M2AN - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

G. BUTTAZZO
O. M. ZEINE

Un problème d'optimisation de plaques

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 31, nº 2 (1997), p. 167-184

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1997__31_2_167_0>

© AFCET, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 31, n° 2, 1997, p. 167 à 184)

UN PROBLÈME D'OPTIMISATION DE PLAQUES (*)

G. BUTTAZZO (1), O. M. ZEINE (2)

Résumé. — *On considère une plaque entourée d'un matériau très fin et très mou dont la distribution autour de la plaque est déterminée par la donnée d'une fonction sur la frontière. L'analyse asymptotique, lorsque le module d'Young et l'épaisseur du matériau deviennent petits, de l'équation d'équilibre a été faite par E. Acerbi et G. Buttazzo dans [3]. Nous montrons ici que, pour chacun des problèmes limites, il existe une distribution qui minimise l'énergie.*

Abstract. — *We consider a plate surrounded by a soft material whose distribution on the plate contour is given by the thickness function. When the thickness of the surrounding material goes to zero, as well as its Young Modulus, the asymptotic analysis has been made by Acerbi and Buttazzo in [3]. Here we show that for the limit problem there exists a function which minimizes the energy.*

INTRODUCTION

Nous considérons une plaque en flexion dont la surface moyenne est représentée par un ouvert Ω borné connexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière Σ régulière. Cette structure est entourée d'un matériau mou de module d'Young E_ϵ et d'épaisseur r_ϵ dont la surface moyenne Σ_ϵ est déterminée par la donnée d'une distribution $h : \Sigma \to \mathbb{R}_+$ comme suit :

$$\Sigma_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 ; x = \sigma + tn(\sigma), \sigma \in \Sigma, 0 \leqslant t \leqslant r_\epsilon h(\sigma)\},$$

où $n(\sigma)$ désigne la normale extérieure à Σ au point $\sigma \in \Sigma$. L'ensemble occupe donc le domaine $\overline{\Omega} \cup \Sigma_\epsilon$ et on le suppose encastré sur le bord extérieur de Σ_ϵ. On se donne une densité de forces $f \in L^2(\overline{\Omega} \cup \Sigma_\epsilon)$; elle engendre un déplacement u_ϵ qui est solution du problème de minimisation de l'énergie totale :

$$\min_{u \in H_0^2(\overline{\Omega} \cup \Sigma_\epsilon)} \left\{ G(u) + G_\epsilon(u) - 2 \int_{\overline{\Omega} \cup \Sigma_\epsilon} fu \, dx \right\}, \tag{1}$$

(*) Manuscript received September 18, 1995.

(1) Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Via Buonarroti, 2 56127 Pisa, Italy.

(2) Université de Nice Sophia-Antipolis, CNRS LA168, Parc valrose F-06108 Nice, Cedex 2.

 © AFCET Gauthier-Villars

où (*cf* Landau et Lifchitz [7])

$$G(u) = \frac{E}{1-\nu^2} \int_\Omega [(\Delta u)^2 - 2(1-\nu) \det D^2 u]\, dx \tag{2}$$

E, ν désignent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson de la plaque Cette fonctionnelle s'écrit, de façon équivalente

$$G(u) = \frac{E}{1-\nu^2} \int_\Omega \left[\nu(\Delta u)^2 + (1-\nu) \sum_{1 \leq \alpha\, \beta \leq 2} (\partial_{\alpha\beta} u)^2 \right] dx \tag{3}$$

On obtient $G_\epsilon(u)$ en remplaçant Ω, E et ν par Σ_ϵ, E_ϵ et ν_ϵ La fonctionnelle $G(u)$ est quadratique définie positive

L'analyse asymptotique de la suite de problèmes (1), lorsque E_ϵ et r_ϵ tendent vers zéro, a été faite par E Acerbi et G Buttazzo [3], en utilisant la Γ-convergence et montre que

— si $E_\epsilon \gg r_\epsilon$ alors le problème limite est

$$\min_{u \in H_0^2(\Omega)} \left\{ G(u) - 2 \int_\Omega fu\, dx \right\} \quad \text{(plaque encastree)}$$

— si $E_\epsilon \sim r_\epsilon$ alors le problème limite est

$$\min_{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} \left\{ G(u) - 2 \int_\Omega fu\, dx + \int_\Sigma \frac{(\partial u/\partial n)}{h}\, d\sigma \right\} \tag{4}$$

