M2AN - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

ASSIA BENABDALLAH
MICHEL LENCZNER

Estimation du taux de décroissance pour la solution de problèmes de stabilisation, application à la stabilisation de l'équation des ondes

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 30, n[o] 5 (1996), p. 607-635

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1996__30_5_607_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 30, n° 5, 1996, p. 607 à 635)

ESTIMATION DU TAUX DE DÉCROISSANCE POUR LA SOLUTION DE PROBLÈMES DE STABILISATION, APPLICATION À LA STABILISATION DE L'ÉQUATION DES ONDES (*)

par Assia BENABDALLAH [1] et Michel LENCZNER [1]

Abstract. — *This paper is devoted to the estimate of the exponential decay rate of some evolution problems. Three different methods are proposed. Application to optimal control of the wave equation with internal or boundary control are given. In addition, estimates of the norm of the Riccati operator and of its inverse are given. It is shown that they are linked to the estimate of the exponential decay rate.*

Résumé. — *On considère le problème de la stabilisation de systèmes linéaires distribués. Pour des systèmes dont la solution est exponentiellement décroissante, une estimation du taux de décroissance est obtenue. On distinguera trois classes d'hypothèses formulées sur des équations abstraites et conduisant à l'estimation du taux de décroissance de la solution. Des applications sont faites dans le cas de l'équation des ondes avec différents types de contrôles : contrôle optimal interne, contrôle optimal frontière, contrôle H_∞ et contrôle en vitesse.*

1. INTRODUCTION

Pour des systèmes linéaires de dimension finie, le taux de décroissance de la solution d'un problème de stabilisation est l'abscisse spectrale. Pour les systèmes linéaires de dimension infinie, il n'y a pas de résultat analogue qui soit général. Des travaux assez récents [1], [4], [7] traitent de l'estimation de ce taux de décroissance pour la stabilisation de l'équation des ondes par un contrôle en vitesse. En particulier, le résultat [7] en donne une caractérisation optimale. Cette dernière est basée sur l'analyse microlocale, bien adaptée pour la compréhension des phénomènes de haute fréquence. Le résultat indique que le taux de décroissance est fonction de l'abscisse spectrale de l'équation stabilisée et du temps moyen que passeraient des rayons optiques dans le domaine de contrôle s'ils étaient issus de n'importe quel point du domaine et se reflétaient sur ses bords selon les lois de l'optique géométrique.

L'estimation du taux de décroissance pour des systèmes linéaires de dimension infinie stabilisés par un contrôle général (par exemple par un contrôle

(*) Manuscrit reçu le 27 mars 1995 et sous forme révisée le 13 décembre 1995.
([1]) Université de Franche Comté, Laboratoire de Calcul Scientifique, 16, Route de Gray, 25000 Besançon, France.

optimal) ne semble pas avoir été abordée L'objet de notre travail est d'effectuer cette estimation pour certaines classes de systèmes incluant en particulier l'équation des ondes avec contrôle interne ou frontière Notre étude est orientée vers la stabilisation par des contrôles optimaux, cependant d'autres types de stabilisation peuvent entrer dans le cadre de cette étude A la fin de ce travail, le cas de la stabilisation par contrôle en vitesse est envisagée

Décrivons les trois cadres abstraits étudiés dans ce travail Le premier n'est pas spécifique de la stabilisation par un contrôle optimal Il suppose que l'opérateur qui envoit les conditions initiales du système stabilisé sur la solution est un isomorphisme sur son image Le taux de décroissance de la solution est une fonction de la norme de cet opérateur Il est montré que l'équation des ondes avec contrôle interne (optimal ou en vitesse), ainsi que sa stabilisation par un contrôle frontière en vitesse relèvent de ce cadre

Les deux autres cadres abstraits sont spécifiques au contrôle optimal Ils sont basés sur des hypothèses *a priori* sur la fonctionnelle et la solution du problème de contrôle optimal Pour simplifier, on suppose toujours que l'opérateur de Riccati est un isomorphisme Dans les deux cas, le taux de décroissance est estimé à l'aide des normes de l'opérateur de Riccati et de son inverse Le contrôle optimal de l'équation des ondes par contrôle interne ou frontière avec observation complète rentrent dans le deuxième cadre abstrait Le troisième cadre abstrait relève du cadre de [8], il suppose la coercivité de la fonctionnelle Les exemples d'applications de ce cadre sont assez triviaux et ne sont pas étudiés ici

2. LE CADRE ABSTRAIT

Dans ce paragraphe on utilise le cadre abstrait utilisé par [3] Soit U et V deux espaces de Hilbert séparables munis des produits scalaires $(\cdot,\cdot)_U$, $(\cdot,\cdot)_V$ et des normes $|\cdot|_U$ et $|\cdot|_V$ Soit A le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu sur U de domaine $D(A)$ Soit B, un opérateur défini sur V et à valeurs dans U On considère le problème de contrôle optimal

$$\min_{v \in L^2(\mathbb{R}^+ V)} J(v) \tag{1}$$

associé

— à l'équation d'état

$$\partial_t u = Au + Bv \quad \text{avec} \quad u(0) = u_0 \tag{2}$$

où $u_0 \in U$ et $v \in L^2(\mathbb{R}^+, V)$

— à l'observation $y = Ru$,

— et à la fonctionnelle définie sur l'ensemble des solutions $u \in U$ de l'équation d'état (1) associée au contrôle v :

$$J(v) = \int_{\mathbb{R}^+} j(v)(t)\, dt \quad \text{avec} \quad j(v)(t) = |Ru|_U^2(t) + (Nv, v)_V(t)$$

où R et N sont des opérateurs positifs autoadjoints définis respectivement de U dans U et de V dans V, et N est coercif.

On note P, lorsqu'il existe, l'opérateur de Riccati associé au problème de contrôle optimal (1), (2). Il est solution de l'équation algébrique de Riccati

$$2\langle PAy, y\rangle - |\sqrt{N^{-1}}\, B^*Py|^2 = -\,|Ry|^2 \quad \text{pour tout } y \in D(A)\,. \tag{3}$$

Dans toute la suite, nous supposons que P existe, c'est-à-dire que le problème de minimisation admet une solution unique. Différentes approches permettent de définir P et de prouver son existence et son unicité *cf.* [3] et [8], ainsi que les références de [8]. Dans tous les cas envisagés ici, P est supposé être un isomorphisme.

On considère successivement une méthode d'estimation du taux de décroissance de l'énergie à l'aide d'une méthode générale. L'estimation du taux de décroissance obtenue fait intervenir les normes de l'opérateur de Riccati, de son inverse et celle du semi groupe associé au problème stabilisé. Ensuite deux méthodes d'usage plus restreint sont introduites. Leur intérêt est qu'elles n'utilisent pas la norme du semi-groupe. Ces deux méthodes sont relatives aux hypothèses suivantes.

— La première concerne le cas où il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour toute solution de (1), (2) :

$$j(v) \geqslant \alpha |u|_U^2\,. \tag{4}$$

Dans ce cas la fonctionnelle sera dite coercive.

— La deuxième concerne le cas où il existe $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tels que la solution du problème de contrôle optimal (1), (2) vérifie :

$$\int_s^\infty j(v)(t)\, dt \geqslant \alpha_1 \int_s^\infty |u|_U^2(t)\, dt - \alpha_2 |u|_U^2(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \tag{4'}$$

uniformément par rapport aux données initiales.

Ces trois méthodes font l'objet des trois premiers théorèmes. Le reste de ce travail consiste en des exemples d'illustration de ces théorèmes.

3. TROIS MÉTHODES POUR L'ESTIMATION DU TAUX DE DÉCROISSANCE

Dans ce paragraphe, on introduit trois méthodes différentes pour l'estimation du taux de décroissance de la solution de problèmes de contrôle optimal. L'ordre de présentation va de la méthode la plus générale à la moins générale.

3.1. Méthode générale d'estimation du taux de décroissance

La méthode présentée dans ce paragraphe s'applique aux problèmes de stabilisation généraux. Elle n'est pas spécifique à la stabilisation par le contrôle optimal.

Considérons le problème d'évolution :

$$\partial_t u + \tilde{A} u = 0 \quad \text{avec} \quad u(0) = u_0 \in U .$$

On suppose que $\tilde{A}$ est générateur infinitésimal d'un semi groupe $(S(t))$ fortement continu de domaine $D(\tilde{A})$. Considérons l'opérateur

$$\mathscr{A} : \begin{array}{ll} U & \to L^2(\mathbb{R}^+, U) \\ u & \to S(t)\, u . \end{array}$$

On note :

$$\|\mathscr{A}\|^2 = \sup_{u \in U} \frac{\int_{\mathbb{R}^+} (S(t)\, u, S(t)\, u)_U \, dt}{|u|_U^2} .$$

On note $u(t) = S(t)\, u_0$ la solution semi groupe de condition initiale u_0.

