

K. KHADRA

PH. ANGOT

J. P. CALTAGIRONE

P. MOREL

**Concept de zoom adaptatif en architecture
multigrille locale ; étude comparative des
méthodes L.D.C., F.A.C. et F.I.C.**

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome
30, n° 1 (1996), p. 39-82

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1996__30_1_39_0

© AFCET, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



CONCEPT DE ZOOM ADAPTATIF EN ARCHITECTURE MULTIGRILLE LOCALE ; ÉTUDE COMPARATIVE DES MÉTHODES L.D.C., F.A.C. ET F.I.C. (*)

par K. KHADRA ^(1,3) Ph. ANGOT ⁽²⁾, J. P. CALTAGIRONE ⁽¹⁾
et P. MOREL ⁽³⁾

Résumé. — *On présente une comparaison de trois méthodes de « zoom adaptatif » basées sur un concept de raffinement local multigrille hiérarchisé : L.D.C., F.A.C., ainsi que l'algorithme F.I.C. que nous avons récemment proposé. Ces méthodes sont testées numériquement sur deux exemples de problèmes elliptiques bidimensionnels. On étudie pour des procédures \wedge -cycles, l'évolution asymptotique des normes d'erreurs discrètes, les taux de convergence, ainsi que les temps de calcul.*

Abstract. — *We present a comparison of three « adaptive zoom » methods based on a concept of hierarchical multigrid local mesh refinement : L.D.C., F.A.C., and the algorithm F.I.C. that we have recently proposed. These methods are numerically tested on two examples of bidimensional elliptic problems. We study for \wedge -cycle procedures, the asymptotic evolution of the discrete norm of errors, the convergence rates, as well as the computation times.*

1. INTRODUCTION

De nombreux phénomènes physiques présentent des variations d'échelles significatives sur la solution du problème, faisant apparaître des discontinuités, des singularités, ou des écarts de gradients importants dans des régions locales du domaine. Elles peuvent provenir des termes sources, des caractéristiques physiques, des conditions aux limites, ou des fortes contraintes appliquées au système physique. Les méthodes adaptatives permettent de prendre en compte de façon efficace ces variations d'échelles à l'aide de techniques de raffinement local de maillage, dans les régions du domaine où il y a une nécessité d'une meilleure précision du calcul. Leur utilisation conduit cependant à examiner un certain nombre de points importants :

(*) Manuscrit reçu le 17 juillet 1992 et sous forme révisée le 1^{er} mars 1995.

(¹) Modélisation Avancée des Systèmes Thermiques et Ecoulements Réels, E.N.S.C.P.B., Université Bordeaux I, Avenue Pey-Berland, BP 108, 33402 Talence Cédex, France.

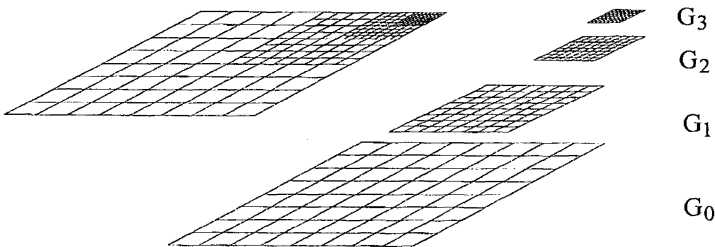
(²) Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre, UMR 138, C.N.R.S., Universités Aix-Marseille I & II, Équipe Mathématiques Numériques pour la Modélisation, 12 Avenue du Général Leclerc, 13003 Marseille, France.

(³) Mathématiques Appliquées de Bordeaux, Université Bordeaux I, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cédex, France.

— *La stabilité et la structure du maillage.* Des règles de raffinement adéquates doivent être établies, assurant la stabilité du maillage lorsqu'on veut supprimer ou rajouter localement des mailles au cours des calculs (éviter des rapports de forme trop petits entre les éléments, des étirements ou des coupures sévères). Les procédures de raffinement et de déraffinement sont en général facilitées dans le cas des maillages non structurés.

— *La précision des discrétisations et l'uniformité des maillages.* L'utilisation de maillages non uniformes entraîne une perte de précision sur l'ordre des schémas de discrétisation. De plus, l'augmentation du nombre de nœuds dans les zones de raffinement engendre tout de même un nombre de degrés de liberté relativement élevé à l'échelle de tout le domaine. Ce nombre reste encore important même dans le cas de maillage adaptatif où une stratégie de raffinement et déraffinement vise à l'obtention d'un nombre optimal de degrés de liberté. Cela conduit à la résolution de grands systèmes linéaires souvent mal conditionnés, notamment dans le cas de maillages non structurés, pour lesquels il devient difficile de trouver des solveurs efficaces et rapides. En outre, l'implémentation des méthodes numériques sur des maillages non uniformes et non structurés s'adapte assez mal aux techniques de vectorisation et de parallélisation.

Pour pallier ces difficultés, le processus *adaptatif de raffinement local* ou *zoom* que nous étudions ici repose sur une *décomposition du domaine en sous-domaines emboîtés*, et sur une *architecture multigrille hiérarchisée*. On engendre à partir d'une grille globale de base G_0 de niveau $\ell = 0$ qui discrétise le domaine physique Ω , une ou plusieurs *grilles locales de zoom emboîtées* G_ℓ de niveau ℓ , $1 \leq \ell \leq \ell^*$, et de pas de discrétisation de plus en plus fins. Toutes les grilles sont *structurées et uniformes*. Les *projections* des fonctions discrètes sur les différents niveaux de grilles sont effectuées par des opérateurs de *prolongement* et de *restriction* basés sur des interpolations. Chaque grille possède un nombre relativement modéré de nœuds, et la résolution des sous-problèmes locaux conduit à des systèmes linéaires de



Architecture multigrille locale avec $\ell^* = 3$.

« taille raisonnable » permettant l'utilisation de solveurs itératifs rapides. Il est également possible d'adopter des types de discrétisation différents selon le niveau de grille et la précision requise.

L'implémentation numérique des méthodes multigrilles locales s'effectue de façon *réursive* comme pour les techniques multigrilles usuelles [Hackbusch et Trottenberg, 1982 ; Hackbusch, 1985 ; McCormick, 1987]. La résolution du problème discret associé à chaque grille se fait de façon « exacte » (c'est-à-dire par une méthode itérative avec un critère d'arrêt suffisamment petit), ou bien de façon « inexacte » (c'est-à-dire par quelques itérations du solveur).

Dans ce contexte multigrille, la plupart des méthodes adaptatives de raffinement local peuvent s'interpréter comme des méthodes de décomposition de domaine [Xu, 1992 ; Le Tallec, 1994]. Elles parviennent à une convergence rapide par l'utilisation de *sous-domaines à recouvrement complet*. Le succès de ces méthodes de raffinement local multi-niveaux est dû au fait qu'elles combinent au mieux les meilleures propriétés des techniques multigrilles et de décomposition de domaine : taux de convergence élevé et indépendant des pas de discrétisation, implémentation parallèle, et donc diminution du temps de calcul [Angot, 1994]. L'aspect *adaptatif* des méthodes suppose un *contrôle de l'erreur*, et le choix de *critères de raffinement*. Il est nécessaire d'obtenir des estimations d'erreurs discrètes, qui permettent de localiser de façon dynamique au cours des calculs les zones de raffinement local de maillage. La solution théorique, et par conséquent les erreurs discrètes n'étant pas connues a priori, ces estimations s'effectuent par des *majorations d'erreurs a posteriori* [Bank et Weiser, 1985 ; Bank, 1986].

Il existe dans la littérature différents types de schémas de raffinement local, très similaires les uns aux autres, quant à leur approche multigrille du problème. Brandt introduisit la plupart des concepts adaptatifs multigrilles dans le cadre des méthodes M.L.A.T. (Multi-Level Adaptive Techniques) [Brandt, 1973 ; 1977], avec des améliorations présentées dans [Bai et Brandt, 1987]. Ces méthodes sont fondées sur la méthode F.M.G. (Full Multi-Grid) des itérations emboîtées, sur des estimations locales de l'erreur de troncature, avec l'utilisation du schéma multigrille F.A.S. (Full Approximation Scheme) entre les différents niveaux de grilles. La méthode F.A.C. (Fast Adaptive Composite) a été introduite par McCormick afin de généraliser la méthode M.L.A.T., avec l'utilisation d'un solveur quelconque pour la résolution du problème discret sur chaque grille [McCormick, 1984 ; 1989]. Elle est essentiellement guidée par le choix d'une grille composite de discrétisation, et n'est pas limitée par le contrôle de l'erreur de troncature. Elle peut être aussi utilisée comme une méthode de préconditionnement du problème discret sur la grille composite. Il existe également une version asynchrone de la méthode F.A.C., qui permet son implémentation sur des calculateurs parallèles : il s'agit de la méthode A.F.A.C. [McCormick, 1989] qui converge cependant deux fois moins vite que

la méthode F.A.C. La méthode B.E.P.S. [Bramble, Ewing, Pasciak et Schatz, 1988] repose sur la même approche que F.A.C., mais est utilisée comme préconditionnement du problème, et non pas comme solveur. La méthode B.P.X. [Bramble, Pasciak et Xu, 1990] qui en constitue une variante, est un préconditionneur parallèle multi-niveaux très efficace. La méthode multigrille hiérarchique [Bank, Dupont et Yserentant, 1988] permet un raffinement local par une procédure multigrille standard associée à des bases hiérarchiques en éléments finis. La méthode L.D.C. (Local Defect Correction) proposée par Hackbusch est issue des méthodes itératives de correction de résidu [Hackbusch, 1984 ; 1985]. Il existe encore d'autres méthodes telles que celle développée dans [Berger et Oliger, 1984] qui s'applique essentiellement à des problèmes hyperboliques discrétisés par des schémas explicites en temps. Nous décrivons dans la suite une méthode de raffinement local multi-niveaux récemment proposé : la méthode F.I.C. (Flux Interface Correction) [Angot, Caltagirone et Khadra, 1992 ; Angot, Caltagirone, Khadra et Morel, 1992 ; Khadra, Angot et Caltagirone, 1993 ; Khadra, 1994] basée sur une correction des flux à l'interface des sous-domaines emboîtés.

Dans cette étude, nous nous intéressons aux méthodes de raffinement local multigrille suivantes : la méthode L.D.C. (Local Defect Correction), la méthode F.A.C. (Fast Adaptive Composite), et la méthode F.I.C. (Flux Interface Correction). Nous proposons d'effectuer une comparaison de ces trois méthodes sur un problème linéaire elliptique (\mathcal{P}) du type :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} L_{\Omega} u \equiv -\operatorname{div}(\lambda(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} u) + \alpha(\mathbf{x}) u = f_{\Omega}(\mathbf{x}) \\ \text{dans } \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\\ \text{avec } \lambda, \alpha > 0 \in L^{\infty}(\Omega) \text{ et } f \in L^2(\Omega) \\ L_{\Gamma} u = f_{\Gamma} \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

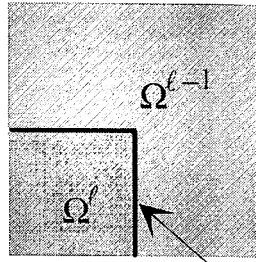
2. ARCHITECTURE MULTIGRILLE LOCALE

2.1. Notations et définitions

Dans les notations qui vont suivre, les symboles indicés en haut par ℓ désignent des formulations continues, et ceux indicés en bas par ℓ sont associés aux formulations discrètes correspondantes.

