

AHMED TIJINI

PAUL SABLONNIÈRE

**Approximation de contours convexes par des splines paramétrées
périodiques convexes C^1 , quadratiques ou cubiques**

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 32, n° 6 (1998),
p. 729-746

[<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1998__32_6_729_0>](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1998__32_6_729_0)

© SMAI, EDP Sciences, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » (<http://www.esaim-m2an.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATION DE CONTOURS CONVEXES PAR DES SPLINES PARAMÉTRÉES PÉRIODIQUES CONVEXES C^1 , QUADRATIQUES OU CUBIQUES (*)

Ahmed TIJINI ⁽¹⁾, Paul SABLONNIERE ⁽²⁾

Résumé. — *Étant donné un polygone fermé et convexe du plan, nous construisons des courbes splines (quadratiques ou cubiques) paramétrées périodiques convexes de classe C^1 qui interpolent les sommets du polygone et préservent aussi la convexité de ce dernier.* © Elsevier, Paris

Abstract. — *Given a closed convex polygonal curve of the plane, we construct parameterized periodical and convex (quadratic or cubic) spline curves of class C^1 which interpolate to the vertices of the polygon and preserve its convexity.* © Elsevier, Paris

1. INTRODUCTION

L'interpolation par des fonctions ou des courbes paramétrées polynômiales ou rationnelles qui préservent la convexité des données est un problème important en dessin graphique. Plusieurs auteurs ont étudié ce problème dans le cas des fonctions splines, en proposant différents algorithmes pour le résoudre, mais il semble avoir été peu abordé dans le cadre des courbes paramétrées.

Dans ce papier, on s'intéresse à la construction de courbes splines polynômiales paramétrées périodiques convexes de classe C^1 qui interpolent les sommets d'un polygone fermé et convexe $\mathcal{P}$ de sommets $P_0, P_1, \dots, P_{n+1}$ avec $P_0 = P_{n+1}$.

Dans la Section 3 de ce travail, nous construisons une solution de ce problème dans l'espace des courbes splines cubiques paramétrées périodiques de classe C^1 (en abrégé S.C.P.). En décomposant les vecteurs tangents aux sommets P_i sous la forme : $P'_i = \alpha_i \delta P_i + \beta_i \delta P_{i-1}$ où δP_i est proportionnel à $P_i P_{i-1}$, on donne une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres α_i et β_i assurant la convexité de la S.C.P. Si ces paramètres vérifient l'égalité $\alpha_i + \beta_i = 1$, alors l'erreur d'approximation est en $O(h^2)$ mais la convexité de la S.C.P. n'est assurée que s'ils vérifient en plus un système d'inégalités non linéaires dépendant de la géométrie du polygone $\mathcal{P}$.

La Section 4 est consacrée à la résolution du même problème par des splines quadratiques paramétrées périodiques de classe C^1 (en abrégé S.Q.P.) dont les nœuds intermédiaires (situés entre deux nœuds successifs d'interpolation) sont considérés comme des paramètres de contrôle de la convexité de la S.Q.P. On montre que lorsque les vecteurs tangents aux sommets du polygone sont convenablement choisis, ces paramètres varient dans certains intervalles non vides. Nous avons également envisagé le cas où les nœuds intermédiaires sont préalablement fixés aux milieux des intervalles formés par les nœuds d'interpolation : la convexité de la S.Q.P. correspondante n'est satisfaite que si les paramètres α_i et β_i des vecteurs tangents vérifient un système d'inégalités.

Finalement, dans la Section 5, on présente quelques essais numériques pour tester les différentes méthodes décrites dans ce papier.

(*) Manuscript received June 12, 1997.

⁽¹⁾ Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Mohamed I^{er}, Oujda (Maroc).

⁽²⁾ Laboratoire LANS, INSA de Rennes, 20, avenue des Buttes de Coesmes, 35043 Rennes Cedex (France). E-mail : sablonni@perceval.univ-rennes1.fr

2. PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS

2.1. Vecteurs tangents

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on donne un polygone $\mathcal{P}$ fermé et convexe de sommets : $P_0, P_1, \dots, P_{n+1}$ avec $P_{n+1} = P_0$ (les sommets P_i sont numérotés dans le sens trigonométrique). La convexité du polygone $\mathcal{P}$ s'exprime par :

$$\det(P_{i-1}P_i, P_iP_{i+1}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Posons pour $i = 1, \dots, n+1$:

$$\theta_i = \text{angle}(P_{i-1}P_i, P_iP_{i+1}), \quad \ell_i = |P_{i-1}P_i|_2, \quad s_i = \sin \theta_i, \quad \sigma_i = \sin(\theta_i + \theta_{i+1})$$

où $|P_{i-1}P_i|_2$ désigne la norme euclidienne du vecteur $P_{i-1}P_i$.

Si le polygone $\mathcal{P}$ est convexe, alors pour $i = 1, \dots, n+1$, on a les inégalités :

$$0 \leq \theta_i \leq \pi \quad \text{et} \quad \sigma_i \leq s_i + s_{i+1}.$$

En effet, puisque $\mathcal{P}$ est convexe, alors on a pour $i = 1, \dots, n+1$:

$$\det(P_{i-1}P_i, P_iP_{i+1}) = \ell_{i-1} \ell_i s_i \geq 0,$$

d'où $s_i = \sin \theta_i \geq 0$ et par suite $0 \leq \theta_i \leq \pi$. Comme $s_i = \sin \theta_i \geq 0$, on a également :

$$\sigma_i = \sin(\theta_i + \theta_{i+1}) = \sin \theta_i \cos \theta_{i+1} + \sin \theta_{i+1} \cos \theta_i \leq \sin \theta_i + \sin \theta_{i+1} = s_i + s_{i+1}.$$

Soit Γ , une courbe plane fermée de classe C^1 paramétrée sur $[0, 1]$ telle que $\Gamma(0) = \Gamma(1)$ et $\Gamma'(0) = \Gamma'(1)$. Pour toute subdivision $\{t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = 1\}$ de l'intervalle $[0, 1]$, on a le résultat suivant :

LEMME 2.1 : Si Γ est convexe, alors les vecteurs tangents aux sommets $\Gamma(t_i) = \Gamma_i$ ($0 \leq i \leq n$) du polygone convexe fermé inscrit dans la courbe s'écrivent sous la forme suivante :

$$\Gamma'_i = \Gamma'(t_i) = \frac{\alpha_i}{h_i} \Gamma_i \Gamma_{i+1} + \frac{\beta_i}{h_{i-1}} \Gamma_{i-1} \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

avec : $\alpha_i \geq 0$; $\beta_i \geq 0$ et $h_i = t_{i+1} - t_i$.

Preuve : Soit h un réel quelconque dans $]0, \min_{0 \leq i \leq n} h_i[$. Il est clair que la convexité de Γ entraîne que le polygone fermé de sommets : $(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_j, \Gamma(t_j + h), \Gamma_{j+1}, \dots, \Gamma_{n+1})$ est aussi convexe pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. On en déduit :

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} \det(\Gamma_{j-1} \Gamma_j, \frac{1}{h} \Gamma_j \Gamma(t_j + h)) \geq 0 \\ \det(\frac{1}{h} \Gamma_j \Gamma(t_j + h), \Gamma(t_j + h) \Gamma_{j+1}) \geq 0. \end{cases}$$

Faisons tendre h vers 0, il vient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \Gamma_j \Gamma(t_j + h) = \Gamma'_j \text{ et par suite (2.1.1) devient :}$$

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} \det(\Gamma_{j-1} \Gamma_j, \Gamma'_j) \geq 0 \\ \det(\Gamma'_j, \Gamma_j \Gamma_{j+1}) \geq 0. \end{cases}$$

Si les deux vecteurs $\Gamma_{j-1} \Gamma_j$ et $\Gamma_j \Gamma_{j+1}$ ne sont pas colinéaires, alors il existe α_j et β_j dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\Gamma'_j = \frac{\alpha_j}{h_j} \Gamma_j \Gamma_{j+1} + \frac{\beta_j}{h_{j-1}} \Gamma_{j-1} \Gamma_j.$$

En remplaçant Γ'_j dans (2.1.2) par son expression ci-dessus et en tenant compte de l'inégalité $\det(\Gamma_{j-1} \Gamma_j, \Gamma_j \Gamma_{j+1}) \geq 0$, il vient $\alpha_j \geq 0$ et $\beta_j \geq 0$. Si $\Gamma_{j-1} \Gamma_j$ et $\Gamma_j \Gamma_{j+1}$ sont colinéaires, alors Γ doit être affine sur $[t_{j-1}, t_{j+1}]$, par conséquent Γ'_j peut être écrite aussi sous la forme énoncée. ■

2.2. Présentation du problème et choix des paramétrisations

Soit $\mathcal{P}$ le polygone convexe de sommets P_i , $i=0, \dots, n+1$ avec $P_0 = P_{n+1}$. On cherche à construire une courbe $M(\cdot)$ polynomiale par morceaux, périodique **convexe, de classe C^1** et paramétrée sur $[0, 1]$ telle que :

$$M(t_i) = P_i, \quad i=0, \dots, n+1$$

où $\{t_0=0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}=1\} = \tau$ est une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ obtenue par l'une des deux paramétrisations suivantes :

a) Paramétrisation classique

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} t_0 = 0, & \text{et pour } 0 \leq i \leq n : \\ t_{i+1} = t_i + \frac{\ell_i}{L} \text{ où } \ell_i = |P_i P_{i+1}|_2 \text{ et } L = \sum_{i=0}^n \ell_i. \end{cases}$$

b) Paramétrisation classique pondérée

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} t_0 = 0, & \text{et pour } 0 \leq i \leq n : \\ t_{i+1} = t_i + \frac{r_i \ell_i}{L_r}, \text{ où } r_i \text{ est un paramètre } > 0, r = (r_0, \dots, r_n) \text{ et } L_r = \sum_{i=0}^n r_i \ell_i. \end{cases}$$

N.B. La paramétrisation dite classique (2.2.1) utilisée dans [8] a été testée sur les splines cubiques paramétrées : l'auteur montre que les droites tangentes à la courbe varient d'une façon continue et que cette courbe ne présente ni boucles ni points anguleux.

