M2AN - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

A. FDIL

Sélection entre procédés d'accélération de la convergence

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 30, nº 1 (1996), p. 83-101

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1996__30_1_83_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 30, n° 1, 1996, p. 83 à 101)

SÉLECTION ENTRE PROCÉDÉS D'ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE (*)

par A. FDIL (1)

Résumé. — *Dans cet article, nous proposons des méthodes de sélection entre un nombre fini et infini de procédés d'accélération de la convergence. Des résultats d'accélération de la convergence d'une réunion finie ou infinie d'ensembles de suites accélérables ont été obtenus. Les résultats théoriques sont confirmés par des expériences numériques qui illustrent l'importance des techniques de sélection entre les méthodes d'accélération de la convergence.*

Mots-Clés : sélection, accélération de la convergence.

Abstract. — *In this paper, some methods of selection among a finite and infinite number of accelerating convergence processes are proposed. Some results for accelerating the convergence of a finite or infinite union of accelerable sets have been obtained. Theoretical results are confirmed by numerical experiments which show the importance of the techniques of selection among methods for accelerating the convergence.*

Key words : selection, acceleration of convergence.

INTRODUCTION

Lorsque l'on veut accélérer une suite, on se trouve confronté au problème du choix du procédé d'accélération de la convergence [1], [2], [4], [11] ayant le plus de chance d'être efficace. Pour surmonter cette difficulté Delahaye [7], [8], a proposé l'idée de faire un choix automatique entre les procédés d'accélération de la convergence. Dans cet article nous reprenons cette idée et nous proposons de nouvelles méthodes de sélection entre transformations de suites ; pour d'autres méthodes à consulter [3], [7], [8], [10].

Dans la section 1, nous présentons des notations et des définitions que nous utiliserons dans la suite. Dans la section 2, nous proposons des méthodes de sélection entre un nombre fini de transformations de suites, permettant l'accélération d'une réunion finie de familles de suites accélérables et nous terminons cette section par des essais numériques.

(*) Manuscrit reçu le 22 novembre 1993 et sous forme révisée le 10 mai 1995.
(1) Département de Mathématiques E.N.S. de Marrakech, B.P. S 41, 40000 Marrackech, Maroc.

Dans la section 3, nous étudions le problème du choix automatique entre une infinité dénombrable de transformations de suites, qui est très utile lorsque l'on utilise des transformations de suites dont les réponses peuvent être disposées dans un tableau à double entrée comme c'est le cas par exemple, de l'ε-algorithme, du ρ-algorithme [1], [4], [5], en interprétant le tableau comme la donnée d'une infinité dénombrable de transformations de suites.

1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Dans la suite nous désignerons par :

N : ensemble des entiers naturels ; $N^* = N - \{0\}$.

R : ensemble des nombres réels.

$R_+ = \{x \in R/x \geqslant 0\}$; $R_+^* = R_+ - \{0\}$.

E : espace métrique dont la distance sera noté d.

E^N : ensemble des suites infinies d'éléments de E.

Conv (E) : ensemble des suites convergentes. Lorsque $(x_n) \in$ Conv (E), nous notons par x sa limite.

$\text{Conv}^*\ (E) = \{(x_n) \in \text{Conv}\ (E) \mid \exists n_0, \forall n \geqslant n_0 : x \neq x_{n+1}\}$.

DÉFINITION 1 : *Toute fonction de E^N dans E^N est dite transformation de suites.*

Pour plus de détail sur cette définition, consulter [7].

Nous notons par Trans (E, E) *l'ensemble des transformations des suites de E^N à valeurs dans E^N.*

Soit $A \in$ Trans (E, E). *Nous notons par* dom A *le domaine de définition de A. Lorsque $(x_n) \in$* dom A, *nous notons par (A_n) la suite image de (x_n)* par *A.*

DÉFINITION 2 : *Soient $q \in N^* \cdot S \subset$* Conv (E), *$A \in$* Trans (E, E).

On dit que A est exacte sur S si pour toute suite $(x_n) \in S$ on a : $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0 : A_n = x$.

On dit que A est semi-régulière sur S si pour toute suite $(x_n) \in S$ on a : si $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $A_n = A_{n+1}$ alors $\exists n_1$, $\forall n \geqslant n_1 : A_n = x$.

On dit que A est pseudo-régulière d'ordre q sur S si pour toute suite $(x_n) \in S$ on a :

Si $\forall n$, $\exists m \geqslant n$ tel que $A_m = A_{m+1} = \cdots = A_{m+q}$ alors $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0 : A_n = x$.

Dans [1], [4], [6], [7], [9], [10], [11] *on trouve des résultats d'exactitude pour certains procédés d'accélération de la convergence.*

Remarque : Soient p, $q \in N^*$, $p \geqslant q$. Nous avons :

$$\begin{array}{ccc} A \text{ est pseudo-régulière d'ordre } q \text{ sur } S & \Rightarrow & A \text{ est pseudo-régulière d'ordre } p \text{ sur } S \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A \text{ est exacte sur } S & \Rightarrow & A \text{ est semi-régulière sur } S \end{array}$$

DÉFINITION 3 : Soient $q \in N^*$, $S \subset \text{Conv}^*(E)$, $A \in \text{Trans}(E, E)$.

— On dit que A accélère (resp. Δ-accélère) S si $\forall (x_n) \in S$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0 : d(A_n, x) \leqslant \varepsilon\, d(x_n, x) \left(\text{resp.} \frac{d(A_n, A_{n+1})}{d(x_n, x_{n+1})} \leqslant \varepsilon \right).$$

— On dit que A est (q)-nette sur S si pour tout $(x_n) \in S$ on a : A accélère et Δ-accélère S ou bien

$$\exists \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0 : \max_{1 \leqslant r \leqslant q} \left(\frac{d(A_{n-r}, A_{n-r+1})}{d(x_{n-r}, x_{n-r+1})} \right) \geqslant \varepsilon .$$

Remarques :

1) Soient $p, \; q \in N^*, \; p \geqslant q$.
Si A est (q)-nette sur S alors A est (p)-nette sur S.