— si $r_\epsilon \gg E_\epsilon \gg r_\epsilon^3$ alors le problème limite est

$$\min_{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} \left\{ G(u) - 2 \int_\Omega fu\, dx \right\} \quad \text{(plaque supportée)}$$

— si $E_\epsilon \sim r_\epsilon^3$ alors le problème limite est

$$\min_{u \in H^2(\Omega)} \left\{ G(u) - 2 \int_\Omega fu\, dx + \int_\Sigma \frac{u^2}{h^3}\, d\sigma \right\}, \tag{5}$$

— si $E_\epsilon \ll r_\epsilon^3$ alors le problème limite est

$$\min_{u \in H^2(\Omega)} \left\{ G(u) - 2 \int_\Omega fu\, dx \right\} \quad \text{(plaque libre)}$$

Nous nous intéressons ici aux deux cas critiques Il apparaît clairement que les problèmes (4) et (5) admettent chacun une solution unique qui dépend de la distribution h

Nous nous proposons de répondre aux questions : étant donné la quantité de matière H existe-t-il une distribution h de cette quantité (c'est-à-dire telle que $\left(\int_\Sigma h\, d\sigma = H\right)$ qui minimise l'énergie ? Si oui, est-elle unique ?

Nous montrons, d'abord que pour le premier problème il existe une telle distribution. On utilise une démarche similaire à celle faite par G. Buttazzo [4] dans le cas membranaire, en commençant d'abord par minimiser par rapport à la distribution. On se ramène alors à un problème de minimisation d'une fonctionnelle $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$-coercive, convexe et semi-continue inférieure pour la topologie faible de $H^2(\Omega)$.

Dans la seconde section on montre que la réponse à la question de l'existence d'une distribution optimale h est encore positive dans le deuxième cas critique. Cependant, la fonctionnelle définie sur $H^2(\Omega)$ et obtenue par minimisation de l'énergie sur l'espace des distributions admissibles, n'est plus convexe et la question de l'unicité reste ouverte.

1. CAS CRITIQUE $E_\epsilon \sim r_\epsilon$

Nous nous intéressons au premier cas critique. Signalons que le problème variationnel, équivalent au problème de minimisation (4), s'écrit sous forme forte, en utilisant une formule de Green ([5], [7]) :

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \\ \dfrac{E}{1-\nu^2}\, \Delta^2 u = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ h\, \dfrac{E}{1-\nu^2}\, [\nu\, \Delta u + (1-\nu)\, \partial_{\alpha\beta} u\, n_\alpha\, n_\beta] + \partial u/\partial n = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

où $\partial_{\alpha\beta} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}$ $(\alpha, \beta \in \{1, 2\})$, n_α désigne les composantes de la normale extérieure n dans la base canonique et où on a utilisé la convention des indices répétés.

On pose :

$$\Gamma = \left\{ h \in L^1(\Sigma), \quad h \geqslant 0, \quad \int_\Sigma h\, d\sigma = H \right\}, \tag{6}$$

$$E(u, h) = G(u) - 2 \int_\Omega fu\, dx + \int_\Sigma \frac{(\partial u/\partial n)^2}{h}\, d\sigma \tag{7}$$

et on se propose de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{h \in \Gamma} \min_{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} E(u, h) . \tag{8}$$

Remarque 1.1 : Par des calculs classiques, le problème (8) s'écrit de façon équivalente :

$$\min_{h \in \Gamma} \left\{ - \int_\Omega f u_h \, dx \right\} ,$$

où u_h désigne la solution du problème (4). Prenons f constante négative (par exemple la gravité), le problème (8) traduit la minimisation de la valeur moyenne du déplacement vertical. On cherche donc la distribution de matériau mou pour que la plaque descende le plus possible.

Afin de résoudre le problème (8), on commence par minimiser par rapport à la distribution. On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 1.2 : *Pour toute fonction $u \in H^2(\Omega)$, il existe une distribution $h_u \in \Gamma$ solution du problème de minimisation :*

$$\min_{h \in \Gamma} \left\{ \int_\Sigma \frac{(\partial u/\partial n)^2}{h} \, d\sigma \right\} . \tag{9}$$

De plus, si $\partial u/\partial n \not\equiv 0$, alors la distribution h_u est unique et est donnée par la relation :

$$h_u(\sigma) = H \frac{|\partial u/\partial n| \, (\sigma)}{|\partial u/\partial n| \, (\sigma) \, d\sigma} \quad p.p. \quad \sigma \in \Sigma . \tag{10}$$

Démonstration : Lorsque $\partial u/\partial n \equiv 0$, il est clair que tout élément de Γ est solution de (9). Par la suite nous supposons que $\partial u/\partial n \not\equiv 0$ et nous allons montrer que le problème (9) admet une solution unique.