On définit une suite de domaines emboîtés de niveau ℓ , $0 \leq \ell \leq \ell^*$, caractérisés par l'ouvert Ω^{ℓ} , la frontière $\Gamma^{\ell} = \partial\Omega^{\ell}$, l'adhérence $\bar{\Omega}^{\ell} = \Omega^{\ell} \cup \Gamma^{\ell}$. On note $\Gamma^{\ell-1, \ell}$ l'interface entre deux domaines consécutifs $\Omega^{\ell-1}$ et Ω^{ℓ} . On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} \Omega^0 = \Omega \text{ et } \Gamma^0 = \Gamma \\ \overline{\Omega}^\ell \subset \overline{\Omega}^{\ell-1} \quad \forall \ell \neq 0 \\ \Gamma^{\ell-1, \ell} = \Gamma^\ell \setminus (\Gamma^\ell \cap \Gamma^{\ell-1}) \neq \emptyset \quad \forall \ell \neq 0 \end{cases}$$

Interface $\Gamma^{\ell-1, \ell}$

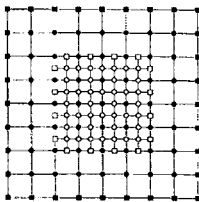
On définit la suite de grilles emboîtées G_ℓ de niveau ℓ , $0 \leq \ell \leq \ell^*$, issues d'un maillage rectangulaire cartésien des domaines $\overline{\Omega}^\ell$, et caractérisées par :

- l'ensemble Ω_ℓ des nœuds intérieurs de la grille
- l'ensemble $\Gamma_\ell = \partial\Omega_\ell$ des nœuds frontières de la grille
- l'ensemble $\overline{\Omega}_\ell = \Omega_\ell \cup \Gamma_\ell$
- le pas de discrétisation $h_\ell = ((\Delta x_1)_\ell, (\Delta x_2)_\ell)$ uniforme dans chaque direction d'espace.

Pour deux grilles successives $G_{\ell-1}$ et G_ℓ , la grille $G_{\ell-1}$ est appelée grille grossière et la grille G_ℓ est appelée grille fine de pas $h_\ell < h_{\ell-1}$. On définit le rapport des pas dans chaque direction d'espace :

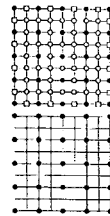
$$q_i(\ell) = \frac{(\Delta x_i)_{\ell-1}}{(\Delta x_i)_\ell} \in \mathbf{N}^* \quad \forall \ell \neq 0.$$

Les nœuds de la grille $G_{\ell-1}$ sont repérés en gras, et les nœuds de la grille G_ℓ n'appartenant pas à $G_{\ell-1}$ sont repérés en clair :



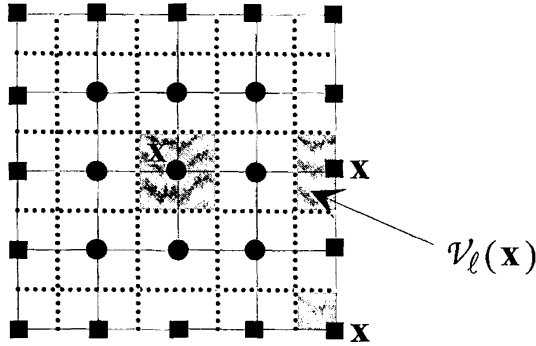
$$\Omega_{\ell-1} = \{\bullet\} \quad \Gamma_{\ell-1} = \{\blacksquare\}$$

$$\overline{\Omega}_\ell \setminus (\overline{\Omega}_\ell \cap \overline{\Omega}_{\ell-1}) = \{\circ, \square\}$$

ensemble $\overline{\Omega}_\ell$ ensemble $\overline{\Omega}_\ell \cap \overline{\Omega}_{\ell-1}$

Maillages rectangulaires cartésiens uniformes de type « cell-vertex » associés à deux grilles $G_{\ell-1}$ et G_ℓ .

Les problèmes aux limites considérés dans cette étude sont discrétisés par une méthode de volumes finis. Chaque grille G_ℓ est partitionnée en un nombre fini de volumes de contrôle $\mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})$ associés à chaque nœud \mathbf{x} du maillage. On note mes $(\mathcal{V}_\ell(\mathbf{x}))$ la mesure du volume de contrôle, et \mathbf{n} la normale extérieure unitaire définie sur la frontière $\partial\mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})$ de tout élément de volume, supposée suffisamment régulière.



Partition d'une grille G_ℓ en volumes de contrôle sur un maillage de type « cell-vertex ».

On note (\mathcal{P}) le problème général aux limites suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} L_\Omega u \equiv f_\Omega(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega \\ L_\Gamma u = f_\Gamma & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega . \end{cases}$$

Au cours des itérations k d'un algorithme de raffinement local multigrille, on résout une suite de problèmes aux limites dans chaque domaine $\overline{\Omega}^\ell$, s'écrivant sous la forme suivante :

$$(\mathcal{P}^\ell)^k : (L^\ell)^k (u^\ell)^k = (f^\ell)^k \quad \text{dans } \overline{\Omega}^\ell$$

avec :

$$(L^\ell)^k = \begin{pmatrix} L_{\Omega^\ell}^k & 0 \\ 0 & L_{\Gamma^\ell}^k \end{pmatrix} \quad (u^\ell)^k = \begin{pmatrix} u_{\Omega^\ell}^k \\ u_{\Gamma^\ell}^k \end{pmatrix} \quad (f^\ell)^k = \begin{pmatrix} f_{\Omega^\ell}^k \\ f_{\Gamma^\ell}^k \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, nous aurons :

$$\begin{aligned} L_{\Omega^\ell}^k &= (L_\Omega)|_{\Omega^\ell} \quad \forall \ell \quad \text{et} \quad \forall k \\ f_{\Omega^\ell}^{k=0} &= (f_\Omega)|_{\Omega^\ell} \quad \forall \ell, \text{ à l'initialisation des itérations.} \end{aligned}$$

Les conditions aux limites seront spécifiées dans le prochain paragraphe.

Les problèmes discrets associés, obtenus par discrétisation en volumes finis des problèmes $(\mathcal{P}^\ell)^k$ sur la grille G_ℓ s'écrivent :

$$(\mathcal{P}_\ell^k) : L_\ell^k u_\ell^k = f_\ell^k \quad \text{dans } \overline{\Omega}_\ell .$$

On note respectivement $P_{\ell-1}^\ell$ et $R_\ell^{\ell-1}$ les opérateurs de prolongement et de restriction basés sur des interpolations entre les grilles $G_{\ell-1}$ et G_ℓ .

Lorsque $\ell^* \neq 0$, pour $0 \leq \ell \leq \ell^* - 1$, on note $\gamma(\ell)$ le nombre d'itérations de l'algorithme de raffinement local effectuées à partir de la grille G_ℓ . Lorsque $\ell^* = 1$, on décrit des \wedge -cycles, et dans le cas où $\ell^* > 1$, si $\forall 1 \leq \ell \leq \ell^* - 1$ on a $\gamma(\ell) = 1$ (respectivement $\gamma(\ell) = 2$), on décrit alors des \wedge -cycles (respectivement des $\wedge\wedge$ -cycles). On désigne par $\gamma(0)$ le nombre total de cycles effectués à partir de la grille G_0 .

On définit les normes discrètes suivantes en utilisant une formule de quadrature où l'on suppose la fonction intégrée v_ℓ constante sur chaque volume de contrôle :

$$\|v_\ell\|_{L^\infty} = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_\ell} |v_\ell(\mathbf{x})|$$

$$\begin{aligned} \|v_\ell\|_{L^2} &= (v_\ell, v_\ell)_{L^2}^{1/2} = \left(\sum_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_\ell} \int_{\mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})} |v_\ell|^2 d\omega \right)^{1/2} \\ &\approx \left(\sum_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_\ell} \text{mes}(\mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})) |v_\ell(\mathbf{x})|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\|v_\ell\|_{L\text{-énergie}} = (L_\ell v_\ell, v_\ell)^{1/2} = \left(\sum_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_\ell} (L_\ell v_\ell)(\mathbf{x}) v_\ell(\mathbf{x}) \right)^{1/2}.$$

2.2. Conditions aux limites

Sur la grille de niveau $\ell = 0$, nous avons pour tout k , $L_{\Gamma^0}^k = L_\Gamma$, $f_{\Gamma^0}^k = f_\Gamma$ si la résolution du problème $(\mathcal{P}^0)^k$ est associée à la solution $(u^0)^k$ ou $f_{\Gamma^0}^k = 0$ si la résolution est associée à l'erreur $(e^0)^k = \bar{u} - (u^0)^k$, \bar{u} désignant la solution exacte du problème (\mathcal{P}) .

Lorsque $\ell^* \neq 0$, pour $\ell = 1$ à ℓ^* , on décompose la condition aux limites $L_{\Gamma^\ell}^k u_{\Gamma^\ell}^k = f_{\Gamma^\ell}^k$ de la manière suivante :

— s'il existe une frontière commune entre les domaines $\bar{\Omega}^\ell$ et $\bar{\Omega}$, c'est-à-dire si $\Gamma^\ell \cap \Gamma \neq \emptyset$, on restreint sur cette frontière les conditions aux limites définies sur Γ :

$$L_{\Gamma|_{\Gamma^\ell \cap \Gamma}} u_{\Gamma^\ell \cap \Gamma}^k = f_{\Gamma|_{\Gamma^\ell \cap \Gamma}}$$

— sur le reste de la frontière Γ^ℓ n'ayant aucune partie commune avec la frontière Γ , c'est-à-dire sur $\Gamma^\ell \setminus (\Gamma^\ell \cap \Gamma)$, on choisit des conditions aux limites de Dirichlet construites par projection de la solution $(u^{\ell-1})^k$ obtenue dans le domaine $\overline{\Omega}^{\ell-1}$ sur $\Gamma^\ell \setminus (\Gamma^\ell \cap \Gamma)$. Dans ce cas, la condition aux limites s'écrit à l'aide d'un opérateur $P_{\ell-1}^\ell$ sous la forme :

$$u_{\Gamma^\ell \setminus (\Gamma^\ell \cap \Gamma)}^k = P_{\ell-1}^\ell (u^{\ell-1})^k.$$

Pour les problèmes discrets (\mathcal{P}_ℓ^k) , $P_{\ell-1}^\ell$ est un opérateur de prolongement, qui agissant sur une fonction $v_{\ell-1}$ définie dans $\overline{\Omega}_{\ell-1}$, détermine sa projection $v_\ell = P_{\ell-1}^\ell v_{\ell-1}$ sur $\Gamma_\ell \setminus (\Gamma_\ell \cap \Gamma)$. Pratiquement, ce calcul s'effectue par une interpolation polynomiale à partir des valeurs de $v_{\ell-1}$ définies aux nœuds grossiers de l'ensemble $\overline{\Omega}_{\ell-1} \cap (\Gamma^\ell \setminus (\Gamma^\ell \cap \Gamma))$. Pour les résultats présentés en 2D, une interpolation monodimensionnelle affine par morceaux entre deux nœuds grossiers voisins a été adoptée.

2.3. Description générale d'une procédure multigrille locale

La plupart des méthodes de raffinement local multigrille sont fondamentalement issues des méthodes multigrilles emboîtées F.M.G. [Hackbusch et Trottenberg, 1982 ; Hackbusch, 1985 ; McCormick, 1987], et sont très similaires les unes aux autres. De façon générale, un schéma à deux grilles comprend deux étapes :

1) *une étape de remontée d'une grille grossière $G_{\ell-1}$ vers une grille fine G_ℓ : les conditions aux limites sur une grille fine.*

Connaissant une estimation $\tilde{u}_{\ell-1}$ d'une solution discrète calculée préalablement sur la grille $G_{\ell-1}$, on détermine les conditions aux limites sur Γ_ℓ par interpolation de $\tilde{u}_{\ell-1}$, et on résout le problème discret associé à la grille G_ℓ .

