M2AN - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

L. GABET

# Esquisse d'une théorie décompositionnelle

*M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 30, n° 7 (1996), p. 799-814

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1996__30_7_799_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 30, n° 7, 1996, p. 799 à 814)

# ESQUISSE D'UNE THÉORIE DÉCOMPOSITIONNELLE (*)

par L. GABET [1]

Communiqué par R. TEMAM

---

Résumé. — *La méthode développée par G. Adomian au début des années quatre-vingt permet de trouver une approximation aussi précise que l'on veut de la solution des équations du type* $u = G(u)$. *Elle permet d'approcher analytiquement les solutions de toutes sortes d'équations fonctionnelles même non linéaires comme, par exemple, de nombreuses équations aux dérivées partielles. Nous élaborons dans cet article les bases d'une théorie décompositionnelle qui constitue à la fois le fondement et une extension de la méthode d'Adomian. Nous généralisons aussi les résultats de convergence obtenus par Y. Cherruault. Nous retrouvons ensuite toutes les formules d'Adomian permettant de traiter le cas non linéaire, puis nous montrons comment les cas linéaires et mixtes peuvent être traités d'une manière rigoureuse. Enfin nous abordons le cas des équations du type* $H(u) = 0$.

*Mots clés :* Méthode d'Adomian ; méthode décompositionnelle ; équations avec opérateur ; solutions approchées ; équations aux dérivées partielles.

Abstract. — *The method developed by G. Adomian in beginning of the 80's supplies approximations, as close as needed, to the solution of equations that are written* $u = G(u)$. *It may be used to find analytical approximations of the solution of functional equations such as non linear partial differential equations. In this paper, we work out the basis of a decomposition theory which simultaneously bases and extends the Adomian's method. We also generalize the convergence results obtained by Y. Cherruault. Afterward, we find out all Adomian's formulae which allow to study the non linear case and we show how the linear and mixed cases can be rigorously studied. Finally, we take up the case of the equations that are written* $H(u) = 0$.

*Key words :* Adomian's method ; decomposition method ; operator equations ; approximate solutions ; partial differential equations.

## 1. INTRODUCTION

On cherche à résoudre, dans un espace de Banach $E$, une équation $u = G(u)$ où $G$ est un opérateur, linéaire ou non. L'espace de Banach

---

(*) Manuscrit reçu le 28 août 1992 et sous forme révisée le 6 janvier 1993.
[1] Université Paris 6, Laboratoire MEDIMAT, 15 rue de l'École de Médecine, 75270 Paris Cedex 06.
École Centrale de Paris, Laboratoire MAS, Grande Voie des Vignes, 92295 Châtenay-Malabry (France).

$E$ n'est pas nécessairement de dimension finie ; en particulier, il peut s'agir d'un espace fonctionnel. La méthode développée par G. Adomian au début des années quatre-vingt [1, 2, 3, 4] constitue une approche originale de ce problème. La preuve de son efficacité a déjà été faite sur de nombreux types d'équations [5, 6, 7, 8, 9]. Des travaux importants, concernant la convergence de cette méthode, ont été effectués par Y. Cherruault [10, 11].

Pour généraliser les résultats déjà obtenus et préciser leurs fondements, nous allons fixer les bases d'une théorie décompositionnelle. Celle-ci permettra de définir exactement cette méthode, de traiter rigoureusement les problèmes pratiques et de sortir des cercles vicieux apparaissant lors de l'étude des différents schémas. Elle permettra aussi de démontrer que sa convergence est assurée sous les mêmes conditions que celles de la méthode d'approximations successives mais qu'elle est une extension de cette dernière et qu'elle offre des perspectives pratiques incomparablement plus vastes. Nous montrerons enfin en quoi le schéma d'Adomian, qui est le schéma décompositionnel le plus pratique pour traiter les non-linéarités, peut être rattaché au développement en série de Taylor des fonctions analytiques. Pour conclure, nous traiterons le cas des opérateurs linéaires et mixtes et nous aborderons celui des équations de la forme $H(u) = 0$.

## 2. PRÉSENTATION DU PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Nous allons présenter formellement cette méthode telle qu'elle a été introduite par son auteur.

On cherche à résoudre une équation $u = L(u) + N(u) + g$, avec $L$ opérateur linéaire, $N$ opérateur non linéaire analytique et $g$ constante. Pour cela on cherche la solution sous la forme d'une série $\sum u_i$ dont les éléments sont calculés récursivement.

Pour pouvoir construire cette série, on suppose que $N(u)$ est la somme d'une série $\sum A_k$ où chaque $A_k$ est fonction de $u_0 \dots u_k$. Comme série $\sum A_k$, G. Adomian propose une série de polynômes spéciaux, appelés polynômes d'Adomian.

