\text{choix de } k \text{ parmi } n) = \frac{\text{Inj } (k \longrightarrow n)}{\text{Bij } (k \longrightarrow k)}}$$

En effet toute injection de K dans N définit une <u>bij</u>ection de K dans une partie de N formée de k éléments (ceux auxquels aboutissent des flèches). Pour chacune des C_n^k parties de N formées de k éléments, il existe, on le sait, k! telles bijections; ce qui établit la formule (3).

E.- COMPTAGE DES PARTITIONS ET DES SURJECTIONS

E1

D'une manière "duale" de celle qui précède, nous allons commencer par établir la formule

$$(1') \qquad \boxed{P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + n\, P_n^{k-1}}$$

Parmi les P_n^k partitions de K en n classes, nous en distinguerons pour cela deux sortes.

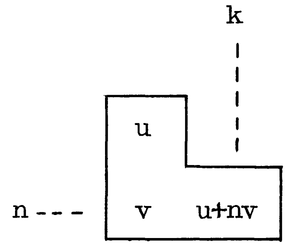
1°) Celles dans lesquels un certain élément b, fixé à l'avance, de K constitue une classe à lui seul. Les n-1 autres classes définissent alors une partition de l'ensemble des k-1 éléments autres que b en n-1 classes, ce qui montre qu'il y a P_{n-1}^{k-1} partitions de cette sorte.

2°) Celles dans lesquelles l'élément b appartient à une classe dans laquelle il y a déjà d'autres éléments (au moins un autre). Pour définir une partition de cette seconde sorte, il suffit de partitionner l'ensemble des k-1 éléments de K autres que b en n classes (ce qui donne P_n^{k-1} possibilités), et ensuite rattacher b à l'une quelconque de ces n classes (ce qui donne n possibilités). Il y a donc $n\,P_n^{k-1}$ partitions de cette seconde sorte.

On a donc bien la formule (1'). Le triangle numérique qu'elle permet de former de proche en proche, moins bien connu en général que le triangle de Pascal, pourrait porter le nom de <u>triangle de Stirling</u>:

P =

	k=o	1	2	3	4	5
n=o	1	0	0	0	0	0
1		1	1	1	1	1
2			1	3	7	15
3				1	6	25
4					1	10
5						1



(règle de formation)

E2

Pour les nombres S_n^k (nombres de surjections) nous établirons la formule

$$(2') \qquad \boxed{S_n^k = n\,S_{n-1}^{k-1} + n\,S_n^{k-1}}$$

Nous distinguerons à nouveau deux sortes de surjections de K dans N, parmi les S_n^k existantes.

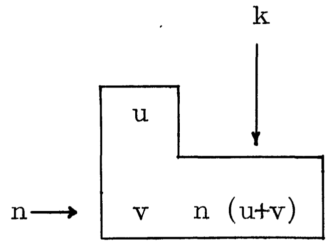
1°) Celles pour lesquelles un employé particulier, mettons le "chef de service", sera seul dans son bureau. Pour définir un tel emménagement surjectif, on peut d'abord laisser le chef de service choisir celui des n bureaux où il s'installera seul (n possibilités), puis répartir surjectivement ses k-1 subordonnés dans les n-1 autres bureaux (de l'une des S_{n-1}^{k-1} manières possibles); il y a donc $n\,S_{n-1}^{k-1}$ surjections de cette sorte.

2°) Celles pour lesquelles le chef de service ne sera pas seul, c'est-à-dire si l'on veut celles où il y aura un des k-1 subordonnés dans chaque bureau. Pour en définir une, il suffit de répartir les k-1 subordonnés surjectivement dans les n bureaux (de l'une des S_n^{k-1} manières possibles), et de laisser le chef de service choisir le bureau où il s'installera (n choix possibles); il y a donc $n\,S_n^{k-1}$ surjections de cette deuxième sorte.