2) Lorsque $E = R$ on a :

a) Si $\forall (x_n) \in S : \exists n_0, \forall n \geqslant n_0 : (x_{n+1} - x_n)(x_{n_0+1} - x_{n_0}) > 0$

et si la suite $\dfrac{(A_{n+1} - A_n)}{(x_{n+1} - x_n)}$ est convergente, alors A est (1)-nette sur S.

b) Si pour tout $(x_n) \in S$ on a :

$$\exists \alpha, \beta \in R, \alpha < 1 < \beta, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0 : \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} \notin [\alpha, \beta]$$

et $\left(\dfrac{A_n - x}{x_n - x} \right)$ est convergente.

Alors A est (1)-nette sur S.

2. SÉLECTION ENTRE UN NOMBRE FINI DE TRANSFORMATIONS DE SUITES

DÉFINITION 4 : *Soient* $A^1, \ldots, A^k \in \text{Trans}(E, E)$.

Une transformation $T \in \text{Trans}(E, E)$ *est dite méthode de sélection entre* $A^1, \ldots, A^k$, *si* $\forall (x_n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{dom}\, A^i$, *on a :*

$$T(x_n) = (T_n) \quad \text{avec} \quad T_n \in \{A_n^1, \ldots, A_n^k\} \text{ pour tout } n \in N .$$

Dans [10] on trouve une étude détaillée de divers types de méthodes de sélections.

Soient $n_0 \in N$, $k \in N^*$, $(\mathcal{R}_i^{(n)})$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ suites de relations. $(\mathcal{R}_i^{(n)})$ est vraie ou fausse selon i et n.

Pour tout $i \in \{1, ..., k\}$ on pose :

$$r_{i,0}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0 \text{ ou } si\ \mathcal{R}_i^{(n)} \text{ est fausse} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$r_{i,1}^{(n)} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad n < n_0 \\ \text{card}\{q \in \{n_0, ..., n\} / \mathcal{R}_i^{(q)} \text{ est vraie}\} \text{ sinon .} \end{cases}$$

$r_{i,1}^{(n)}$ représente le nombre de relations $(\mathcal{R}_i^{(q)})$ avec $q \geqslant n_0$ qui sont vraies.

Les suites $(r_{i,0}^{(n)})_n$, $(r_{i,1}^{(n)})_n$, de nombres entiers sont appelées coefficients de décompte associés aux relations $(\mathcal{R}_i^{(n)})_{n \geqslant n_0}$, [7], [8], [10]. Ces coefficients de décompte sont la base des méthodes de sélection.

Soient $q \in N^*$, $f \in \{0, 1\}$, $A^1, ..., A^k \in$ Trans (E, E) avec

$$\bigcap_{i=1}^{k} dom\, A^i \neq \varnothing.$$

a) Méthode de sélection $M_{(f,q)}$

La transformation de suites $A = M_{(f,q)}$ appliquée à une suite $(x_n) \in \bigcap_{i=1}^{k} \text{dom}\, A^i$, fonctionne comme suit :

Étape $n < q$:

$$A_n = A_n^1 .$$

Étape $n \geqslant q$:

1) On considère les relations $(\mathcal{R}_i^{(n)})$ $i \in \{1, ..., k\}$ définies par :

Si $\forall r \in \{n - q, ..., n - 1\}$: $x_r \neq x_{r+1}$ alors on pose :

$$(\mathcal{R}_i^{(n)}) : \max_{1 \leqslant j \leqslant q} \left[\frac{d(A_{n-j}^i, A_{n-j+1}^i)}{d(x_{n-j}, x_{n-j+1})} \right] =$$

$$\min_{1 \leqslant r \leqslant k} \left\{ \max_{1 \leqslant j \leqslant q} \left[\frac{d(A_{n-j}^r, A_{n-j+1}^r)}{d(x_{n-j}, x_{n-j+1})} \right] \right\} .$$

Sinon, on pose :

$$(\mathcal{R}_i^{(n)}) : \max_{1 \leqslant j \leqslant q} [d(A_{n-j}^i, A_{n-j+1}^i)] =$$

$$\min_{1 \leqslant r \leqslant k} \left\{ \max_{1 \leqslant j \leqslant q} [d(A_{n-j}^r, A_{n-j+1}^r)] \right\} .$$

2) On calcule les coefficients de décompte $r_{i,f}^{(n)}$ $i \in \{1, ..., k\}$.
3) On pose $A = A_n^{i(n)}$ avec i (n) est le plus petit indice de $\{1, ..., k\}$ tel que

$$r_{i(n),f}^{(n)} = \max_{1 \leq j \leq k} (r_{j,f}^{(n)}) .$$

b) Méthode de sélection $GV_{(f, (u_n), p, q)}$

Soient $p \in R_+^*$, $((\alpha_n^{1,i}, ..., \alpha_n^{q,i})) \in ((R_+^*)^q)^N$, $i \in \{1, ..., k\}$ telles que

$$\forall n \in N , \quad \forall i \in \{1, ..., k\} : \sum_{j=1}^{q} \alpha_n^{j,i} = 1 .$$

Notons par (u_n) la suite de terme général

$$u_n = ((\alpha_n^{1,1}, ..., \alpha_n^{q,1}), ..., (\alpha_n^{1,k}, ..., \alpha_n^{q,k})) .$$

La méthode de sélection $A = GV_{(f, (u_n), p, q)}$ a pour règles :
Étape $n < q$:

$$A_n = A_n^1$$

Étape $n \geq q$:

1) On considère les relations $(\mathcal{R}_i^{(n)})$ $i \in \{1, ..., k\}$ définies par :

$$(\mathcal{R}_i^{(n)}) : \sum_{j=1}^{q} \alpha_n^{j,i} (d(A_{n-j}^i, A_{n-j+1}^i))^p =$$

$$\min_{1 \leq r \leq k} \left[\sum_{j=1}^{q} \alpha_n^{j,r} (d(A_{n-j}^r, A_{n-j+1}^r))^p \right] .$$

2) On calcule les coefficients de décompte $r_{i,f}^{(n)}$ $i \in \{1, ..., k\}$.
3) On pose $A_n = A_n^{i(n)}$ avec $i(n)$ est le plus petit indice de $\{1, ..., k\}$ tel que

$$r_{i(n),f}^{(n)} = \max_{1 \leq j \leq k} (r_{j,f}^{(n)}) .$$

(L'entier p désigne une puissance).