Pour h quelconque dans l'espace Γ la fonction $\dfrac{(\partial u/\partial n)^2}{h}$ n'est pas nécessairement intégrable, mais étant donné que (9) est un problème de minimisation, on peut se limiter aux fonctions h qui vérifient :

$$\int_\Sigma \frac{(\partial u/\partial n)^2}{h} \, d\sigma < \infty ,$$

donc on a :

$$\sqrt{h} \in L^2(\Sigma) \quad \text{et} \quad \frac{|\partial u/\partial n|}{\sqrt{h}} \in L^2(\Sigma) .$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\left(\int_\Sigma |\partial u/\partial n|\, d\sigma\right)^2 \leqslant \left(\int_\Sigma h\, d\sigma\right)\left(\int_\Sigma \frac{(\partial u/\partial n)^2}{h}\, d\sigma\right)$$

$$= H \int_\Sigma \frac{(\partial u/\partial n)^2}{h}\, d\sigma .$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{H}\left(\int_\Sigma |\partial u/\partial n|\, d\sigma\right)^2 \leqslant \int_\Sigma \frac{(\partial u/\partial n)^2}{h}\, d\sigma . \tag{11}$$

De plus, pour qu'il y ait égalité dans (11) il faut et il suffit qu'il existe un réel λ tel que :

$$h = \lambda |\partial u/\partial n| ,$$

ce qui donne en écrivant que $h \in \Gamma$:

$$\lambda = \frac{H}{\displaystyle\int_\Sigma |\partial u/\partial n|\, d\sigma}$$

d'où :

$$h = H \frac{|\partial u/\partial n|}{\displaystyle\int_\Sigma |\partial u/\partial n|\, d\sigma} .$$

L'unicité est une conséquence de la stricte convexité de la fonction $h \mapsto 1/h$ et de la monotonie de l'intégrale. ■

Grâce à (9), (10) et (11) le problème (8) s'écrit :

$$\min_{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} E(u) , \tag{12}$$

où

$$E(u) = G(u) - 2\int_\Omega fu\, dx + \frac{1}{H}\left(\int_\Sigma |\partial u/\partial n|\, d\sigma\right)^2 . \tag{13}$$

La fonctionnelle $E(u)$ est convexe. Pour qu'un élément u de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ soit solution du problème (12) il faut et il suffit que :

$$0 \in \partial E(u),$$

où $\partial E(u)$ désigne le sous-différentiel de E en u. La condition précédente s'écrit sous la forme forte suivante :

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ \dfrac{E}{1-\nu^2} \Delta^2 u = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{E}{1-\nu^2} [\nu \Delta u + (1-\nu) \partial_{\alpha\beta} u\, n_\alpha n_\beta] + \dfrac{1}{H} S(\partial u/\partial n) \displaystyle\int_\Sigma |\partial u/\partial n|\, d\sigma \ni 0 \text{ sur } \Sigma, \end{cases}$$

où $S(t)$ est l'application multivoque définie par :

$$S(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(t) & \text{si} \quad t \neq 0 \\ [-1, 1] & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$

Afin de résoudre le problème (12) on va d'abord montrer la coercivité de la fonctionnelle $E(u)$ en prouvant l'inégalité de Poincaré généralisée suivante :

PROPOSITION 1.3 : *Il existe une constante C qui ne dépend que du domaine Ω et des constantes d'élasticité telle que pour tout $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ on ait :*

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leqslant C \left\{ G(u) + \left(\int_\Sigma |\partial u/\partial n|\, d\sigma \right)^2 \right\}. \tag{14}$$

Démonstration : Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'inégalité (14) n'ait pas lieu. Il existe alors une suite u_m de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\left\{ G(u_m) + \left(\int_\Sigma |\partial u_m/\partial n|\, d\sigma \right)^2 \right\} \leqslant \frac{1}{m} \|u_m\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

Mais la fonctionnelle $G(u_m) + \left(\int_\Sigma |\partial u_m / \partial n| \, d\sigma\right)^2$ est quadratique donc on peut se ramener, par normalisation, à une suite u_m de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ qui vérifie :

$$\|u_m\|_{H^2(\Omega)} = 1 , \tag{15}$$

et

$$G(u_m) + \left(\int_\Sigma |\partial u_m / \partial n| \, d\sigma\right)^2 \to 0 . \tag{16}$$