La formule (2') est donc établie. Le tableau numérique correspondant est

S =

	k=o	1	2	3	4	5
n=o	1	0	0	0	0	0
1		1	1	1	1	1
2			2	6	14	30
3				6	36	150
4					24	240
5						120



(règle de formation

E3

S et P ont entre eux une parenté analogue à celle de I et C : la ligne n de S peut s'obtenir en multipliant par n! la ligne n de P :

$$(3') \qquad \boxed{S_n^k = n!\, P_n^k}$$

C'est-à-dire :

$$(\text{classifications de } k \text{ en } n) = \frac{\text{Surj } (k \longrightarrow n)}{\text{Bij } (n \longrightarrow n)}$$

En effet toute surjection de K dans N définit une partition R de K en n classes, le fait pour deux éléments de K d'être "de même classe" voulant dire que les flèches qui en partent aboutissent en un même élément de N. K/R est un ensemble de n classes, et la surjection de K dans N peut être définie comme l'application canonique de K dans K/R, suivie d'une application de K/R dans N, cette dernière étant <u>bi</u>jective. Pour chacune des P_n^k partitions R de K en n classes, il existe n! bijections de K/R dans N, ce qui établit la formule (3').

F.- PROPRIETES CONJOINTES

Pour exprimer commodément quelques propriétés des tableaux numériques C, I, P, S, B, il est commode de les traiter comme des matrices. Nous introduirons en outre la matrice A, dont les éléments sont $A_n^k = n^k$ nombre total des applications $K \longrightarrow N$.

$$A = \begin{array}{c|c} & k \\ \hline n & n^k \\ & \end{array}$$

Cela posé, les égalités (3) et (3') peuvent s'écrire respectivement

$$(3) \qquad I = C\,B$$

$$(3') \qquad S = B\,P$$

Montrons que

$$\boxed{C\,S = I\,P = C\,B\,P = A}$$

Nous établirons la dernière de ces égalités, les deux premières exprimant seulement l'associativité du produit CBP.

L'égalité en question s'écrit si l'on veut

$$(4) \qquad n^k = \sum_{p=o}^{+\infty} C_n^p\, p!\, P_p^k = \sum_{(p)} C_n^p\, B_p^p\, P_p^k \;;$$

bien entendu tous les termes à sommer deviennent nuls dès que p dépasse le plus petit des deux nombres k et n.

Or chacune des n^k applications de K dans N se caractérise par

1°) une partie H de N, qui est la partie de l'étage effectivement occupée par au moins un employé;

2°) une partition R de K, définie par les classes de "compagnons de bureau"; (Il y a évidemment autant de bureaux occupés que de classes de compagnons de bureau, c'est-à-dire autant d'éléments dans H que de classes dans K/R; soit p ce nombre, qui ne peut dépasser ni k ni n).

3°) une bijection de K/R dans H.

Pour toute valeur donnée de p, le nombre total de possibilités correspondantes est bien

$$C_n^p \times P_p^k \times p! = C_n^p\, P_p^k\, B_p^p$$

et il suffit ensuite de sommer en donnant à p toutes les valeurs possibles pour établir l'égalité (4).

Exemples: 1°) $n = 3 \quad k = 4$

$$C_3^o\, 0!\, P_o^4 + C_1^1\, I!\, P_1^4 + C_3^2\, 2!\, P_2^4 + C_3^3\, 3!\, P_3^4 + 0 + \dots$$

$$= 1 \times 1 \times o + 3 \times 1 \times 1 + 3 \times 2 \times 7 + 1 \times 6 \times 6$$

$$= o + 3 + 42 + 36 = 81 = 3^4$$

2°) $n = 5 \quad k = 2$

$$C_5^o\, 0!\, P_o^2 + C_5^1\, 1!\, P_1^2 + C_5^2\, 2!\, P_2^2 + 0 + \dots$$

$$= 1 \times 1 \times 0 + 5 \times 1 \times 1 + 10 \times 2 \times 1$$

$$= 0 + 5 + 20 = 25 = 5^2$$

G.- EXERCICES PROPOSES

1°) Les sommes des lignes successives du triangle de Pascal C forment une suite $\gamma_0\ \gamma_1\ \gamma_2 \ldots \gamma_4 \ldots$ dans laquelle chaque terme est double du précédent. Etablir cette propriété classique par un raisonnement direct en considérant γ_n comme le nombre total de parties, parties vide et pleine comprises, d'un ensemble de n éléments. (On considèrera deux sortes de parties, suivant qu'elles comprennent ou non un élément particulier).