En effet, puisque chaque $A_k$ ne dépend que de $u_0 \dots u_k$, on peut définir la suite $(u_i)$ par :

$$\begin{cases} u_0 = g \\ u_1 = L(u_0) + A_0(u_0) \\ u_2 = L(u_1) + A_1(u_0, u_1) \\ \vdots \\ u_{n+1} = L(u_n) + A_n(u_0, \dots, u_n) \, . \end{cases}$$

En sommant les $n + 2$ égalités précédentes et faisant tendre $n$ vers l'infini, on trouve, si les séries convergent :

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = L\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right) + \sum_{i=0}^{\infty} A_i + g .$$

Comme $\sum_0^{\infty} A_k = N(u)$, on vérifie, en posant $u = \sum_0^{\infty} u_i$, que

$$u = L(u) + N(u) + g .$$

On a donc résolu l'équation !

Outre sa facilité de mise en œuvre, cette méthode offre, comme nous allons le montrer au cours des chapitres suivants, l'intérêt d'ouvrir des perspectives pratiques originales et puissantes.

On voit donc que le principe de base de la méthode est vraiment très simple. En revanche, l'idée de décomposer la non-linéarité en une série est originale.

Cette présentation qui est celle de G. Adomian, repose sur de nombreuses hypothèses non justifiées et passe sous silence certaines questions primordiales. D'où vient la série des $A_k$ ? Converge-t-elle toujours vers $N$ ? Peut-on en construire d'autres et à quoi ressembleraient-elles alors ? Sous quelles conditions la série des $u_i$ converge-t-elle ?... En un mot : dans quels cas cette méthode peut-elle être appliquée ?

Pour répondre à ces questions et pour éclaircir d'autres points, nous allons proposer une théorie qui va permettre d'expliquer et de justifier la méthode pratique.

## 3. CONCEPTS DE BASE DE LA THÉORIE DÉCOMPOSITIONNELLE

Nous allons présenter ici les principales notions qui nous serviront à définir précisément la méthode décompositionnelle et à résoudre rigoureusement toutes sortes d'équations. Leur ensemble constitue les fondements de la théorie décompositionnelle.

On se place dans un espace de Banach que l'on note $E$.

DÉFINITION 1 : *Série décompositionnelle :*

*On appelle série décompositionnelle toute série de fonctions $\sum C_k$ où chaque $C_k$ est une fonction de $k + 1$ variables de $E$ : $X_0, \ldots, X_k$ à valeurs dans $E$.*

DÉFINITION 2 : *Convergence faible des séries décompositionnelles :*

*Une série décompositionnelle est dite faiblement convergente si pour toute* *série convergente* $\sum u_n$ *d'éléments de E, la série* $\sum C_k(u_0, \ldots, u_k)$ *d'éléments de E converge.*

DÉFINITION 3 : *Somme d'une série décompositionnelle convergente :*

*La somme S d'une série décompositionnelle convergente est une application de l'ensemble des séries convergentes d'éléments de E dans E :*

$$S\left(\sum u_n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(u_0, \ldots, u_k).$$

DÉFINITION 4 : *Convergence forte des séries décompositionnelles :*

*On appelle série décompositionnelle fortement convergente toute série décompositionnelle faiblement convergente dont la valeur de la somme ne dépend que de la somme de la série considérée, c'est-à-dire telle que :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \Rightarrow S\left(\sum u_n\right) = S\left(\sum v_n\right).$$

THÉORÈME 1 : *L'ensemble des séries décompositionnelles fortement convergentes possède une structure d'espace vectoriel.*

PROPRIÉTÉ 1 : *Opérateur de E défini par une série décompositionnelle fortement convergente :*

*On peut définir, à partir de la somme S d'une série décompositionnelle fortement convergente, un opérateur* $S^*$ *dans E que l'on peut confondre avec S.*

*Justification :* Soit $S$ la somme d'une série décompositionnelle fortement convergente. Alors, pour tout élément $u$ de $E$, on peut définir $S^*(u)$ par $S\left(\sum u_i\right)$ avec $\sum u_i$ série quelconque d'éléments de $E$ ayant $u$ pour somme. Comme série convergente de ce type, on peut prendre celle se réduisant à un seul terme égal à $u$. On a donc $S^*(u) = S(u)$.