THÉORÈME 1 : *Si l'opérateur $\mathscr{A}$ est un isomorphisme de U dans son image alors pour toute donnée initiale u_0, $u(t)$ est exponentiellement décroissante et plus précisément :*

$$|u(t)|_U^2 \leq \|\mathscr{A}\|^2 \, \|\mathscr{A}^{-1}\|^2 \, |u_0|_U^2 \, e^{-\frac{t}{\|\mathscr{A}\|^2}} .$$

Preuve : La décroissance exponentielle de la solution résulte du théorème de Datko [2]. Du fait que $\mathscr{A}$ est un isomorphisme,

$$\|\mathscr{A}^{-1}\|^{-2}\,\|u(0)\|_U^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^+} \|S(t)\,u\|_U^2\,dt \leqslant \|\mathscr{A}\|^2\,\|u(0)\|_U^2 .$$

Du fait de l'invariance des propriétés de $\mathscr{A}$ par translation par rapport à t cela est équivalent à :

$$\|\mathscr{A}^{-1}\|^{-2}\,\|u(s)\|_U^2 \leqslant \int_s^{+\infty} \|S(t)\,u\|_U^2\,dt \leqslant \|\mathscr{A}\|^2\,\|u(s)\|_U^2 .$$

On applique alors le lemme suivant :

LEMME 2 : *Si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^+)$ est positive et telle qu'il existe deux constantes α_1 et α_2 telles que*

$$\alpha_1\,\phi(s) \leqslant \int_s^{+\infty} \phi(t)\,dt \leqslant \alpha_2\,\phi(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

alors :

$$\phi(t) \leqslant \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,\phi(0)\,e^{-\frac{t}{\alpha_2}} \quad \forall t \geqslant 0 .$$

Preuve du lemme 2 : Du fait de la deuxième inégalité :

$$\int_t^{\infty} \phi(s)\,ds \leqslant \alpha_2\,\phi(0)\,e^{-\frac{t}{\alpha_2}} \quad \forall t \geqslant 0 .$$

Le lemme résulte ensuite de la première inégalité. □

Le lemme 2 appliqué avec $\phi = \|S(t)\,u_0\|_U^2$ implique l'estimation du (i). Cela achève la preuve du théorème 1. □

Remarque : Si $\tilde{A}$ admet une base de vecteurs propres orthonormés, alors l'abscisse spectrale de $\tilde{A}$ est égale à $\dfrac{1}{2\|\mathscr{A}\|^2}$.

3.2. Cas de l'hypothèse (4')

Dans ce paragraphe on donne une estimation du taux de décroissance de la solution de (1), (2) lorsque l'hypothèse (4') est vérifiée.

On considère le cadre général (1), (2) avec l'hypothèse (4'). L'opérateur de Riccati P est supposé être défini dans U et à valeurs dans un espace de Banach X. On suppose que $X = U'$ ou bien $U = X'$ car c'est le cas dans les applications visées, mais ce n'est pas indispensable.

THÉORÈME 3 : *Si l'opérateur de Riccati est un isomorphisme de U dans X et si l'hypothèse (4') est vérifiée alors la solution de (1), (2) vérifie la majoration :*

$$|u|_U^2(t) \leq \|P^{-1}\| \; \|P\| \; e|u_0|_U^2 \, e^{-\frac{\alpha_1 t}{\|P\|(\alpha_2\|P^{-1}\|+1)}} \quad \forall t \geq 0 .$$

Preuve : L'application de P à gauche de l'équation (1) montre que pour la solution (u, v) du problème de contrôle optimal (1), (2) :

$$\partial_t \langle Pu, u\rangle_{X,U}(t) = -j(v)(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{5}$$

donc $\langle Pu, u\rangle_{X,U}$ est une fonction décroissante de t. L'hypothèse (4') implique :

$$\int_s^{+\infty} \alpha_1 |u|^2(t)\, dt \leq \langle Pu, u\rangle_{X,U}(s) + \alpha_2 |u|_U^2(s) \quad \forall s \geq 0$$

or

$$\langle Pu, u\rangle_{X,U}(t) \leq \|P\| \; |u|_U^2(t) \quad \forall t \geq 0$$

d'où :

$$\int_s^{+\infty} \langle Pu, u\rangle_{X,U}(\tau)\, d\tau \leq \frac{\|P\|}{\alpha_1}\left(\langle Pu, u\rangle_{X,U}(s) + \alpha_2 |u|_U^2(s)\right)$$

d'où :

$$\int_s^{+\infty} \langle Pu, u\rangle_{X,U}(\tau)\, d\tau \leq \frac{\|P\|}{\alpha_1}\left(1 + \alpha_2\|P^{-1}\|\right)\langle Pu, u\rangle(s) .$$

On applique alors le lemme de type Gronwall démontré dans [6] :

LEMME 4 : *Si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^+)$ est positive décroissante et si il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\int_s^{+\infty} \phi(t)\, dt \leq C\phi(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

alors,

$$\phi(t) \leqslant \phi(0)\, e^{1-\frac{t}{C}} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ ,$$

avec $\phi(t) = \langle Pu, u\rangle_{X,U}(t)$.

D'après (5) et le fait que P est positif, les hypothèses du lemme 4 sont satisfaites, d'où :

$$\langle Pu, u\rangle_{X,U} \leqslant \langle Pu_0, u_0\rangle_{X,U}\, e^{1-\frac{\alpha_1}{\|P\|(\alpha_2\|P^{-1}\|+1)}t} \quad \forall t > 0 .$$

Enfin, comme P est un isomorphisme, il vient

$$|u|_U^2(t) \leqslant \|P\|\ \|P^{-1}\|\ |u_0|_U^2\, e^{1-\frac{\alpha_1}{\|P\|(\alpha_2\|P^{-1}\|+1)}t}$$

ce qui montre le théorème 3. □

Remarque : Si on sait que $\frac{d}{dt}|u|_U^2(t) \leqslant 0$ alors on a une meilleure estimation du taux de décroissance :

$$|u|_U^2(t) \leqslant |u_0|_U^2\, e^{1-\frac{\alpha_1}{\|P\|+\alpha_2}t} .$$

Pour obtenir cette inégalité, il suffit d'appliquer le lemme précédent à $\phi(t) = |u|_U^2(t)$.

3.3. Cas avec coercivité de la fonctionnelle

Considérons le problème (1), (2) vérifiant l'hypothèse (4). Supposons que l'opérateur de Riccati P appartient à l'ensemble $\mathscr{L}(U)$ des applications linéaires définies sur U et à valeurs dans U (c'est le cadre de [2] et [4] par exemple). Dans ce cas, l'opérateur P est positif auto-adjoint et le contrôle optimal noté $\bar{v}$ est $\bar{v} = -N^{-1}B^*P\bar{u}$ où $\bar{u}$ désigne la solution optimale. La norme de P dans $\mathscr{L}(U)$ est notée $\|P\|$. Dans toute la suite on supprimera les barres sur la solution optimale $\bar{u}, \bar{v}$.

THÉORÈME 5 : *Si l'hypothèse (4) est vérifiée et si P est un isomorphisme alors la solution de (1), (2) est telle que la semi norme* $\|\sqrt{P}u\|_U$ *est exponentiellement décroissante :*

$$\|\sqrt{P}u\|_U^2 \leqslant \|\sqrt{P}u_0\|_U^2\, e^{-\frac{\alpha t}{\|P\|}}$$

et

$$|u|_U^2(t) \leqslant \|P\|\ \|P^{-1}\|\ |u(0)|_U^2\, e^{-\frac{\alpha t}{\|P\|}} .$$

Remarque : Si P n'est pas un isomorphisme, la première majoration reste vraie.