Notons que la méthode de sélection $GV_{(f(u_n), p, q)}$ n'utilise pas explicitement les termes de la suite (s_n) dans les tests de sélection, ce qui n'est pas le cas pour les méthodes $M_{(f, q)}$ qui sont basées sur la notion de Δ-accélération.

Delahaye a développé dans [7] des méthodes de sélection basées sur les relations $(\mathscr{R}_i^{(n)})$ définies par :

$$(\mathscr{R}_i^{(n)}) : \max_{1 \leqslant r \leqslant q} [d(A^i_{n-j}, A^i_{n-j+1})] = \min_{1 \leqslant r \leqslant k} \left\{ \max_{1 \leqslant j \leqslant q} [d(A^r_{n-j}, A^r_{n-j+1})] \right\} .$$

Lorsque $q = 1$, les méthodes de sélection $M_{(f,q)}$, $GV_{(f,(u_n),p,q)}$ se réduisent aux méthodes de sélection ${}^fD(A^1, \dots, A^k)$ de Delahaye [7].

Nous allons maintenant étudier en détails ces techniques de choix automatique.

2.0. Résultats d'exactitude

THÉORÈME 1 : *Soient* $S^1, \dots, S^k \subset \mathrm{Conv}(E)$, $A^1, \dots, A^k \in \mathrm{Trans}(E, E)$. *Si pour tout* $i \in \{1, \dots, k\}$, A^i est exacte sur S^i *et pseudo-régulière d'ordre* q *sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$, *alors les transformations de suites* $M_{(f,q)}$, $GV_{(f,(u_n),p,q)}$ *sont exactes sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$.

Preuve : Nous allons démontrer le résultat pour la méthode de sélection $A = M_{(0,q)}$, pour les autres transformations les démonstrations en découlent facilement.

Soit $(x_n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S^i$. Il existe $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ tel que $(x_n) \in S^{i_0}$. Notons par I l'ensemble des indices des transformations exactes sur (x_n). I est non vide car $i_0 \in I$, comme I est fini, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 , \quad \forall i \in I : \max_{1 \leqslant r \leqslant q} (d(A^i_{n-r}, A^i_{n-r+1})) = 0 . \tag{1}$$

Si $I = \{1, \dots, k\}$, alors il est évident que A est exacte sur (x_n). Sinon, soit $j \in I_1 = \{1, \dots, k\} - I$. A^j étant pseudo-régulière d'ordre q sur (x_n). Par conséquent, il existe un rang $m_j \geqslant n_0$ tel que

$$\forall n \geqslant m_j : \max_{1 \leqslant r \leqslant q} (d(A^j_{n-r}, A^j_{n-r+1})) > 0 .$$

Soit $n_1 = \max_{j \in I_1} m_j$. Nous avons :

$$\forall n \geqslant n_1 , \quad \forall j \in I_1 : \max_{1 \leqslant r \leqslant q} (d(A^j_{n-r}, A^j_{n-r+1})) > 0 . \tag{2}$$

D'après (1), (2) on a $i(n) \in I$ pour tout $n \geqslant n_0$, par conséquent la transformation A est exacte sur (x_n). $\triangle$

Remarque : Si on remplace dans le théorème 1, l'hypothèse de pseudo-régularité par la semi-régularité, alors on ne peut rien affirmer en ce qui concerne les transformations $M_{(0,q)}$, $GV_{(0,(u_n),p,q)}$. En fait il est possible de montrer à l'aide de contre-exemples qu'elles ne sont pas exactes sur $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$.

Prenons $E = R$, $k = 2$, $p = q = 1$, $\alpha_n^{1,1} = \alpha_n^{1,2} = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in N$,

$$S^1 = \left\{\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}, \quad S^2 = \left\{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}.$$

On considère les transformations de suites A^1, A^2 définies par : pour tout $(x_n) \in \text{Conv}(R)$, on pose :

$$A^1(x_n) = \begin{cases} \left(2, 2, \ldots, \frac{n+2}{n+1}, \frac{n+2}{n+1}, \ldots\right) & \text{si } \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0 \\ (0) & \text{sinon}. \end{cases}$$

$$A^2(x_n) = \begin{cases} (1) & \text{si } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \\ (0) & \text{sinon}. \end{cases}$$

Nous avons A^1 est exacte sur S^1, semi-régulière sur $S^1 \cup S^2$ et A^2 est exacte sur S^2, semi-régulière sur $S^1 \cup S^2$, cependant $M_{(0,q)}$, $GV_{(0,(u_n),p,q)}$ ne sont pas exactes sur $S^1 \cup S^2$.

THÉORÈME 2 : *Soient* $S^1, \ldots, S^k \subset \text{Conv}(E)$, $A^1, \ldots, A^k \in \text{Trans}(E, E)$.

Si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, A^i *est exacte sur* S^i *et semi-régulière sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$, *alors les transformations de suites* $M_{(1,q)}$, $GV_{(1,(u_n),p,q)}$ *sont exactes sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$.

Preuve : Montrons que $M_{(1,q)}$ est exacte sur $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$.

Soit $(x_n) \in \bigcap_{i=1}^{k} S^i$. Il existe $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $(x_n) \in S^{i_0}$, par suite A^{i_0} est exacte sur (x_n). Soit I l'ensemble des indices $i \in \{1, \ldots, k\}$ tels que A^i est exacte sur (x_n). I est non vide, puisque $i_0 \in I$.

Si $I = \{1, \ldots, k\}$ alors $M_{(1,q)}$ est exacte sur (x_n).