De (15) on déduit qu'on peut extraire une sous suite (encore notée u_m) telle que :

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans} \quad H^2(\Omega) .$$

Ceci entraîne, grâce à la compacité de l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, que :

$$u_m \to u \quad \text{fortement dans} \quad H^1(\Omega) ,$$

et, par la continuité de la trace, $u \in H_0^1(\Omega)$. De plus, puisque la fonctionnelle $G(\,.\,)$ est définie positive, on déduit de (16) que la suite $G(u_m)$ tend vers zéro, puis de (3) que :

$$\forall \alpha, \beta \quad \partial_{\alpha\beta} u_m \to 0 \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega) .$$

Par conséquent u_m est une suite de Cauchy dans l'espace $H^2(\Omega)$ donc

$$u_m \to u \quad \text{fortement dans} \quad H^2(\Omega)$$

et

$$\forall \alpha, \beta \quad \partial_{\alpha\beta} u = 0 .$$

En particulier $\Delta u = 0$ ce qui entraîne, puisque $u \in H_0^1(\Omega)$, que $u = 0$. Ainsi la suite u_m converge fortement dans $H^2(\Omega)$ vers 0 ; ce qui est contradictoire avec (15). ■

Nous allons à présent conclure pour le problème (12).

PROPOSITION 1.4 : *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Le problème (12) admet une solution unique.*

Démonstration : Elle sera scindée en deux étapes.

Etape 1 : Existence

Soit u_m une suite minimisante de $E(u)$:

$$E(u_m) \to \inf_{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} E(u),$$

et soit C_0 une constante telle que :

$$E(u_m) \leqslant C_0,$$

donc

$$G(u_m) + \frac{1}{H}\left(\int_\Sigma |\partial u_m/\partial n|\, d\sigma\right)^2 \leqslant C_0 + \int_\Omega f u_m\, dx. \tag{17}$$

Soit $\epsilon > 0$, en utilisant l'inégalité :

$$\int_\Omega fu\, dx \leqslant \frac{1}{4\epsilon}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

on déduit de (17), en posant $C_\epsilon = C_0 + \frac{1}{4\epsilon}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}$, que :

$$G(u_m) + \frac{1}{H}\left(\int_\Sigma |\partial u_m/\partial n|\, d\sigma\right)^2 \leqslant C_\epsilon + \epsilon\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)},$$

d'où, grâce à (14) :

$$G(u_m) + \frac{1}{H}\left(\int_\Sigma |\partial u_m/\partial n|\, d\sigma\right)^2 \leqslant C_\epsilon + C\epsilon\left\{G(u_m) + \left(\int_\Sigma |\partial u_m/\partial n|\, d\sigma\right)^2\right\},$$

donc

$$\min\left(1 - C\epsilon, \frac{1}{H} - C\epsilon\right)\left\{G(u_m) + \left(\int_\Sigma |\partial u_m/\partial n|\, d\sigma\right)^2\right\} \leqslant C_\epsilon.$$

En choisissant ϵ petit on déduit de cette inégalité et de l'inégalité de Poincaré généralisée que la suite u_m est bornée dans $H^2(\Omega)$ donc on peut en extraire une sous suite encore notée u_m qui converge faiblement dans $H^2(\Omega)$ vers u

qui, grâce à la compacité de l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et à la continuité de la trace, appartient à $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Par ailleurs $E(u)$ est convexe et fortement continue dans $H^2(\Omega)$ donc elle est faiblement semi-continue inférieurement et

$$E(u) \leqslant \liminf_{m \to +\infty} E(u_m) .$$

Par conséquent, u est solution du problème (12).