3. COURBES SPLINES CUBIQUES PARAMÉTRÉES PÉRIODIQUES CONVEXES DE CLASSE C^1 (S.C.P.)

Soit $\tau = \{t_0=0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}=1\}$ la subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ issue de l'une des paramétrisations ci-dessus.

Posons pour $i=0, \dots, n$: $I_i = [t_i, t_{i+1}]$, $h_i = t_{i+1} - t_i$ et $\delta P_i = \frac{1}{h_i} P_i P_{i+1}$.

DÉFINITION 3.1 : On note comme suit l'espace des courbes paramétrées splines cubiques périodiques (S.C.P.) de classe C^1 sur l'intervalle $[0, 1]$ muni de la subdivision τ :

$$Sp_3(\tau) = \left\{ M(\cdot) = \begin{pmatrix} x(\cdot) \\ y(\cdot) \end{pmatrix} \in C^1[0, 1] \text{ telle que } M(0) = M(1); M'(0) = M'(1); \right. \\ \left. \text{les restrictions } x(\cdot)|_{I_i} \text{ et } y(\cdot)|_{I_i} \text{ sont dans } \mathbb{P}_3, i=0, \dots, n \right\}$$

où $\mathbb{P}_3$ est l'espace des polynômes à une variable de degré ≤ 3 .

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au problème d'interpolation convexe (P.I.C.) suivant :

$$(P.I.C.) \quad \begin{cases} \text{construire } M(\cdot) \in Sp_3(\tau) \text{ convexe telle que :} \\ M(t_i) = P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad i = 0, \dots, n+1. \end{cases}$$

On sait que toute cubique paramétrée sur $[t_i, t_{i+1}]$ s'exprime dans la base d'Hermite $\{H_j, j = 0, 1, 2, 3\}$ de $\mathbb{P}_3([0, 1])$ par l'expression (3.1.1) ci-dessous quand les deux points d'interpolation P_i, P_{i+1} et les vecteurs tangents P'_i et P'_{i+1} en ces points sont donnés.

$$(3.1.1) \quad M(t) = \hat{M}(\theta) = P_i H_0(\theta) + P_{i+1} H_1(\theta) + h_i (P'_i H_2(\theta) + P'_{i+1} H_3(\theta))$$

$$\text{où } \theta = \frac{t-t_i}{h_i} \in [0, 1] \quad \text{pour } t \in I_i; \quad H_0(\theta) = (1-\theta)^2(1+2\theta); \quad H_1(\theta) = \theta^2(3-2\theta); \\ H_2(\theta) = \theta(1-\theta)^2 \quad \text{et} \quad H_3(\theta) = \theta^2(\theta-1).$$

THÉOREME 3.1 : Supposons que pour $i = 0, \dots, n$, les vecteurs tangents $M'(t_i) = P'_i$ aux sommets P_i du polygone $\mathcal{P}$ convexe soient donnés par :

$$(3.1.2) \quad \begin{cases} P'_i = M'(t_i) = \alpha_i \delta P_i + \beta_i \delta P_{i-1} \text{ avec} \\ \alpha_i = \frac{s_{i-1}}{A_i}; \quad \beta_i = \frac{s_{i+1}}{A_i}, A_i \text{ étant un paramètre } > 0. \end{cases}$$

et posons $S_i = \frac{1}{3} \max \{ (s_{i-2} + s_{i+1} + \sigma_{i-1}); (s_{i-1} + s_{i+2} + \sigma_i) \}$.

Alors la courbe spline cubique $M(\cdot)$ qui s'exprime localement par l'expression (3.1.1) est solution du problème (P.I.C.) si et seulement si $A_i \geq S_i$ pour $0 \leq i \leq n$.

Preuve : D'abord, la continuité C^1 de la courbe spline est satisfaite par construction, d'autre part, $M(\cdot)$ est convexe si et seulement si :

$$\det(M'(t), M''(t)) = \frac{1}{h_i^3} \det(\hat{M}'(\theta), \hat{M}''(\theta)) \geq 0 \quad \forall \theta \in]0, 1[, \quad i = 0, \dots, n.$$

Un simple calcul fournit :

$$\det(\hat{M}'(\theta), \hat{M}''(\theta)) = h_i [A(\theta) \det(OP_i, P'_i) + B(\theta) \det(OP_i, P'_{i+1}) + \\ C(\theta) \det(OP_{i+1}, P'_i) + D(\theta) \det(OP_{i+1}, P'_{i+1}) + h_i E(\theta) \det(P'_i, P'_{i+1})]$$

où les fonctions $A(\theta), \dots, E(\theta)$ s'expriment dans la base de Bernstein $\left(\phi_j(\theta) = \binom{3}{j} \theta^j (1-\theta)^{3-j} \right)$, $\{j = 0, 1, 2, 3\}$ de $\mathbb{P}_3([0, 1])$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A(\theta) &= H'_0(\theta) H''_2(\theta) - H''_0(\theta) H'_2(\theta) = 2[3\phi_0(\theta) + \phi_1(\theta)] \\ B(\theta) &= H'_0(\theta) H''_3(\theta) - H''_0(\theta) H'_3(\theta) = -2[\phi_2(\theta) + 3\phi_3(\theta)] \\ C(\theta) &= H'_1(\theta) H''_2(\theta) - H''_1(\theta) H'_2(\theta) = -A(\theta) \\ D(\theta) &= H'_1(\theta) H''_3(\theta) - H''_1(\theta) H'_3(\theta) = -B(\theta) \\ E(\theta) &= H'_2(\theta) H''_3(\theta) - H''_2(\theta) H'_3(\theta) = -2[\phi_0(\theta) + \phi_3(\theta)]. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire pour tout $\theta \in]0, 1[$:

$$(3.1.3) \quad \det(\hat{M}'(\theta), \hat{M}''(\theta)) = a_i \phi_0(\theta) + b_i \phi_1(\theta) + c_i \phi_2(\theta) + d_i \phi_3(\theta)$$

où :

$$b_i = 2 h_i \det(P'_i, P_i P_{i+1})$$

$$a_i = 3 b_i - 2 h_i^2 \det(P'_i, P'_{i+1})$$

$$c_i = 2 h_i \det(P_i P_{i+1}, P'_{i+1})$$

$$d_i = 3 c_i - 2 h_i^2 \det(P'_i, P'_{i+1}).$$

En tenant compte de l'expression des vecteurs tangents (3.1.2) et des égalités suivantes :

$$\det(P_i P_{i+1}, P_{i+1} P_{i+2}) = \ell_i \ell_{i+1} s_{i+1}$$

$$\det(P_{i-1} P_i, P_{i+1} P_{i+2}) = \ell_{i-1} \ell_{i+1} \sigma_i$$

on obtient :

$$(3.1.4) \quad \begin{aligned} a_i &= 2 \ell_i^2 [\beta_i (3 - \beta_{i+1}) s_i - \alpha_i \alpha_{i+1} s_{i+1} - \beta_i \alpha_{i+1} \sigma_i] \\ b_i &= 2 \ell_i^2 \beta_i s_i \\ c_i &= 2 \ell_i^2 \alpha_{i+1} s_{i+1} \\ d_i &= 2 \ell_i^2 [\alpha_{i+1} (3 - \alpha_i) s_{i+1} - \beta_i \beta_{i+1} s_i - \beta_i \alpha_{i+1} \sigma_i]. \end{aligned}$$

Par hypothèse b_i et c_i sont positifs. D'autre part, en tenant compte du fait que a_i et d_i sont respectivement les limites de $\det(\hat{M}'(\theta), \hat{M}''(\theta))$ quand $\theta \rightarrow 0^+$ et $\theta \rightarrow 1^-$, alors $\det(\hat{M}'(\theta), \hat{M}''(\theta)) \geq 0 \forall \theta \in]0, 1[$ si et seulement si $a_i \geq 0$ et $d_i \geq 0$.

Posons : $\alpha_i = \frac{s_{i-1}}{A_i}$ et $\beta_i = \frac{s_{i+1}}{A_i}$ dans (3.1.4), il vient :

$$\begin{cases} a_i = \frac{2 \ell_i^2 s_i s_{i+1}}{A_i A_{i+1}} [3 A_{i+1} - (s_{i-1} + s_{i+2} + s_i)] \\ d_i = \frac{2 \ell_i^2 s_i s_{i+1}}{A_i A_{i+1}} [3 A_i - (s_{i-1} + s_{i+2} + \sigma_i)] \end{cases}$$

d'où l'on déduit que M est convexe sur $[0, 1]$ si et seulement si $A_i \geq S_i$ pour $i = 0, \dots, n$. ■

Remarque 3.1.5 :

1. Nous écartons les polygones $\mathcal{P}$ convexes tels que $\theta_{i-1} = \theta_{i+1} = 0$ et $\theta_i \neq 0$ car dans ce cas, il n'existe aucune courbe de classe C^1 convexe interpolant les sommets de tels polygones.