Sinon, comme I est fini, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 , \quad \forall i \in I : \max_{1 \leqslant r \leqslant q} (d(A^i_{n-r}, A^i_{n-r+1})) = 0 .$$

Par suite

$$\forall n \geqslant n_0 , \quad \forall i \in I : r^{(n)}_{i,1} \geqslant n - n_0 + 1 . \tag{3}$$

Soit $j \in I_1 = \{1, ..., k\} - I$. A^j étant semi-régulière sur (x_n), par conséquent il existe une infinité d'entiers n pour lesquels

$$\max_{1 \leqslant r \leqslant q} (d(A^j_{n-r}, A^j_{n-r+1})) > 0.$$

Par suite il existe un rang $n_j > n_0$ tel que

$$\forall n \geqslant n_j : r^{(n)}_{j,1} < n - n_0 + 1 .$$

Posons $m_0 = \max_{j \in I_1} n_j$. Nous avons donc

$$\forall n \geqslant m_0 , \quad \forall j \in I_1 : r^{(n)}_{j,1} < n - n_0 + 1 . \tag{4}$$

D'après (3), (4) on a $i(n) \in I$ pour tout $n \geqslant m_0$; par conséquent $M_{(1,q)}$ est exacte sur (x_n).

Pour la transformation $GV_{(1,(u_n),p,q)}$, la démonstration est semblable à la démonstration précédente. $\triangle$

2.1. Résultats d'accélération de la convergence

THÉORÈME 3 : *Soient* $S^1, ..., S^k \subset \mathrm{Conv}^* (E)$, $A^1, ..., A^k \in \mathrm{Trans}\,(E, E)$.
Si pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, A^i *accélère et* Δ-*accélère* S^i *et* A^i *est* (q)-*nette sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$ *alors les méthodes de sélection* $M_{(f,q)}$, $f \in \{0, 1\}$, $q \in N^*$ *accélèrent* $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$.

Preuve : Montrons que la méthode de sélection $M_{(0,q)}$ accélère $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$.

Soit $(x_n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S^i$. Il existe $i_0 \in \{1, ..., k\}$ tel que A^i accélère et Δ-accélère (x_n).

Soit I l'ensemble des indices $i \in \{1, ..., k\}$ tel que A^i accélère et Δ-accélère (x_n). $I \neq \Phi$ car $i_0 \in I$. Par conséquent on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, \forall i \in I : d(A^i_n, x) \leqslant \varepsilon\, d(x_n, x) . \tag{5}$$

Si $I_1 = \{1, ..., k\} - I$, est vide, alors d'après (5), on a :

$$\forall n \geq n_0, \quad d(A_n^{i(n)}, x) \leq \varepsilon\, d(x_n, x) .$$

Par conséquent $M_{(0,q)}$ accélère (x_n).

Sinon, soit $j \in I_1$. A^j étant (q)-nette sur (x_n), par conséquent on a :

$$\exists \varepsilon_j > 0, \exists n_j, \forall n \geq n_j : \max_{1 \leq r \leq q} \left(\frac{d(A_{n-r}^j, A_{n-r+1}^j)}{d(x_{n-r}, x_{n-r+1})} \right) \geq \varepsilon_j .$$

Posons $\varepsilon = \min_{j \in I_1} \varepsilon_j$, $m_0 = \max_{j \in I_1} n_j$. Nous avons donc

$$\forall n \geq m_0, \quad \forall j \in I_1 : \max_{1 \leq r \leq q} \left(\frac{d(A_{n-r}^j, A_{n-r+1}^j)}{d(x_{n-r}, x_{n-r+1})} \right) \geq \varepsilon . \tag{6}$$

Comme pour tout $i \in I$, A^i Δ-accélère (x_n), il en résulte que :

$$\exists m_1 \geq m_0, \forall n \geq m_1, \forall i \in I : \max_{1 \leq r \leq q} \left(\frac{d(A_{n-r}^i, A_{n-r+1}^i)}{d(x_{n-r}, x_{n-r+1})} \right) < \varepsilon . \tag{7}$$

D'après (5), (6), (7), la transformation $M_{(0,q)}$ accélère (x_n).

Pour la transformation de suites $M_{(1,q)}$ la démonstration est tout à fait analogue au raisonnement précédent. $\triangle$

THÉORÈME 4 : *Soient* $S^1, ..., S^k \subset \mathrm{Conv}^*(E)$, $A^1, ..., A^k \in \mathrm{Trans}(E, E)$. *Si*

1) $\exists \lambda > 0, \quad \forall n \in N, \forall i \in \{1, ..., k\}, \quad \forall j \in \{1, ..., q\} : \alpha_n^{j,i} \geq \lambda$.

2) *Pour tout* $i \in \{1, ..., k\}$, A^i *accélère et* Δ*-accélère* S^i *et* A^i *est* (1)*-nette sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$.

Alors pour tout $f \in \{0, 1\}$, *la transformation de suites* $GV_{(f,(u_n),p,q)}$ *accélère* $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$.

Preuve : Montrons que $GV_{(0,(u_n),p,q)}$ accélère $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$.

Soit $(x_n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S^i$. Il existe $i_0 \in \{1, ..., k\}$ tel que A^{i_0} accélère et Δ-accélère (x_n). Soit I l'ensemble des indices $i \in \{1, ..., k\}$ tel que $(x_n) \in S^i$. I est non vide puisque $i_0 \in I$. Comme pour tout $i \in I$, A^i accélère (x_n), il en résulte que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall i \in I, d(A_n^i, x) \leq \varepsilon\, d(x_n, x) . \tag{8}$$

Si $I=\{1,\dots,k\}$, alors d'après (8), la transformation $GV_{(1,(u_n),p,q)}$ accélère (x_n).