2) *une étape de descente d'une grille fine G_ℓ vers une grille grossière $G_{\ell-1}$: la correction sur une grille grossière.*

L'estimation $\tilde{u}_{\ell-1}$ de la solution sur la grille $G_{\ell-1}$ est corrigée par l'intermédiaire de la solution u_ℓ calculée sur la grille G_ℓ à l'étape de remontée. Cette correction peut s'effectuer par une simple restriction locale sur la solution (par exemple une injection canonique) :

$$u_{\ell-1}(\mathbf{x}) = (R_\ell^{\ell-1} u_\ell)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_{\ell-1} \cap \overline{\Omega}_\ell.$$

Dans ce cas, la correction ne se « propage » pas globalement sur tout le domaine $\overline{\Omega}^{\ell-1}$. On effectue alors, par exemple, une restriction locale du résidu $r_\ell = f_\ell - L_\ell u_\ell$, et l'on résout une équation d'erreur sur toute la grille grossière $G_{\ell-1}$:

— *Restriction locale sur la grille grossière du résidu associé à la grille fine :*

$$r_{\ell-1}(\mathbf{x}) = (R_{\ell}^{\ell-1} r_{\ell})(x) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_{\ell-1} \cap \overline{\Omega}_{\ell}$$

— *Résolution d'une équation d'erreur globale sur la grille grossière :*

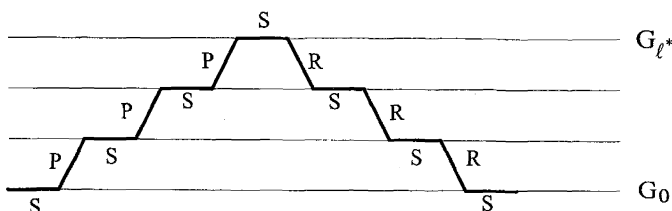
$$L_{\ell-1} e_{\ell-1} = \chi_{(\overline{\Omega}_{\ell-1} \cap \overline{\Omega}_{\ell})} r_{\ell-1} \quad \text{sur } \overline{\Omega}_{\ell-1}.$$

— *Correction globale de la solution sur la grille grossière :*

$$u_{\ell-1} \leftarrow \tilde{u}_{\ell-1} + e_{\ell-1} \quad \text{sur } \overline{\Omega}_{\ell-1}.$$

La fonction $\chi_{(\overline{\Omega}_{\ell-1} \cap \overline{\Omega}_{\ell})}$ désigne la fonction caractéristique définie sur $\overline{\Omega}_{\ell-1}$.

La procédure multigrille est une généralisation de la méthode à deux grilles. Si l'on estime que la solution discrète obtenue sur la grille G_{ℓ} n'est pas suffisamment précise, on réapplique à ce niveau la procédure à deux grilles en introduisant une grille locale $G_{\ell+1}$ de pas $h_{\ell+1} < h_{\ell}$. On réitère ainsi ce processus de façon récursive jusqu'à ce qu'on atteigne la grille la plus fine G_{ℓ^*} . On engendre ainsi de façon récursive sur toutes les grilles des itérations associées à la solution du problème. On peut schématiser une itération, \wedge -cycle par exemple, sous la forme suivante :



Représentation d'un \wedge -cycle multigrille local.

S : Solveur « exact » ou « inexact », ν itérations $u_{\ell} \leftarrow S^{(\nu)}[L_{\ell} u_{\ell} = f_{\ell}]$.

P : Prolongement, détermination des conditions aux limites sur la frontière de la grille fine.

R : Restriction locale de la solution ou du résidu sur la grille grossière.

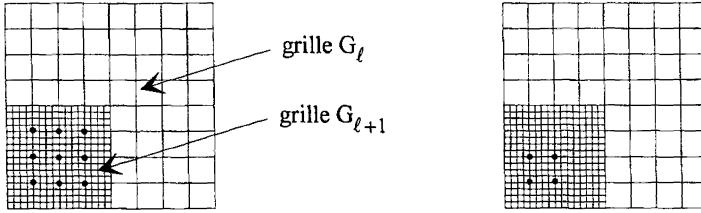
Le solveur utilisé sur chaque grille est indépendant de la méthode multigrille locale choisie. En particulier, on peut utiliser un algorithme multigrille F.A.S. sur chaque niveau.

3. DESCRIPTION DES ALGORITHMES

3.1. La méthode L.D.C. : Local Defect Correction

La méthode L.D.C., introduite par *Hackbusch*, provient des méthodes itératives de correction de résidu (Defect Correction) [*Hackbusch, 1984* ;

1985]. On introduit les ensembles $A_\ell = \Omega_\ell \cap \Omega^{\ell+1}$, et \hat{A}_ℓ qui désigne l'ensemble des nœuds « intérieurs » de A_ℓ au sens où : $\mathbf{x} \in \hat{A}_\ell$ si et seulement si $(L_\ell u_\ell)(\mathbf{x})$ s'écrit uniquement en fonction des valeurs de u_ℓ aux nœuds $\mathbf{y} \in A_\ell \cup (\Gamma_\ell \cap (\Gamma^{\ell+1} \setminus \Gamma^{\ell, \ell+1}))$. Par exemple, pour un schéma de discrétisation centré à cinq points, nous avons :

Ensemble des nœuds de A_ℓ Ensemble des nœuds de \hat{A}_ℓ

L'algorithme L.D.C. à deux niveaux de grilles G_ℓ et $G_{\ell+1}$ s'écrit :

Initialisation : calcul de u_ℓ^0

u_ℓ^0 est solution du problème initial (\mathcal{P}^0)

Itérations : calcul des itérés u_ℓ^k

Pour $k = 1$ à $\gamma(\ell)$ faire LDC(ℓ)

Procédure LDC(ℓ)

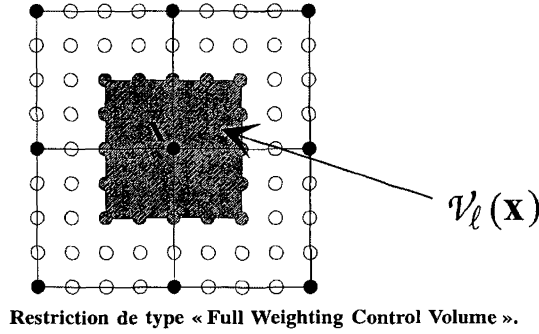
Résolution sur la grille fine $G_{\ell+1}$:

- Détermination des conditions aux limites : $u_{\ell+1}^k = P_\ell^{\ell+1} u_\ell^{k-1}$ sur $\Gamma_{\ell+1} \setminus (\Gamma_{\ell+1} \cap \Gamma)$
- Calcul de $u_{\ell+1}^k$ solution du problème ($\mathcal{P}_{\ell+1}^k$).

Correction sur la grille grossière G_ℓ :

- Calcul de la solution restreinte : $\tilde{u}_\ell^k(\mathbf{x}) = (R_{\ell+1}^\ell u_{\ell+1}^k)(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in A_\ell$
- Calcul du résidu local : $r_\ell^k(u)(\mathbf{x}) = (f_\ell^0 - L_\ell \tilde{u}_\ell^k)(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \hat{A}_\ell$
- Calcul de la solution corrigée u_ℓ^k obtenue par résolution du problème (\mathcal{P}_ℓ^k) avec $f_{\Omega_\ell}^k = f_{\Omega_\ell}^0 - \chi_{\hat{A}_\ell} r_\ell^k(u)$.

L'opérateur de restriction $R_{\ell+1}^\ell$ agit sur une fonction $v_{\ell+1}$ définie sur $\bar{\Omega}_{\ell+1}$, et détermine sa projection $v_\ell = R_{\ell+1}^\ell v_{\ell+1}$ sur A_ℓ . Pratiquement, ce calcul s'effectue par interpolation polynomiale à partir des nœuds fins de $\bar{\Omega}_{\ell+1}$, comme dans les méthodes multigrilles standards [Hackbusch et Trottenberg, 1982 ; Hackbusch, 1985 ; McCormick, 1987]. Pour les résultats présentés en 2D, une restriction bidimensionnelle de type « Full Weighting Control Volume » compatible avec la discrétisation en volumes finis a été adoptée ; on peut la schématiser par la cellule suivante :



L'étape de correction sur la grille grossière conduit à la résolution d'un problème discret associé à la solution u_ℓ avec un second membre défini à partir d'un résidu local $r_\ell(u)$. Pour un opérateur L_ℓ linéaire, on peut écrire de façon équivalente ce problème sous la forme d'un problème associé à l'erreur discrète définie sur $\bar{\Omega}_\ell$:

$$\begin{cases} \text{résoudre : } L_\ell e_\ell^k = -\chi_{\bar{\Omega}_\ell} r_\ell^k(u) \\ \text{calculer la solution corrigée : } u_\ell^k = u_\ell^{k=0} + e_\ell^k. \end{cases}$$

Les conditions aux limites associées à l'erreur sont alors homogènes sur la frontière Γ_ℓ .

Remarques :

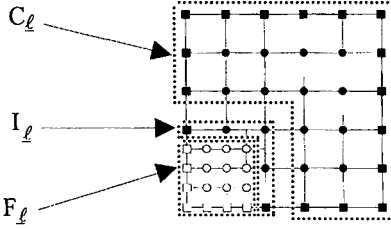
1) On peut généraliser l'algorithme L.D.C. au cas multi-niveaux en engendrant de façon récursive les itérés u_ℓ^k à partir de la grille la plus grossière $G_{\ell=0}$.

2) Les zones de raffinement local doivent être choisies de manière à ce que l'ensemble $\bar{\Omega}_\ell$ contienne suffisamment de nœuds grossiers pour rendre efficace la correction du résidu.

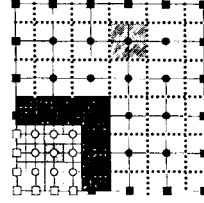
3.2. La méthode F.A.C. : Fast Adaptive Composite

La méthode F.A.C. a été introduite par McCormick [McCormick, 1984 ; 1989]. On introduit entre deux niveaux de grilles G_ℓ et $G_{\ell+1}$ une grille composite intermédiaire non uniforme $G_{\ell+1/2}$ partitionnée de la manière suivante :

$$G_{\underline{\ell}} = \overline{\Omega}_{\underline{\ell}} = \begin{bmatrix} C_{\underline{\ell}} \\ I_{\underline{\ell}} \\ F_{\underline{\ell}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\Omega}_{\underline{\ell}} \setminus (\overline{\Omega}_{\underline{\ell}} \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}) \\ \overline{\Omega}_{\underline{\ell}} \cap \Gamma^{\ell, \ell+1} \\ \overline{\Omega}_{\ell+1} \setminus (\Gamma_{\ell+1} \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}) \end{bmatrix}.$$



Grille composite



Partition en volumes de contrôle

Tout vecteur $v_{\underline{\ell}}$ de la grille $G_{\underline{\ell}}$ est ainsi partitionné sous la forme :

$$v_{\underline{\ell}} = \begin{bmatrix} v_{\ell} & \text{dans } C_{\underline{\ell}} \\ v_{\ell} & \text{dans } I_{\underline{\ell}} \\ v_{\ell+1} & \text{dans } F_{\underline{\ell}} \end{bmatrix}.$$

La méthode F.A.C. s'interprète comme une méthode itérative de « splitting » pour la résolution du problème discret composite $L_{\underline{\ell}} u_{\underline{\ell}} = f_{\underline{\ell}}$ associé à une discrétisation du problème (\mathcal{P}) sur la grille composite $G_{\underline{\ell}}$. Il en existe plusieurs versions, dont la version symétrique qui repose sur l'application de l'algorithme multigrille standard, d'une part entre les grilles $G_{\underline{\ell}}$ et G_{ℓ} , et d'autre part entre les grilles $G_{\underline{\ell}}$ et $G_{\ell+1}$. Nous avons utilisé ici la version « Delayed Correction » décrite ci-dessous. La méthode F.A.C. suppose une discrétisation conservative des équations, effectuée par exemple par la méthode des volumes finis (FV) ou des volumes-éléments finis (FVE) avec un traitement particulier au niveau de l'interface $\Gamma^{\ell, \ell+1}$.

L'algorithme F.A.C. à deux niveaux de grilles $G_{\underline{\ell}}$ et $G_{\ell+1}$ s'écrit :

Initialisation : calcul de $u_{\underline{\ell}}^0$

$u_{\underline{\ell}}^0$ et $u_{\ell+1}^0$ sont respectivement solutions des problèmes $(\mathcal{P}_{\underline{\ell}}^0)$ et $(\mathcal{P}_{\ell+1}^0)$.

Itérations : calcul des itérés $u_{\underline{\ell}}^k$

Pour $k = 1$ à $\gamma(\ell)$ faire FAC($\underline{\ell}$).