Etape 2 : Unicité

Soient u et v deux solutions de (12), on a :

$$E\left(\frac{u+v}{2}\right) - \frac{E(u)+E(v)}{2} = -\frac{1}{4} G(u-v) + \frac{1}{4H}\left\{\left(\int_\Sigma |\partial u/\partial n + \partial v/\partial n| \, d\sigma\right)^2 - 2\left(\int_\Sigma |\partial u/\partial n| \, d\sigma\right)^2 - 2\left(\int_\Sigma |\partial v/\partial n| \, d\sigma\right)^2\right\}$$

$$\leqslant -\frac{1}{4} G(u-v) - \frac{1}{4H}\left(\int_\Sigma |\partial u/\partial n| \, d\sigma - \int_\Sigma |\partial v/\partial n| \, d\sigma\right)^2 .$$

Puisque u et v sont solutions de (12) on a :

$$E(u) = E(v) = \frac{E(u)+E(v)}{2} \leqslant E\left(\frac{u+v}{2}\right) .$$

Par conséquent

$$G(u-v) = 0 ,$$

qui entraîne par un raisonnement similaire à celui de la proposition 1.2 que $u = v$. ■

Nous concluons cette section par le théorème suivant qui est une conséquence immédiate des propositions 1.2 et 1.4.

PROPOSITION 1.5 : *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Le problème (8) admet au moins une solution h_{opt}. De plus si la dérivée normale du déplacement correspondant u_{opt} (solution de (12)) est non identiquement nulle sur Σ alors h_{opt} est unique et est donnée par :*

$$h_{opt}(\sigma) = H \frac{|\partial u_{opt}/\partial n|(\sigma)}{|\partial u_{opt}/\partial n|(\sigma)\, d\sigma} \text{ p.p. } \quad \sigma \in \Sigma .$$

Démonstration : En effet, par la proposition 1.2

$$\min_{h \in \Gamma} \min_{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} E(u, h) = \min_{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} E(u) \tag{18}$$

et, d'après la proposition 1.4, ce dernier problème admet une solution unique u_{opt}. Enfin, lorsque $|\partial u_{opt}/\partial n| \not\equiv 0$, l'expression et l'unicité de h_{opt} sont données par la proposition 1.1. ■

Remarque 1.6 : Signalons que dans le cas où $n = 1$ (poutre) la fonctionnelle G s'écrit :

$$G(u) = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_\Omega (u'')^2\, dx .$$

Les propositions 1.2, 1.3, 1.4 et le théorème 1.5 restent valables en dimension 1 et leur preuve est similaire.

Remarque 1.7 : Dans le cas où $\partial u_{opt}/\partial n$ est identiquement nulle, tout élément de Γ est optimum. D'autre part les résultats précédents restent valables si on suppose seulement que $f \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))'$.

2. CAS CRITIQUE $E_\epsilon \sim r_\epsilon^3$

Dans cette partie, on s'intéresse au second cas critique (5). Nous commençons par donner à titre indicatif les équations correspondantes au problème (5). Afin de simplifier son écriture sous forme forte, nous allons introduire un tenseur $m = (m_{\alpha\beta})$ d'ordre 2 symétrique défini par :

$$m_{\alpha\beta} = -\frac{E}{1 - \nu^2} \{ \nu\, \Delta u\, \delta_\alpha^\beta + (1 - \nu)\, \partial_{\alpha\beta} u \} ,$$

où δ_α^β est le symbole de Kronecker. La formulation variationnelle, équivalente au problème de minimisation (5), s'écrit sous forme forte ([5], [7]) :

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega) : \\ -\operatorname{div} q = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ m_n = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \\ -h^3 \left\{ \dfrac{\partial m_s}{\partial t} + \langle q, n \rangle \right\} + u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \end{cases}$$

avec :

$$m_n = m_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \langle m \,.\, n, n \rangle$$

$$m_s = m_{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta = \langle m \,.\, n, t \rangle = \langle n, m \,.\, t \rangle$$

$$q = m_{\alpha\beta,\beta} = \operatorname{div} m$$

où $t = (t_\alpha)$ est le vecteur unitaire de la tangente à Σ (faisant un angle de $+\frac{\pi}{2}$ avec la normale extérieure) et $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. On se propose, comme dans la première section, de minimiser l'énergie totale :

$$\min_{h \in \Gamma} \min_{u \in H^2(\Omega)} F(u, h) \tag{19}$$

où

$$F(u, h) = G(u) - 2 \int_\Omega fu \, dx + \int_\Sigma \frac{u^2}{h^3} \, d\sigma \,. \tag{20}$$

PROPOSITION 2.1 : *Soit $u \in H^2(\Omega)$, il existe une distribution $h_u \in \Gamma$ solution du problème de minimisation :*

$$\min_{h \in \Gamma} \left\{ \int_\Sigma \frac{u^2}{h^3} \, d\sigma \right\} . \tag{21}$$

De plus, si $u \not\equiv 0$, alors la distribution h_u est unique et est donnée par la relation :

$$h_u(\sigma) = H \frac{\sqrt{|u(\sigma)|}}{\displaystyle\int_\Sigma \sqrt{|u(\sigma)|} \, d\sigma} \,. \tag{22}$$

Démonstration : Lorsque $u = 0$, il est clair que tout élément de Γ réalise le minimum. Supposons $u \not\equiv 0$ et montrons que le problème (21) admet une solution unique.