Preuve : L'application de l'opérateur P à gauche de l'équation (1) implique :

$$\frac{1}{2}\partial_t(Pu, u)_U = (PAu, u)_U + (PBv, u)_U$$

comme $v = -N^{-1} B^*P$, on a :

$$\partial_t(Pu, u)_U = 2(PAu, u)_U - 2\left|\sqrt{N^{-1}}\, B^*Pu\right|_V^2 . \tag{5'}$$

D'après l'équation de Riccati (3) :

$$2(PAu, u)_U = -\,|Ru|_U^2 + \left|\sqrt{N^{-1}}\, B^*Pu\right|_V^2 . \tag{6}$$

La somme de (5') et (6) entraîne :

$$\partial_t(Pu, u)_U(t) = -\,|Ru|_U^2(t) - \left|\sqrt{N^{-1}}\, B^*Pu\right|_V^2(t) = -j(v)$$

donc, d'après l'hypothèse (4) :

$$\partial_t(Pu, u)_U(t) \leqslant -\alpha |u|_U^2(t) .$$

Par ailleurs $P \in \mathscr{L}(U)$ donc $(Pu, u)_U \leqslant \|P\|\ |u|_U^2$ donc :

$$\partial_t(Pu, u)_U(t) \leqslant -\frac{\alpha}{\|P\|}(Pu, u)_U(t)$$

d'où :

$$(Pu, u)(t) \leqslant (Pu_0, u_0)\, e^{-\frac{\alpha t}{\|P\|}}$$

c'est la première inégalité. La seconde partie est immédiate. □

Remarques : (i) L'hypothèse (4) est trivialement vérifiée si $R = I$.
(ii) Le choix optimal α_0 de α est :

$$\alpha_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{u_0 \in U} \frac{|u|_U^2(t) + \left|\sqrt{N^{-1}}\, B^*\, Pu\right|_U^2(t)}{|u|^2}$$

où les $u \in L^2(R^+ ; U)$ sont solutions de l'équation $\partial_t u = (A - BN^{-1} B^* P) u$ avec $u(0) = u_0$, et le taux de décroissance optimal est $\omega = \frac{\alpha_0}{\|P\|}$.

(iii) Dans [3] les auteurs montrent que si (A^*, R) est exactement contrôlable alors P est un isomorphisme sur U. Dans ce cas $|\sqrt{P}u|_U$ est une norme équivalente à la norme de U. Si de plus, $(-A, B)$ est exactement contrôlable, alors P^{-1} est l'opérateur de Riccati associé au problème dual.

4. EXEMPLES D'APPLICATIONS

Dans cette partie, nous appliquons les deux premières méthodes à la stabilisation de l'équation des ondes. On traitera successivement la stabilisation à l'aide du contrôle optimal avec contrôle interne, avec contrôle frontière de type Dirichlet et Neumann, puis à l'aide du contrôle H_∞ avec contrôle et perturbation interne et enfin la stabilisation de l'équation des ondes avec un amortissement en vitesse.

On note Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$. Le cylindre $\Omega \times \mathbb{R}^+$ est noté Q, et la frontière $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ est notée Σ. La norme de $L^2(\Omega)$ est notée $|\,.\,|$. Suivant les cas, l'énergie et les espaces U, X seront tels que :

$$E(t) = \frac{1}{2}(|\nabla u|^2(t) + |\partial_t u|^2(t)) \quad \text{et} \quad U \subset H^1(\Omega) \times L^2(\Omega), X = U'$$

ou bien

$$E(t) = \frac{1}{2}(|u|^2(t) + \|u\|^2_{H^{-1}(\Omega)}(t)) \quad \text{et} \quad X \subset H^1(\Omega) \times L^2(\Omega),\ U = X'.$$

On rappelle le théorème de [3] :

THÉORÈME (F.L.T.) : *Si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :*

(H_1) *pour tout* $0 < T < +\infty$ *il existe* $C_T > 0$ *tel que*

$$\int_0^T |B^* e^{A^* t} u|_V \leqslant C_T |u|_V^2 \quad \textit{pour tout } u \in D(A^*)$$

où B^* *est le dual de* B *vérifie* $B^* \in \mathcal{L}(D(A^*), V)$,

(H_2) $R \in \mathcal{L}(U), R = R^* \geqslant 0,$

(H_3) *Pour tout* $u_0 \in U$, *il existe* $\bar{v} \in L^2(\mathbb{R}^+ ; V)$ *tel que si* $\bar{u}(\bar{v})$ *est la solution de (2) associée à* $\bar{v}$ *alors* $j(\bar{v}) < +\infty$,

alors l'équation algébrique de Riccati admet une solution unique. Cette solution est un isomorphisme dès que $(A^*, R^{1/2})$ *est exactement contrôlable sur l'intervalle* $[0, T]$ *pour un* $T < +\infty$.

Dans tous les cas considérés, l'opérateur de Riccati est un isomorphisme de U dans X et s'écrit sous forme matricielle :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}.$$

4.1. L'exemple de l'équation des ondes avec contrôle optimal interne

Considérons des ouverts réguliers Ω_b et $\Omega_c \subset \Omega$ et des fonctions b et $c \in L^\infty(\Omega)$ positives, telles que $b \geq b_0 > 0$ dans Ω_b et $c \geq c_0 > 0$ dans Ω_c. Pour l'application des théorèmes 1 et 3, on choisit les espaces $U = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ muni de la norme $|(u, v)|_U^2 = |\nabla u|^2 + |v|^2$, $V = L^2(\Omega_b)$, $X = U'$ et les opérateurs R, N sont respectivement le $c\nabla$ et la fonction indicatrice de Ω_b définis dans $H^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$. La fonctionnelle est donc :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} |c\, \nabla u|^2(t) + |v|^2_{L^2(\Omega_b)}(t)\, dt. \tag{7}$$

Notons $u(x, t)$ la solution de l'équation des ondes avec contrôle interne partiel :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - \Delta u = bv & \text{dans} \quad Q \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ (u, \partial_t u)(t = 0) = (u_0, u_1) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{8}$$

D'après [8], pour tout $v \in L^2(Q)$, il existe une solution de (8) telle que $u \in \mathscr{C}^0([0, T] ; H_0^1(\Omega)) \cap \mathscr{C}^1([0, T] ; L^2(\Omega))$ pour tout $T > 0$. De plus si $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$, alors $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega))$ ce qui justifie les calculs ultérieurs par régularisation des données initiales et passage à la limite.

Si Ω_b contrôle géométriquement Ω alors l'existence de P est assurée par le théorème (F.L.T.) car H_1 et H_2 sont trivialement vérifiées et l'hypothèse de contrôle géométrique est une hypothèse de contrôlabilité exacte qui implique

H_3 (*cf.* [8]). Si de plus Ω_c vérifie la même propriété que Ω_b alors P est un isomorphisme, la solution du problème de contrôle optimal (1), (7), (8) est $\bar{v} = -bp$. L'équation des ondes stabilisée par le contrôle optimal interne est donc :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - \Delta u = -b^2(P_{21}\, u + P_{22}\, \partial_t u) & \text{dans} \quad Q \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ (u, \partial_t u)\,(t = 0) = (u_0, u_1) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{9}$$

la formulation du système d'optimalité associée est :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - \Delta u = -b^2 p & \text{dans} \quad Q \\ \partial_{tt}^2 p - \Delta p = -\operatorname{div}(c^2 \nabla u) & \text{dans} \quad Q \\ u = p = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ (u, \partial_t u)\,(t = 0) = (u_0, u_1) & \text{dans} \quad \Omega\,. \end{cases} \tag{10}$$

Posons $\varphi(t) = \langle P(u, \partial_t u), (u, \partial_t u)\rangle(t) = -\langle u, \partial_t p\rangle + \langle \partial_t u, p\rangle$ définie pour (u, p) solution de (10). Notons $\tilde{A}$ l'opérateur associé à l'équation (9) formulée sous forme de système du premier ordre :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - b^2 P_{21} & -b^2 P_{22} \end{pmatrix}$$

et $S(t)$ le semi-groupe engendré par $\tilde{A}$, défini sur l'espace de Hilbert U. L'opérateur $\mathscr{A}$ est défini par :

$$\mathscr{A} : \begin{array}{l} U \to L^2(\mathbb{R}^+, U) \\ (u_0, u_1) \to (u, \partial_t u) = S(t)(u_0, u_1)\,. \end{array}$$

THÉORÈME 6 : (i) *Si les domaines Ω_b et Ω_c vérifient les hypothèses de contrôle géométrique alors la solution u de l'équation (9) est exponentiellement décroissante, et le théorème 1 s'applique à l'opérateur $\mathscr{A}$ ci-dessus.*

(ii) *Si $\Omega_c = \Omega$ dans tout le domaine alors le théorème 3 s'applique avec α_1 et α_2 définis en (12).*

(iii) *Si $\Omega_b = \Omega$ alors la norme de l'opérateur de Riccati est estimée par $\|P\| \leqslant C(b, c)$ où $C(b, c)$ est définie dans la démonstration ci-dessous.*

(iv) *La norme de P^{-1} est bornée :*

$$\|P^{-1}\| \leqslant \frac{\varepsilon^2 c_5 c_4 + 1}{\varepsilon(2 - \varepsilon c_5)}$$

où $\varepsilon < \frac{2}{c_5}$, *et les constantes* c_1, c_2, c_3 *et* c_4 *sont calculées ci-dessous.*

Remarque : La constante c_3 utilisée dans la démonstration du (iii) est apparemment liée à la contrôlabilité de l'équation (8). Quand elle tend vers l'infini $C(c_b)$ tend aussi vers l'infini.