Restriction de la solution composite sur les grilles G_ℓ et $G_{\ell+1}$:

$$u_\ell^{k=\gamma(\ell)}(\mathbf{x}) = (\hat{R}_\ell^\ell u_\ell^{k=\gamma(\ell)})(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_\ell$$

$$u_{\ell+1}^{k=\gamma(\ell)}(\mathbf{x}) = (R_{\ell+1}^{\ell+1} u_\ell^{k=\gamma(\ell)})(\mathbf{x}) = u_\ell^{k=\gamma(\ell)}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in F_\ell$$

Procédure FAC(ℓ)

Calcul du résidu sur la grille composite G_ℓ :

— Calcul du résidu composite $r_\ell^{k-1}(u) = f_\ell^0 - L_\ell u_\ell^{k-1}$ dans $\overline{\Omega}_\ell$

Correction sur la grille grossière G_ℓ et sur la grille fine $G_{\ell+1}$:

— Restriction du résidu composite sur G_ℓ et $G_{\ell+1}$:

calcul de $R_\ell^\ell r_\ell^{k-1}(u)$ dans $\overline{\Omega}_\ell$, et de $R_{\ell+1}^{\ell+1} r_\ell^{k-1}(u)$ dans F_ℓ

— Calcul de l'erreur e_ℓ^k solution du problème (\mathcal{P}_ℓ^k) avec $f_\ell^k = R_\ell^\ell r_\ell^{k-1}(u)$.

— Détermination des conditions aux limites $e_{\ell+1}^k = P_{\ell+1}^{\ell+1} e_\ell^k$ sur $\Gamma_{\ell+1} \setminus (\Gamma_{\ell+1} \cap \Gamma)$, et calcul de l'erreur $e_{\ell+1}^k$ solution du problème $(\mathcal{P}_{\ell+1}^k)$ avec $f_{\ell+1}^k = R_{\ell+1}^{\ell+1} r_\ell^{k-1}(u)$.

Calcul de la solution corrigée sur la grille composite G_ℓ :

$$u_\ell^k = u_\ell^{k-1} + e_\ell^k.$$

L'opérateur composite L_ℓ coïncide avec l'opérateur L_ℓ de la grille grossière sur C_ℓ et avec l'opérateur $L_{\ell+1}$ de la grille fine sur F_ℓ . Il s'écrit donc sous la forme d'une matrice tridiagonale par blocs :

$$L_\ell = \begin{pmatrix} L_{\ell|C_\ell} & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & L_{\ell+1|F_\ell} \end{pmatrix}.$$

Le calcul du résidu composite $r_\ell(u) = f_\ell - L_\ell u_\ell$ sur la grille G_ℓ s'effectue en trois étapes :

— si $\mathbf{x} \in C_\ell$, $r_\ell(u)(\mathbf{x}) = r_\ell(u)(\mathbf{x}) = (f_\ell - L_\ell u_\ell)(\mathbf{x})$

— si $\mathbf{x} \in F_\ell$, $r_\ell(u)(\mathbf{x}) = r_{\ell+1}(u)(\mathbf{x}) = (f_{\ell+1} - L_{\ell+1} u_{\ell+1})(\mathbf{x})$

— si $\mathbf{x} \in I_\ell$, c'est-à-dire pour les nœuds grossiers situés sur l'interface $\Gamma^{\ell, \ell+1}$, on exprime les bilans de conservation des flux provenant des grilles G_ℓ et $G_{\ell+1}$, sur des volumes de contrôle judicieusement choisis. On obtient par

discrétisation en volumes finis :

$$r_{\underline{\ell}}(u)(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x}))} \int_{\mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x})} (f_{\underline{\ell}} - L_{\underline{\ell}} u_{\underline{\ell}}) d\omega, \text{ soit :}$$

$$r_{\underline{\ell}}(u)(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x}))} \left(\int_{\mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x})} f_{\underline{\ell}} d\omega - \int_{\mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x})} (L_{\underline{\ell}} u_{\underline{\ell}}) d\omega \right).$$

Lorsque l'opérateur s'écrit sous forme divergentielle $L_{\underline{\ell}} u_{\underline{\ell}} = \text{div}(\varphi_{\underline{\ell}}(u))$, on obtient par la formule de Stokes :

$$r_{\underline{\ell}}(u)(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x}))} \int_{\mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x})} f_{\underline{\ell}} d\omega - \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x}))} \int_{\partial \mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x})} \varphi_{\underline{\ell}} \cdot \mathbf{n} d\gamma.$$

L'intégrale du flux sur la face de volume de contrôle $\Sigma_{\underline{\ell}}(\mathbf{x}) \subset \partial \mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x}) \cap \bar{\Omega}^{\ell+1}$ est égal à la somme des intégrales des flux provenant de la grille fine à travers les faces $\Sigma_{\ell+1}(\mathbf{y}) \subset \partial \mathcal{V}_{\ell+1}(\mathbf{y})$, où \mathbf{y} décrit le sous-ensemble de $\bar{\Omega}_{\ell+1}$ tel que $\Sigma_{\underline{\ell}}(\mathbf{x}) = \bigcup_{\mathbf{y}} \Sigma_{\ell+1}(\mathbf{y})$.

Il vient ainsi :

$$r_{\underline{\ell}}(u)(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x}))} \int_{\mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x})} f_{\underline{\ell}} d\omega - \frac{1}{\text{mes}(\mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x}))} \left(\int_{\partial \mathcal{V}_{\underline{\ell}}(\mathbf{x}) \setminus \Sigma_{\underline{\ell}}(\mathbf{x})} \varphi_{\underline{\ell}} \cdot \mathbf{n} d\gamma + \sum_{\mathbf{y}} \int_{\Sigma_{\ell+1}(\mathbf{y})} \varphi_{\ell+1} \cdot \mathbf{n} d\gamma \right).$$

La discrétisation du problème (\mathcal{P}) sur les volumes de contrôle associés aux nœuds des ensembles $C_{\underline{\ell}}$ et $F_{\underline{\ell}}$ de la grille composite $G_{\underline{\ell}}$ est identique à celle effectuée sur les grilles $G_{\underline{\ell}}$ et $G_{\ell+1}$ respectivement sur ces mêmes volumes de contrôle. Ainsi, si les problèmes discrets $(\mathcal{P}_{\underline{\ell}}^k)$ et $(\mathcal{P}_{\ell+1}^k)$ sont résolus de façon « exacte » sur les grilles $G_{\underline{\ell}}$ et $G_{\ell+1}$, le résidu $r_{\underline{\ell}}(u)(\mathbf{x})$ est différent de zéro uniquement aux nœuds \mathbf{x} de l'interface $I_{\underline{\ell}}$.

L'opérateur de restriction $R_{\underline{\ell}}^{\ell}$ s'écrit symboliquement sous la forme matricielle :

$$R_{\underline{\ell}}^{\ell} = \begin{pmatrix} R_{\underline{\ell}}^{\ell}(C) \\ R_{\underline{\ell}}^{\ell}(I) \\ R_{\underline{\ell}}^{\ell}(F) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & * \\ 0 & 0 & R_{\ell+1}^{\ell} \end{pmatrix}.$$

L'opérateur $R_{\ell+1}^{\ell}$ est défini par une interpolation polynomiale comme au paragraphe 3.1. Il agit sur une fonction $v_{\ell+1}$ définie sur $\overline{\Omega}_{\ell+1}$, et détermine sa projection $v_{\ell} = R_{\ell+1}^{\ell} v_{\ell+1}$ sur $\overline{\Omega}_{\ell} \setminus (C_{\ell} \cup I_{\ell})$. L'opérateur de restriction $R_{\ell}^{\ell+1}$ est l'injection canonique. Lorsque les problèmes (\mathcal{P}_{ℓ}^k) et $(\mathcal{P}_{\ell+1}^k)$ sont résolus de façon « exacte », le calcul de la restriction des résidus composites se simplifie. En effet, puisque les opérateurs $R_{\ell}^{\ell}(C)$ et $R_{\ell}^{\ell+1}$ sont des injections canoniques, on a :

$$(R_{\ell}^{\ell} r_{\ell}(u))(\mathbf{x}) = (R_{\ell}^{\ell}(C) r_{\ell}(u))(\mathbf{x}) = r_{\ell}(u)(\mathbf{x}) \approx 0 \quad \forall \mathbf{x} \in C_{\ell}$$

$$(R_{\ell}^{\ell+1} r_{\ell}(u))(\mathbf{x}) = r_{\ell+1}(u)(\mathbf{x}) \approx 0 \quad \forall \mathbf{x} \in F_{\ell}$$

Par conséquent, quel que soit le choix des opérateurs de restriction $R_{\ell}^{\ell}(I)$ et $R_{\ell}^{\ell}(F)$, on a :

$$\begin{aligned} (R_{\ell}^{\ell} r_{\ell}(u))(\mathbf{x}) &= (R_{\ell}^{\ell}(I) r_{\ell}(u))(\mathbf{x}) = r_{\ell}(u)(\mathbf{x}) \\ &+ \sum_y \alpha_y r_{\ell+1}(u)(\mathbf{y}) \approx r_{\ell}(u)(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in I_{\ell} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R_{\ell}^{\ell} r_{\ell}(u))(\mathbf{x}) &= (R_{\ell}^{\ell}(F) r_{\ell}(u))(\mathbf{x}) = (R_{\ell+1}^{\ell} r_{\ell}(u))(\mathbf{x}) \\ &= \sum_y \beta_y r_{\ell+1}(u)(\mathbf{y}) \approx 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_{\ell} \setminus (C_{\ell} \cup I_{\ell}). \end{aligned}$$

Remarques :

- 1) La généralisation de l'algorithme F.A.C. au cas multi-niveaux se fait en définissant de façon récursive les grilles composites associées au système de grilles G_{ℓ} , $0 \leq \ell \leq \ell^*$.
- 2) Dans la deuxième étape de l'algorithme, les problèmes discrets (\mathcal{P}_{ℓ}^k) et $(\mathcal{P}_{\ell+1}^k)$ satisfont à des conditions aux limites homogènes respectivement sur les frontières $(\Gamma_{\ell} \cap \Gamma)$ et $(\Gamma_{\ell+1} \cap \Gamma)$, car ils sont associés à l'erreur discrète.
- 3) A la fin de toutes les itérations, nous restreignons la solution composite sur les grilles G_{ℓ} et $G_{\ell+1}$. L'opérateur \hat{R}_{ℓ}^{ℓ} est défini de façon analogue à l'opérateur R_{ℓ}^{ℓ} . Nous avons choisi dans les résultats numériques l'injection canonique sur chacune des composantes de \hat{R}_{ℓ}^{ℓ} .
- 4) L'algorithme F.A.C. peut également être utilisé comme méthode de préconditionnement du problème composite $L_{\ell} u_{\ell} = f_{\ell}$: les solveurs sur les

grilles G_ℓ et $G_{\ell+1}$ jouent alors le rôle de préconditionneurs de l'opérateur L_ℓ . De ce point de vue, la méthode B.E.P.S. [*Bramble, Ewing, Pasciak et Schatz, 1988*] correspond à la version de F.A.C. symétrique.

3.3. La méthode F.I.C. : Flux Interface Correction

Cette méthode a été récemment proposée dans [*Angot, Caltagirone et Khadra, 1992 ; Khadra, Angot et Caltagirone, 1993*]. Une justification a été proposée dans [*Angot, Caltagirone, Khadra et Morel, 1992 ; Khadra, 1994*]. La méthode F.I.C. est adaptée à une discrétisation conservative des équations, en volumes finis par exemple. Le principe est de satisfaire, sur la frontière de chaque volume de contrôle situé à l'intérieur de la zone de zoom, une relation de continuité au sens faible (i.e. en moyenne) des flux associés à la solution entre deux grilles non concordantes d'un maillage composite non conforme ; cela permet ainsi un raccordement conservatif des sous-domaines emboîtés.