2. Si trois sommets P_{i-1} , P_i et P_{i+1} du polygone $\mathcal{P}$ sont alignés ($\theta_i = 0$) alors la restriction de l'interpolant à $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ n'est autre que le segment de droite passant par P_{i-1} et P_{i+1} : en effet, on vérifie facilement dans ce cas que $a_i = b_i = c_i = d_i = 0$ et par suite $\det(M'(t), M''(t)) = 0 \forall t \in]t_i, t_{i+1}[$, soit $M''(t) = 0$ sur $]t_i, t_{i+1}[$, de même sur $]t_{i-1}, t_i[$. ■

Soit $F = (f_1, f_2)$ une courbe plane paramétrée fermée de classe C^2 sur $[0, 1]$ telle que : $F(t_i) = P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, $i = 0, \dots, n$. Désignons par $M(\cdot)$ une solution du problème (P.I.C.) ayant des tangentes de la forme : $P'_i = \alpha_i \delta P_i + \beta_i \delta P_{i-1}$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $i = 0, \dots, n$ et posons pour tout $t \in [0, 1]$:

$$e(t) = F(t) - M(t).$$

En posant par $\|e\| = \max \{|e(t)|_2, t \in [0, 1]\}$, et $\|D^2 F\| = \max \{|D^2 F(t)|_2, t \in [0, 1]\}$, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2 : *On a les majorations d'erreurs suivantes :*

- (i) $\|e\| \leq \frac{5}{6} h^2 \|D^2 F\| + \frac{h}{4} \max_{0 \leq i \leq n} |F'(t_i) - P'_i|_2$ où $h = \max_{0 \leq i \leq n} h_i$.
(ii) De plus si $\alpha_i + \beta_i = 1$, $i = 0, \dots, n$, alors $\|e\| = O(h^2)$.

Preuve :

(i) Soit S la courbe spline paramétrée dans $Sp_3(\tau)$, solution du problème d'interpolation d'Hermite $S(t_i) = P_i$ et $S'(t_i) = F'(t_i)$, $i = 0, \dots, n$. S s'exprime localement dans la base d'Hermite de la manière suivante :

$$S(t) = \hat{S}(\theta) = P_i H_0(\theta) + P_{i+1} H_1(\theta) + h_i (F'(t_i) H_2(\theta) + F'(t_{i+1}) H_3(\theta))$$

où $\theta = \frac{t-t_i}{h_i} \in [0, 1]$ et $i = 0, \dots, n$.

En utilisant une représentation intégrale de l'erreur (avec un noyau de Peano), on obtient facilement la majoration :

$$\|F - S\| \leq \frac{5}{6} h^2 \|D^2 F\|.$$

Or $|e(t)|_2 \leq |F(t) - S(t)|_2 + |S(t) - M(t)|_2$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ et

$$|S(t) - M(t)|_2 = h_i |(F'(t_i) - P'_i) H_2(\theta) + (F'(t_{i+1}) - P'_{i+1}) H_3(\theta)|_2$$

$$\leq h_i \max_{0 \leq i \leq n} |F'(t_i) - P'_i|_2 (|H_2(\theta)| + |H_3(\theta)|) \leq \frac{h}{4} \max_{0 \leq i \leq n} |F'(t_i) - P'_i|_2$$

d'où l'on déduit le résultat.

(ii) Montrons maintenant que $\max_{0 \leq i \leq n} |F'(t_i) - P'_i| = O(h)$ lorsque $\alpha_i + \beta_i = 1$:

Appliquons le théorème des accroissements finis aux fonctions composantes f_1 et f_2 de F , on a pour $i = 0, \dots, n$:

$$\delta x_i = \frac{1}{h_i} (x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{h_i} (f_1(t_{i+1}) - f_1(t_i)) = f'_1(t_i) + \frac{h_i}{2} f''_1(\gamma_i)$$

$$\delta x_{i-1} = f'_1(t_i) - \frac{h_{i-1}}{2} f''_1(\gamma_{i-1}), \quad \text{où } \gamma_i \in]t_i, t_{i+1}[\quad \text{et} \quad \gamma_{i-1} \in]t_{i-1}, t_i[,$$

d'où l'on déduit :

$$(3.2.1) \quad f'_1(t_i) - (\alpha_i \delta x_i + \beta_i \delta x_{i-1}) = [1 - \alpha_i - \beta_i] f'_1(t_i) + \frac{1}{2} (h_{i-1} \beta_i f''_1(\gamma_{i-1}) - h_i \alpha_i f''_1(\gamma_i)).$$

Le même calcul fait sur l'autre composante de F fournit :

$$(3.2.2) \quad f'_2(t_i) - (\alpha_i \delta y_i + \beta_i \delta y_{i-1}) = [1 - \alpha_i - \beta_i] f'_2(t_i) + \frac{1}{2} (h_{i-1} \beta_i f''_2(\mu_{i-1}) - h_i \alpha_i f''_2(\mu_i))$$

où $\mu_i \in]t_i, t_{i+1}[$ et $\mu_{i-1} \in]t_{i-1}, t_i[$.

Il résulte donc des égalités (3.2.1) et (3.2.2) que si $\alpha_i + \beta_i = 1$, alors les termes en $f'_1(t_i)$ et $f'_2(t_i)$ s'annulent et par suite $|F'(t_i) - P'_i|_2 = O(h)$, d'où $\|e\| = O(h^2)$. ■

Donc du point de vue de l'ordre d'approximation, il s'avère plus intéressant que les paramètres α_i et β_i des vecteurs tangents vérifient la condition supplémentaire $\alpha_i + \beta_i = 1$.

THÉORÈME 3.3 : *Supposons que les vecteurs tangents P'_i aux sommets du polygone convexe $\mathcal{P}$ soient de la forme :*

$$(3.3.1) \quad P'_i = \alpha_i \delta P_i + (1 - \alpha_i) \delta P_{i-1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, n,$$

où $\alpha_i \in [0, 1]$ est un paramètre.

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $M(\cdot) \in Sp_3(\tau)$ soit convexe est que les paramètres α_i ($i = 0, \dots, n$) vérifient les inégalités (E_i) suivantes :

$$(E_i) \quad \begin{cases} (1 - \alpha_i)(2 + \alpha_{i+1})s_i - \alpha_i \alpha_{i+1} s_{i+1} - (1 - \alpha_i) \alpha_{i+1} \sigma_i \geq 0 \\ (3 - \alpha_i) \alpha_{i+1} s_{i+1} - (1 - \alpha_i)(1 - \alpha_{i+1})s_i - (1 - \alpha_i) \alpha_{i+1} \sigma_i \geq 0. \end{cases}$$

Preuve : En se référant à la preuve du théorème (3.1), on a $\det(M'(\theta), M''(\theta)) \geq 0$, $\forall \theta \in]0, 1[$ si et seulement si $a_i \geq 0$ et $d_i \geq 0$ puisque b_i et c_i sont positifs par hypothèse.

En remplaçant dans les expressions (3.1.4) β_i (respectivement β_{i+1}) par $(1 - \alpha_i)$ (respectivement par $(1 - \alpha_{i+1})$), on obtient immédiatement l'équivalence entre $a_i \geq 0$ et $d_i \geq 0$ et les inégalités (E_i) . ■

COROLLAIRE 3.4 : *Si dans l'expression (3.3.1) on affecte au paramètre α_i la valeur $\alpha_i = \frac{s_{i-1}}{s_{i-1} + s_{i+1}}$ pour $i = 0, \dots, n$, alors la courbe spline cubique $M(\cdot) \in Sp_3(\tau)$ est convexe si et seulement si :*

$$(C_i) \quad \begin{cases} s_{i-1} + \sigma_i + s_{i+2} \leq 3(s_i + s_{i+2}) \\ s_{i-1} + \sigma_i + s_{i+2} \leq 3(s_{i-1} + s_{i+1}) \end{cases} \quad i = 0, \dots, n.$$

Preuve : Les inégalités (E_i) avec $\alpha_i = \frac{s_{i-1}}{s_{i-1} + s_{i+1}}$ donnent immédiatement les inégalités (C_i) . ■

COROLLAIRE 3.5 : *Supposons que la subdivision τ de l'intervalle $[0, 1]$ soit obtenue à partir de la paramétrisation classique pondérée (2.2.2) $\left(h_i = \frac{r_i \ell_i}{\sum r_j \ell_j}\right)$ et que les paramètres α_i des vecteurs tangents (3.3.1) soient de la forme :*

$$\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} = \frac{r_{i-1} \ell_{i-1}}{\ell_{i-1} r_{i-1} + r_i \ell_i} \quad i = 0, \dots, n,$$

alors la convexité de $M(\cdot) \in Sp_3(\tau)$ a lieu si et seulement si les paramètres r_i ($i = 0, \dots, n$) vérifient les inégalités suivantes :

$$(R_i) \quad \begin{cases} s_{i+1} r_{i-1} \ell_{i-1} + \sigma_i r_i \ell_i + s_i r_{i+1} \ell_{i+1} \leq 3 \inf \{s_i(r_i \ell_i + r_{i+1} \ell_{i+1}), s_{i+1}(r_{i-1} \ell_{i-1} + r_i \ell_i)\} \\ i = 0, \dots, n. \end{cases}$$

Preuve : Dans le théorème (3.3), les inégalités (E_i) avec $\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$ sont équivalentes aux inégalités (R_i) . ■

Remarques : 1) Le schéma des vecteurs tangents choisi dans le corollaire (3.5), c'est-à-dire : $P'_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} \delta P_i + \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} \delta P_{i-1}$ est intéressant pour sa précision car l'erreur $|F'(t_i) - P'_i| = O(h^2)$ lorsque F est de classe C^3 . En effet, en procédant comme dans la preuve du théorème (3.2) on a :

$$\delta x_i = f'_1(t_i) + \frac{h_i}{2} f''_1(t_i) + \frac{h_i^2}{6} f^{(3)}_1(\gamma_i), \quad \text{où } \gamma_i \in]t_i, t_{i+1}[$$

$$\delta x_{i-1} = f'_1(t_i) - \frac{h_{i-1}}{2} f''_1(t_{i-1}) + \frac{h_{i-1}^2}{6} f^{(3)}_1(\gamma_{i-1}), \quad \text{où } \gamma_{i-1} \in]t_{i-1}, t_i[$$

d'où :

$$(1) \quad f'_1(t_i) - (\alpha_i \delta x_i + \beta_i \delta x_{i-1}) = [1 - \alpha_i - \beta_i] f'_1(t_i) + \frac{1}{2} (h_{i-1} \beta_i - h_i \alpha_i) f''_1(t_i) \\ - \frac{1}{6} (\alpha_i h_i^2 f^{(3)}_1(\gamma_i) + \beta_i h_{i-1}^2 f^{(3)}_1(\gamma_{i-1}))$$

de même, on a :

$$(2) \quad f'_1(t_i) - (\alpha_i \delta y_i + \beta_i \delta y_{i-1}) = [1 - \alpha_i - \beta_i] f'_2(t_i) + \frac{1}{2} (h_{i-1} \beta_i - h_i \alpha_i) f''_2(t_i) \\ - \frac{1}{6} (\alpha_i h_i^2 f^{(3)}_2(\gamma_i) + \beta_i h_{i-1}^2 f^{(3)}_2(\mu_{i-1}))$$

avec $\mu_{i-1} \in]t_{i-1}, t_i[$ et $\mu_i \in]t_i, t_{i+1}[$.