Sinon, soit $j\in I_1=\{1,\dots,k\}-I$. A^j étant (1)-nette sur (x_n), par conséquent :

$$\exists\varepsilon_j,\exists n_j,\forall n\geqslant n_j: d(A^j_{n-r},A^j_{n-r+1})\geqslant\varepsilon_j\, d(x_{n-r},x_{n-r+1})\,.$$

D'où

$$\forall n\geqslant n_j+q,\ \sum_{r=1}^{q}\alpha_n^{r,j}(d(A^i_{n-r},A^i_{n-r+1}))^p\geqslant$$

$$(\varepsilon_j)^p\sum_{r=1}^{q}\alpha_n^{r,j}(d(x_{n-r},x_{n-r+1}))^p\,.$$

Par suite, d'après 1) du théorème 4, on a :

$$\forall n\geqslant n_j+q,\ \sum_{r=1}^{q}\alpha_n^{r,j}(d(A^j_{n-r},A^j_{n-r+1}))^p\geqslant\lambda(\varepsilon_j)^p\sum_{r=1}^{q}(d(x_{n-r},x_{n-r+1}))^p\,.$$

Posons $\varepsilon=\min_{j\in I_1}\varepsilon_j$, $m_0=q+\max_{j\in I_1}n_j$.

D'où $\forall n\geqslant m_0,\forall j\in I_1$:

$$\sum_{r=1}^{q}\alpha_n^{r,j}(d(A^j_{n-r},A^j_{n-r+1}))^p\geqslant\lambda(\varepsilon)^p\sum_{r=1}^{q}(d(x_{n-r},x_{n-r+1}))^p\,.\tag{9}$$

Soit $\varepsilon'\in\,]0,\lambda^{1/p}\varepsilon[$.

Comme pour tout $i\in I$, A^i Δ-accélère (x_n), il en résulte que :

$$\exists m_1\geqslant m_0\,,\quad\forall n\geqslant m_1\,,\quad\forall i\in I:$$

$$\sum_{r=1}^{q}\alpha_n^{r,j}(d(A^j_{n-r},A^j_{n-r+1}))^p\leqslant(\varepsilon')^p\sum_{r=1}^{q}(d(x_{n-r},x_{n-r+1}))^p\,.\tag{10}$$

D'après (8), (9), (10), la transformation $GV_{(0,(u_n),p,q)}$ accélère (x_n).

Pour la transformation $GV_{(1,(u_n),p,q)}$, la démonstration en découle facilement. $\triangle$

Remarques :

1) Si la suite $u_n=((\alpha_n^{1,1},\dots,\alpha_n^{q,1}),\dots,(\alpha_n^{1,k},\dots,\alpha_n^{q,k}))$ est telle que

$$\exists n_0,\forall n\geqslant n_0,\forall i,j\in\{1,\dots,k\},\forall r\in\{1,\dots,q\}:\alpha_n^{r,i}=\alpha_n^{r,j}\,.$$

Alors le théorème 4 est encore vrai, sans que la condition 1) soit satisfaite.
2) On obtient des résultats analogues si la suite (u_n) est telle que :

$$\exists b_1 > 0, \exists b_2 > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, \forall i \in \{1, \ldots, k\} : b_1 \leqslant \sum_{r=1}^{q} \alpha_n^{r,i} \leqslant b_2 .$$

THÉORÈME 5 : *Soient* $S^1, \ldots, S^k \subset \mathrm{Conv}^*(E)$, $A^1, \ldots, A^k \in \mathrm{Trans}(E, E)$.
Si

1) $\exists \lambda > 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}, \quad \forall n \in N, \quad \forall j \in \{1, \ldots, q\} : \alpha_n^{j,i} \geqslant \lambda,$

2) $\forall (x_n) \in \bigcup_{i=1}^{k} S^i, \ \exists \mu, \ \theta \in \,]0, 1[, \ \exists n_0, \ \forall n \geqslant n_0 :$

$$\theta \leqslant \frac{d(x_n, x_{n+1})}{d(x_n, x_{n-1})} \leqslant \mu ,$$

3) *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$, A^i *accélère et* Δ*-accélère* S^i *et* A^i *est* (q)*-nette sur* $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$, *alors les transformations de suites* $GV_{(f, (u_n), p, q)}$, $f \in \{0, 1\}$ *accélèrent* $\bigcup_{i=1}^{k} S^i$.

La preuve est semblable à celle du théorème 4.

2.2. Expériences numériques

Nous allons tester les différentes méthodes de sélections que nous venons de voir sur les transformations suivantes :

A^1 : Le procédé de Richardson avec $\left(\frac{1}{n}\right)$ comme suite auxiliaire [1], [2], [9].

A^2 : L'ε-algorithme [1], [4], [5].

A^3 : Le ρ-algorithme avec (n) comme suite auxiliaire [1], [4], [5].

A^4 : Le procédé d'Overholt [1], [11].

A^5 : Le θ-algorithme [1], [11].

A^6 : Le Δ^2 itérée [1].

Les calculs avec ces transformations de suites sont effectués avec les programmes de Brezinski [1].

Pour les paramètres des méthodes de sélection, nous prenons $p = 1$, $q = 2$ et $\alpha_n^{j,i} = \frac{1}{2}$ pour tout $j \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, \ldots, 6\}$.

Exemple 1 : $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $\forall n \geqslant 1$. La suite est convergente vers $x = \frac{\pi^2}{6}$.

Les résultats des méthodes $M_{(f,2)} f \in \{0, 1\}$ sont résumés dans le tableau ci-dessous, où à chaque étape n nous donnons le rang de $|A_n^{i(n)} - x|$ dans le classement par ordre croissant des erreurs $|A_n^1 - x|, \ldots, |A_n^6 - x|$.

$n \backslash f$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
0	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	3	4	4	5	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

On voit qu'à partir de $n = 22$, les 2 méthodes de sélection proposent les meilleures réponses.

Les résultats de $M_{(0,2)}$ sont meilleurs que les résultats de $M_{(1,2)}$.

De même les transformations $GV_{\left(f, \left(\frac{1}{2}\right), 1, 2\right)}$ ont fourni les bonnes réponses à partir de $n = 22$.

Exemple 2 : $x_n = (n+1) \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$ $\forall n \geq 0$. La limite de (x_n) est $x = 1$.

Les différentes méthodes de sélection ont proposé les meilleures réponses possible comme le montre le tableau suivant :

n	x_n	$A_n^{i(n)}$
6	0,996602108545846D+00	0,100000009521136D+00
7	0,997397867081821D+00	0,999999996862965D+00
8	0,997943656589577D+00	0,999999999097493D+00
9	0,998334166468281D+00	0,999999999999383D+00
10	0,998623158597574D+00	0,100000000000265D+01

Exemple 3 : $x_0 = 0$, $x_{n+1} = e^{-x_n}$ $\forall n \geq 1$. La limite de (x_n) est $x \approx 0.5671432904097$.