Puisque (21) est un problème de minimisation, il suffit de considérer les fonctions qui vérifient :

$$\int_\Sigma \frac{u^2}{h^3}\, d\sigma < +\infty ,$$

qui est équivalent à dire que :

$$\frac{\sqrt{|u|}}{h^{3/4}} \in L^4(\Sigma) .$$

D'autre part

$$h^{3/4} \in L^{4/3}(\Sigma) .$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\int_\Sigma \sqrt{|u|}\, d\sigma = \int_\Sigma h^{3/4} \frac{\sqrt{|u|}}{h^{3/4}}\, d\sigma \leqslant \left(\int_\Sigma h\, d\sigma\right)^{3/4} \left(\int_\Sigma \frac{u^2}{h^3}\, d\sigma\right)^{1/4}$$

$$= H^{3/4} \left(\int_\Sigma \frac{u^2}{h^3}\, d\sigma\right)^{1/4} .$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{H^3}\left(\int_\Sigma \sqrt{|u|}\, d\sigma\right)^4 \leqslant \int_\Sigma \frac{u^2}{h^3}\, d\sigma . \tag{23}$$

Pour l'existence d'une solution du problème (21) il suffit donc de montrer que le minorant dans (23) est atteint. Rappelons que, si $f \in L^p(\Sigma)$ et $g \in L^q(\Sigma)$ avec $1/p + 1/q = 1$, l'inégalité de Hölder devient égalité si et seulement si $f = \lambda g^{q/p}$. Par conséquent pour que l'égalité ait lieu dans (23) il faut et il suffit qu'il existe un réel λ tel que :

$$h^{3/4} = \lambda\left(\frac{\sqrt{|u|}}{h^{3/4}}\right)^3 ,$$

c'est-à-dire :

$$h = \lambda^{1/3} \sqrt{|u|} ,$$

ce qui donne en écrivant que $h \in \Gamma$:

$$\lambda^{1/3} = \frac{H}{\displaystyle\int_\Sigma \sqrt{|u|}\, d\sigma}$$

d'où :

$$h = H \frac{\sqrt{|u|}}{\displaystyle\int_\Sigma \sqrt{|u|}\, d\sigma}.$$

L'unicité résulte de la stricte convexité de la fonction $h \mapsto 1/h^3$ et de la monotonie de l'intégrale. ■

Revenons au problème d'optimisation (19). Grâce à (21), (22) et (23), le problème (19) se ramène à un problème d'optimisation par rapport au déplacement :

$$\min_{u \in H^2(\Omega)} F(u), \tag{24}$$

où

$$F(u) = G(u) - 2\int_\Omega fu\, dx + \frac{1}{H^3}\left(\int_\Sigma \sqrt{|u|}\, d\sigma\right)^4. \tag{25}$$

Remarquons que la fonctionnelle F n'est pas toujours convexe à cause du terme de bord. Pour le voir, introduisons la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2_+$ par

$$f(x, y) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^4.$$

Cette fonction n'est ni concave ni convexe. En effet, si on note Hess $f(x, y)$ la matrice hessienne de la fonction f au point (x, y), on a

$$\det(\operatorname{Hess} f(x, y)) = -2\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^6}{xy} < 0.$$

En particulier, lorsqu'on choisit

$$X_1 = (1, 2) \quad X_2 = (2, 1),$$

l'inégalité suivante a lieu

$$f\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = 36 > (1 + \sqrt{2})^4 = \frac{f(X_1) + f(X_2)}{2}$$