Donc, si $\alpha_i + \beta_i = 1$ et $h_{i-1} \beta_i - h_i \alpha_i = 0$, soit $\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$, alors les coefficients de $f'_1(t_i)$, $f'_2(t_i)$, $f''_1(t_i)$, $f''_2(t_i)$ s'annulent, et par suite $|F'(t_i) - P'_i|_2 = O(h^2)$.

2) Dans le corollaire (3.5), si on prend $r_i = \frac{s_i s_{i+1}}{\ell_i}$, alors on a $\alpha_i = \frac{s_{i-1}}{s_{i-1} + s_i}$ et par suite la convexité de la spline cubique $M(\cdot)$ est assurée si et seulement si les inégalités (C_i) sont satisfaites.

Par ailleurs si $r_i = 1$ pour $i = 0, \dots, n$, autrement dit, quand on utilise la paramétrisation (3.2.1), la convexité de la S.C.P. dépend non seulement des angles θ_i du polygone $\mathcal{P}$, mais aussi des longueurs de ses côtés (inégalités (R_i) avec $r_i = 1$). Il est donc clair que la paramétrisation pondérée (3.2.2) peut être avantageuse par rapport à la première dans la mesure où l'on peut fournir (pour certains polygones) des valeurs des paramètres r_i ($i = 0, \dots, n$) telles que le système d'inégalités soit satisfait lorsque les valeurs $r_i = 1$ ($i = 0, \dots, n$) ne le vérifient pas.

En effet, considérons par exemple un polygone $\mathcal{P}$ avec $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = \theta_5 = \pi/2$, $\ell_0 = \ell_1$ et $\ell_2 = 6 \ell_0$, il vient que $s_0 = s_1 = s_2 = s_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $s_4 = 1$, par suite l'inégalité avec $r_i = 1$ ($i = 0, \dots, 5$) est équivalente à $(6 + \sqrt{2}) \ell_0 \leq 3 \sqrt{2} \ell_0$, ce qui est impossible.

Par contre, si on prend $r_i = \frac{s_i s_{i+1}}{\ell_i}$ pour $i = 0, \dots, 5$, les inégalités (R_i) qui sont équivalentes dans ce cas aux inégalités (C_i) sont toutes satisfaites.

Régions de convexité locale

Il s'agit ici d'illustrer graphiquement l'ensemble des couples (α_i, α_{i+1}) tels que les inégalités (E_i) du théorème 3.3 sont satisfaites.

Posons : $\mathcal{C}_i = \{(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in [0, 1]^2 \text{ t.q. } (E_i) \text{ est vérifiée}\}$.

On a :

$$(E_i) \quad \begin{cases} a_i = a_i(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = (1 - \alpha_i)(2 + \alpha_{i+1})s_i - \alpha_i \alpha_{i+1} - (1 - \alpha_i)\alpha_{i+1}\sigma_i \geq 0 \\ d_i = d_i(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = \alpha_{i+1}(3 - \alpha_i)s_{i+1} - (1 - \alpha_i)(1 - \alpha_{i+1})s_i - \alpha_{i+1}(1 - \alpha_i)\sigma_i \geq 0. \end{cases}$$

Sur la figure 3.3, on voit que la région $\mathcal{C}_i$ est limitée au-dessus par la courbe $a_i(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 0$ et au-dessous par la courbe $d_i(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 0$. La forme de $\mathcal{C}_i$ varie suivant la géométrie du polygone. Pour donner une idée de cette forme, on représente graphiquement $\mathcal{C}_i$ dans le cas où : $s_i - \sigma_i > 0$ et $3s_{i+1} \geq \sigma_i$.

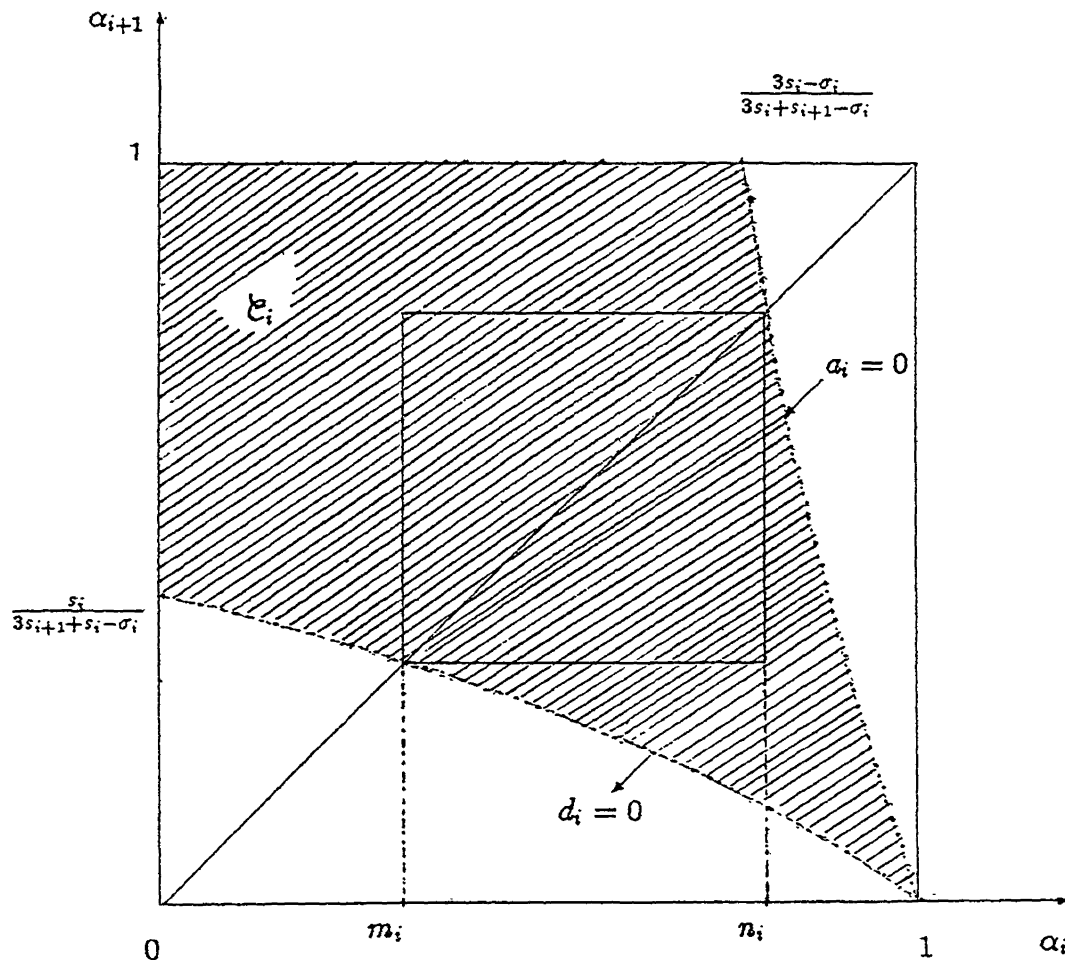


Figure 3.3.

Soit m_i (respectivement n_i) l'abscisse de l'intersection de la droite $\alpha_{i+1} = \alpha_i$ avec la courbe $d_i(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 0$ (respectivement avec la courbe $a_i(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 0$) (voir fig. 3.3). On obtient :

$$\begin{cases} m_i = [(r_i^2 + 4 s_i F_i)^{1/2} - R_i] / 2 F_i \\ n_i = [G_i - (G_i^2 - 8 s_i F_i)^{1/2}] / 2 F_i \end{cases}$$

avec : $R_i = 3 s_{i+1} + 2 s_i - \sigma_i$, $G_i = s_i + \sigma_i$, $F_i = \sigma_i - s_i - s_{i+1} \leq 0$.

D'autre part, on note $J_i = [m_i, n_i]$. On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 3.6 : *Si pour $i = 0, \dots, n$, $J_{i-1} \cap J_i \neq \emptyset$ ($J_{-1} = J_n$), alors le système d'inégalités (E_i) $i = 0, \dots, n$ admet une solution. Une condition suffisante pour que $J_{i-1} \cap J_i$ ne soit pas vide est :*

$$(*) \quad \frac{1}{2} s_{i+1} \leq s_i \leq 2 s_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, \dots, n.$$

Preuve : Il suffit de prendre α_i dans $J_{i-1} \cap J_i$, donc $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \in J_i^2$, et comme $J_i^2 \subset \mathcal{C}_i$, alors le couple (α_i, α_{i+1}) vérifie les inégalités (E_i) . On peut vérifier facilement que si les inégalités $(*)$ ont lieu, alors $\frac{1}{2} \in J_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ et par suite $\frac{1}{2} \in J_{i-1} \cap J_i$. ■

4. COURBES SPLINES QUADRATIQUES PARAMÉTRÉES PÉRIODIQUES CONVEXES DE CLASSE C^1 (S.Q.P.)

4.1. S.Q.P. à nœuds intermédiaires variables

Dans cette section, nous conservons les mêmes notations que précédemment, la subdivision τ de l'intervalle $[0, 1]$ est supposée obtenue à partir de la paramétrisation classique ou pondérée. Sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ ($i = 0, \dots, n$) on rajoute un nœud ξ_i et on note ξ le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par : $\xi^T = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$.