DÉFINITION 5 : *Schéma décompositionnel :*

*Soit une série décompositionnelle fortement convergente* $\sum C_k(X_0, \ldots, X_k)$. *On appelle schéma décompositionnel associé à* $\sum C_k$ *le schéma récurrent :* $u_0 = 0$, $u_{n+1} = C_n(u_0, \ldots, u_n)$ *qui permet de construire une série* $\sum u_n$ *d'éléments de E.*

DÉFINITION 6 : *Méthode décompositionnelle :*

*On appelle méthode décompositionnelle la méthode consistant à construire la solution d'une équation à l'aide d'un schéma décompositionnel quelconque.*

## 4. CONVERGENCE DES SCHÉMAS DÉCOMPOSITIONNELS

Étant donné une série décompositionnelle quelconque $\sum C_k(X_0, \ldots, X_k)$ fortement convergente vers $S$, nous allons montrer que la série $\sum u_n$ définie par le schéma décompositionnel associé à $\sum C_k$ c'est-à-dire par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = C_0(u_0) \\ u_2 = C_1(u_0, u_1) \\ \vdots \\ u_{n+1} = C_n(u_0, \ldots, u_n) \end{cases}$$

converge vers la solution de l'équation $u = S(u)$ (en confondant $S$ et $S^*$).

*Remarque :* Il faut absolument se garder d'affirmer dès maintenant que ce schéma converge. En effet, on ne sait pas que la série $\sum C_k(u_0, \ldots, u_k)$ d'éléments de $E$ converge. On sait seulement que la série décompositionnelle $\sum C_k$ converge fortement. On ne peut donc conclure que si $\sum u_n$ converge. Or justement, c'est ce qu'on veut trouver : attention aux cercles vicieux ! On peut simplement dire que si $\sum u_n$ converge, c'est vers $U$ tel que $U = S(U)$.

THÉORÈME 2 : *Convergence des schémas décompositionnels :*

*Le schéma décompositionnel, associé à une série décompositionnelle fortement convergente de somme S, converge vers U vérifiant $U = S(U)$, lorsque S est contractante.*

*Preuve :* Définissons $S_n$, application de l'ensemble des séries d'éléments de $E$ dans $E$, par :

$$S_n\left(\sum u_k\right) = \sum_{k=0}^{n} C_k(u_0, \ldots, u_k).$$

Remarquons que $S_n\left(\sum u_k\right)$ ne dépend que des $n+1$ premiers termes de la série puisque les $C_k$ ne dépendent que des $u_0, \ldots, u_k$ et pas des termes suivants.

On peut étendre la définition de $S_n$ aux sommes finies qui peuvent être considérées comme des séries dégénérées.

Posons $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a $S_n(U_n) = \sum_{k=0}^{n} C_k = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = U_{n+1}$.

Démontrons maintenant que la suite définie par $U_{n+1} = S_n(U_n)$ et $U_0 = 0$ converge vers le point fixe $U$ de l'équation $u = S(u)$. Pour l'instant, on peut seulement dire que si cette suite converge c'est vers ce $U$.

Pour cela, il suffit de remarquer qu'on a $S_{n-1}(U_{n-1}) = S_{n-1}(U_n)$ puisque les séries dégénérées $U_{n-1}$ et $U_n$ ne diffèrent que de leur terme d'indice $n$. On peut maintenant écrire :

$$\begin{aligned} U_n - U &= S_{n-1}(U_{n-1}) - S(U) \\ &= S_{n-1}(U_n) - S(U) \\ &= S_{n-1}(U_n) - S(U_n) + S(U_n) - S(U) . \end{aligned}$$

Grâce à la convergence forte de la série décompositionnelle (qu'on peut utiliser puisque $U_n$ est une série dégénérée donc convergente), on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : n \geqslant N \Rightarrow \quad \| S_{n-1}(U_n) - S(U_n) \| < \varepsilon .$$

Si on suppose maintenant que $S$ vérifie une condition de Lipschitz de rapport $k$ strictement inférieur à 1, alors on a :

$$\begin{aligned} \| U_n - U \| &\leqslant \varepsilon + k \| U_n - U \| \\ \| U_n - U \| &\leqslant \frac{\varepsilon}{1-k} . \end{aligned}$$

Donc la suite $(U_n)$ converge vers $U$ et la série $\sum u_n$ converge et a pour somme $U$.

*Remarque :* Il est dangereux d'utiliser l'hypothèse de [10], $\lim \| S_n - S \| = 0$, car $S_n - S = \sum_{n+1}^{\infty} C_k$ ne tend vers 0 que si $\sum C_k$ converge, or c'est ce qu'on veut démontrer. Ou alors il faut connaître l'expression générale de $\sum_0^n C_k$ ce qui n'est possible que pour quelques cas particuliers. L'hypothèse $\sum C_k$ série décompositionnelle fortement convergente est beaucoup plus aisément vérifiable et ne nécessite aucun calcul.

*Autre remarque :* On vient de voir, dans les paragraphes précédents, que la méthode décompositionnelle est une extension de la méthode d'approximations successives. Elle s'y réduit quand $S_n = S$, c'est-à-dire quand la série décompositionnelle est celle de base ($C_k = B_k$). Or on a déjà vu que la série décompositionnelle de base associée à l'opérateur $G$ converge vers $G$. Donc, si $G$ est contractante, le schéma décompositionnel de base converge. On retrouve un résultat déjà démontré d'une manière directe.