A partir de $n = 8$ toutes les méthodes de sélection ont donné les résultats suivants :

n	x_n	$A_n^{i(n)}$
8	0,579612335503379D+00	0,567143293361608D+00
9	0,560115461361089D+00	0,567143290385814D+00
10	0,571143115080177D+00	0,567143290409658D+00
11	0,564879347391050D+00	0,567143290409784D+00
12	0,568428725029061D+00	0,567143290409784D+00

Exemple 4 : $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + 0{,}9\,(x_n - 1)\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ $\forall n \geqslant 1$. La limite de (x_n) est $x = 1$. (x_n) est accéléré par A^2, A^5, A^6.

Les résultats des méthodes de sélection $GV_{\left(f, \left(\frac{1}{2}\right), 1, 2\right)}$, $f \in \{0, 1\}$ sont résumés dans le tableau suivant :

n \ f	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
0	2	3	3	1	3	3	1	1	3	3	3	2	3	3	2	2	1	1	1	1	1
1	1	3	3	3	1	1	1	1	2	3	3	2	3	3	2	2	1	1	1	1	1

On voit qu'à partir de $n = 13$, ces méthodes ne proposent que les réponses des transformations qui accélèrent (x_n) et à partir de $n = 30$ les réponses choisies sont les meilleures réponses.

Pour les transformations $M_{(f, 2)}$, $f \in \{0, 1\}$ les résultats sont identiques aux résultats précédents.

Pour d'autres exemples, consulter [10] où l'on trouvera une étude numérique détaillée et un programme fortran qui met en œuvre un certain nombre de méthodes de sélection.

3. CHOIX AUTOMATIQUE ENTRE UNE INFINITÉ DÉNOMBRABLE DE TRANSFORMATIONS DE SUITES

Dans ce paragraphe, nous donnons une extension des méthodes de sélection $M_{(f, q)}$ au cas où on a une infinité dénombrable de transformations de suites $A^1, A^2, \ldots, A^n, \ldots$ en prenant en compétition à chaque étape n les transformations de suites $A^1, A^2, \ldots, A^n$.

Nous donnons dans cette section deux résultats concernant l'exactitude et l'accélération de la convergence d'une réunion dénombrable d'ensembles de suites convergentes.

Soient $(\mathscr{R}_i^{(n)})$ $i \geqslant 1$, $n \geqslant n_0$ famille de relations $(\mathscr{R}_i^{(n)})$ définies pour tout $i \geqslant 1$ et pour tout $n \geqslant n_0$. Pour $n \in N$, $i \in N^*$, on pose :

$$r_{i,\hat{0}}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < \max(n_0, i) \text{ ou si } \mathscr{R}_i^{(n)} \text{ est fausse}, \\ 1 & \text{sinon}. \end{cases}$$

$$r_{i,\hat{1}}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \quad n < \max(n_0, i), \\ \operatorname{card}\{q \in \{i, \ldots, n\} \mid \mathscr{R}_i^{(q)} \text{ est vraie}\} & \text{sinon}. \end{cases}$$

Les coefficients $r_{i,\hat{0}}^{(n)}$, $r_{i,\hat{1}}^{(n)}$, sont appelés semi-coefficients de décompte associés aux relations $(\mathscr{R}_i^{(n)})$ $i \geq 1$, $n \geq n_0$ [10]. Ils seront utilisés dans les tests de sélection entre $A^1, \ldots, A^i, \ldots$

3.0. Transformations $M_{(\hat{0},q)}$, $M_{(\hat{1},q)}$

Soient $f \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$, $q \in N^*$, $A^1, \ldots, A^n, \ldots \in \text{Trans}(E, E)$ avec $\bigcap_{i=1}^{\infty} \operatorname{dom} A^i \neq \varnothing$.

La transformation de suites $A = M_{(f,q)}$ appliquée à une suite $(x_n) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \operatorname{dom} A^i$, a pour règles :

Étape $n < q$:

$$A^n = A_n^1 .$$

Étape $n \geq q$:

1) On considère les relations $(\mathscr{R}_i^{(n)})$ $i \in \{1, \ldots, n\}$ définies par :

Si $\forall r \in \{n-q, \ldots, n-1\}$ $x_r \neq x_{r+1}$, alors on pose :

$$(\mathscr{R}_i^{(n)}) : \max_{n-q \leq r \leq n-1} \left(\frac{d(A_r^i, A_{r+1}^i)}{d(x_r, x_{r+1})} \right) = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \max_{n-q \leq r \leq n-1} \left(\frac{d(A_r^j, A_{r+1}^j)}{d(x_r, x_{r+1})} \right) \right\} .$$

Sinon, on pose :

$$(\mathscr{R}_i^{(n)}) : \max_{n-q \leq r \leq n-1} d(A_r^i, A_{r+1}^i) = \min_{1 \leq j \leq n} \left(\max_{n-q \leq r \leq n-1} d(A_r^j, A_{r+1}^j) \right)$$

2) On calcule les semi-coefficients de décompte $r_{i,f}^{(n)}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$.

3) On pose $A^{(n)} = A_{i(n)}^n$ avec

$$i(n) = \min \left\{ i \in \{1, \ldots, n\} / r_{i,f}^{(n)} = \max_{1 \leq j \leq n} r_{j,f}^{(n)} \right\} .$$

3.1. Exactitude

THÉORÈME 6 : *Soient* $q \in N^*$, $(S^i)_{i \geq 1}$ *une suite de sous-ensembles de* $\text{Conv}^*(E)$, *et* $(A^i)_{i \geq 1}$ *une suite d'éléments de* $\text{Trans}(E, E)$. *Si pour tout* $i \in N^*$, A^i *est exacte sur* S^i, *pseudo-régulière d'ordre* q *sur* $\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$, *alors les transformations de suites* $M_{(f,q)}$, $f \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$ *sont exactes sur* $\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$.