On suppose que le premier membre de l'équation aux dérivées partielles $L_\Omega u = f_\Omega$ du problème (\mathcal{P}) éventuellement non linéaire s'écrit comme la somme d'un terme divergentiel faisant intervenir le flux $\varphi(u)$ associé à la solution, et d'un terme non conservatif $G_\Omega u$:

$$(1) \quad L_\Omega u \equiv \text{div}(\varphi(u)) + G_\Omega u = f_\Omega.$$

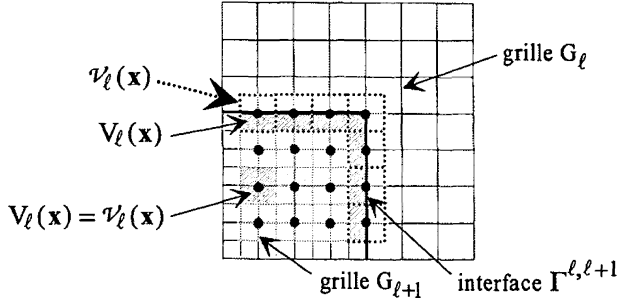
En l'occurrence, pour le problème elliptique (\mathcal{P}) défini au paragraphe 1, on a :

$$\varphi(u) = -\lambda(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} u, \quad G_\Omega u \equiv \alpha(\mathbf{x}) u, \quad \text{et} \quad f_\Omega = f_\Omega(\mathbf{x}).$$

On définit le résidu associé à l'équation (1) :

$$(2) \quad r(u) = f_\Omega - \text{div}(\varphi(u)) - G_\Omega u.$$

Entre deux grilles successives G_ℓ et $G_{\ell+1}$, on définit pour chaque nœud grossier $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}$ situé dans la zone de zoom, l'élément de volume $V_\ell(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_\ell(\mathbf{x}) \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}$, et ce volume est un volume de contrôle entier, c'est-à-dire $V_\ell(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})$, si $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Omega^{\ell+1}$.



Par intégration de (2) sur $V_\ell(\mathbf{x})$, il vient :

$$\int_{V_\ell(\mathbf{x})} r(u) d\omega = \int_{V_\ell(\mathbf{x})} f_\Omega d\omega - \int_{V_\ell(\mathbf{x})} \text{div}(\varphi(u)) d\omega - \int_{V_\ell(\mathbf{x})} G_\Omega u d\omega.$$

En utilisant la formule de Stokes sur le terme divergentiel, on obtient :

$$(3) \quad \int_{V_\ell(\mathbf{x})} r(u) d\omega = \int_{V_\ell(\mathbf{x})} f_\Omega d\omega - \int_{\partial V_\ell(\mathbf{x})} \varphi(u) \cdot \mathbf{n} d\gamma - \int_{V_\ell(\mathbf{x})} G_\Omega u d\omega.$$

L'équation (3) est approchée par discrétisation sur la grille G_ℓ , puis sur la grille $G_{\ell+1}$. En effectuant la différence membre à membre des deux équations ainsi obtenues, il vient :

$$(4.a) \quad \int_{V_\ell(\mathbf{x})} r_\ell(u) d\omega - \int_{V_\ell(\mathbf{x})} r_{\ell+1}(u) d\omega = d_{\ell, \ell+1}(u)(\mathbf{x}) + r_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x})$$

avec :

$$(4.b) \quad d_{\ell, \ell+1}(u)(\mathbf{x}) = \left(\int_{V_\ell(\mathbf{x})} (f_\Omega)_\ell d\omega - \int_{V_\ell(\mathbf{x})} (f_\Omega)_{\ell+1} d\omega \right) + \left(\int_{V_\ell(\mathbf{x})} (G_\Omega u)_{\ell+1} d\omega - \int_{V_\ell(\mathbf{x})} (G_\Omega u)_\ell d\omega \right)$$

$$(4.c) \quad r_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x}) = \left(\int_{\partial V_\ell(\mathbf{x})} \varphi_{\ell+1}(u) \cdot \mathbf{n} d\gamma - \int_{\partial V_\ell(\mathbf{x})} \varphi_\ell(u) \cdot \mathbf{n} d\gamma \right).$$

On néglige le résidu $r_{\ell+1}(u)$ sur la grille fine $G_{\ell+1}$ par rapport à celui défini sur la grille G_ℓ , quitte à effectuer sur $G_{\ell+1}$ une résolution « quasi-exacte » à l'aide d'un bon lisseur ; d'où l'hypothèse :

$$(\mathcal{H}) \quad \left| \int_{V_\ell(\mathbf{x})} r_{\ell+1}(u) d\omega \right| \ll \left| \int_{V_\ell(\mathbf{x})} r_\ell(u) d\omega \right|.$$

On peut obtenir $r_{\ell+1}(u) \approx 0$. Cette hypothèse peut être justifiée par rapport à la méthode F.A.C. où le résidu de la grille fine est nul lorsque le problème discret $(\mathcal{P}_{\ell+1}^k)$ est résolu de façon « exacte ». On a ainsi :

$$(5) \quad \int_{V_\ell(\mathbf{x})} r_\ell(u) d\omega \approx d_{\ell,\ell+1}(u)(\mathbf{x}) + r_{\ell,\ell+1}(\varphi)(\mathbf{x}).$$

Le second membre de l'équation (5) se décompose donc en une somme d'un « résidu intégral sur la solution » $d_{\ell,\ell+1}(u)(\mathbf{x})$ (intégrale volumique), et d'un « résidu intégral sur le flux » $r_{\ell,\ell+1}(\varphi)(\mathbf{x})$ (intégrale surfacique). A partir de cette équation, on peut définir pour l'algorithme F.I.C., le résidu local $r_\ell(u)(\mathbf{x})$ de correction sur la grille grossière G_ℓ associé à chaque nœud grossier $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}$. On évalue le premier membre de l'équation (5) par une formule de quadrature où l'on suppose la fonction intégrée constante sur le volume $V_\ell(\mathbf{x})$:

$$\int_{V_\ell(\mathbf{x})} r_\ell(u) d\omega \approx \text{mes}(V_\ell(\mathbf{x})) r_\ell(u)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}.$$

On obtient ainsi :

$$(6) \quad r_\ell(u)(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\text{mes}(V_\ell(\mathbf{x}))} (d_{\ell,\ell+1}(u)(\mathbf{x}) + r_{\ell,\ell+1}(\varphi)(\mathbf{x}))$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}.$$

Dans le cas où $r_{\ell,\ell+1}(\varphi)(\mathbf{x}) = 0$, le résidu local de correction sur la grille G_ℓ , s'écrit :

$$(7) \quad r_\ell(u)(\mathbf{x}) \approx \frac{d_{\ell,\ell+1}(u)(\mathbf{x})}{\text{mes}(V_\ell(\mathbf{x}))} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}.$$

Lorsque $r_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x}) \neq 0$, on peut écrire l'expression (6) de façon équivalente sous la forme suivante, en privilégiant la différence des flux provenant de la grille grossière et de la grille fine à travers l'interface $\partial V_\ell(\mathbf{x})$. On définit ainsi le résidu local de correction en flux sur la grille grossière :

$$r_\ell(\varphi)(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\text{mes}(V_\ell(\mathbf{x}))} \left(1 + \frac{d_{\ell, \ell+1}(u)(\mathbf{x})}{r_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x})} \right) r_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}$$

soit :

$$(8.a) \quad r_\ell(\varphi)(\mathbf{x}) \approx \frac{\omega(\ell, \mathbf{x})}{\varepsilon(\ell, \mathbf{x})} \left(\frac{1}{\text{mes}(\partial V_\ell(\mathbf{x}))} \int_{\partial V_\ell(\mathbf{x})} \varphi_{\ell+1}(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \right. \\ \left. - \frac{1}{\text{mes}(\partial V_\ell(\mathbf{x}))} \int_{\partial V_\ell(\mathbf{x})} \varphi_\ell(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \right) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}$$

avec :

$$(8.b) \quad \omega(\ell, \mathbf{x}) = 1 + \frac{d_{\ell, \ell+1}(u)(\mathbf{x})}{r_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x})}, \quad \text{et} \quad \varepsilon(\ell, \mathbf{x}) = \frac{\text{mes}(V_\ell(\mathbf{x}))}{\text{mes}(\partial V_\ell(\mathbf{x}))}.$$

On introduit l'opérateur de restriction $R_{\ell+1}^\ell$ « Full Weighting Interface Control Volume » sur le flux normal extérieur, qui agissant sur une fonction $\varphi_{\ell+1}$ définie sur $\overline{\Omega}_{\ell+1}$, détermine sa projection sur $\Omega_\ell \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}$ par :

$$(9) \quad R_{\ell+1}^\ell(\varphi_{\ell+1})(\mathbf{x}) = \frac{1}{\text{mes}(\partial V_\ell(\mathbf{x}))} \int_{\partial V_\ell(\mathbf{x})} \varphi_{\ell+1}(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}.$$

On peut alors écrire à partir de (9) le résidu local de correction en flux sous la forme suivante :

$$(10) \quad r_\ell(\varphi)(\mathbf{x}) \approx \frac{\omega(\ell, \mathbf{x})}{\varepsilon(\ell, \mathbf{x})} \left\{ R_{\ell+1}^\ell(\varphi_{\ell+1})(\mathbf{x}) \right. \\ \left. - \frac{1}{\text{mes}(\partial V_\ell(\mathbf{x}))} \int_{\partial V_\ell(\mathbf{x})} \varphi_\ell(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \right\} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}.$$

Dans le cas particulier d'un nœud grossier situé sur l'interface, soit $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}$ où $V_\ell(\mathbf{x}) \neq \mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})$, on peut décomposer la frontière du volume $V_\ell(\mathbf{x})$ sous la forme $\partial V_\ell(\mathbf{x}) = \Sigma_\ell(\mathbf{x}) \cup (\partial V_\ell(\mathbf{x}) \setminus \Sigma_\ell(\mathbf{x}))$, avec $\Sigma_\ell(\mathbf{x}) = \partial V_\ell(\mathbf{x}) \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}$. Dans ce cas, on a :

$$r_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x}) = \bar{r}_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x}) + \hat{r}_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x})$$

où :

$$\begin{aligned} \bar{r}_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x}) &= \int_{\Sigma_\ell(\mathbf{x})} \varphi_{\ell+1}(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma - \int_{\Sigma_\ell(\mathbf{x})} \varphi_\ell(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \\ \hat{r}_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x}) &= \int_{\partial V_\ell(\mathbf{x}) \setminus \Sigma_\ell(\mathbf{x})} \varphi_{\ell+1}(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma - \int_{\partial V_\ell(\mathbf{x}) \setminus \Sigma_\ell(\mathbf{x})} \varphi_\ell(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma. \end{aligned}$$

Lorsque $\bar{r}_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x}) \neq 0$, on peut écrire l'expression (6) du résidu de façon à ne privilégier la différence des flux provenant de la grille grossière et de la grille fine, qu'à travers l'interface $\Sigma_\ell(\mathbf{x})$ entre ces grilles. Les termes restants sont alors inclus dans l'expression de $\omega(\ell, \mathbf{x})$. On peut donc définir le résidu local de correction en flux en chaque nœud grossier $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}$ sur l'interface $\Gamma^{\ell, \ell+1}$ par :

$$\begin{aligned} r_\ell(\varphi)(\mathbf{x}) &\approx \frac{1}{\text{mes}(V_\ell(\mathbf{x}))} \\ &\times \left(1 + \frac{d_{\ell, \ell+1}(u)(\mathbf{x}) + \hat{r}_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x})}{\bar{r}_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x})} \right) \bar{r}_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1} \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} (11.a) \quad r_\ell(\varphi)(\mathbf{x}) &\approx \frac{\omega(\ell, \mathbf{x})}{\varepsilon(\ell, \mathbf{x})} \left(\frac{1}{\text{mes}(\Sigma_\ell(\mathbf{x}))} \int_{\Sigma_\ell(\mathbf{x})} \varphi_{\ell+1}(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\text{mes}(\Sigma_\ell(\mathbf{x}))} \int_{\Sigma_\ell(\mathbf{x})} \varphi_\ell(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \right) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1} \end{aligned}$$

avec :

$$(11.b) \quad \omega(\ell, \mathbf{x}) = 1 + \frac{d_{\ell, \ell+1}(u)(\mathbf{x}) + \hat{r}_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x})}{\bar{r}_{\ell, \ell+1}(\varphi)(\mathbf{x})},$$

$$\text{et } \varepsilon(\ell, \mathbf{x}) = \frac{\text{mes}(V_\ell(\mathbf{x}))}{\text{mes}(\Sigma_\ell(\mathbf{x}))}.$$