Notons au passage que :

PROPRIÉTÉ 2 : *Les termes d'une série décompositionnelle convergente vérifient toujours les égalités de Cherruault :*

$$u_{n+1} = S_n(U_n) - S_{n-1}(U_{n-1}) .$$

*Preuve :* On a en effet :

$$u_{n+1} = U_{n+1} - U_n = S_n(U_n) - S_{n-1}(U_{n-1}) .$$

Ces relations constituent une extension de la définition des $B_k$ (les $S_n$ remplacent $S$).

*Conclusion :* D'après ce qui précède, pour résoudre une équation $u = G(u)$ avec $G$ donné, il suffit de trouver une série décompositionnelle fortement convergente dont là somme est $G$. La solution $U$ est alors obtenue par application du schéma décompositionnel associé à cette série.

## 5. SCHÉMA DÉCOMPOSITIONNEL DE BASE

Pour résoudre l'équation $u = G(u)$, on peut appliquer la méthode classique d'approximations successives. Elle consiste à effectuer l'itération $U_{n+1} = G(U_n)$ à partir d'un $U_0$ quelconque. Sa convergence vers $U$, solution de $u = G(u)$, est assurée lorsque $G$ vérifie les hypothèses d'un théorème de point fixe.

On va maintenant exprimer cette méthode sous une forme équivalente faisant appel aux séries décompositionnelles.

DÉFINITION 7 : *Série décompositionnelle de base :*

*On appelle série décompositionnelle de base associée à l'opérateur $G$, la série $\sum B_n$ dont les termes sont définis par :*

$$B_0 = G(X_0) \quad B_n = G\left(\sum_{i=0}^{n} X_i\right) - G\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\right) .$$

THÉORÈME 3 : *Convergence de la série décompositionnelle de base :*

*La série décompositionnelle de base $\sum B_k$ associée à l'opérateur continu $G$ est une série décompositionnelle fortement convergente vers $G$.*

*Preuve :* Il est facile de vérifier que si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum B_n(u_0, \ldots, u_n)$ converge vers $G\left(\sum_0^{\infty} u_n\right)$ qui ne dépend que de la somme de la série des $u_n$.

Posons maintenant $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On vérifie aisément que les $U_n$ sont tels que $U_{n+1} = G(U_n)$ avec $U_0 = 0$ et donc que :

THÉORÈME 4 : *Équivalence décompositionnelle de base :*

*Le schéma décompositionnel de base associé à l'opérateur G est équivalent au schéma d'approximations successives :* $U_0 = 0$, $U_{n+1} = G(U_n)$.

Si $G$ vérifie les hypothèses d'un théorème de point fixe, la suite $(U_n)$ converge vers $U$, solution de notre équation, et donc la série $\sum u_n$ converge et a pour somme ce même $U$. On vient donc de démontrer que :

THÉORÈME 5 : *Convergence du schéma décompositionnel de base :*

*Le schéma décompositionnel de base associé à l'opérateur G converge si G vérifie les hypothèses du théorème de point fixe de Banach.*

Il faut noter que, si $G$ est non linéaire, le schéma décompositionnel de base ne présente aucun intérêt pratique puisqu'il nécessite alors deux fois plus de calculs que la méthode d'approximations successives. En revanche, il permet de traiter rigoureusement le cas linéaire de la méthode décompositionnelle.

## 6. SCHÉMA DÉCOMPOSITIONNEL D'ADOMIAN

Considérons à nouveau l'équation $u = G(u)$ et supposons que l'opérateur $G$ soit analytique.

DÉFINITION 8 : *Polynômes d'Adomian :*

*Étant donné un opérateur G analytique et une série convergente* $\sum u_n$ *d'éléments de E, on définit les polynômes d'Adomian par :*

$$A_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k} G\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n\right)\right)_{\lambda=0}.$$

*Justification :* On note $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et on définit $u^+(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n$. Cette série entière converge pour $\lambda = 1$, son rayon de convergence $\rho$ est donc supérieur ou égal à 1. Or la somme d'une série entière de rayon de convergence $\rho$ est analytique sur $DO(O, \rho)$, disque ouvert de centre $O$ et de rayon $\rho$, donc $u^+$ est analytique sur $DO(O, \rho)$. Maintenant, comme $G$ est aussi analytique, par composition [12], $G \circ u^+$ est analytique sur

$DO(O, \rho)$ c'est-à-dire qu'il existe des $A_k$ tels que $G \circ u^+(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k$ qui vérifient $A_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k} G\left(\sum_0^{\infty} u_n \lambda^n\right)\right)_{\lambda=0}$.