Preuve : Montrons le (i). Du fait que l'opérateur de Riccati est un isomorphisme, l'opérateur $\mathscr{A}$ est continu. Son injectivité est évidente. Enfin l'image de $\mathscr{A}$ est fermée car la multiplication de (9_1) par $\partial_t u$ et le fait que P soit continu entraîne l'inégalité :

$$E(u)(0) \leqslant C \int_{\mathbb{R}^+} E(u)(t)\, dt .$$

Ainsi $\mathscr{A}$ est une bijection continue d'un Hilbert sur un Hilbert. C'est donc un isomorphisme. Montrons (ii). Pour cela, montrons qu'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que

$$\int_s^{+\infty} E(u)(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1^{-1} \int_s^{+\infty} |c\nabla u|^2(t) + |bp|^2(t)\, dt + \alpha_2\, \alpha_1^{-1}\, E(u)(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ . \quad (11)$$

La multiplication de (10_1) par u entraîne :

$$\partial_t \int_\Omega u\, \partial_t u\, dx - |\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 = \int_\Omega b^2\, pu\, dx$$

d'où

$$\frac{1}{2} \int_s^{+\infty} |\partial_t u|^2(t) + |\nabla u|\ (t)\, dt \leqslant \int_s^{+\infty} |\nabla u|^2(t) +$$

$$+ \frac{1}{4}(\,|bp|^2(t) + |bu|^2(t)\,)\, dt + \frac{1}{2} \int_\Omega u\, \partial_t u(s)\, dx .$$

On définit alors $c_1 = c_1(b)$ par :

$$\int_{\Omega_b} b^2\, u^2\, dx \leqslant c_1 |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}$$

comme

$$\int_{\Omega} u\, \partial_t u\, dx(s) \leqslant \max(1, c_0)\, E(u)(s)$$

et :

$$\int_s^{+\infty} |\nabla u|^2\, dt \leqslant \frac{1}{\bar{c}_1} \int_s^{+\infty} |c\, \nabla u|^2\, dt$$

où c_0 représente la constante de Poincaré et $\bar{c}_1 = \inf_{x \in \Omega} c^2(x)$. On a

$$\int_s^{+\infty} E(u)(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{c_1}{4}\right) \frac{1}{2\, \bar{c}_1} \int_s^{+\infty} |c\nabla u|^2(t) + |bp|^2(t)\, dt + \frac{1}{2} \max(1, c_0)\, E(u)(s).$$

d'où

$$\alpha_1 = \frac{2\, \bar{c}_1}{4 + c_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2} \max(1, c_0)\,. \tag{12}$$

Montrons (iii). Pour q défini par $-\Delta q = p$ dans Ω et $q = 0$ sur $\partial\Omega$, l'équation $\int_{\Omega} (10_2)\, \partial_t q\, dx$ conduit à :

$$\frac{1}{2} \partial_t (|\partial_t \nabla q|^2 + |p|^2) = \int_{\Omega} c\, \nabla u c \nabla\, \partial_t q\, dx\,.$$

Si $\bar{c}$ désigne le $\sup_{\Omega} c$, alors l'équation ci-dessus intégrée entre t et l'∞ conduit à :

$$(|\partial_t \nabla q|^2 + |p|^2)(t) \leqslant \int_t^{\infty} \frac{1}{2\,\varepsilon} |c\, \nabla u|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \bar{c}^2 |\nabla \partial_t q|^2\, dx\, dt \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0\,.$$

Par ailleurs, l'équation $\int_{\Omega} (10_2)\, q\, dx$ conduit à :

$$\int_{\Omega} \partial_{tt}^2 \nabla q\, \nabla q\, dx + |p|^2 = \int_{\Omega} c\, \nabla u\, c\, \nabla q\, dx\,.$$

Son intégration entre t et l'∞ conduit à :

$$\int_t^\infty |\partial_t \nabla q|^2\, dt = \int_t^\infty \left(|p|^2 - \int_\Omega c\, \nabla u\, c \nabla q\, dx \right) dt + \int_\Omega \partial_t q\, \Delta q\, dx\,.$$

Utilisant cette majoration ainsi que :

$$\int_\Omega c\, \nabla u\, c \nabla q\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} |c\, \nabla u|^2 + \frac{1}{2\,\varepsilon} |c\, \nabla q|^2$$

$$\text{et} \quad \int_\Omega \partial_t \nabla q\, \nabla q\, dx \leqslant \frac{\lambda}{2} |\partial_t q|^2 + \frac{1}{2\,\lambda} |p|^2 \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$$

dans la majoration obtenue précédemment :

$$\left(1 - \frac{\varepsilon c_0\, \bar{c} \lambda}{2} \right) |\partial_t \nabla q|^2 + \left(1 - \frac{\varepsilon \bar{c}}{2\,\lambda} |p|^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^\infty \left(1 + \frac{\bar{c}\varepsilon}{2} \right) |c\, \nabla u|^2 + \bar{c} |p|^2 + \frac{\bar{c}}{2\,\varepsilon} |c\, \nabla q|^2\, dt\,.$$

On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit, et

$$c_2^{-1} = \max_{0 < \varepsilon < \max\left(\frac{2}{c_0\, \bar{c} \lambda}, \frac{2\,\lambda}{\bar{c} \lambda} \right)} \left(1 - \frac{\varepsilon c_0\, \bar{c} \lambda}{2}, 1 - \frac{\varepsilon \bar{c}}{2\,\lambda} \right)$$

est positive. Si bien que :

$$|\partial_t \nabla q|^2 + |p|^2 \leqslant c_2 \int_t^\infty \left(1 + \frac{\bar{c}\varepsilon}{2} \right) |c\, \nabla u|^2 + \bar{c} \left(1 + \frac{c_3}{2\,\varepsilon} \right) |bp|^2\, dt$$

avec la constante c_3 de type Poincaré telle que :

$$|c\, \nabla q|^2 \leqslant c_3 |\Delta q|^2 \quad \text{pour tout} \quad q \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)\,.$$

Enfin, pour la valeur particulière ε_0 de ε telle que $1 + \frac{\bar{c}\varepsilon}{2} = \bar{c}\left(1 + \frac{c_3}{2\,\varepsilon} \right)$ et la constante

$$C(b, c) = c_2 \left(1 + \frac{\bar{c}\varepsilon_0}{2} \right)$$

il vient,

$$|\partial_t \nabla q|^2 + |p|^2 \leqslant C(b, c) \int_t^{\infty} |c\, \nabla u|^2 + |bp|^2\, dt$$

c'est-à-dire :

$$\| P(u, \partial_t u) \|^2 \leqslant C(b, c) \langle P(u, \partial_t u), (u, \partial_t u) \rangle .$$

Ce qui implique que $\| P \| \leqslant C(b, c)$.

(iv) Du fait que $\partial_t E = - \int_{\Omega} b^2\, p\, \partial_t u\, dx$,

$$E(s) \leqslant \frac{1}{2} \int_s^{+\infty} \left(\varepsilon |b\, \partial_t u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |bp|^2 \right) dt$$

pour tout $\varepsilon > 0$. De l'égalité :

$$|\partial_t u|^2 = |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} b^2\, pu\, dx + \partial_t \int_{\Omega} u\, \partial_t u\, dx$$

on déduit

$$\int_s^{+\infty} |\partial_t u|^2(t)\, dt \leqslant \int_s^{+\infty} |\nabla u|^2 + \frac{\varepsilon'}{2} |bu|^2 + \frac{1}{2\, \varepsilon'} |bp|^2\, dt - \int_{\Omega} u\, \partial_t u\, dx(s)$$

$$\leqslant c_4 \int_s^{+\infty} |\nabla u|^2 + |bp|^2\, dt + \max(1, c_0)\, E(u)(s)$$

où

$$c_4 = \frac{1}{2\, \varepsilon'} \quad \text{avec} \quad \varepsilon' = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\, c_1}}{c_1}$$

c'est-à-dire solution de $1 + \frac{\varepsilon'}{2} c_1 = \frac{1}{2\, \varepsilon'}$. Par ailleurs :

$$E(s) \leqslant \frac{1}{2} \int_s^{+\infty} \varepsilon |b\, \partial_t u|^2 - \frac{1}{\varepsilon} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} (|bp|^2 + |\nabla u|^2)\, dt .$$