DÉFINITION 4.1 :

$$Sp_2(\tau, \xi) = \left\{ M(\cdot) = \begin{pmatrix} x(\cdot) \\ y(\cdot) \end{pmatrix} \in C^1([0, 1]) \text{ t.q. } M(0) = M(1); M'(0) = M'(1); \right. \\ \left. \text{les restrictions } x|_{[t_i, \xi_i]}, y|_{[t_i, \xi_i]}, x|_{[\xi_i, t_{i+1}]}, y|_{[\xi_i, t_{i+1}]} \text{ sont dans } \mathbb{P}_2 \right\}$$

est l'espace des courbes paramétrées splines quadratiques périodiques (S.Q.P.) de classe C^1 sur $[0, 1]$ muni de la subdivision τ dont les nœuds intermédiaires sont les ξ_i , $i = 0, \dots, n$.

Notre objectif est de construire une S.Q.P. C^1 convexe interpolant les sommets du polygone $\mathcal{P}$ convexe. Pour un vecteur $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ donné, Schumaker [7] montre que le problème d'interpolation d'Hermite (P.I.H.) suivant :

$$(P.I.H.) \quad \begin{cases} \text{construire } M(\cdot) \in Sp_2(\tau, \xi) \text{ telle que :} \\ M(t_i) = P_i \\ M'(t_i) = P'_i \quad i = 0, \dots, n \end{cases}$$

admet une solution unique qui s'exprime localement de la façon suivante :

$$(4.1.1) \quad M(t) = \begin{cases} M_i(t) = P_i(1-u)^2 + (2P_i + \lambda_i h_i P'_i) u(1-u) + Z_i u^2 & t \in [t_i, \xi_i] \\ M_2(t) = Z_i(1-v)^2 + (2P_{i+1} - (1-\lambda_i P'_{i+1})) v(1-v) + P_{i+1} v^2 & t \in [\xi_i, t_{i+1}] \end{cases}$$

où

$$u = \frac{t - t_i}{\xi_i - t_i} = \frac{t - t_i}{\lambda_i h_i} \in [0, 1] \quad \text{si } t \in [t_i, \xi_i]$$

$$v = \frac{t - \xi_i}{t_{i+1} - \xi_i} = \frac{t - \xi_i}{(1 - \lambda_i) h_i} \in [0, 1] \quad \text{si } t \in [\xi_i, t_{i+1}]$$

$$Z_i = (1 - \lambda_i) P_i + \lambda_i P_{i+1} + \frac{1}{2} \lambda_i (1 - \lambda_i) h_i (P'_i - P'_{i+1}) = M(\xi_i)$$

$$\lambda_i = (\xi_i - t_i)/h_i.$$

Sur le polygone $\mathcal{P}$ strictement convexe, ($s_i \neq 0$ pour tout i), imposons des vecteurs tangents admissibles $P'_i = \alpha_i \delta P_i + \beta_i \delta P_{i-1}$ ($\alpha_i > 0, \beta_i > 0$), en chaque sommet de $\mathcal{P}$. On a alors le résultat suivant :

THÉOREME 4.1.1 : Soit $D_i = \alpha_i \alpha_{i+1} s_{i+1} + \beta_i \beta_{i+1} s_i + \beta_i \alpha_{i+1} \sigma_i$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la S.Q.P. $M(\cdot)$ exprimée par (4.1.1) soit convexe est de choisir pour $i = 0, \dots, n$:

1) ξ_i arbitrairement dans $]t_i, t_{i+1}[$ si $D_i \leq 0$

2) ξ_i tel que $(1 - \lambda_i) = \frac{t_{i+1} - \xi_i}{h_i} \in H_i$ si $D_i > 0$ où $H_i =]0, 1[\cap \left] 1 - \frac{2\alpha_{i+1}s_{i+1}}{D_i}, \frac{2\beta_i s_i}{D_i} \right]$, est supposé non vide.

Preuve : Dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, la courbe $M(\cdot)$ définie par (4.1.1) est convexe si et seulement si :

$$\det(M'(t), M''(t)) \geq 0 \quad \forall t \in]t_i, \xi_i[\cup]\xi_i, t_{i+1}[,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \det(M'_1(t), M''_1(t)) \geq 0 & \forall t \in]t_i, \xi_i[\\ \det(M'_2(t), M''_2(t)) \geq 0 & \forall t \in]\xi_i, t_{i+1}[\end{cases}.$$

Après simplification, on obtient :

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} \det(M'_1(t), M''_1(t)) = \frac{1}{h_i \lambda_i} \det(P'_i, 2\delta P_i - (1 - \lambda_i) P'_{i+1}) \\ \quad = \frac{1}{h_i \lambda_i} (2\beta_i s_i - (1 - \lambda_i) D_i) \quad \forall t \in]t_i, \xi_i[\\ \text{et} \\ \det(M'_2(t), M''_2(t)) = \frac{1}{(1 - \lambda_i) h_i} (2\alpha_{i+1} s_{i+1} - \lambda_i D_i) \quad \forall t \in]\xi_i, t_{i+1}[\end{cases}.$$

Puisque les réels $\beta_i, \alpha_{i+1}, s_i, s_{i+1}, \lambda_i$ et $(1 - \lambda_i)$ sont strictement positifs, il est clair que si $D_i \leq 0$, les deux déterminants de (4.1.1) sont positifs, sinon, les deux déterminants sont positifs si et seulement si $(1 - \lambda_i) \in H_i$. ■

Donnons maintenant une condition suffisante pour que H_i ne soit pas vide (évidemment dans le cas où $D_i > 0$).

PROPOSITION 4.1.2 : Sur le polygone convexe $\mathcal{P}$, fixons les vecteurs tangents :

$$P'_i = \alpha_i \delta P_i + \beta_i \delta P_{i-1} \quad \text{avec } \alpha_i > 0 \quad \text{et } \beta_i > 0.$$

Alors une condition suffisante pour que H_i ne soit pas vide est que : $0 < \alpha_i + \beta_i \leq 2, i = 0, \dots, n$.

Preuve : L'intervalle $\left[1 - \frac{2\alpha_{i+1}s_{i+1}}{D_i}, \frac{2\beta_i s_i}{D_i} \right]$ est non vide si et seulement si :

$$E = 2\beta_i s_i + 2\alpha_{i+1} s_{i+1} - D_i \geq 0.$$

On a :

$$E = \beta_i(2 - \beta_{i+1})s_i + \alpha_{i+1}(2 - \alpha_i)s_{i+1} - \beta_i\beta_{i+1}\sigma_i$$

et comme $-\sigma_i \geq -s_i - s_{i+1}$, il vient

$$(1) \quad E \geq \beta_i(2 - \alpha_{i+1} - \beta_{i+1})s_i + \alpha_{i+1}(2 - \alpha_i - \beta_i)s_{i+1}.$$

Le second membre de l'inégalité (1) est donc positif si $\alpha_j + \beta_j \leq 2$ pour $j = i, i+1$. D'autre part : $\frac{2\beta_i s_i}{D_i} > 0$ et $1 - \frac{2\alpha_{i+1}s_{i+1}}{D_i} < 1$ car $s_i, s_{i+1}, \alpha_{i+1}, \beta_i > 0$, d'où l'on déduit que $H_i \neq \emptyset$. ■

Nous proposons dans la suite deux schémas de calcul des vecteurs tangents pour préserver la convexité du polygone $\mathcal{P}$ par des S.Q.P. :

$$(4.1.2) \quad P'_i = \frac{s_{i-1}}{s_{i-1} + s_{i+1}} \delta P_i + \frac{s_{i+1}}{s_{i-1} + s_{i+1}} \delta P_{i-1} \quad i = 0, \dots, n$$

$$(4.1.3) \quad P'_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} \delta P_i + \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} \delta P_{i-1} \quad i = 0, \dots, n.$$

Le premier schéma (4.1.2) des vecteurs tangents s'adapte bien aux polygones $\mathcal{P}$ convexes à géométrie quelconque (convexes strictement ou non).

En effet, si par exemple $\theta_j = 0$ c'est-à-dire $s_j = 0$ (voir fig. 4.1.4), alors $\alpha_{j+1} = 0$ et $\beta_{j-1} = 0$, autrement dit $P'_{j-1} = \delta P_{j-1}$ et $P'_{j+1} = \delta P_j$.