*Remarque :* On n'a pas besoin de supposer, comme dans [11], que le rayon de convergence de $u^+$ est strictement supérieur à 1. Si $\rho = 1$, comme $u^+(1)$ converge et a pour somme $U$, on peut utiliser le théorème d'Abel [13] qui donne $\lim_{\lambda \to 1^-} u^+(\lambda) = U$ (avec ici $\lambda$ réel). De même on a :

$\lim_{\lambda \to 1^-} G \circ u^+(\lambda) = G(U)$.

PROPRIÉTÉ 3 : *Les polynômes d'Adomian associés à l'opérateur G définissent une série décompositionnelle fortement convergente de somme G.*

*Preuve :* Les $A_k$ ne dépendent que de $u_0 \ldots u_k$. Pour le vérifier, il suffit d'exprimer les $A_k$ en fonction des coefficients des deux séries qu'on compose grâce au théorème classique de composition des séries entières. La formule pratique sera exposée et démontrée plus loin. La série des $A_k$ est donc décompositionnelle. Maintenant si on considère une série convergente $\sum u_n$, on a démontré avec ce qui précède que $\sum A_k(u_0, \ldots, u_k)$ converge vers $G \circ u^+(1) = G(U)$, c'est-à-dire que la série décompositionnelle des $A_k$ converge faiblement. Si on prend deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent vers la même somme $U$, alors, si on note $A_k^u$ et $A_k^v$ leurs polynômes d'Adomian respectifs, on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^u = G \circ u^+(\lambda = 1) = G(U) = G \circ v^+(\lambda = 1) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^v .$$

La somme de la série décompositionnelle d'Adomian ne dépend que de la somme de la série convergente considérée : la convergence est forte.

THÉORÈME 6 : *Convergence du schéma d'Adomian :*

*Le schéma d'Adomian converge vers une solution de l'équation $u = G(u)$ lorsque $G$ est un opérateur contractant.*

*Preuve :* C'est une conséquence de la convergence forte de la série décompositionnelle des $A_k$ et du théorème de convergence des schémas décompositionnels.

*Remarque :* D'après ce qui précède $u^+(\lambda)$ est solution de notre équation si l'égalité $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k$ est vérifiée. Or pour avoir $u^+(1) = U$ on peut écrire :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = A_0 \\ \vdots \\ u_{n+1} = A_n . \end{cases}$$

Mais on ne peut pas affirmer, avec ces seules hypothèses, que la série $\sum u_n$ ainsi définie converge (attention avec [8]). Il ne faut surtout pas déduire sa convergence de celle de $\sum A_k$ puisque celle-ci n'a été démontrée que dans le cas où $\sum u_n$ converge : attention au cercle vicieux ! Finalement on doit avoir recours à la théorie décompositionnelle.

### 7. CALCUL PRATIQUE DES POLYNÔMES D'ADOMIAN

L'expression $A_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k} G\left(\sum_0^{\infty} u_n \lambda^n\right)\right)_{\lambda=0}$ des polynômes d'Adomian n'est pas du tout pratique pour le calcul. En plus, il n'est pas très naturel d'introduire un paramètre artificiel. Pour retrouver les expressions pratiques d'Adomian on va poser : $v = u^+$ et $F = G \circ v$. On constate alors que les $A_k$ sont simplement donnés par les formules de Mc Laurin :

$$A_k = \frac{F^{(k)}(0)}{k!} .$$

D'où :

PROPRIÉTÉ 4 : *La série entière d'Adomian $\sum A_k \lambda^k$ est le développement en série de Taylor de la fonction $F = G \circ u^+$.*

*Remarque :* Cette série de Taylor ne permet pas de conclure quant à la convergence de la méthode puisque $F$ n'est définie que si $\sum u_n$ converge.

Pour le calcul des $A_k$ en fonction des $u_i$, on peut appliquer le théorème de dérivation des fonctions composées.

$$\begin{cases} A_0 = F(0) = G(v(0)) = G(u_0) \\ A_1 = \frac{F'(0)}{1!} = G'(v(0))\, v'(0) = G'(u_0)\, u_1 \\ A_2 = \frac{F''(0)}{2!} = \frac{1}{2}\left(G''(v(0))\, v'(0)^2 + G'(v(0))\, v''(0)\right) \\ \quad = G''(u_0)\frac{u_1^2}{2} + G'(u_0)\, u_2 \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Finalement on obtient :

$$A_0 = G(u_0)$$
$$\forall k \geqslant 1 \quad A_k = \sum_{n=1}^{k} P_k^n(u_1, \ldots, u_k)\, G^{(n)}(u_0)$$

les $P_k^n$ étant des polynômes de degré $n$ de $k$ variables (d'où le nom de polynômes d'Adomian pour les $A_k$). On peut démontrer que les $P_k^n$ sont donnés par :

$$P_k^n(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{i_1 + \cdots + i_n = k} \left( \frac{\prod_{j=1}^{n} i_{i_j}}{\prod_{l=1}^{p} (n_l)!} \right)$$

$p$ étant le nombre de $i_l$ distincts et $n_l$ leur fréquence.