On pose $c_5 = \| b \|^2_{L^\infty(\Omega)}$, on obtient

$$E(s) \leqslant \frac{1}{2} \left(\varepsilon c_5\, c_4 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \langle Pu, u \rangle_{U', U}(s) + \varepsilon c_{\frac{5}{2}} E(s) .$$

Donc :

$$E(s) \leqslant \frac{\varepsilon^2 c_5 c_4 + 1}{2\,\varepsilon(1 - \varepsilon c_{5/2})} \langle Pu, u \rangle_{U',U}(s)$$

d'où :

$$\| P^{-1} \| \leqslant \frac{\varepsilon^2 c_5 c_4 + 1}{\varepsilon(2 - \varepsilon c_5)} \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ tel que } 2 - \varepsilon c_5 > 0 \,.$$

Cela donne l'estimation de la norme de P^{-1}, et achève la preuve du théorème. □

Remarque : Le raisonnement qui a été fait sur l'équation (9) peut aussi être mené sur le système d'optimalité (10). L'intérêt de travailler sur le système d'optimalité est que le générateur infinitésimal du semi groupe considéré n'utilise pas l'opérateur de Riccati. Du point de vue des applications, l'abscisse spectrale du générateur infinitésimal est alors beaucoup plus facile à calculer ; Ce résultat fait l'objet du théorème suivant.

Ici on note $\mathcal{U}$ le graphe de P. Comme P est un isomorphisme, $\mathcal{U}$ est un espace de Hilbert muni de la norme produit de $U \times X$, $|(u, p)|^2_{U \times X} = |u|^2_U + |p|^2_X$ (on rappelle que $X = U'$). Considérons l'opérateur

$$\mathcal{B} : \begin{array}{l} \mathcal{U} \to L^2(\mathbb{R}^+ ; \mathcal{U}) \\ (u, \partial_t u, -\partial_t p, p)(t = 0) \to (u, \partial_t u, -\partial_t p, p) \end{array}$$

et le générateur infinitésimal du semi groupe associé à (10) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & Id & 0 & 0 \\ \Delta & 0 & -b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \\ -\operatorname{div}(c^2 \nabla .) & 0 & -\Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME 7 : (i) *Si P est un isomorphisme, alors le théorème 1 s'applique à l'opérateur $\mathcal{B}$ ci-dessus.*

(ii) *Si $\Omega_b = \Omega_c = \Omega$ et $b = c = 1$ sur tout le domaine Ω alors le taux de décroissance est $\mu = -2\sqrt{\dfrac{-\lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_0}}{2}}$ où λ_0 est la première valeur propre du Laplacien sur Ω.*

Remarque : Pour la situation décrite au (ii), et dans le cas du contrôle en vitesse, c'est-à-dire si $v = -\partial_t u$ dans (8), alors

$$\mu = \sup_{\lambda} \frac{1}{2} Re\left(-1 - \sqrt{1 - 4\lambda}\right)$$

où le sup est pris sur les λ valeurs propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet homogènes.

Preuve : Comme l'opérateur $\mathscr{A}$ du théorème 6 et l'opérateur P sont des isomorphismes, l'opérateur $\mathscr{B}$ du théorème présent en est aussi un, ce qui montre le point (i). Montrons le point (ii). Le système d'optimalité associé à ce problème s'écrit :

$$\begin{cases} \partial^2_{tt} u - \Delta u = -p & \text{dans} \quad Q = \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \partial^2_{tt} p - \Delta p = -\Delta u & \text{dans} \quad Q \\ u = p = 0 & \text{sur} \quad \Sigma \\ (u, \partial_t u)(t = 0) = (u_0, u_1) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{13}$$

où pour tout $T > 0$, $u \in \mathscr{C}^0(0, T; H^1_0(\Omega)) \cap \mathscr{C}^1(0, T; L^2(\Omega))$ et $p \in \mathscr{C}^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap \mathscr{C}^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$.
On note $q \in \mathscr{C}^0(0, T; H^2(\Omega)) \cap \mathscr{C}^1(0, T; H^1_0(\Omega))$ la solution unique du problème suivant défini à chaque instant $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} -\Delta q = p & \text{dans} \quad \Omega \\ q = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{14}$$

Utilisant le fait que l'opérateur de Laplace avec conditions de Dirichlet est un isomorphisme de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, l'équation (13_2) s'écrit :

$$\partial^2_{tt} q + p = -u\,. \tag{15}$$

Notons $(\lambda_i, w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la famille des valeurs et vecteurs propres du Laplacien sur Ω avec condition de Dirichlet. Les $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont les vecteurs propres d'un opérateur auto-adjoint d'inverse compact. Ils forment une base Hilbertienne de l'espace $L^2(\Omega)$. Le couple (u, p) se décompose sur cette base :

$$(u(x, t), p(x, t)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (u_i(t), p_i(t))\, w_i(x)$$

de même $q(x,t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} q_i(t)\, w_i(x)$. La projection du système d'optimalité (13) sur la base des $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ s'écrit :

$$\begin{cases} \partial^2_{tt} u_i + \lambda_i u_i = - p_i & \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \\ \partial^2_{tt} p_i + \lambda_i p_i = \lambda_i u_i & \text{dans} \quad \mathbb{R}^+, \text{ avec } \lambda_i q_i = p_i \\ (u_i, \partial_t u_i)(t=0) = (u_{0i}, u_{1i}) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{16}$$

où u_{0i} et u_{1i} désignent les projections de u_0 et u_1 sur w_i. Posons :

$$\begin{cases} \phi_i(t) & = \frac{1}{2}((\partial_t u_i)^2 + \lambda_i u_i^2 + \lambda_i(\partial_t q_i)^2 + p_i^2) \\ \psi_i(t) & = p_i^2 + \lambda_i u_i^2, \Gamma_i(t) = \lambda_i q_i^2 + u_i^2 \\ \varphi_i(t) & = \partial_t p_i u_i - \partial_t u_i p_i . \end{cases} \tag{17}$$

LEMME 8 : *Si (u_i, p_i) vérifient les équations (16) alors, avec les notations (17) :*

(i) $\partial^2_{tt} \Gamma_i = 4(\phi_i - \psi_i)$

(ii) $\partial_t \phi_i = - \varphi_i$

(iii) $\partial_t \varphi_i = - \psi_i$

(iv) $\Gamma_i = \lambda_i \psi_i$.

Preuve : (i) résulte de $(16_1)\, u_i + \frac{1}{\lambda_i}(16_2)$, (ii) résulte de $(16_1)\, \partial_t u_i + \frac{(16_2)}{\lambda_i} \partial_t p_i$ et (iii) de $(16_1) \cdot p_i - (16_2) \cdot u_i$. □

LEMME 9 : (i) *ϕ_i est solution de l'équation différentielle du quatrième ordre :*

$$\partial^4_{tttt} \phi_i + 4\, \lambda_i(\partial^2_{tt} \phi_i - \phi_i) = 0$$

avec $\partial^2_{tt} \phi_i \geqslant 0$ *et* $\partial_t \phi_i \leqslant 0$.

(ii) *Les racines μ de l'équation caractéristique sont telles que :*

$$\mu_i^2 = - 2\, \lambda_i \pm 2 \sqrt{\lambda_i^2 + \lambda_i} \,.$$

(iii) *La seule solution ϕ_i admissible est :*

$$\phi_i(t) = \phi_i(0)\, e^{2 \mu_i t} \quad \textit{avec} \quad \mu_i = - \sqrt{- 2\, \lambda_i + 2 \sqrt{\lambda_i^2 + \lambda_i}} \,.$$

Preuve : Le (i) est obtenu par substitution dans les équations du lemme 8. Le (ii) est un simple calcul. Pour montrer (iii), on utilise (ii) et le fait que $\partial^2_{tt} \phi_i \geqslant 0$ et $\partial_t \phi_i \leqslant 0$, c'est-à-dire $\mu_i^2 \geqslant 0$ et $\mu_i \leqslant 0$. □

D'après l'orthogonalité des fonctions propres w_i,

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\left(|\partial_t u|^2(t) + |\nabla u|^2(t) + |\partial_t \nabla q|^2(t) + |p|^2(t)\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi_i$$

et d'après le lemme 9 :

$$\phi(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi_i(0)\, e^{2\mu_i t}$$

et comme les μ_i sont décroissantes lorsque i croit,

$$\phi(t) \leqslant \phi(0)\, e^{2\mu_0 t}.$$

En particulier :

$$E(t) \leqslant \phi(0)\, e^{2\mu_0 t}$$

avec $\mu_0 = -\sqrt{-2\lambda_0 + 2\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_0}}$ où λ_0 est la plus petite valeur propre du Laplacien. Ce qui achève la preuve du théorème 7. □