Preuve : Nous allons montrer que $A = M_{(\hat{0}, q)}$ est exacte sur $\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$.

Soit $(x_n) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$. Il existe $i_0 \in N^*$ tel que $(x_n) \in S^{i_0}$, par suite A^{i_0} est exacte sur (x_n).

Soit I l'ensemble des indices $i \in \{1, ..., i_0\}$ tel que A^i est exacte sur (x_n). Si $I = \{1, ..., i_0\}$ alors il existe un rang m_0 tel que

$$\forall n \geqslant m_0 , \quad A_n = A_n^{i_0} = x .$$

Sinon, soit $j \in \{1, ..., i_0\} - I$. A^j est pseudo-régulière d'ordre q sur (x_n), par conséquent :

$$\exists m_1 , \quad \forall n \geqslant m_1 , \quad \forall j \in I_1 : r_{j, \hat{0}}^{(n)} = 0 .$$

Par suite $i(n) \in I$ pour tout $n \geqslant m_1$ et la transformation A est exacte sur (x_n).

Pour la méthode $M_{(\hat{i}, q)}$ la preuve est semblable à celle de $M_{(\hat{0}, q)}$. $\triangle$

Avec un raisonnement analogue on montre aisément le résultat suivant :

THÉORÈME 7 : *Soient $q \in N^*$, $(S^i)_{i \geqslant 1}$ une suite de sous-ensembles de* Conv* (E), et $(A^i)_{i \geqslant 1}$ *une suite d'éléments de* Trans (E, E). *Si pour tout $i \in N^*$, A^i est exacte sur S^i, semi-régulière sur $\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$, alors la transformation de suites $M_{(\hat{1}, q)}$ est exacte sur $\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$.*

3.2. Accélération de la convergence

THÉORÈME 8 : *Soient $q \in N^*$, $(S^i)_{i \geqslant 1}$ une suite de sous-ensembles de* Conv* (E), *et* $(A^i)_{i \geqslant 1}$ *une suite d'éléments de* Trans (E, E). *Si pour tout $(x_n) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$, l'ensemble des indices $i \in N^*$ tel que A^i accélère et Δ-accélère (x_n) est fini et si*

$$\exists \varepsilon > 0, \exists m_0, \forall n \geqslant m_0, \forall i \notin I : \max_{n-q \leqslant r \leqslant n-1} \left(\frac{d(A_r^i, A_{r+1}^i)}{d(x_r, x_{r+1})} \right) \geqslant \varepsilon .$$

Alors $M_{(f, q)}$, $f \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$ accélère $\bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$.

La preuve est tout à fait analogue à celle du théorème 3.

Remarque : Si une suite (x_n) est accélérable et Δ-accélérée par une infinité de transformations de suites, alors il se peut que $M_{(f, q)}, f \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$ n'accélèrent pas (x_n). En fait :

Prenons $E = R$, $S^i = \left\{ \left(\frac{1}{n+1} \right) \right\}$ pour tout $i \geqslant 1$, $f = \hat{0}$, $q = 1$.

Considérons les transformations $A^1, \ldots, A^i, \ldots$, définies par : $A^i\left(\frac{1}{n+1}\right) = (A_n^i)$ avec

$$A_n^i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n < i \\ \dfrac{1}{(n+1)^2} & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

La suite (x_n) est accélérée et Δ-accélérée par toutes les transformations A^i, $i \in N^*$, cependant $M_{(\hat{0},q)}$, $M_{(\hat{1},q)}$ n'accélèrent pas $\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

3.3. Applications

Quand on veut accélérer une suite à l'aide d'un procédé d'accélération de la convergence dont les réponses peuvent être disposées dans un tableau à double entrée, on se trouve confronté au problème du choix d'une suite de réponses parmi les quantités du tableau permettant d'accélérer la suite donnée. Il se peut que l'on ait parfois de bonnes raisons de choisir telle suite de réponses. Cependant, le plus souvent on fait un choix arbitraire. Pour surmonter cette difficulté, nous proposons d'appliquer les méthodes de sélection entre une infinité dénombrable de transformations de suites à la sélection entre les réponses du tableau associé à la transformation considérée, en interprétant le tableau comme la donnée d'une infinité de transformations de suites.

Dans cette section, nous appliquons les techniques de sélection présentées dans la section 3.0 au tableau de l'ε-algorithme.

a) Sélection entre les colonnes d'indices $k \in N^*$, k pair

Quand on applique l'ε-algorithme à une suite (x_n), on obtient un tableau de quantités (ε_k^n) où l'indice inférieur k (resp. supérieur n) de la quantité ε_k^n désigne la k-ième colonne (resp. la n-ième diagonale descendante)

$$\begin{array}{lllll}
\varepsilon_0^0 = x_0 & & & & \\
 & \varepsilon_1^0 & & & \\
\varepsilon_0^1 = x_1 & & \varepsilon_2^0 & & \\
 & \varepsilon_1^1 & & \varepsilon_3^0 & \\
\varepsilon_0^2 = x_2 & & \varepsilon_2^1 & & \varepsilon_4^0 \\
 & \varepsilon_1^2 & & \varepsilon_3^1 & & . \\
\varepsilon_0^3 = x_3 & & \varepsilon_2^2 & & . & & . \\
 & \varepsilon_1^3 & & . & & . & & . \\
. & & . & & . & & . & & .
\end{array}$$

A chaque étape n, nous choisissons une réponse que nous notons ${}_1\varepsilon_0^n$ parmi les répondes d'indices inférieurs pairs de la n-ième diagonale montante de la manière suivante :

Étape $n < 3$:

$$ {}_1\varepsilon_0^n = \varepsilon_0^n . $$

Étape $n \geqslant 3$:

1) on considère les relations $(\mathscr{R}_i^{(n)})$, $i \in \{2, ..., n-1\}$ et i est pair, définies par

$$ (\mathscr{R}_i^{(n)}) : |\varepsilon_i^{n-i} - \varepsilon_i^{n-i-1}| = \min_{\substack{j \in \{2, ..., n-1\} \\ j \text{ est pair}}} (|\varepsilon_j^{n-j} - \varepsilon_j^{n-j-1}|), $$