On retrouve donc explicitement que $A_k$ dépend seulement de $u_0 \ldots u_k$ (et de $G$ bien sûr).

## 8. OPÉRATEURS LINÉAIRES

Si on a un opérateur $G = L$ linéaire et analytique, on peut appliquer le schéma d'Adomian. On a :

$$A_k = \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k}{d\lambda^k} L \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n \right) \right)_{\lambda=0} = \frac{1}{k!} L \left( \frac{d^k}{d\lambda^k} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n \right)_{\lambda=0} = L(u_k)\,.$$

Si l'opérateur linéaire $L$ n'est pas analytique (opérateur d'intégration, de dérivation etc...) on ne peut pas appliquer le schéma d'Adomian. En revanche, on peut appliquer le schéma de base :

$$B_k = L\left( \sum_{n=0}^{k} u_n \right) - L\left( \sum_{n=0}^{k-1} u_n \right) = L(u_k)\,.$$

Dans tous les cas, pour un opérateur linéaire, on a :

$$C_k = L(u_k)\,.$$

## 9. OPÉRATEURS MIXTES

Il arrive souvent qu'on ait à résoudre une équation $u = G(u)$ où $G$ est un opérateur qui peut s'écrire comme somme d'un opérateur linéaire

$L$ et d'un opérateur analytique $N$. Si $N$ est aussi linéaire, on peut résoudre l'équation avec le schéma décompositionnel de base. Si $L$ est aussi analytique, on peut utiliser le schéma décompositionnel d'Adomian. En dehors de ces cas là, il est naturel de décomposer $L(u)$ en série de base $\sum B_k^L$ et $N(u)$ en série d'Adomian $\sum A_k^N$ puis d'appliquer le schéma récurrent :

$$u_0 = 0 \quad u_{n+1} = B_n^L(u_0, \dots, u_n) + A_n^N(u_0, \dots, u_n) .$$

Malheureusement on n'a pas démontré la convergence de ce schéma. En effet, on n'a la convergence respective de $\sum B_n^L(u_0, \dots, u_n)$ et $\sum A_n^N(u_0, \dots, u_n)$ vers $L(u)$ et $N(u)$ que si les $u_i$ sont déterminés dans le premier cas par le schéma décompositionnel de base et dans le second par le schéma décompositionnel d'Adomian.

Pour démontrer la convergence de ce schéma mixte, il faut avoir recours à la théorie décompositionnelle et en particulier à la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des séries décompositionnelles fortement convergentes. En effet, si on pose $C_k^G = B_k^L + A_k^N$, alors on peut affirmer que $\sum C_k^G$ est une série décompositionnelle fortement convergente et donc que le schéma mixte converge puisque c'est en fait le schéma décompositionnel associé $\sum C_k^G$.

Ce résultat peut bien sûr se généraliser au cas où l'opérateur peut s'écrire comme somme finie d'opérateurs linéaires ou analytiques, éventuellement non linéaires :

THÉORÈME 7 : *Sommation des opérateurs :*

*Pour résoudre une équation $u = G(u)$ où l'opérateur $G$ peut s'écrire $G = \sum_{i=0}^{p} G_i$, on peut appliquer le schéma décompositionnel :*

$$u_0 = 0 \quad u_{n+1} = \sum_{i=0}^{p} C_n^i(u_0, \dots, u_n)$$

*où les $\sum C_k^i$ sont des séries décompositionnelles fortement convergentes quelconques associées aux opérateurs $G_i$. La convergence ne dépend que des propriétés de $G$.*

## 1. COMPARAISON DE LA MÉTHODE DÉCOMPOSITIONNELLE ET DE LA MÉTHODE D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

On a vu que la méthode décompositionnelle peut être considérée comme une extension de la méthode d'approximations successives et qu'elle s'y réduit quand le schéma décompositionnel est celui de base. Un de ses intérêts est son efficacité pratique. La méthode décompositionnelle est, pour la plupart des opérateurs, beaucoup plus rapide que la méthode d'approximations successives.

Dans le cas linéaire, la méthode décompositionnelle conduit à calculer, à chaque étape, $L(u_n)$ au lieu de $L(U_n)$ pour la méthode d'approximations successives : le gain est important.

Dans le cas non linéaire, la méthode d'approximations successives conduit à utiliser les puissances de l'opérateur $G$. L'expression analytique qu'on peut espérer obtenir n'a pratiquement aucune chance d'être facilement manipulable. Il suffit pour s'en rendre compte, d'essayer d'exprimer la puissance cinquième de l'opérateur $G$ défini par $G(u) = \ln(u)\cos(u)$. En revanche, le schéma d'Adomian ne fait intervenir que des polynômes simples, fonctions des $u_i$, et les dérivées successives de $G$ qui sont plus faciles à calculer que les compositions successives.