4.2. L'exemple de l'équation des ondes avec contrôle frontière de Dirichlet

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ dont la frontière Γ est régulière. Considérons un ouvert $\Omega_c \subset \Omega$ de frontière régulière et une fonction positive $c \in L^\infty(\Omega)$, telle que $c \geqslant \bar{c} > 0$ dans Ω_c. On considère le contrôle optimal de l'équation des ondes par un contrôle frontière de type Dirichlet, déjà étudié dans [8]. Comme dans [8], on note x_0 un point de $\mathbb{R}^d$, $m(x) = x - x_0$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, $n(x)$ la normale à Γ sortante de Ω, $\Gamma(x_0) = \{x \in \Gamma$ tels que $\{m \,.\, n(x) \geqslant 0\}$, $\Gamma_*(x_0) = \Gamma - \Gamma(x_0)$, $\Sigma = \Gamma \times \mathbb{R}^+$, $\Sigma(x_0) = \Gamma(x_0) \times \mathbb{R}^+$, $\Sigma_*(x_0) = \Gamma_*(x_0) \times \mathbb{R}^+$. Considérons la fonctionnelle :

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^\infty |cu|^2 + |v|^2_{L^2(\Sigma(x_0))}\, dt \tag{18}$$

où $|\,.\,|$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$ et u est la solution unique de l'équation des ondes avec contrôle frontière :

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = v \text{ sur } \Sigma(x_0) \quad \text{et} \quad u = 0 \text{ sur } \Sigma_*(x_0) \\ (u, \partial_t u)(t=0) = (u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \end{cases} \tag{19}$$

où $v \in L^2(\Sigma(x_0))$. L'énergie associée à ce problème est $E(t) = \frac{1}{2}(\|\partial_t u\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + |u|^2)(t)$ D'après [8], la solution u de l'équation ci-dessus vérifie $u \in L^2(0, T ; L^2(\Omega))$ pour tout $T < \infty$. De plus le problème de contrôle optimal $\min_{v \in L^2(\Sigma(x_0))} J(v)$ admet une solution unique $u \in L^2(\mathbb{R}^+ ; L^2(\Omega))$. Le contrôle optimal est $\bar{v} = \nabla p \cdot n \in L^2(\Sigma(x_0))$ où le couple (u, p) est l'unique solution du système d'optimalité :

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta u = 0 \text{ et } \partial_t p - \Delta p = -c^2 u \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \nabla p \cdot n + u = 0 \text{ sur } \Sigma(x_0),\ u = 0 \text{ sur } \Sigma_*(x_0) \text{ et } p = 0 \text{ sur } \Sigma \\ u(0) = u_0,\ \partial_t u(0) = u_1 \text{ dans } \Omega \\ (u, \partial_t u, p, \partial p) \in L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega) \times L^2(\mathbb{R}^+ ; H^{-1}(\Omega)) \\ \times L^2(\mathbb{R}^+, H^{-1}(\Omega)) \times L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)\,. \end{cases} \tag{20}$$

Considérons l'opérateur de Riccati P défini de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ par $P(u_0, u_1) = (-\partial_t p(0), p(0))$. Par construction, la solution contrôlée u appartient à $L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$. Le théorème de Datko [2] permet de conclure à la décroissance exponentielle.

L'opérateur $\mathscr{A}$ défini du graphe $Gr(P)$ de P dans $L^2(\mathbb{R}^+ ; Gr(P))$ par $\mathscr{A}(u_0, u_1, p_1, p_0) = ((u, \partial_t u, \partial p, p)(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ vérifie le :

THÉORÈME 10 : *1) Si P est un isomorphisme,*

(i) *Le théorème 1 s'applique,*

(ii) *Le théorème 3 s'applique avec α_1 et α_2 donnés en (21).*

2) Si $\Omega_c = \Omega$ et si c est identiquement égal à 1 alors P est un isomorphisme. De plus, la démonstration ci-dessous permettra d'estimer $\|P^{-1}\|$ et $\|P\|$.

Preuve : 1) (i) Il suffit de vérifier que l'image de $\mathscr{A}$ est fermée i.e il existe $C > 0$ telle que :

$$|u(0)|^2 + \|\partial_t u(0)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \int_0^{+\infty} |u(\tau)|^2 + \|\partial_t u(\tau)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\, d\tau\,.$$

Il suffit de faire :

$$\int_\Omega (\partial_t p - \Delta p = -c^2 u)\, \partial_t p\, dx\,.$$

On obtient $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|P(u,\partial_t u)\|^2 = -\int_\Omega c^2\, u\, \partial_t p\, dx$, d'où l'inégalité cherchée avec C dépendant de $\|P\|$, de $\|P^{-1}\|$ et de $\bar{c}$.

(ii) Pour presque tout $t \in \mathbb{R}^+$, on définit $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ solution de :

$$- \Delta w = u \text{ dans } \Omega \text{ et } w = 0 \text{ sur } \partial\Omega .$$

Le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ de (20_1) avec w donne :

$$\int_s^{+\infty} E(t)\, dt \leqslant (1 + c_1(x_0)) \int_s^{+\infty} (|u|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla p \,.\, n|^2_{L^2(\Gamma(x_0))})\, dt + \frac{1}{2} \max (1, c_2)\, E(s)$$

avec $c_1(x_0)$ tel que $|\nabla w \,.\, n|^2_{L^2(\Gamma(x_0))} \leqslant c_1(x_0)\, |u|^2_{L^2(\Omega)}$, et c_2 tel que $|\nabla w|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c_2\, |u|^2_{L^2(\Omega)}$. L'application d'un lemme du type Gronwall [4] à la fonction décroissante $\langle P(u, \partial_t u), (u, \partial_t)\rangle(t)$ conduit à (ii) avec :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2(1 + c_1(x_0))} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2} \max (1, c_2) .$$

2) Soit c_0 la constante de Poincaré et $R(x_0) = \sup_{x \in \Omega} |m(x)|$. On utilise la technique des multiplicateurs exposée dans [8]. On considère les trois égalités

$$\int_\Omega (\partial_{tt} p - \Delta p = - u)\, \nabla p \,.\, m\, dx, \quad \int_\Omega (\partial_{tt} p - \Delta p = - u)\, p\, dx$$

et $\int_\Omega (\partial_{tt} p - \Delta p = - u)\, \partial_t p\, dx$. On déduit des deux premières :

$$\int_s^{+\infty} \|P(u, \partial_t u)(t)\|^2\, dt \leqslant R(x_0) \int_s^{+\infty} |\nabla p \,.\, n|^2_{L^2(\Gamma(x_0))} -$$

$$\int_s^{+\infty} \int_\Omega 2\, u\left(\nabla p \,.\, m + \frac{(d-1)}{2} p\right) dx\, dt + \left[\int_\Omega \partial_t p\left(\nabla p \,.\, m + \frac{(d-1)}{2} p\right)\right]_s^{+\infty} .$$

Si on choisit $\varepsilon > 0$ tel que : $1 - \varepsilon\left(R^2(x_0) + \frac{(d-1)}{2} c_0^2\right) \geqslant 0$ on aura :

$$\int_t^{+\infty} |\partial_t p|^2\, ds \leqslant R(x_0) \int_t^{+\infty} \int_{\Gamma(x_0)} |\nabla p \,.\, n|^2\, d\Gamma\, ds + \frac{2}{\varepsilon} |u|^2 + + 2\, R(x_0)\, \|P(u, \partial_t u)(t)\|^2 .$$

La troisième inégalité donne :

$$\|P(u,\partial_t u)(t)\|^2 \leqslant \int_t^{+\infty} \frac{1}{\alpha}|u|^2 + \int_t^{+\infty} \alpha|\partial_t p|^2.$$

La combinaison de ces deux inégalités conduit à :

$$(1-\alpha R(x_0))\ \|P(u,\partial_t u)(t)\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{Max}\left(R(x_0)\,\alpha, \frac{2\,\alpha}{\varepsilon}+\frac{1}{\alpha}\right)\langle P(u,\partial_t u),(u,\partial_t u)\rangle .$$

Donc, si on choisit $\alpha > 0$ tel que : $1-\alpha R(x_0) > 0$ on aura :

$$\|P\| \leqslant \frac{\operatorname{Max}\left(R(x_0)\,\alpha, \frac{2\,\alpha}{\varepsilon}+\frac{1}{\alpha}\right)}{C_3(x_0)}$$

où : $C_3(x_0) = 1-\alpha R(x_0)$.