2) on calcule les semi-coefficients de décompte $r_{i,\hat{0}}^{(n)}$ avec $i \in \{2, ..., n-1\}$ et i est pair,

3) on pose ${}_1\varepsilon_0^n = \varepsilon_{i(n)}^{n-i(n)}$ avec $i(n)$ est le plus petit indice pair de $\{2, ..., n-1\}$ vérifiant $r_{i(n),\hat{0}}^{(n)} = \max_{\substack{j \in \{2, ..., n-1\} \\ j \text{ est pair}}} (r_{j,\hat{0}}^{(n)})$.

b) Sélection entre les diagonales descendantes

A chaque étape n nous choisissons une réponse que nous notons ${}_1\varepsilon_0^n$ parmi les réponses d'indice inférieur pair de la n-ième diagonale montante comme suit :

Étape $n \leqslant 1$:

$$ {}^1\varepsilon_0^n = \varepsilon_0^n . $$

Étape $n \geqslant 2$:

1) on considère les relations $(\mathscr{R}_i^{(n)})$, $i \in \{2, ..., n\}$ et i est pair, définies par

$$ (\mathscr{R}_i^{(n)}) : |\varepsilon_i^{n-i} - \varepsilon_{i-2}^{n-i}| = \min_{\substack{j \in \{2, ..., n\} \\ j \text{ est pair}}} (|\varepsilon_j^{n-j} - \varepsilon_{j-2}^{n-j}|) $$

2) on calcule les semi-coefficients de décompte $r_{i,\hat{0}}^{(n)}$ avec $i \in \{2, ..., n\}$ et i est pair

3) on pose ${}^1\varepsilon_0^n = \varepsilon_{i(n)}^{n-i(n)}$ avec $i(n)$ est le plus petit indice pair de $\{2, ..., n\}$ vérifiant $r_{i(n),\hat{0}}^{(n)} = \max_{\substack{j \in \{2, ..., n\} \\ j \text{ est pair}}} (r_{j,\hat{0}}^{(n)})$.

Exemple : $x_n = \dfrac{1}{\operatorname{Log}(2)} \sum_{i=0}^{n} \dfrac{(-1)^i}{i+1}$ $\forall n \geqslant 0$. Limite de (x_n) est 1.

Les résultats de la méthode de sélection entre les colonnes d'indices $k \in N^*$, k est pair et de la méthode de sélection entre les diagonales descendantes sont résumés dans le tableau suivant :

n	x_n	${}^{1}\varepsilon_0^n$	${}_{1}\varepsilon_0^n$
10	0,931454298224739D+00	0,999999945073384D+00	0,999999945073384D+00
11	0,106260839285101D+00	0,100000001642137D+01	0,100000000635101D+01
12	0,942383806110261D+00	0,999999998496468D+00	0,999999998496468D+01
13	0,105336034771710D+00	0,100000000041692D+01	0,100000000018498D+01
14	0,950310701939322D+00	0,999999999958029D+00	0,999999999958029D+00
15	0,104649037133192D+00	0,100000000001099D+01	0,100000000000540D+01
16	0,956321931276359D+00	0,999999999998813D+00	0,999999999998813D+00
17	0,104118634544630D+01	0,100000000000030D+01	0,100000000000016D+01
18	0,961036620952467D+00	0,999999999999966D+00	0,999999999999966D+00

Nous terminons cette section par les remarques suivantes :

1) Il est possible d'obtenir des résultats très intéressants en pratique en prenant la suite $({}_1\varepsilon_0^n)$ ou $({}^1\varepsilon_0^n)$ comme suite initiale et en appliquant à nouveau l'ε-algorithme et la technique de sélection, en répétant plusieurs fois cette opération. Pour plus de détail sur cette technique consulter [10].

2) A l'aide de petites modifications de la technique de sélection entre les colonnes, on peut mettre en compétition la colonne d'indice 0 (colonne de la suite initiale) avec les autres colonnes d'indices pairs, ce qui semble très intéressant.

3) L'utilisation simultanée d'un procédé d'accélération de la convergence et d'une méthode de sélection est très intéressant en pratique.

Remerciements : Je remercie le Professeur C. Brezinski pour son aide à la révision de cet article.

RÉFÉRENCES

[1] C. BREZINSKI, 1978, *Algorithmes d'accélération de la convergence, Étude numérique,* Technip, Paris.

[2] C. BREZINSKI, 1980, A general extrapolation algorithm, *Numer. Math.,* **35,** pp. 175-187.

[3] C. BREZINSKI, 1983, Error control in convergence acceleration processes, *I.M.A.J. Numer. Anal.,* **3,** pp. 65-80.

[4] C. BREZINSKI, M. REDIVO ZAGLIA, 1991, *Extrapolation Methods, Theory and Practice,* North-Hollands, Amsterdam.

[5] C. BREZINSKI, 1971, Étude sur les ε et ρ-algorithmes, *Numer. Math.,* **17,** pp. 153-162.

[6] F. CORDELLIER, 1980, Sur la régularité des procédés Δ^2 d'Aitken et w de Lubkin, Padé Approximation and its Applications, *Lecture Notes in Mathematics,* **765,** Springer-verlag, Heidelberg, pp. 20-35.

[7] J. P. DELAHAYE, 1982, *Théorie des transformations de suites en analyse numérique, Application,* Thèse d'État, Lille, 1982.

[8] J. P. DELAHAYE, 1981, Automatique selection of sequence transformations, *Math. of comput.,* **37,** pp. 197-204.

[9] J. P. DELAHAYE, 1981, Choix automatique entre suites de paramètres dans l'extrapolation de Richardson, Pade Approximation and its Applications, *Lecture notes in mathematics,* **888,** Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 158-172.

[10] A. FDIL, 1984, Choix automatique entre transformations de suites. Thèse de 3^e cycle, Lille.

[11] J. WIMP, 1981, *Sequence Transformations and their Applications,* Academic Press, New-York.