## 11. ÉQUATIONS SOUS FORME NON RÉSOLUE

L'équation à une inconnue la plus générale s'écrit $H(u) = 0$, avec $H$ opérateur quelconque. Si on a une équation à plusieurs inconnues, on se ramène au cas précédent en se plaçant dans un espace produit.

Pour résoudre une équation par la méthode décompositionnelle, il faut qu'elle soit du type $u = G(u)$. Le problème est donc le passage d'une forme à l'autre.

Si $H$ peut s'écrire comme somme d'un opérateur linéaire inversible $L$ et d'un opérateur $J$ alors $H(u) = 0 \Leftrightarrow u = -L^{-1}J(u)$. Si on pose $G = -L^{-1}J$ on peut essayer d'appliquer la méthode décompositionnelle.

Si l'opérateur $G$ ainsi calculé ne vérifie pas les hypothèses d'un théorème de point fixe, la méthode ne converge pas nécessairement. En revanche, si on introduit un opérateur linéaire $K$ tel que $L + K$ soit inversible, on a :

$$H(u) = 0 \Leftrightarrow L(u) = -J(u) \Leftrightarrow L(u) + K(u) = K(u) - J(u) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u = (L + K)^{-1}(K - J)(u).$$

Si l'opérateur $G = (L + K)^{-1}(K - J)$ vérifie les hypothèses d'un théorème de point fixe, la méthode décompositionnelle va converger. Le problème est de trouver un opérateur linéaire $K$ tel que $L + K$ soit inversible et $(L + K)^{-1}(K - J)$ soit une contraction.

## 12. ILLUSTRATION

Intéressons-nous à l'équation des parois élastiques :

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = C^2 \frac{\partial^2 P'^3}{\partial x^2}.$$

Cette équation non linéaire décrit un écoulement dans un vaisseau à paroi élastique.

On suppose que la longueur du vaisseau est $L = 1$ (après adimensionnement) et que $x$ est la distance du point courant à l'entrée du vaisseau. On note $P$ la pression dans le vaisseau et $P' = 2\,P/\alpha + 1$ avec $\alpha$ constante.

On peut prendre des conditions initiales correspondant à $P = 0$, c'est-à-dire $P' = 1$.

On va appliquer à l'extrémité $x = 1$ un échelon de la forme $P' = 1 + \frac{1}{4}\frac{t}{t+1}$. En $x = 0$ on va maintenir $P'$ à 1.

Dans la suite, on notera $u = P'$ et on prendra $C^2 = 1$.

On a donc à résoudre :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^3}{\partial x^2}$$

avec :

$$u(t = 0) = 1 \quad u(x = 0) = 1 \quad u(x = 1) = 1 + \frac{1}{4}\frac{t}{1+t}.$$

La forme canonique utile est :

$$u = L_x^{-2}\left(\frac{1}{3\,u^2} L_t^1\, u - \frac{2}{u}\,(L_x^1\, u)^2\right).$$

Pour simplifier les calculs, on va effectuer un changement de variable en posant :

$$r = \frac{t}{1+t}.$$

Finalement, on cherche à résoudre :

$$u = L_x^{-2}\left(\frac{1}{3\,u^2}(1-r)^2 L_r^1\, u - \frac{2}{u}\,(L_x^1\, u)^2\right)$$

avec :

$$u(r = 0) = 1 \quad u(x = 0) = 1 \quad u(x = 1) = 1 + \frac{r}{4}.$$

Pour résoudre cette équation, on va appliquer le schéma récursif de la méthode décompositionnelle :

$$u_0 = L_x^{-2}\, 0$$

$$u_{n+1} = L_x^{-2}\left(\frac{(1-r)^2}{3}\bar{A}_n(u_0, \ldots, u_n, L_r^1\, u_0, \ldots, L_r^1\, u_1) - \right.$$
$$\left. - 2\,\bar{B}_n(u_0, \ldots, u_n, L_x^2\, u_0, \ldots, L_x^2\, u_n)\right).$$

Les $\bar{A}_n$ et $\bar{B}_n$ sont les polynômes d'Adomian respectivement associés aux non-linéarités $\frac{v}{u^2} u$ et $\frac{v^2}{u}$. Ces non-linéarités sont des combinaisons d'opérateurs non linéaires de deux variables d'où le recours aux polynômes d'Adomian $\bar{A}_n$ et $\bar{B}_n$.

La figure 1 illustre la courbe de concentration obtenue avec une précision de $10^{-4}$.