On définit dans ces conditions, l'opérateur de restriction $R_{\ell+1}^\ell$ sur le flux normal extérieur à l'interface, qui agissant sur une fonction $\varphi_{\ell+1}$ définie sur $\overline{\Omega}_{\ell+1}$, détermine sa projection sur $\Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}$ par :

$$(12) \quad R_{\ell+1}^\ell(\varphi_{\ell+1})(\mathbf{x}) = \frac{1}{\text{mes}(\Sigma_\ell(\mathbf{x}))} \int_{\Sigma_\ell(\mathbf{x})} \varphi_{\ell+1}(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}.$$

Dans ce cas l'expression générale (10) du résidu local de correction en flux sur la grille grossière G_ℓ est remplacée en chaque nœud $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}$ de l'interface par :

$$(13) \quad r_\ell(\varphi)(\mathbf{x}) \approx \frac{\omega(\ell, \mathbf{x})}{\varepsilon(\ell, \mathbf{x})} \left\{ R_{\ell+1}^\ell(\varphi_{\ell+1})(\mathbf{x}) - \frac{1}{\text{mes}(\Sigma_\ell(\mathbf{x}))} \int_{\Sigma_\ell(\mathbf{x})} \varphi_\ell(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \right\} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}.$$

Dans les expressions (10) ou (13), nous avons utilisé respectivement pour le calcul des intégrales des flux grossiers, les formules de quadrature suivantes :

$$\int_{\partial V_\ell(\mathbf{x})} \varphi_\ell(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \approx \text{mes}(\partial V_\ell(\mathbf{x})) (\varphi_\ell(u) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x})$$

ou

$$\int_{\Sigma_\ell(\mathbf{x})} \varphi_\ell(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \approx \text{mes}(\Sigma_\ell(\mathbf{x})) (\varphi_\ell(u) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}).$$

Les calculs précédents montrent comment évaluer de façon générale le résidu local de correction en flux en chaque nœud grossier de la zone de zoom, soit $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}$, par les expressions (8-10) ou par les expressions particulières (11-13) valables seulement pour un nœud grossier situé sur l'interface. Outre la version de base de la méthode F.I.C. qui consiste à effectuer la correction sur la grille grossière G_ℓ effectivement en tout nœud $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}$, on met en évidence plusieurs variantes possibles.

La première variante de la méthode F.I.C. proposée originellement dans [Angot, Caltagirone et Khadra, 1992], puis reprise dans [Khadra, Angot et Caltagirone, 1993] est celle adoptée pour les résultats numériques de cette étude comparative. Elle consiste à n'effectuer la correction sur la grille grossière G_ℓ qu'aux nœuds grossiers situés sur l'interface $\Gamma^{\ell, \ell+1}$, soit

$\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}$; le résidu local de correction étant alors évalué par l'expression (13) plutôt que comme un cas particulier de l'expression (10). Le calcul des intégrales de flux évaluées sur la grille fine $G_{\ell+1}$ dans l'expression (12) est effectué par une formule de quadrature composite des trapèzes ou de Simpson, selon le nombre pair ou impair de nœuds fins situés sur $\Sigma_\ell(\mathbf{x})$.

La deuxième variante proposée dans [Khadra, Angot et Caltagirone, 1993] consiste à n'effectuer la correction sur G_ℓ à partir des expressions (8-10) qu'aux nœuds grossiers strictement intérieurs à la zone de zoom, soit $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Omega^{\ell+1}$, voire même que sur un sous-ensemble de $\Omega_\ell \cap \Omega^{\ell+1}$. Ceci a l'avantage de ne considérer les bilans de flux que sur des volumes de contrôle entiers $V_\ell(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})$, et de rendre ainsi plus simple l'implémentation numérique. En outre, le calcul des intégrales de flux évaluées sur la grille fine $G_{\ell+1}$ dans l'expression (9) se simplifie dans le cas où l'on choisit un rapport de raffinement $q_i(\ell+1) = (\Delta x_i)_\ell / (\Delta x_i)_{\ell+1} (i = 1, 2)$ impair pour des maillages sur G_ℓ et $G_{\ell+1}$ de type « cell-vertex », pair ou impair pour des maillages sur G_ℓ et $G_{\ell+1}$ de type « cell-centered », ou pair mais avec par exemple un maillage « cell-vertex » sur G_ℓ et « cell-centered » sur $G_{\ell+1}$. En effet, dans ces cas, chaque volume de contrôle grossier $\mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})$ peut se partitionner en un ensemble de $q_1(\ell+1) q_2(\ell+1)$ volumes de contrôle fins $\mathcal{V}_{\ell+1}$; en d'autres termes, chaque face d'un volume de contrôle grossier $\mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})$ coïncide avec la somme d'un nombre entier $q_i(\ell+1)$ de faces de volumes de contrôle fins $\mathcal{V}_{\ell+1}$ contenus dans $\mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})$. Ainsi, le calcul des intégrales de flux fins peut être effectué à l'aide d'une formule de quadrature composite basée sur un calcul barycentrique correspondant à une moyenne surfacique pondérée des flux fins sur l'interface $\partial \mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})$, soit :

$$R_{\ell+1}^\ell(\varphi_{\ell+1})(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\text{mes}(\partial \mathcal{V}_\ell(\mathbf{x}))} \times \sum_{\mathcal{V}_{\ell+1} \subset \mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})} \text{mes}(\partial \mathcal{V}_{\ell+1} \cap \partial \mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})) (\varphi_{\ell+1}(u) \cdot \mathbf{n}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Omega^{\ell+1}.$$

Dans le cas de maillages carrés uniformes

$$(q_1(\ell+1) = q_2(\ell+1) = q(\ell+1)),$$

on a :

$$R_{\ell+1}^\ell(\varphi_{\ell+1})(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{4 q(\ell+1)} \sum_{\mathcal{V}_{\ell+1} \subset \mathcal{V}_\ell(\mathbf{x})} \varphi_{\ell+1}(u) \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Omega^{\ell+1}.$$

Cette variante a été utilisée avec succès pour la résolution, sur des grilles emboîtées, des équations de Navier-Stokes d'un modèle de circulation océanique [Angot et Laugier, 1994 ; 1995].

La première variante de la méthode F.I.C. qui consiste à n'effectuer la correction sur la grille grossière G_ℓ qu'aux nœuds grossiers de l'interface $\Gamma^{\ell, \ell+1}$, soit $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}$ est celle adoptée pour les résultats numériques. Dans ces conditions, l'algorithme F.I.C. à deux niveaux de grilles G_ℓ et $G_{\ell+1}$ s'écrit :

Initialisation : calcul de u_ℓ^0

u_ℓ^0 est solution du problème initial (\mathcal{P}_ℓ^0)

Itérations : calcul des itérés u_ℓ^k

Pour $k = 1$ à $\gamma(\ell)$ faire FIC(ℓ)

Restriction de la solution fine sur la grille grossière :

$$u_\ell^{k=\gamma(\ell)}(\mathbf{x}) = (\hat{R}_{\ell+1}^\ell u_{\ell+1}^{k=\gamma(\ell)}) (\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_\ell \cap (\overline{\Omega}^{\ell+1} \setminus \Gamma^{\ell, \ell+1}).$$

Procédure FIC(ℓ)

Résolution sur la grille fine $G_{\ell+1}$:

- Détermination des conditions aux limites : $u_{\ell+1}^k = P_\ell^{\ell+1} u_\ell^{k-1}$ sur $\Gamma_{\ell+1} \setminus (\Gamma_{\ell+1} \cap \Gamma)$
- Calcul de $u_{\ell+1}^k$ solution du problème ($\mathcal{P}_{\ell+1}^k$)

Correction sur la grille grossière G_ℓ :

- Calcul du résidu local $r_\ell^k(\varphi)(\mathbf{x})$ associé au flux défini par (11-13), soit :

$$r_\ell^k(\varphi)(\mathbf{x}) = \frac{\omega(\ell, \mathbf{x})}{\varepsilon(\ell, \mathbf{x})} \left\{ R_{\ell+1}^\ell(\varphi_{\ell+1}^k)(\mathbf{x}) - \frac{1}{\text{mes}(\Sigma_\ell(\mathbf{x}))} \int_{\Sigma_\ell(\mathbf{x})} \varphi_\ell^{k-1}(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \right\} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}.$$

- Calcul de la solution corrigée u_ℓ^k obtenue par résolution du problème (\mathcal{P}_ℓ^k) avec $f_{\Omega_\ell}^k = f_{\Omega_\ell}^0 + \chi_{\Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}} r_\ell^k(\varphi)$.

On négligera parfois dans les expressions (10) ou (13), le calcul explicite de l'expression de $\omega(\ell, \mathbf{x})$ par les formules (8.b) ou (11.b) respectivement. Dans cette version de correction approchée que l'on notera F.I.C. (ω), on déterminera de façon semi-empirique un paramètre moyen $\omega(\ell)$ qui sera une donnée du problème. Dans ce cas, les expressions (10) et (13) ne sont plus équivalentes sur les nœuds grossiers de l'interface, soit $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}$.

L'introduction dans le second membre du problème du résidu $r_\ell(\varphi)$ défini par (13) sur $\Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}$ équivaut, après une formulation variationnelle du

problème, à l'approximation numérique sur la grille G_ℓ d'une condition aux limites de Neumann sur la frontière interface $\Gamma^{\ell, \ell+1}$ du domaine $\Omega^\ell \setminus \overline{\Omega}^{\ell+1}$ considéré comme « plongé » dans le domaine fictif Ω^ℓ , soit :

$$\frac{\partial u_\ell}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \omega(\ell, \mathbf{x}) \left(R_{\ell+1}^\ell(\varphi_{\ell+1})(\mathbf{x}) - \frac{1}{\text{mes}(\Sigma_\ell(\mathbf{x}))} \int_{\Sigma_\ell(\mathbf{x})} \varphi_\ell(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \right) \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}.$$

Le terme entre parenthèses a la dimension d'un flux, tandis que le paramètre $\omega(\ell, \mathbf{x})$ est sans dimension. Comme proposé dans [Angot, 1989 ; Angot et Caltagirone, 1990] dans le cadre d'une méthode de domaine fictif, l'approximation discrète d'une condition de Neumann ou de Robin est réalisée par l'introduction dans le second membre du problème d'un « terme de contrôle » contenant une fonction de Dirac discrète centrée sur une frontière « épaisse » de largeur h_ℓ , et proportionnelle au paramètre $\varepsilon^{-1}(\ell, \mathbf{x})$ défini dans (11.b) qui est d'ordre $O(h_\ell^{-1})$.

Compte tenu des remarques précédentes, la convergence de la méthode F.I.C. est obtenue par la continuité de la solution et du flux à l'interface $\Gamma^{\ell, \ell+1}$ entre les domaines emboîtés Ω^ℓ et $\Omega^{\ell+1}$. En termes de décomposition de domaine, la méthode F.I.C. à deux grilles G_ℓ et $G_{\ell+1}$ peut s'interpréter comme un algorithme itératif à recouvrement complet qui comprend la résolution de deux sous-problèmes de type Dirichlet et Neumann. Cependant, la différence avec une méthode classique de décomposition de domaine est que dans notre cas, les grilles G_ℓ et $G_{\ell+1}$ sont non concordantes et le maillage composite résultant est non conforme. La méthode F.I.C. permet un « raccord conservatif » en imposant sur l'interface $\Gamma^{\ell, \ell+1}$ la continuité forte de la solution et la continuité faible du flux :

a) dans l'étape de remontée, on résout dans le domaine $\Omega^{\ell+1}$ un problème avec une condition de Dirichlet sur l'interface $\Gamma^{\ell, \ell+1}$, qui assure la continuité forte de la solution :

$$u_\ell = u_{\ell+1} \quad \text{sur} \quad \overline{\Omega}_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}$$

b) dans l'étape de descente, on résout dans le domaine Ω^ℓ un problème avec une condition de transmission des flux qui assure la continuité au sens faible (i.e. en moyenne) du flux associé à la solution, sur l'interface de chaque élément de volume $V_\ell(\mathbf{x})$ ou sur l'interface $\Gamma^{\ell, \ell+1}$, et qui peut s'interpréter comme une condition de type Neumann :

$$\int_{\partial V_\ell(\mathbf{x})} \varphi_\ell(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = \int_{\partial V_\ell(\mathbf{x})} \varphi_{\ell+1}(u) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \overline{\Omega}^{\ell+1}.$$

En ce sens là, la méthode F.I.C. peut s'interpréter comme une méthode duale de la méthode « Mortier » [Bernardi, Maday et Patera, 1989] qui assure la continuité forte du flux et la continuité faible de la solution sur l'interface.