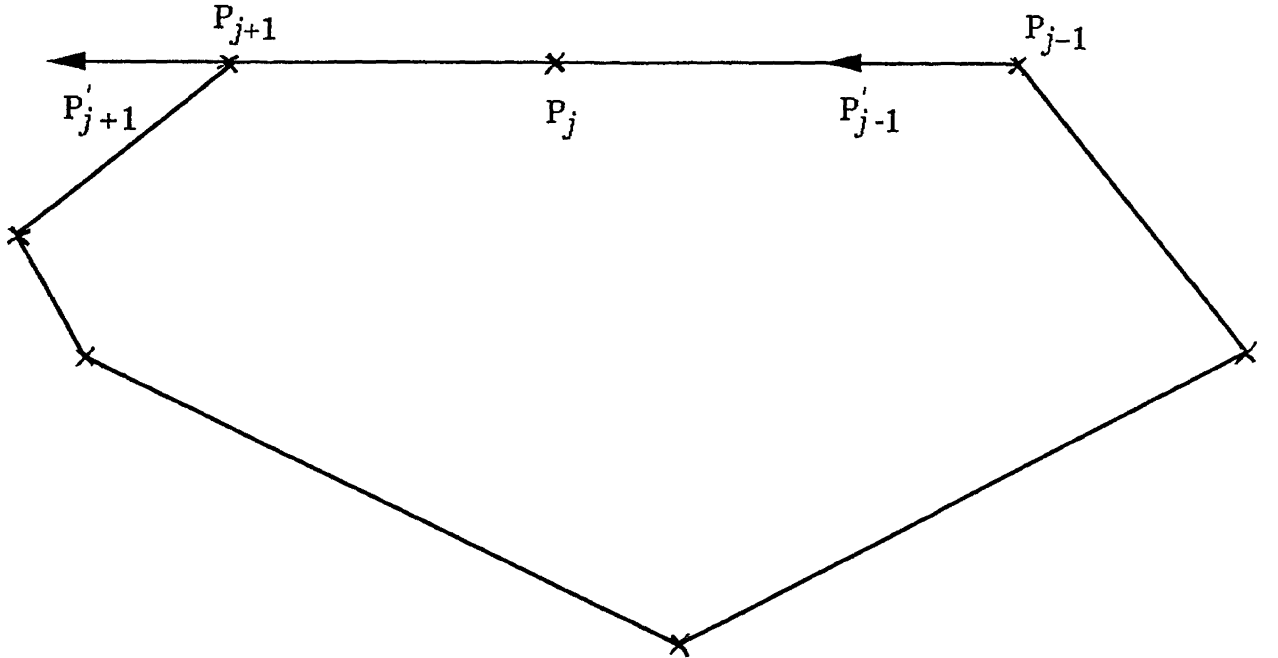


Figure 4.1.4.

La convexité de $M(\cdot)$ sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ impose à l'interpolant $M(\cdot)$ d'être affine sur cet intervalle, la contrainte de la continuité C^1 de $M(\cdot)$ n'est possible que si P'_{j-1} et δP_{j-1} sont colinéaires, de même pour P'_{j+1} et δP_j .

Quant au deuxième schéma (4.1.3) des vecteurs tangents, il est plutôt utile pour les polygones strictement convexes. Son avantage est que les courbes obtenues sont plus esthétiques et plus précises du point de vue approximation puisque l'erreur sur P'_i est en $O(h^2)$.

4.2. S.Q.P. convexes à nœuds fixes

Supposons maintenant que les nœuds ξ_i sont fixés au préalable aux milieux des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, on pose alors pour $i = 0, \dots, n$

$$\xi_i = \xi_i^* = \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1}) \quad \text{et} \quad \xi^{*'} = (\xi_0^*, \xi_1^*, \dots, \xi_n^*) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Problème : Existe-t-il une solution convexe du problème (P.I.H.) dans l'espace $Sp_2(\tau, \xi^*)$?

THÉORÈME 4.2.1 : Si le polygone $\mathcal{P}$ est convexe, alors une condition nécessaire et suffisante pour que le problème (P.I.H.) admette une solution $M(\cdot)$ convexe dans $Sp_2(\tau, \xi^*)$ et que les paramètres α_i et β_i , $i = 0, \dots, n$ vérifient les inégalités $(\bar{E}_i)$ suivantes :

$$(\bar{E}_i) \quad \begin{cases} \beta_i(4 - \beta_{i+1})s_i - \alpha_i\alpha_{i+1}s_{i+1} - \beta_i\alpha_{i+1}\sigma_i > 0 \\ \alpha_{i+1}(4 - \alpha_i)s_{i+1} - \beta_i\beta_{i+1}s_i - \beta_i\alpha_{i+1}\sigma_i > 0 \end{cases} \quad i = 0, \dots, n.$$

Preuve : Elle découle de la preuve du théorème (4.2.1) en remplaçant λ_i et $(1 - \lambda_i)$ par $1/2$.

Remarques : 1) Lorsque $\beta_i = 1 - \alpha_i$ ($i = 0, \dots, n$), la convexité des splines cubiques et celle des splines quadratiques à nœuds fixés sont satisfaites si et seulement si les inégalités (E_i) et $(\bar{E}_i)$ ($i = 0, \dots, n$) sont vérifiées. Nous constatons alors que les conditions (E_i) et $(\bar{E}_i)$ sont les mêmes à un facteur près (3 pour (E_i) et 4 pour $(\bar{E}_i)$). Une étude des régions de convexité locale $\mathcal{C}_i$ pour les S.Q.P. à l'instar de celle $\mathcal{C}_i$ des S.C.P. montre que $\mathcal{C}_i \subset \bar{\mathcal{C}}_i$, donc les S.Q.P. à nœuds fixes sont plus souvent convexes que les S.C.P. pour les mêmes données.

2) Les inégalités $(\bar{E}_i)$ sont strictes car si on a des égalités dans $(\bar{E}_i)$, la S.Q.P. associée est affine par morceaux sur $[t_i, t_{i+1}]$ et par suite la continuité C^1 peut être violée. En effet, dans ce cas, on obtient $\det(M'_1(t), M''_1(t)) = 0, \forall t \in]t_i, \xi_i[$ ou $\det(M'_2(t), M''_2(t)) = 0, \forall t \in]\xi_i, t_{i+1}[$, soit $M''_1(t) = 0$ sur $]t_i, \xi_i[$ ou $M''_2(t) = 0$ sur $] \xi_i, t_{i+1}[$ (voir la preuve du théorème (4.2.1)). Ceci n'est pas le cas pour les S.C.P. (i.e. E_i).

COROLLAIRE 4.2.2 : Si on choisit les vecteurs tangents suivants :

$$P'_i = \frac{s_{i-1}}{A_i} \delta P_i + \frac{s_{i+1}}{A_i} \delta P_{i-1} \quad i = 0, \dots, n$$

où A_i est un paramètre > 0 , alors les inégalités $(\bar{E}_i)$ sont satisfaites si et seulement si $A_i > \bar{S}_i$ pour $i = 0, \dots, n$ où $\bar{S}_i = \frac{1}{4} \max \{ (s_{i-1} + s_{i+2} + \sigma_i), (s_{i-2} + s_{i+1} + \sigma_{i-1}) \}$.

Preuve : On remplace α_i par $\frac{s_{i-1}}{A_i}$ et β_i par $\frac{s_{i+1}}{A_i}$ dans les inégalités $(\bar{E}_i)$ ($i = 0, \dots, n$), on obtient alors le résultat.

COROLLAIRE 4.2.3 : Si la subdivision τ de $[0, 1]$ est issue de la paramétrisation classique pondérée (2.2.2) $\left(h_i = \frac{r_i \ell_i}{\sum_j r_j \ell_j}\right)$ et si les paramètres α_i des vecteurs tangents sont choisis selon le schéma (4.2.1.3), c'est-à-dire $\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$ et $\beta_i = 1 - \alpha_i$, $i = 0, \dots, n$, alors la convexité de la S.Q.P., solution du problème (P.I.H.) est assurée si et seulement si les paramètres r_i ($i = 0, \dots, n$) vérifient les inégalités $(\bar{R}_i)$ suivantes :

$$\bar{R}_i \quad \begin{cases} s_{i+1} r_{i-1} \ell_{i-1} + \sigma_i r_i \ell_i + s_i r_{i+1} \ell_{i+1} < 4 \inf \{s_i(r_i \ell_i + r_{i+1} \ell_{i+1}), s_{i+1}(r_{i-1} \ell_{i-1} + r_i \ell_i)\} \\ i = 0, \dots, n. \end{cases}$$

Preuve : Elle découle du théorème (4.2.2).

5. TESTS NUMÉRIQUES

Nous avons testé les différentes méthodes d'interpolation convexe décrites dans ce travail sur des exemples de polygones à géométries assez variées. Sur toutes les figures ci-jointes, on donne les informations nécessaires pour identifier la courbe :

1. Subdivision classique ou subdivision classique pondérée.
2. Splines S.C.P. ou splines S.Q.P. à nœuds mobiles ou à nœuds fixés.
3. Schéma de calcul des vecteurs tangents :

- Schéma en delta : $P'_i = \frac{s_{i-1}}{A_i} \delta P_i + \frac{s_{i+1}}{A_i} \delta P_{i-1} \quad i = 0, \dots, n.$
- Schéma 4.2.1.2 : $P'_i = \frac{s_{i-1}}{s_{i-1} + s_{i+1}} \delta P_i + \frac{s_{i+1}}{s_{i-1} + s_{i+1}} \delta P_{i-1} \quad i = 0, \dots, n.$
- Schéma 4.2.1.3 : $P'_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} \delta P_i + \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} \delta P_{i-1} \quad i = 0, \dots, n.$

D'autres informations concernant les valeurs des paramètres A_i , λ_i et r_i ($i = 0, \dots, n$) sont fournies à côté de la courbe utilisant ces paramètres.

Nous remarquons sur toutes les courbes tracées que lorsque les vecteurs tangents sont calculés par le schéma en delta avec $A_i = aS_i$ ou $A_i = a\bar{S}_i$, $i = 0, \dots, n$, le choix $a \geq 1$ pour les S.C.P. et $a > 1$ pour les S.Q.P. a toujours conduit à des courbes convexes et C^1 indépendamment de la géométrie des polygones $\mathcal{P}$ (voir figs. A_1 , A_2 et C_1). Le choix $a = 1$ pour les S.Q.P. à nœuds fixés donne généralement des courbes convexes mais pas de classe C^1 (fig. B_5) : ceci s'explique, comme nous l'avons déjà signalé, par le fait que sur un certain intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, l'interpolant est affine par morceaux et par suite la continuité C^1 au nœud ξ_i ne peut avoir lieu.

Pour les deux interpolants (S.C.P. et S.Q.P.), lorsqu'on prend $a < 1$, on obtient automatiquement des courbes non convexes (fig. A_3).