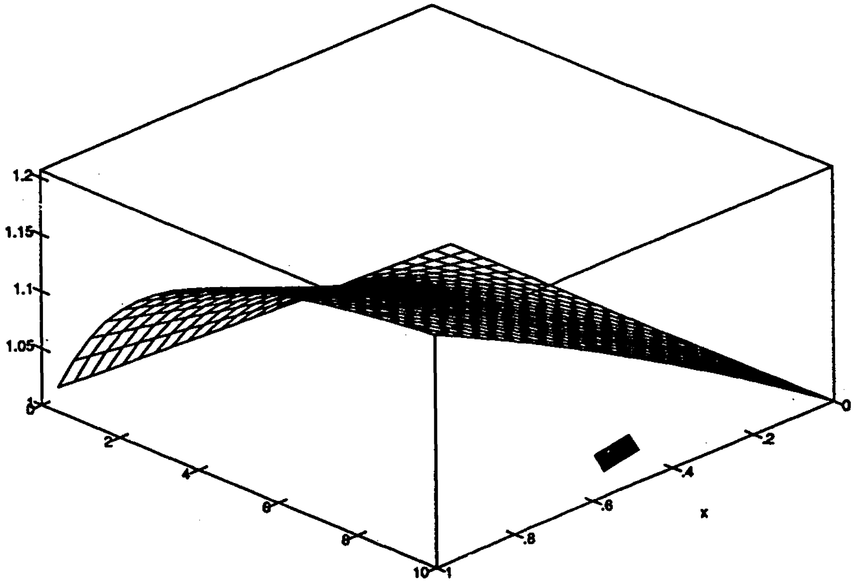


**Figure 1. — Approximation de la solution de $L_t^1 u = L_x^2(u^3)$.**

## 13. CONCLUSION

Grâce à notre concept de série décompositionnelle fortement convergente, nous avons élaboré une théorie qui permet à la fois de fonder et de généraliser la méthode d'Adomian. On peut ainsi obtenir une approximation, aussi précise que l'on veut, de la solution des équations de la forme $u = G(u)$, à condition que l'opérateur $G$ soit contractant.

Nous avons construit un schéma décompositionnel de base qui permet de traiter le cas linéaire pur. Nous avons démontré que le schéma d'Adomian est un schéma décompositionnel qui permet de traiter le cas analytique pur, en particulier non linéaire. Nous avons retrouvé la formule de base et la formule pratique des polynômes d'Adomian et nous avons montré en quoi leur définition est une généralisation de la formule de Taylor. Nous avons aussi indiqué comment le cas mixte peut être résolu grâce à la structure d'espace vectoriel des séries décompositionnelles fortement convergentes. Enfin, nous avons suggéré une manière de traiter les équations du type $H(u) = 0$.

Ce travail ouvre la voie à l'*approximation analytique globale* d'équations fonctionnelles complexes comme les équations aux dérivées partielles non linéaires. Cette approche est rendue efficace grâce au développement actuel du *calcul formel*. Des résultats récents illustrent l'étude théorique développée ici en montrant que l'on peut obtenir ainsi des approximations très précises de la solution d'équations concrètes.

## REFERENCES


[1] G. ADOMIAN, *Stochastic Systems,* Academic Press, 1983.

[2] G. ADOMIAN, *Nonlinear Stochastic Operator Equations,* Academic Press, 1986.

[3] R. E. BELLMAN and G. ADOMIAN, *Partial Differential Equations — New Methods for their Treatment and Application,* Reidel, 1986.

[4] G. ADOMIAN, *Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to Physics,* Kluwer, 1989.

[5] G. ADOMIAN and R. RACH, Nonlinear stochastic differential-delay equations, *J. Math. Anal. and Applic.,* 1983 91(1).

[6] G. ADOMIAN and R. RACH, Polynomial nonlinearities in differential equations, *J. Math. Anal. and Applic.,* 1985 109(1).

[7] G. ADOMIAN and R. RACHE, Algebraic computation and the decomposition method, *Kybernetes,* 1986 15(1).

[8] G. ADOMIAN, A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations, *Mathl. Comput. Modelling,* 1990, 13(7), pp. 17-43.

[9] G. ADOMIAN, An analytical solution of the stochastic Navier-Stokes system, *Foundations of Physics,* 1991, 21(7), pp. 831-843.

[10] Y. CHERRUAULT, Convergence of Adomian's method, *Kybernetes,* 1989, 18(2), pp 31-38.

[11] Y. CHERRUAULT, G. SACCOMANDI, B. SOME, New results for convergence of Adomian's method applied to integral equations, *Math. Comput. Modelling,* 1992, 16(2), pp. 83-93.

[12] H. CARTAN, *Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques,* Hermann, 1985.

[13] E. RAMIS, C. DESCHAMPS, J. ODOUX, *Cours de Mathématiques Spéciales (tome 4),* Masson, 1977.