Remarques :

1) Lorsque l'opérateur L_ℓ est linéaire, l'étape de correction sur la grille grossière peut s'écrire de façon équivalente sous la forme d'un problème associé à l'erreur discrète définie sur $\bar{\Omega}_\ell$:

$$\begin{cases} \text{résoudre : } L_\ell e_\ell^k = \chi_{\Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}} r_\ell^k(\varphi) \\ \text{calculer la solution corrigée : } u_\ell^k = u_\ell^{k=0} + e_\ell^k. \end{cases}$$

Les conditions aux limites associées à l'erreur sont alors homogènes sur la frontière Γ_ℓ .

2) A la fin de toutes les itérations, l'étape de restriction de la solution fine sur la grille grossière G_ℓ à l'aide de l'opérateur $\hat{R}_{\ell+1}^\ell$ est nécessaire uniquement pour parfaire la correction aux nœuds grossiers contenus dans la zone de zoom. Cette restriction est effectuée par une interpolation polynomiale comme celle définie au paragraphe 3.1. Nous avons choisi dans les résultats numériques l'injection canonique. Même si cette restriction est effectuée à la fin de chaque itération k , elle n'influe pas sur la correction de la solution sur G_ℓ à l'extérieur de la zone de zoom, qui est due uniquement à la correction de F.I.C. sur l'interface $\Gamma^{\ell, \ell+1}$ à l'aide du résidu calculé par (11-13). Dans le cas d'une correction de F.I.C. en chaque nœud grossier strictement intérieur à la zone de zoom, soit $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Omega^{\ell+1}$, à partir d'un résidu calculé par (8-10), cette restriction n'est plus nécessaire [Angot et Laugier, 1994].

3) Nous avons vérifié sur un problème d'advection-diffusion monodimensionnel par rapport à une solution analytique [El Ganaoui, 1993], et sur les exemples numériques testés ici que le résidu $r_\ell^k(\varphi)$ calculé par (13) aux nœuds grossiers de l'interface $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}$ converge vers une limite de norme « petite » mais non nulle. En revanche, pour une correction aux nœuds grossiers strictement intérieurs à la zone de zoom, soit $\mathbf{x} \in \Omega_\ell \cap \Omega^{\ell+1}$, le résidu $r_\ell^k(\varphi)$ calculé par (10) tend vers zéro et l'équation de correction du second membre grossier est alors remplacée par : $f_{\Omega_\ell}^k = f_{\Omega_\ell}^{k-1} + \chi_{\Omega_\ell \cap \Omega^{\ell+1}} r_\ell^k(\varphi)$ [Angot et Laugier, 1994 ; 1995].

On peut généraliser de façon récursive l'algorithme F.I.C. au cas multi-niveaux, en engendrant les itérés u_ℓ^k à partir de la grille la plus grossière $G_{\ell=0}$. Dans le cas où l'on n'effectue la correction qu'aux nœuds grossiers situés à l'interface des sous-domaines, l'algorithme s'écrit lorsque l'on décrit par exemple des \wedge -cycles, c'est-à-dire $\gamma(\ell) = 1 \ \forall \ 1 \leq \ell \leq \ell^* - 1$, sous la forme suivante :

Initialisation : calcul de $u_{\ell=0}^{k=0}$
 $u_{\ell=0}^{k=0}$ est solution du problème initial ($\mathcal{P}_{\ell=0}^{k=0}$).

Itérations : calcul des itérés $u_{\ell=0}^k$
 Pour $k = 1$ à $\gamma(\ell = 0)$ faire \wedge -CYFIC.

Restriction d'une solution fine sur une grille grossière :

Pour $\ell = \ell^* - 1$ à 0 par pas de -1 faire :

$$u_{\ell}^{k=\gamma(0)}(\mathbf{x}) = (\hat{R}_{\ell+1}^{\ell} u_{\ell+1}^{k=\gamma(0)})(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_{\ell} \cap (\overline{\Omega}^{\ell+1} \setminus \Gamma^{\ell, \ell+1}).$$

Procédure \wedge -CYFIC

remontées

- définir $\tilde{u}_{\ell=0}^k = u_{\ell=0}^{k-1}$
- pour $\ell = 1$ à ℓ^* par pas de 1 faire :

Résolution sur la grille fine G_{ℓ} :

- Détermination des conditions aux limites : $\tilde{u}_{\ell}^k = P_{\ell-1}^{\ell} \tilde{u}_{\ell-1}^k$ sur $\Gamma_{\ell} \setminus (\Gamma_{\ell} \cap \Gamma)$
- Calcul de \tilde{u}_{ℓ}^k solution du problème (\mathcal{P}_{ℓ}^k)
- Si $\ell = \ell^*$ alors $u_{\ell}^k = \tilde{u}_{\ell}^k$.

descentes

Pour $\ell = \ell^* - 1$ à 0 par pas de -1 faire :

Correction sur la grille grossière G_{ℓ} :

- Calcul du résidu local associé au flux $r_{\ell}^k(\varphi)(\mathbf{x})$ défini par :

$$r_{\ell}^k(\varphi)(\mathbf{x}) = \frac{\omega(\ell, \mathbf{x})}{\varepsilon(\ell, \mathbf{x})} \left\{ R_{\ell+1}^{\ell}(\varphi_{\ell+1}^k)(\mathbf{x}) - \frac{1}{\text{mes}(\Sigma_{\ell}(\mathbf{x}))} \int_{\Sigma_{\ell}(\mathbf{x})} \varphi_{\ell}^k(\tilde{u}) \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \right\} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\ell} \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}.$$

- Calcul de la solution corrigée u_{ℓ}^k obtenue par résolution du problème (\mathcal{P}_{ℓ}^k) avec $f_{\Omega_{\ell}}^k = f_{\Omega_{\ell}}^0 + \chi_{\Omega_{\ell} \cap \Gamma^{\ell, \ell+1}} r_{\ell}^k(\varphi)$.

3.4. Remarques générales sur les trois méthodes

Il existe des analogies entre les différents algorithmes décrits ci-dessus, notamment entre les algorithmes F.A.C. et F.I.C.

1) La méthode F.A.C. associée à la résolution du système discret composite est exacte au sens où elle induit une correction à la fois sur les grilles G_{ℓ} et $G_{\ell+1}$, en restreignant respectivement sur ces deux grilles le résidu composite $r_{\ell}^k(u)$. En revanche, les algorithmes L.D.C. et F.I.C. ne font intervenir la

correction que sur la grille grossière G_ℓ par un calcul de résidu $r_\ell(u)$ ou $r_\ell(\varphi)$. Le résidu $r_{\ell+1}(u)$ de la grille fine est négligé devant celui défini sur la grille grossière conformément à l'hypothèse (\mathcal{H}) formulée pour l'algorithme F.I.C., à savoir :

$$(\mathcal{H}) \quad \left| \int_{V_\ell(x)} r_{\ell+1}(u) d\omega \right| \ll \left| \int_{V_\ell(x)} r_\ell(u) d\omega \right|.$$

2) Les algorithmes F.A.C. et F.I.C. sont essentiellement adaptés à une discrétisation conservative des équations, par exemple en volumes finis. Les corrections induites par des bilans de flux sur des volumes de contrôle s'effectuent :

- pour l'algorithme F.A.C., par une discrétisation adéquate du problème (\mathcal{P}) sur I_ℓ , et donc par un calcul du résidu composite interface
- pour l'algorithme F.I.C., par le calcul d'un résidu local de correction en flux $r_\ell(\varphi)$ sur $\Omega_\ell \cap I^{\ell, \ell+1}$ ou dans $\Omega_\ell \cap \Omega^{\ell+1}$.

Quant à la méthode L.D.C., elle induit une correction par un calcul de résidu ponctuel $r_\ell(u) = f_\ell^0 - L_\ell \tilde{u}_\ell$ associé à la solution, sur un ensemble de nœuds grossiers contenus strictement à l'intérieur de la zone de zoom. Ainsi, elle s'adapte mieux à une discrétisation en différences finies. Cependant, cette approche peut également se faire par volumes finis puisque les maillages sont uniformes ; le schéma volumes finis pour approcher $Lu = f$ étant alors consistant. Comme le montrent les résultats qui vont suivre, la méthode L.D.C. peut devenir inefficace si la zone de zoom ne contient pas suffisamment de nœuds grossiers sur lesquels les corrections de résidu doivent être effectuées, ou si la conservation des flux joue un rôle prépondérant dans la physique du problème considéré.

3) Les algorithmes L.D.C. et F.I.C. ne nécessitent pas l'utilisation de grilles composites non uniformes, et leur implémentation numérique se fait de façon analogue. En revanche, l'étape essentielle dans l'algorithme F.A.C. réside dans la discrétisation du problème (\mathcal{P}) sur l'interface de la grille composite G_ℓ , étape intermédiaire pour les corrections sur les grilles G_ℓ et $G_{\ell+1}$. Son implémentation numérique est plus délicate, et les coûts de calcul sont plus élevés, surtout dans le cas multigrille. La méthode F.A.C. Asynchrone (A.F.A.C.) est plus adaptée au cas multi-niveaux et à la parallélisation, mais elle converge deux fois moins vite que F.A.C. [McCormick, 1989].

4) Comme tous les algorithmes multigrilles, l'efficacité de ces méthodes dépend fortement du choix des opérateurs de prolongement et de restriction, et du lisseur servant de solveur sur chaque grille.

4. APPLICATIONS NUMÉRIQUES SUR DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES

4.1. Exemples et mise en œuvre numérique

On considère deux exemples bidimensionnels ($\mathcal{P}1$) et ($\mathcal{P}2$) du problème linéaire elliptique (\mathcal{P}) défini au paragraphe 1, pour lesquels on dispose respectivement d'une solution de référence calculée sur une grille de base de maillage carré (512×512), et d'une solution analytique.

Le problème ($\mathcal{P}1$) est hétérogène, c'est-à-dire présente une discontinuité du coefficient de diffusion $\lambda(\mathbf{x})$ qui est égal à 100 à l'intérieur d'une inclusion cylindrique de base circulaire et de rayon 0.1, et qui est égal à 1 à l'extérieur :

$$\lambda(\mathbf{x}) =$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 100 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{C} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} / (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 \leq 10^{-2}\} \\ \lambda_2 = 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \setminus \mathcal{C} \end{cases}$$

Il est défini par :

$$(\mathcal{P}1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\lambda(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} u) = 0 & \text{dans } \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\\ u = +0.5 \text{ sur } x_2 = 0 \quad u = -0.5 \text{ sur } x_2 = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \text{ sur } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = 1. \end{cases}$$

Le problème ($\mathcal{P}2$) est homogène ($\lambda \equiv 1$), et est défini par :

$$(\mathcal{P}2) \quad \begin{cases} -\Delta u = -2\pi\delta & \text{dans } \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\\ u_r = \ln(r) & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

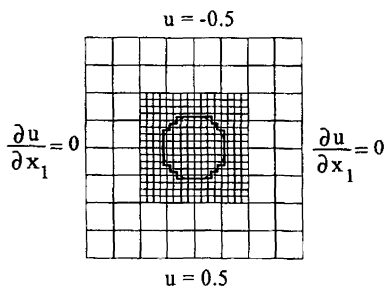
Ce problème possède une solution analytique qui est solution élémentaire du Laplacien bidimensionnel, soit $u = \ln(r)$, avec $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Pour ces exemples académiques, le choix des zones de raffinement local est naturel, et guidé par la nature du problème, à savoir :

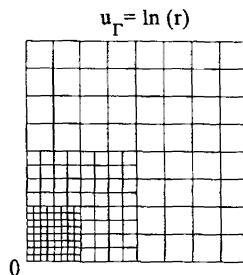
— autour de la zone de discontinuité du coefficient $\lambda(\mathbf{x})$ pour le problème ($\mathcal{P}1$), afin de corriger les erreurs de discrétisation dues à l'approximation en maillage cartésien de l'inclusion cylindrique \mathcal{C}

— autour de la singularité à l'origine pour le problème ($\mathcal{P}2$).