Pour montrer que P est un isomorphisme et estimer la norme de son inverse on introduit $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$ et la solution $(\theta, \partial_t\theta) \in L^2(\mathbb{R}^+ ; H_0^1(\Omega)) \times L^2(\mathbb{R}^+ ; L^2(\Omega))$ du problème de contrôle optimal dont l'équation d'état et la fonctionnelle sont :

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = f \quad \text{dans} \quad \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ \theta(0)=\theta_0 \quad \text{et} \quad \theta'(0)=0 \quad \text{dans} \quad \Omega\,, \\ J(f) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\times\mathbb{R}^+} |\nabla\theta|^2 + |f|^2\,dx\,dt\,. \end{cases}$$

On note $\bar{f} \in L^2(\mathbb{R}^+ ; L^2(\Omega))$ le contrôle optimal. En faisant $\int_{\Omega\times\mathbb{R}^+} ((\partial_{tt}u - \Delta u)\,.\,\theta = 0)\,dx\,dt,$ on obtient

$$\langle u_1, \theta_0\rangle = \int_{\mathbb{R}^+\times\Omega} \bar{f}\,.\,u\,dx\,dt + \int_{\Sigma(x_0)} \nabla\theta\,.\,nu\,d\Gamma\,dt$$

d'où on déduit pour $\|\theta(0)\|_{H^1(\Omega)} = 1$,

$$\|u_1\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\langle P(u,\partial_t u),(u,\partial_t u)\rangle(0)}\,\max\left(\|\bar{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^+\times\Omega)}, \|\nabla\theta\,.\,n\|_{L^2(\Sigma(x_0))}\right).$$

Or $\|\bar{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)} \leq CE(\theta(0))$ où C a été définie au (iii) du théorème 6. Par la méthode des multiplicateurs [8], et du fait que $\theta \in L^2(\mathbb{R}^+ ; H^1(\Omega))$, on a :

$$\|\nabla\theta \cdot n\|^2_{L^2(\Sigma(x_0))} \leq C(x_0)\,(E(\theta(0)) + \|\bar{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}) .$$

Comme $2\,E(\theta(0)) = \|\theta_0\|^2_{H^1(\Omega)}$, on en déduit une estimation de $\|u_1\|_{H^{-1}(\Omega)}$. Le même raisonnement peut être mené pour u_0, cela conduit à l'estimation

$$|u_0|^2 + \|u_1\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq C'(x_0)\,\langle P(u, \partial_t u), (u, \partial_t u)\rangle\,(0) . \quad \square$$

4.3. L'exemple de l'équation des ondes avec contrôle frontière de Neumann

Dans ce paragraphe, on applique les théorèmes 1 et 3 au problème du contrôle frontière de type Neumann pour l'équation des ondes.

On suppose que $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}$, $\Gamma = \partial\Omega$, $\Sigma = \Gamma \times \mathbb{R}^+$, $V = L^2(\Sigma)$, $X = U'$ où $U = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et R et N sont les opérateurs identité définis respectivement dans $H^1(\Omega)$ et dans $L^2(\Gamma)$. La fonctionnelle est alors :

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^+} |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} + |v|^2_{L^2(\Gamma)}\, d\tau \tag{22}$$

où u est la solution de l'équation des ondes avec un contrôle frontière de type Neumann.

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \nabla u \cdot n = v \quad \text{sur} \quad \Sigma\,, \\ (u, \partial_t u)\,(t = 0) = (u_0, u_1) \in U\,. \end{cases} \tag{23}$$

L'hypothèse H_3 du théorème (F.L.T.) découle du résultat de contrôlabilité exacte de [8], les hypothèses H_1 et H_2 sont vérifiées dans [3] donc le problème de contrôle optimal est bien posé et P est un isomorphisme. Pour tout $(u_0, u_1) \in U$, tout $v \in L^2(\Sigma)$ et tout $T > 0$ il existe une solution unique $u \in \mathscr{C}^0([0, T] ; H^1(\Omega)) \cap \mathscr{C}^0([0, T] ; L^2(\Omega)) \cap L^2(\mathbb{R}^+ ; H^1(\Omega))$. De plus, le problème de contrôle optimal (1), (22), (23) admet une unique solution $\bar{v} = -p_{|\Gamma}$ où (u, p) est solution du système d'optimalité :

$$\begin{cases} \partial^2_{tt} u - \Delta u = 0 \quad \text{et} \quad \partial^2_{tt} p - \Delta p = -\,\Delta u \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \nabla u \cdot n = -\,p \text{ et } \nabla p \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma\,, \\ (u(0), u'(0)) = (u^0, u^1) \end{cases}$$

$u \in L^2(\mathbb{R}^+ ; H^1(\Omega))$ et $p_\Gamma \in L^2(\mathbb{R}^+ ; L^2(\Gamma))$.

THÉORÈME 11 : *Les hypothèses du théorème 3 sont vérifiées avec α_1 et α_2 données par (25).*

Preuve : Vérifions les hypothèses du théorème 3. Il suffit de vérifier l'hypothèse (4'). D'après (5), c'est équivalent à montrer qu'il existe deux constantes α_1 et α_2 telles que :

$$2\,\alpha_1 \int_s^{+\infty} E(t)\,dt \leqslant \langle P(u, \partial_t u), (u, \partial_t u)\rangle_{X,U}(s) + 2\,\alpha_2\,E(s)\,.$$

On multiplie $(23)_1$ par u. On a

$$\partial_t \int_\Omega u\,\partial_t u\,dx - |\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 = -\int_\Gamma pu\,dx \tag{24}$$

d'où :

$$\int_s^\infty E(t)\,dt \leqslant \int_s^\infty |\nabla u|^2 + \frac{1}{4}|p|^2 + \frac{1}{4}|u|^2_{L^2(\Gamma)}\,dt + \frac{1}{2}\int_\Omega (u\,\partial_t u)(s)\,dx$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{4}c_1 \int_s^\infty |\nabla u|^2 + |p|^2_{L^2(\Gamma)}\,dt + \frac{1}{2}\max(1, c_0)\,E(s)$$

avec c_1 tel que :

$$|u|^2_{L^2(\Gamma)} \leqslant c_1 |\nabla u|^2\,.$$

On en déduit que l'hypothèse (4') est vérifiée avec

$$\alpha_1 = \frac{1}{4 + c_1}\,,\quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2}\max(1, c_0) \tag{25}$$

et donc le théorème 11 aussi. □

THÉORÈME 12 : *Si $d = 1$ $\|P^{-1}\| \leqslant C(x_0)$ où C est donné par (28).*

Preuve : $\quad -\partial_t E = \int_\Gamma u_t\, p\, ds \quad$ implique

$$E(u)(s) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_s^{+\infty} |u_t|^2_{L^2(\Gamma)}\, dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_s^{+\infty} |p|^2_{L^2(\Gamma)}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_s^{+\infty} |\partial_t u|^2(b) + \frac{1}{2\varepsilon} [p^2]_a^b .$$

On fait alors $\int_\Omega (23)_1\, 2(x - x_0)\, \partial_x u\, dx$, on obtient

$$\partial_t \int_\Omega (2(x - x_0)\, \partial_x u\, \partial_t u) dx + \int_\Omega |\partial_t u|^2\, dx -$$

$$- \int_\Gamma [\,|\partial_t u|^2 (x - x_0)]_a^b - \int_\Omega \partial^2_{xx} u^2 (x - x_0)\, \partial_x u\, dx = 0$$

or

$$2 \int_\Omega \partial^2_{xx} u(x - x_0)\, \partial_x u\, dx = - |\partial_x u|^2 + [\,|\partial_x u|^2 (x - x_0)]_a^b .$$

En posant $x_0 = a$ il vient

$$(b - a)\, |\partial_t u|^2(b) \leqslant$$

$$\leqslant \partial_t \int_\Omega 2(x - x_0)\, \partial_x u\, \partial_t u + |\partial_t u|^2 + |\partial_x u|^2\, dx + |p|^2_{L^2(\Gamma)} (b - a) . \quad (26)$$

Par ailleurs, en faisant $\int_\Omega (23_1)\, u\, dx$, il vient

$$\partial_t \int_\Omega u\, \partial_t u\, dx - |\partial_t u| + |\partial_x u|^2 + \int_\Gamma pu\, ds = 0 \quad (27)$$