Ceci permet de montrer facilement la non-convexité de la fonctionnelle F lorsque la dimension est égale à 1 Pour cela il suffit d'utiliser deux fonctions affines qui réalisent X_1 et X_2 sur la frontière En effet, prenons, par exemple, $\Omega =]0, 1[$ et $f = 0$, il est clair que pour toute fonction affine u on a

$$F(u) = \frac{1}{H^3} f(|u(0)|, |u(1)|)$$

Ainsi, en prenant

$$u_1(x) = 1 + x \quad \text{et} \quad u_2(x) = 2 - x,$$

on obtient

$$F\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) = \frac{1}{H^3} f\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) > \frac{f(X_1) + f(X_2)}{2H^3} = \frac{F(u_1) + F(u_2)}{2}$$

et, donc, F est non convexe sur $H^2(]0, 1[)$ pour tout $H > 0$

Considérons le cas $n = 2$ qui nous intéresse, posons

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^2, \quad 1 < |x| < \sqrt{2}\right\},$$

et notons Σ_1 (resp Σ_2) le cercle de rayon 1 (resp $\sqrt{2}$) On a alors le résultat suivant

LEMME 2 2 *Il existe une constante H_0 telle que pour tout $H < H_0$ la fonctionnelle F n'est pas convexe sur $H^2(\Omega)$*

Démonstration Puisque la fonctionnelle F est convexe si et seulement si sa partie quadratique l'est, nous supposons ici que $f = 0$ Considérons les deux fonctions suivantes de $H^2(\Omega)$

$$u_1 = 1$$

et

$$u_2 = -\frac{3}{2}(x^2 + y^2) + \frac{7}{2}$$

Ces deux fonctions prennent des valeurs constantes sur le bord et permettent d'utiliser la non-convexité de la fonction $f(x, y)$. En effet, si u est une fonction constante sur Σ_1 et Σ_2 alors :

$$\left(\int_\Sigma \sqrt{|u|}\, d\sigma\right)^4 = (2\pi)^4 f(u(\Sigma_1), 2\, u(\Sigma_2)),$$

donc

$$\left(\int_\Sigma \sqrt{|u_1|}\, d\sigma\right)^4 = (2\pi)^4 f(X_1) \quad \left(\int_\Sigma \sqrt{|u_2|}\, d\sigma\right)^4 = (2\pi)^4 f(X_2).$$

D'autre part

$$G\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) = \frac{1}{4} G(u_2) = \frac{C}{4}$$

où $C = \frac{18\, E}{1 - \nu}\pi$. En définitive

$$F\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) = \frac{C}{4} + 36\, \frac{(2\pi)^4}{H^3},$$

et

$$\frac{F(u_1) + F(u_2)}{2} = \frac{C}{2} + (1 + \sqrt{2})^4 \frac{(2\pi)^4}{H^3}.$$

Par conséquent $F\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) > \frac{F(u_1) + F(u_2)}{2}$ dès que

$$H < H_0 = \left(\frac{4\left[36 - (1 + \sqrt{2})^4\right](2\pi)^4}{C}\right)^{1/3}.$$

Ainsi pour toute quantité de matériau H inférieure à H_0, la fonctionnelle F n'est pas convexe $H^2(\Omega)$. ■

Cependant le problème (24) admet au moins une solution. Afin de le montrer, nous allons commencer par montrer une inégalité de type Poincaré.

PROPOSITION 2.3 : *Il existe une constante C qui ne dépend que du domaine Ω et des constantes d'élasticité telle que pour tout $u \in H^2(\Omega)$ on ait :*

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C\left\{G(u) + \left(\int_\Sigma \sqrt{|u|}\, d\sigma\right)^4\right\}. \tag{26}$$

Démonstration : Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'inégalité (26) n'ait pas lieu. Il existe alors une suite u_m de $H^2(\Omega)$ telle que :

$$\left\{ G(u_m) + \left(\int_\Sigma \sqrt{|u_m|}\, d\sigma \right)^4 \right\} \leq \frac{1}{m} \| u_m \|^2_{H^2(\Omega)} .$$

Puisque la fonctionnelle $G(\,.\,)$ est quadratique on peut se ramener, par normalisation, à une suite u_m de $H^2(\Omega)$ qui vérifie :

$$\| u_m \|_{H^2(\Omega)} = 1 , \tag{27}$$

et

$$G(u_m) + \left(\int_\Sigma \sqrt{|u_m|}\, d\sigma \right)^4 \to 0 . \tag{28}$$

Par le même raisonnement que celui de la proposition 1.3 on déduit de (27) et (28) qu'il existe une sous suite encore notée u_m telle que :

$$u_m \to u \quad \text{fortement dans} \quad H^2(\Omega) .$$

De plus, grâce à la continuité de $G(\,.\,)$ et à la convergence (28) on a :