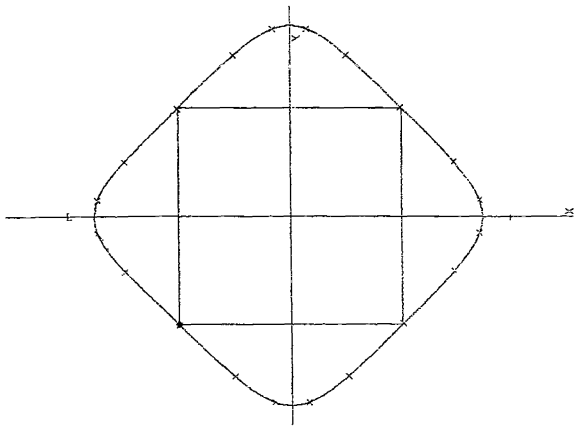
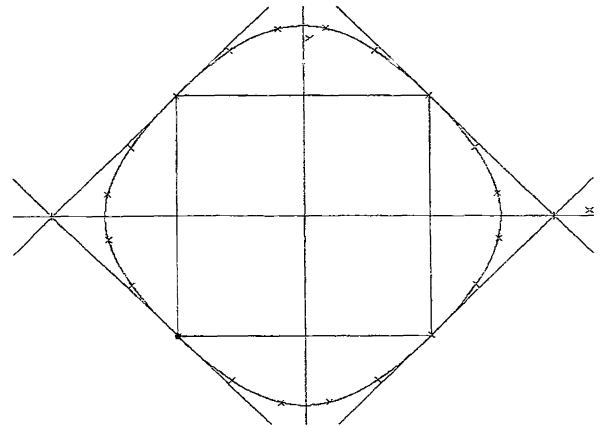
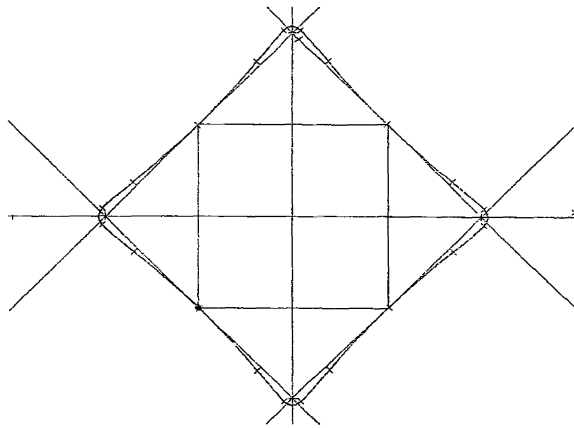
Par ailleurs, on enregistre l'influence de la valeur de A_i ($i = 0, \dots, n$) sur les courbes qui ont tendance à se rapprocher du polygone $\mathcal{P}$ au fur et à mesure que les valeurs de A_i deviennent plus grandes, donc que les normes des vecteurs tangents deviennent plus petites (comparer les figs. A_1 et A_2).

Quand on affecte à a la valeur 3 (pour la S.C.P.) ou la valeur 4 (pour la S.Q.P.) nous obtenons, tout au moins pour les exemples testés, des courbes très proches de celles déterminées par le schéma (4.2.1.2) de calcul des vecteurs tangents (voir figs. $(B_2 + B_3)$) ; on peut expliquer ceci par le fait que :

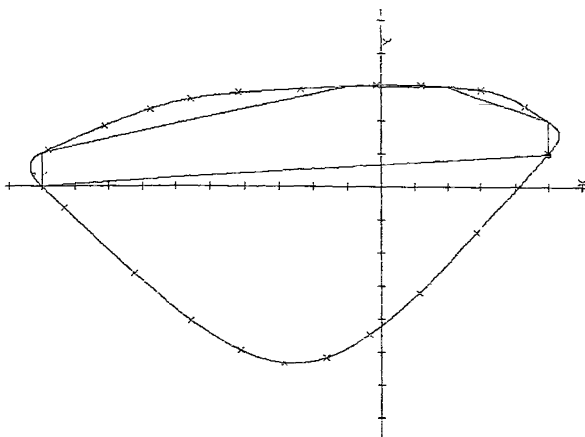
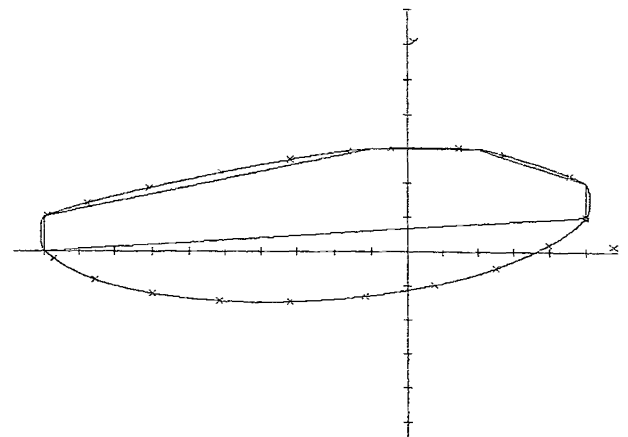
$$3 S_i \text{ ou } 4 \bar{S}_i = \max (s_{i-1} + s_{i+2} + \sigma_i, s_{i-2} + s_{i+1} + \sigma_{i-1}) \equiv s_{i-1} + s_{i+1}.$$

Les tests des S.Q.P. à nœuds mobiles ayant des tangentes respectant le schéma (4.2.1.2) appliqués sur des polygones à géométrie quelconque, nous ont toujours permis d'insérer les nœuds intermédiaire ξ_i pour satisfaire la convexité de l'interpolant.

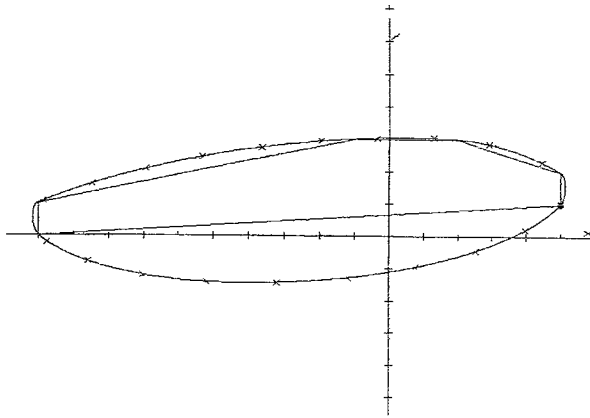
Sur les figures C_2 et C_3 , nous avons mis en exergue l'avantage de la S.Q.P. à nœuds fixés sur la S.C.P. : on voit que dans les mêmes conditions d'interpolation, la S.Q.P. est convexe mais pas la S.C.P., ce qui confirme que la

Figure $A_1 : a = 1,0$.Figure $A_2 : a = 1,3$.Figure $A_3 : a = 0,7$.

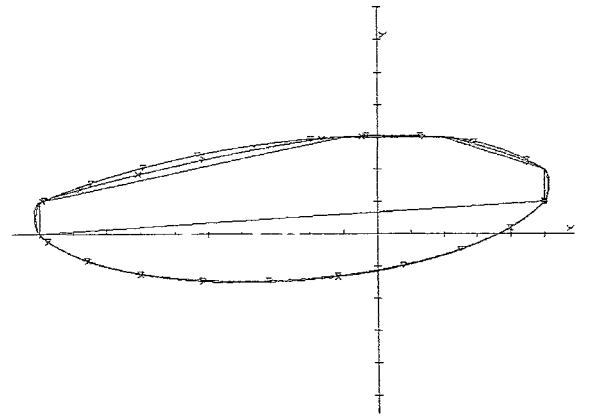
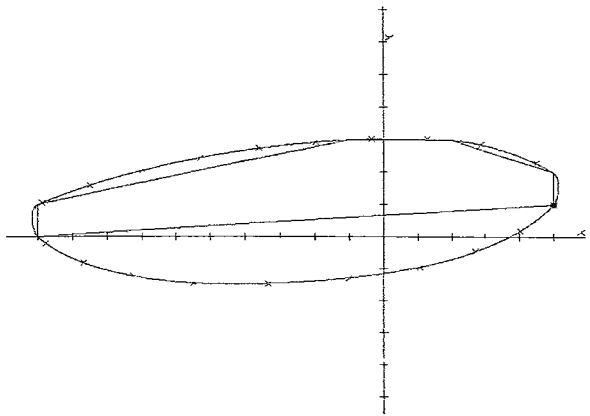
* Figure A_1 , figure A_2 , figure A_3 : Subdivision classique, S.C.P., schéma en delta avec : $\Delta_i = a\Delta$, $i = 0, \dots, n$, $a > 0$.

Figure $B_1 : a = 1,0$.Figure $B_2 : a = 3,0$.

* Figure B_1 , figure B_2 : Subdivision classique, S.C.P., schéma en delta avec : $\Delta_i = a\Delta$, $i = 0, \dots, n$.

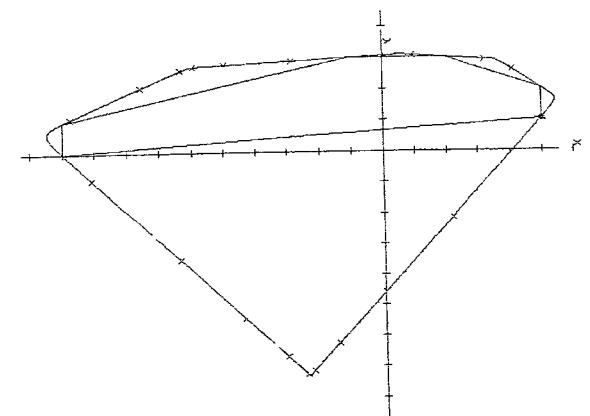
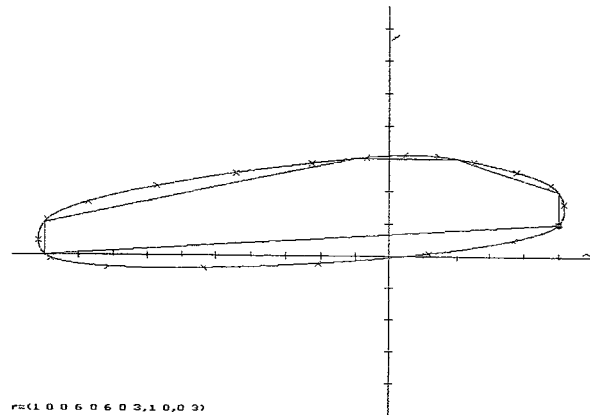
Figure B_3

* Figure B_3 : Subdivision classique ; S.C.P., schéma 4.2.1.2.