Les sommes des colonnes successives du triangle de Stirling P forment une suite $\bar{\omega}_0\ \bar{\omega}_1\ \bar{\omega}_2 \ldots \bar{\omega}_n \ldots$ dont le terme général est le nombre total de partitions d'un ensemble de k éléments. Montrer que l'on a

$$\bar{\omega}_{k+1} = C_k^o\, \bar{\omega}_k + C_k^1\, \bar{\omega}_{k-1} + \ldots + C_k^k\, \bar{\omega}_o$$

(On comptera le nombre de partitions d'un ensemble de k+1 éléments en supposant connu le nombre d'éléments de la classe à laquelle appartient un élément particulier).

2°) Un jury veut organiser un concours entre p candidats de manière à les classer par "niveaux de qualité", et il hésite entre les quatre procédures suivantes :

(a) on classera tous les candidats, sans faire d'ex-aequo,

(b) on ne fera pas d'ex-aequo mais on se réserve de ne pas classer certains candidats (sans exclure l'éventualité de classer tout le monde ni celle de ne classer personne),

(c) on classera tous les candidats mais on se réserve de faire des ex-aequo (sans exclure le cas où tout le monde serait ex-aequo).

(d) on se donne toute liberté d'exclure éventuellement certains candidats du classement et de faire des ex-aequo parmi les classés.

Comment calculer dans les hypothèses successives d'adoption de chacune de ces procédures, le nombre de résultats possibles du concours? On appellera respectivement $a_p\ b_p\ c_p\ d_p$ les nombres cherchés.

Indications: a_p est évidemment égal à p!, b_p est la somme de la ligne p du triangle I, c_p est la somme de la colonne p du triangle S, d_p est pour tout $p > n$ le double de c_p (justifier cette dernière affirmation par une correspondance simple entre un résultat de la procédure (c) et un résultat de la procédure (d)). Noter que c_p est le nombre de manières de définir sur un ensemble de p objets un <u>préordre complet</u>.

Etablir par des raisonnements directs les récurrences

$$b_p = p\, b_{p-1} + 1$$

$$c_p = C_p^1\, c_{p-1} + C_p^2\, c_{p-2} + \ldots + C_p^p\, c_o$$

(on peut raisonner en supposant connu pour la première le nom du candidat classé en tête s'il y en a un, et pour la seconde le nombre de candidats classés en tête).

Former numériquement les quatre suites a_p b_p c_p d_p jusqu'à $p = 6$. On trouve

	p=o	1	2	3	4	5	6
a_p	1	1	2	6	24	120	720
b_p	1	2	5	16	65	326	1957
c_p	1	1	3	13	75	541	4683
d_p	1	2	6	26	150	1082	9366

3°) On appelle C' et P' les matrices obtenues à partir de C et P par suppression complète des lignes et colonnes numérotées 0.

Donner une interprétation des produits matriciels IP' et C'S. (Indications: le premier redonne à un décalage près les termes de M, le second donne la somme des puissances k-ièmes des n premiers nombres entiers).

4°) Les matrices C et P se laissent facilement inverser de proche en proche, et l'on obtient ainsi des matrices C^{-1} et P^{-1} de même disposition triangulaire respective.

Montrer que les termes de C^{-1} reproduisent au signe près, ceux de C.

Montrer que les termes de P^{-1} donnent, au signe près et à un décalage général près, les sommes des produits k à k des n premiers nombres entiers.