$(26) + (27)$ donne

$$(b - a)\, |\partial_t u|^2(b) \leqslant \partial_t \left(\int_\Omega 2(x - a)\, \partial_x u\, \partial_t u + u\, \partial_t u\, dx \right) +$$

$$+ \left(2 + \frac{c_0}{2} |\partial_x u|^2 + \left(b - a + \frac{1}{2} \right) |p|^2_{L^2(\Gamma)} \right)$$

donc

$$\int_s^{+\infty} |\partial_t u|^2\, dt \leqslant \frac{1}{b-a} \max\left(|b-a|, \frac{1}{2}, \frac{c_0}{2} \right) E(u)(s) +$$

$$+ \frac{1}{b-a} \max\left(2 + \frac{c_0}{2}, b-a+\frac{1}{2} \right) \langle Pu, u \rangle$$

Si bien que

$$E(u)(s)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\beta_2\right) \leqslant \left(\frac{1}{2\varepsilon} + \beta_1\right) \langle Pu, u \rangle$$

où

$$\beta_2 = \frac{1}{b-a} \max\left(b-a, \frac{1}{2}, \frac{c_0}{2} \right), \quad \text{et} \quad \beta_1 = \frac{1}{b-a} \max\left(2 + \frac{c_0}{2}, b-a+\frac{1}{2} \right)$$

On choisit $\varepsilon < \varepsilon_0$, $1 - \frac{\varepsilon_0}{2}\beta_2 = 0$, et on en déduit $E(u)(s) \leqslant C(\varepsilon)\langle Pu, u\rangle$ D'où $\|P^{-1}\| \leqslant \inf_{\varepsilon < \varepsilon_0} C(\varepsilon)$ (28) D'où le théorème

Remarque On peut de nouveau définir l'opérateur $\mathscr{A}$ du graphe de P dans $L^2(\mathbb{R}^+, Gr(P))$ comme dans le cas du contrôle frontière de Dirichlet Cet opérateur est à image fermée car si on considère le système d'optimalité on a $\partial_{tt}^2 p - \Delta p = -\Delta u$, en posant w solution de $-\Delta w = p$ dans Ω et $w = 0$ sur Γ et en multipliant l'équation en p par $\partial_t w$, on trouve que

$$\partial_t \|\partial_t p\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + |p|^2 = 2\langle \partial_x u, \partial_{xt}^2 w\rangle$$

D'où $\|P(u, \partial_t u)\|_X' \leqslant \int_s^{+\infty} |\partial_x u|^2\, dx + \|\partial_t p\|_{H^{-1}}^2$, si bien que

$$\frac{1}{\|P^{-1}\|} E(u)(s) \leqslant \int_s^{+\infty} (1 + \|P\|)\, E(u)(t)\, dt$$

4.4. L'exemple du contrôle H_∞

Le théorème 1 s'applique aussi à des problèmes stabilisation par un contrôle H_∞ formulés sous forme de problème de min max

Considérons l'équation d'état

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta u = b_1\, v + b_2\, w & \text{dans} \quad Q = \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \\ u(0) = u_0,\ \partial_t u(0) = u_1 \end{cases} \tag{29}$$

dans laquelle v désigne le contrôle et w la perturbation. Soit la fonctionnelle :

$$J_\gamma(v, w) = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^+} |c \nabla u|^2 + |v|^2 - \gamma^2 |w|^2 \, dt\right)$$

où b_1, b_2 et c sont des fonctions définies comme les fonctions b et c du paragraphe 4.1 relativement à des ouverts Ω_{b_1}, Ω_{b_2}, Ω_c et γ un réel strictement positif. On étudie le problème de min-max :

$$\inf_{v \in L^2(Q)} \sup_{w \in L^2(Q)} J_\gamma(v, w) .$$

Le système d'optimalité associé à ce problème est :

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta u = - b_1^2 p + \gamma^{-2} b_2^2 p \quad \text{dans} \quad Q \\ \partial_{tt} p - \Delta p = - \operatorname{div}(c^2 \nabla u) \quad \text{dans} \quad Q \\ u = p = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1 \end{cases} \tag{30}$$

où (u, p) ont les mêmes régularités qu'au paragraphe 4.1.

L'opérateur de Riccati est défini par :

$$P_\gamma : \begin{matrix} U \to X \\ (u(t), \partial_t u(t)) \to (-\partial p(t), p(t)) \end{matrix}$$

où U et X sont définis au paragraphe 4.1. Comme dans le cas du contrôle optimal :

$$\partial_t \langle P_\gamma(u(t), \partial_t u(t)), (u(t), \partial_t u(t)) \rangle_{U,X} = - |\nabla u|^2 - |b_1 p|^2 + \frac{1}{\gamma^2} |b_2 p|^2 .$$

L'équation (30_1) stabilisée par ce contrôle est :

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta u = (- b_1^2 + \gamma^{-2} b_2^2)(P_{\gamma 21} u + P_{\gamma 22} \partial_t u) \quad \text{dans} \quad Q \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \\ u(0) = u_0, \partial_t u(0) = u_1 . \end{cases} \tag{31}$$

Dans ce cas, le théorème 1 s'applique encore à condition que l'opérateur de Riccati P_γ soit un isomorphisme. Par contre le théorème 3 n'est applicable qu'à condition que la fonction

$$\varphi(t) = \langle P_\gamma(u(t), \partial_t u(t)), (u(t), \partial_t u(t)) \rangle_{U,X}$$

soit décroissante. Ceci est vrai en particulier si le support de b_2 est inclus dans celui de b_1 et si $b_2 \leqslant b_1$. Dans le cas général, le théorème 3 ne s'applique pas.

4.5. Autres domaines d'applications

Le théorème 1 s'applique à d'autres types de problèmes de stabilisation. Considérons l'équation des ondes amorties avec b défini comme au paragraphe 4.1 :

$$\partial_{tt}^2 u - \Delta u + b\, \partial_t u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{32}$$

avec les conditions initiales (u_0, u_1). Notons $U = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et A le générateur infinitésimal du semi-groupe associé à l'équation (32) :

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ \Delta & -Id \end{pmatrix}$$

et $\mathscr{A}$ l'opérateur défini exactement comme au paragraphe 4.1 mais associé au semi-groupe ci-dessus.

THÉORÈME 13 : *Les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées pour l'équation (32).*

Conclusion : Nous avons proposé une méthode générale de calcul du taux de décroissance de la solution de problème de stabilisation. Nous l'avons appliquée à l'équation des ondes stabilisées par contrôle optimal, contrôle H_∞ et amortissement en vitesse. Par ailleurs, nous avons proposé deux méthodes d'estimations du taux de décroissance pour des problèmes de stabilisation par contrôle optimal. Elles montrent que les normes de l'opérateur de Riccati et de son inverse peuvent servir d'indicateur de ce taux. Une de ces méthodes a été appliquée aux différents problèmes de contrôle optimal envisagés. Enfin, une estimation de la norme de l'opérateur de Riccati a été obtenue dans certains cas.

RÉFÉRENCES

[1] S. J. COX, E. ZUAZUA, 1993, Estimation sur le taux de décroissance exponentielle de l'énergie dans des équations ondes dissipatives linéaires. *C. R. Acad. Sci.* **317** Série 1, pp. 249-254.

[2] R. DATKO, 1970, Extending a theorem of Lyapunov to Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **32,** pp. 610-616.

[3] F. FLANDOLI, I. LASIECKA, R. TRIGGIANI, 1988, Algebraic Riccati equations with non smoothing observation arising in hyperbolic and Euler-Bernoulli boundary control problems. *Annali. Mathem. Pura e appl.,* **CLiii,** pp. 307-382.

[4] V. KOMORNIK, 1991, Rapid boundary stabilization of the wave equation, *S.I.A.M. J. Control Opt,* **29,** pp. 197-208.

[5] V. KOMORNIK, E. ZUAZUA, 1987, Stabilisation frontière de l'équation des ondes : Une méthode directe. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **305,** Série I, pp. 605-608.

[6] V. KOMORNIK, E. ZUAZUA, 1990, A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, *J. Math, Pures Appl.,* **69,** pp. 33-54.

[7] G. LEBEAU, 1994, Equation des ondes amorties, *Prépublications de l'Université d'Orsay,* n° 94-19.

[8] J. L. LIONS, 1988, Exact controllability, stabilization and perturbation for distributed systems, *S.I.A.M. Review,* **30,** pp. 1-68.

[9] E. ZUAZUA, 1989, Sur l'optimalité des feedback de stabilisation, *C. R. Acad. Sci.,* **309,** Série 1, pp. 547-552.

[10] A. BENABDALLAH, M. LENCZNER, 1994, Stabilisation de l'équation des ondes par un contrôle optimal distribué, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **319,** Série 1, pp. 691-696.

[11] A. BENABDALLAH, M. LENCZNER, 1994, Stabilization for the plate equation Estimate of the decay rate of the solution, *Second European Conference on Smart Structures and Materials,* Glasgow 12-14 October 1994.