$$G(u) = 0 .$$

D'autre part, il découle de la continuité de l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $\mathscr{C}(\overline{\Omega})$ que la suite u_m converge vers u dans $\mathscr{C}(\overline{\Omega})$. En particulier la suite $\sqrt{|u_m|}$ converge simplement vers $\sqrt{|u|}$ et est bornée sur Σ donc, par le théorème de Lebesgue :

$$\sqrt{|u_m|} \to \sqrt{|u|} \quad \text{dans} \quad L^1(\Sigma) ,$$

par conséquent

$$\left(\int_\Sigma \sqrt{|u_m|}\, d\sigma \right)^4 \to \left(\int_\Sigma \sqrt{|u|}\, d\sigma \right)^4 ,$$

avec, grâce à la convergence (28) :

$$\int_\Sigma \sqrt{|u|}\, d\sigma = 0 .$$

De $G(u) = 0$ on déduit que $\Delta u = 0$ et de la nullité de l'intégrale sur le bord on déduit que $u \in H_0^1(\Omega)$ ce qui entraîne que $u = 0$. Ainsi la suite u_m converge fortement dans $H^2(\Omega)$ vers 0, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (27). ■

Nous allons maintenant montrer l'existence d'une solution du problème (24).

PROPOSITION 2.4 : *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Le problème (24) admet au moins une solution.*

Démonstration : Soit u_m une suite minimisante de $F(u)$. Par un raisonnement similaire à celui de la proposition 1.4 on déduit que la suite u_m est bornée dans $H^2(\Omega)$ donc on peut en extraire une sous suite encore notée u_m qui converge faiblement vers u dans $H^2(\Omega)$. Or la fonction

$$G(u) - 2\int_\Omega fu\,dx\,,$$

est semi-continue inférieure pour la topologie faible de $H^2(\Omega)$ donc

$$G(u) - 2\int_\Omega fu\,dx \leqslant \liminf_{m \to +\infty} \left\{ G(u_m) - 2\int_\Omega fu_m\,dx \right\}. \tag{29}$$

D'autre part l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $\mathscr{C}(\overline{\Omega})$ est compacte donc, par un raisonnement similaire à celui de la proposition 2.3 :

$$\left(\int_\Sigma \sqrt{|u_m|}\,d\sigma\right)^4 \to \left(\int_\Sigma \sqrt{|u|}\,d\sigma\right)^4. \tag{30}$$

De (29) et (30) on déduit que :

$$F(u) \leqslant \liminf_{m \to +\infty} F(u_m)\,,$$

donc u est solution du problème (24). ■

Nous concluons par un résultat qui est une conséquence immédiate des propositions 2.1 et 2.3.

THÉORÈME 2.5 : *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Le problème (19) admet au moins une solution h_{opt}. De plus s'il existe un déplacement u_{opt} (solution de (24)) non identiquement nul sur Σ alors une distribution optimale h_{opt} est donnée par :*

$$h_{opt}(\sigma) = H\frac{\sqrt{|u_{opt}(\sigma)|}}{\displaystyle\int_\Sigma \sqrt{|u_{opt}(\sigma)|}\,d\sigma}.$$

Démonstration : En effet, par la proposition 2.1

$$\min_{h \in \Gamma} \min_{u \in H^2(\Omega)} F(u, h) = \min_{u \in H^2(\Omega)} F(u) \tag{31}$$

et, d'après la proposition 2.4, le dernier problème admet au moins une solution u_{opt}. Enfin, l'expression de h_{opt}, lorsque $u_{opt} \not\equiv 0$, est donnée par la proposition 2.1. ■

RÉFÉRENCES

[1] H. BREZIS, 1983, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris.

[2] E. ACERBI et G. BUTTAZZO, 1986, *Reinforcement problems in the calculus of variations.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 3, 273-284.

[3] E. ACERBI et G. BUTTAZZO, 1986, *Limit problems for plates surrounded by soft material.* Arch. Rational Mech. Anal. 92, 335-370.

[4] G. BUTTAZZO, 1988, *Thin insulating layers : the optimization point of view.* Proceedings of « Material Instabilities in Continum Mechanics and Related Mathematical Problems », Edinburgh 1985-1986, edited by J. M. Ball, Oxford University Press, Oxford, 11-19.

[5] G. DUVAUT et J. L. LIONS, 1972, *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, Paris, 1972.

[6] I. EKELAND et R. TEMAM, 1974, *Analyse convexe et problèmes variationnels.* Dunod, Paris.

[7] L. Landau et E. Lifchitz, 1967, *Théorie de l'élasticité.* Mir, Moscou.