Figure B_2 x et figure B_3 y .Figure B_4 .

* Figure B_4 : Subdivision classique ; S.Q.H.P. à nœuds fixés, schéma 4.2.1.2.

* Figure B_5 : Subdivision classique, S.Q.H.P. à nœuds fixés, schéma en delta avec : $\Delta_i = \bar{\Delta}$, $i = 0, \dots, n$

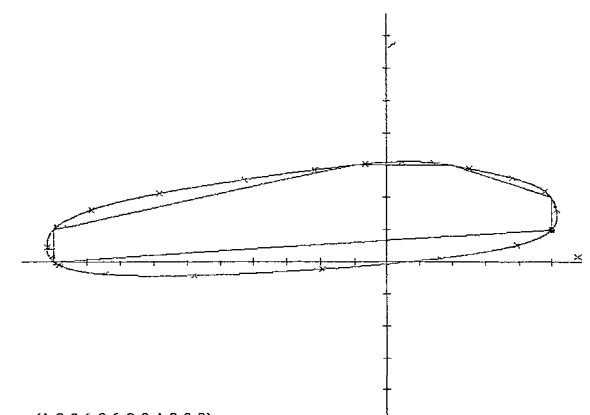
Figure B_5 

$r = (1, 0, 0, 6, 0, 6, 0, 3, 1, 0, 0, 3)$

Figure B_6 :

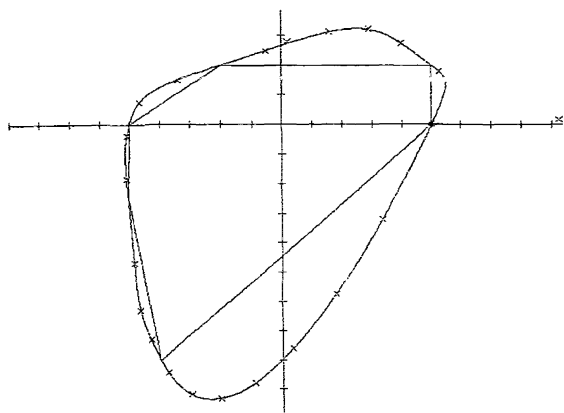
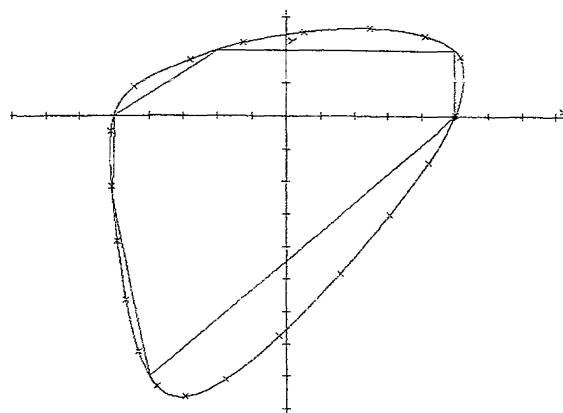
* Figure B_6 : Subdivision classique pondérée ; S.C.P., schéma 4.2.1.3.

* Figure B_7 : Subdivision classique pondérée ; S.Q.H.P. à nœuds fixés, schéma 4.2.1.3.



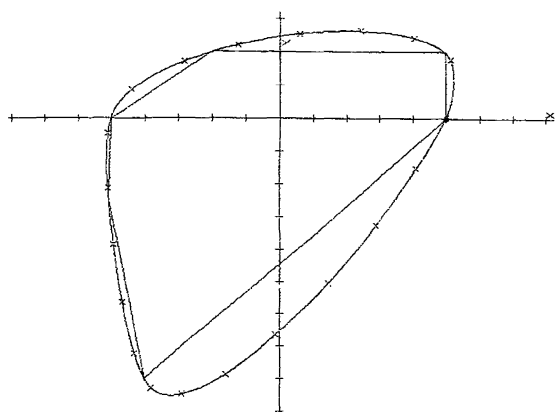
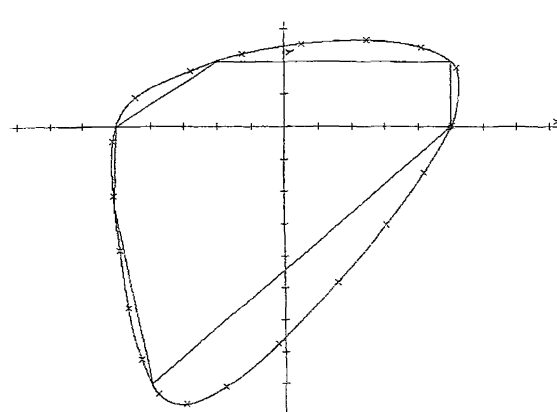
$r = (1, 0, 0, 6, 0, 6, 0, 3, 1, 0, 0, 3)$

Figure B_7 .

Figure C_1 .Figure C_2 .

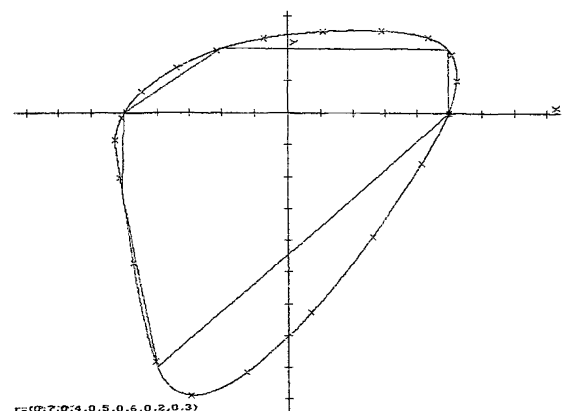
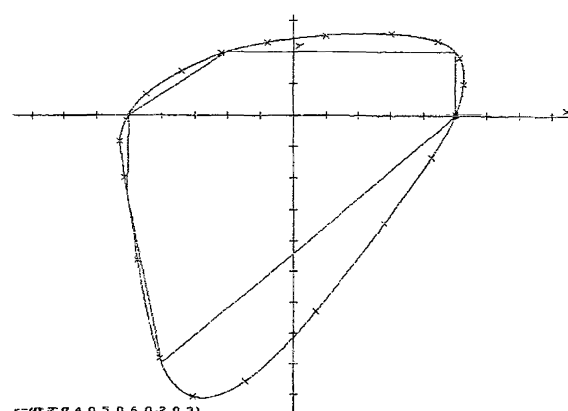
* Figure C_1 : Subdivision classique, S.C.P. ; schéma en delta avec : $\Delta_i = \Delta$, $i = 0, \dots, n$.

* Figure C_2 : Subdivision classique ; S.Q.H.P. à nœuds fixés, schéma 4.2.1.2.

Figure C_3 .Figure C_4 .

* Figure C_3 : Subdivision classique, S.C.P., schéma 4.2.1.2.

* Figure C_4 : Subdivision classique, S.Q.H.P. à nœuds mobiles avec $\lambda_i \equiv \frac{1}{2}$, $i = 0, \dots, n$; schéma 4.2.1.2.

Figure C_5 .Figure C_6 .

* Figure C_5 : Subdivision classique pondérée ; S.C.P., schéma 4.2.1.3.

* Figure C_6 : Subdivision classique pondérée ; S.Q.H.P. à nœuds fixés, schéma 4.2.1.3.

région locale de convexité $\mathcal{C}_i$ correspondant à la S.Q.P. est plus vaste que $\mathcal{C}_i$ correspondant à la S.C.P. Cet avantage reste valable quand on cherche les valeurs de pondération r_i ($i = 0, \dots, n$) satisfaisant les conditions suffisantes R_i et $\bar{R}_i$ de convexité de la S.C.P. (respectivement de la S.Q.P.). Ainsi on voit sur les figures C_5 et C_6 que pour les mêmes valeurs de r_i ($i = 0, \dots, n$), la S.Q.P. est convexe mais pas la S.C.P.

RÉFÉRENCES

- [1] Mc ALLISTER and J. A. ROULIER, Interpolation by convex quadratic splines, *Math of Computation*, **32** (1978), 1154-1164.
- [2] Mc ALLISTER and J. A. ROULIER, An algorithm for computing a shape-preserving osculatory quadratic spline, *A.C.M. Trans. Math. Software*, **7** (1981), 331-347.
- [3] E. NEUMAN, Convex interpolating splines of arbitrary degree II, *BIT*, **22** (1982), 331-338.
- [4] H. METTKE, Convex cubic Hermite spline interpolation, *J. Comput. Appl. Math.*, **9** (1983), 205-211.
- [5] E. NEUMAN, Convex interpolating splines of arbitrary degree. In *Numerical Methods of Approximation Theory* V. L. Collatz, G. Meinardus, H. Werner (eds.), Birkhäuser, Basel (1980), 211-222.
- [6] E. PASSOW and J. A. ROULIER, Monotonic and convex spline interpolation, *SIAM J. of Numerical Analysis*, **14** (1977), 904-909.
- [7] L. L. SCHUMAKER, On shape preserving quadratic spline interpolation, *SIAM J. of Numerical Analysis*, **20** (1980), 854-864.
- [8] M. P. EPSTEIN, On the influence of parametrisation in parametric interpolation, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. 13, N° 2 (avril 1976), 261-268.
- [9] A. TIJINI, Splines cubiques généralisées. Thèse de 3° cycle, INSA de Rennes (1987).