Toutes les grilles G_ℓ que nous considérons sont définies par un maillage cartésien. Elles sont carrées, structurées et uniformes de pas constant h_ℓ identique dans toutes les directions d'espace. Elles sont définies par leur domaine $\Omega^\ell =]\hat{x}_1(\ell), \tilde{x}_1(\ell)[\times]\hat{x}_2(\ell), \tilde{x}_2(\ell)[$, $0 \leq \ell \leq \ell^*$, avec $\Omega^0 = \Omega =]0, 1[\times]0, 1[$.



Problème ($\mathcal{P}1$) :
inclusion cylindrique dans une cavité carrée ;
approximation par un maillage cartésien



Problème ($\mathcal{P}2$) :
singularité à l'origine

La discrétisation sur chaque grille se fait par une méthode de volumes finis, avec un schéma à cinq points centré d'ordre 2. Dans le cas du problème ($\mathcal{P}1$), on approche la géométrie cylindrique \mathcal{C} par des mailles carrées, et l'interface entre les deux milieux de coefficients de diffusion différents est approchée de telle manière à ce qu'elle coïncide avec des faces de volumes de contrôle. Les équations sont discrétisées de façon conservative, en exprimant les coefficients $\lambda(\mathbf{x})$ sur les faces des volumes de contrôle par des moyennes harmoniques entre les nœuds du maillage, de telle façon à obtenir la continuité des flux à l'interface de ces volumes [Patankar, 1980]. Dans le cas du problème ($\mathcal{P}2$), les équations sont équivalentes à celles obtenues par le schéma classique aux différences finies à cinq points du Laplacien.

Les discrétisations conduisent à des systèmes linéaires creux pentadiagonaux, symétriques définis positifs, que l'on résout par l'algorithme du gradient conjugué avec un préconditionnement SSOR d'Evans, vectorisé par une technique de numérotation en damier, rouge et noir, des nœuds de maillage. Cet algorithme sert de lisseur pour la résolution des systèmes discrets correspondants à chaque grille sur laquelle on effectue soit une résolution quasi-exacte (ou « exact solve »), c'est-à-dire des itérations de lissage jusqu'à convergence, soit une résolution inexacte (ou « inexact solve »), c'est-à-dire quelques itérations K_ℓ du lisseur. Dans ce cas, on prend $K_\ell = \sqrt{M_\ell}/4$, où M_ℓ désigne le nombre de mailles de la grille G_ℓ .

4.2. Résultats numériques

Les résultats à deux grilles (zoom, $\ell^* = 1$) sont décrits pour les deux problèmes ($\mathcal{P}1$) et ($\mathcal{P}2$) avec

$$q_1(\ell = 1) = q_2(\ell = 1) = h_{\ell=0}/h_{\ell=1} = 2^p, \quad \text{où } p = 1, 2 \text{ ou } 3.$$

Les résultats en multigrille (zoom, $\ell^* \geq 1$) sont décrits pour le problème ($\mathcal{P}2$) avec $\ell^* = 1, 2$ ou 3 , $\gamma(\ell) = 1 \quad \forall \quad 0 < \ell < \ell^*$, $\gamma(0) \wedge$ -cycles effectués, et :

$\forall \ell \neq 0$:

$$\begin{cases} q_1(\ell) = q_2(\ell) = 2 & (\text{c'est-à-dire } h_\ell = h_{\ell-1}/2) \\ \hat{x}_1(\ell) = \hat{x}_2(\ell) = 0 & \text{et } \bar{x}_1(\ell) = \bar{x}_2(\ell) = \bar{x}_1(\ell-1)/2 = \bar{x}_2(\ell-1)/2. \end{cases}$$

Dans ce cas, toutes les grilles G_ℓ ont le même nombre de degrés de liberté.

L'algorithme F.I.C. est utilisé soit en calculant explicitement ω par la formule (11.b) (il sera alors noté ω^* dans les résultats), soit sous la version F.I.C. (ω) où l'on choisit un paramètre moyen $\omega(\ell) = \omega \quad \forall \ell \neq \ell^*$ qui est une donnée du problème. Nous nous sommes limités pour la méthode F.A.C. à l'utilisation de deux grilles.

Les erreurs discrètes associées à la solution du problème sont définies sur chaque grille G_ℓ par $e_\ell^k(u) = T_\ell(\bar{u}) - u_\ell^k$, où \bar{u} désigne la solution de référence de ($\mathcal{P}1$) ou la solution analytique de ($\mathcal{P}2$), et $T_\ell(\bar{u})$ représente la trace de \bar{u} sur $\bar{\Omega}_\ell$. On étudie dans les figures et tableaux suivants, l'évolution asymptotique des normes d'erreurs relatives discrètes calculées sur la grille de base $G_{\ell=0}$, en évaluant les quantités :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{\ell=0} &= \frac{\|e_{\ell=0}(u)\|}{\|T_{\ell=0}(\bar{u})\|} \quad (\text{sans zoom}) \\ \text{et } \xi_{\ell=0}^{k=\gamma(0)} &= \frac{\|e_{\ell=0}^{k=\gamma(0)}(u)\|}{\|T_{\ell=0}(\bar{u})\|} \quad (\text{zoom avec } \gamma(0) \wedge\text{-cycles}). \end{aligned}$$

Pour le problème ($\mathcal{P}2$), les calculs d'erreurs sont effectués en excluant le point origine où la solution n'est pas définie. D'ailleurs, ce nœud n'intervient pas dans la discrétisation des équations par un schéma à cinq points.

Dans le cas monogrille (sans zoom, $\ell^* = 0$), on étudie la variation des erreurs en fonction du pas h_0 de la grille G_0 .

Dans le cas d'un zoom à deux grilles, on étudie la variation des erreurs en fonction du pas h_0 de la grille G_0 et du pas $h_1 = h_0/2^p$ de la grille G_1 avec $1 \leq p \leq \bar{p} = 3$ (tableau 1a-1b, fig. 3a). On évalue un taux asymptotique d'erreur lorsque $h_1 \rightarrow 0$ (h_0 étant fixé) obtenu entre un calcul sans zoom ($p = 0$) et un calcul avec zoom ($p = \bar{p}$), défini par la moyenne :

$$\tau = \left(\frac{\bar{\xi}_{\ell=0}}{\xi_{\ell=0}^{k=\gamma(0)}(p=\bar{p})} \right)^{\frac{1}{\bar{p}}} \quad (\text{tableau 1a-1b}).$$

Tableau 1a. — Problème ($\mathcal{P}1$) - Zoom à deux grilles - $\gamma(0) = 2 \wedge$ -cycles - Norme L^2 de l'erreur relative sur la solution en fonction de h_0 et $h_1 = h_0/2^p$.

h_0	SANS ZOOM	$h_1 = \frac{h_0}{2^p}$	ZOOM $\hat{x}_1(1)=\hat{x}_2(1)=0.375$ $\tilde{x}_1(1)=\tilde{x}_2(1)=0.625$			ZOOM $\hat{x}_1(1)=\hat{x}_2(1)=0.25$ $\tilde{x}_1(1)=\tilde{x}_2(1)=0.75$		
			LDC	FAC	FIC $\omega = 0.55$	LDC	FAC	FIC $\omega = 0.40$
1/8	0.434E-1	p=1	0.434E-1	0.493E-1	0.210E-1	0.434E-1	0.732E-2	0.639E-2
		p=2	0.434E-1	0.790E-1	0.122E-1	0.434E-1	0.133E-1	0.106E-1
		p=3	0.434E-1	0.330E-1	0.589E-2	0.434E-1	0.289E-2	0.251E-2
		τ	1.00	1.10	1.95	1.00	2.47	2.59
1/16	0.689E-2	p=1	0.689E-2	0.167E-1	0.119E-1	0.739E-2	0.986E-2	0.106E-1
		p=2	0.689E-2	0.374E-2	0.394E-2	0.297E-2	0.123E-2	0.161E-2
		p=3	0.689E-2	0.255E-2	0.339E-2	0.214E-2	0.673E-3	0.592E-3
		τ	1.00	1.39	1.27	1.48	2.17	2.27
1/32	0.982E-2	p=1	0.136E-1	0.342E-2	0.538E-2	0.244E-2	0.160E-2	0.201E-2
		p=2	0.140E-1	0.295E-2	0.412E-2	0.174E-2	0.428E-3	0.392E-3
		p=3	0.134E-1	0.326E-2	0.331E-2	0.153E-2	0.233E-3	0.262E-3
		τ	0.90	1.44	1.44	1.86	3.48	3.35
1/64	0.192E-2							
1/128	0.648E-3							
1/256	0.193E-3							

Dans le cas d'un zoom multi-niveaux, on étudie la variation des erreurs en fonction du pas h_0 de la grille G_0 et du nombre de grilles locales ℓ^* , $1 \leq \ell^* \leq \bar{\ell} = 3$ (tableau 2, fig. 3b). On évalue un taux asymptotique d'erreur lorsque $h_{\ell^*} \rightarrow 0$ (h_0 étant fixé) obtenu entre un calcul sans zoom ($\ell^* = 0$) et un calcul avec zoom ($\ell^* = \bar{\ell}$), défini par la moyenne :

$$\tau = \left(\frac{\bar{\xi}_{\ell^*=0}}{\xi_{\ell^*=0}^{k=\gamma(0)}(\ell^* = \bar{\ell})} \right)^{\frac{1}{\bar{\ell}}} \text{ (tableau 2) .}$$

Tableau 1b. — Problème ($\mathcal{P}1$) - Zoom à deux grilles - $\gamma(0) = 2 \wedge$ -cycles - Erreur relative sur le flux en fonction de h_0 et $h_1 = h_0/2^p$.

h_0	SANS ZOOM	$h_1 = \frac{h_0}{2^p}$	ZOOM $\hat{x}_1(1) = \hat{x}_2(1) = 0.375$ $\tilde{x}_1(1) = \tilde{x}_2(1) = 0.625$			ZOOM $\hat{x}_1(1) = \hat{x}_2(1) = 0.25$ $\tilde{x}_1(1) = \tilde{x}_2(1) = 0.75$		
			LDC	FAC	FIC $\omega = 0.55$	LDC	FAC	FIC $\omega = 0.40$
1/8	0.383E-1	p=1	0.383E-1	0.491E-1	0.186E-1	0.383E-1	0.105E-1	0.785E-2
		p=2	0.383E-1	0.720E-1	0.127E-1	0.383E-1	0.115E-1	0.716E-2
		p=3	0.383E-1	0.318E-1	0.277E-2	0.383E-1	0.400E-2	0.121E-3
		τ	1.00	1.06	2.40	1.00	2.12	6.82
1/16	0.633E-2	p=1	0.633E-2	0.162E-1	0.120E-1	0.701E-2	0.978E-2	0.114E-1
		p=2	0.633E-2	0.382E-2	0.421E-2	0.717E-3	0.100E-2	0.192E-2
		p=3	0.633E-2	0.239E-2	0.346E-2	0.375E-3	0.387E-4	0.573E-3
		τ	1.00	1.38	1.22	2.57	5.47	2.23
1/32	0.963E-2	p=1	0.131E-1	0.304E-2	0.552E-2	0.104E-2	0.984E-3	0.241E-2
		p=2	0.135E-1	0.299E-2	0.430E-2	0.116E-3	0.482E-4	0.284E-3
		p=3	0.130E-1	0.331E-2	0.346E-2	0.618E-3	0.546E-3	0.560E-3
		τ	0.90	1.43	1.41	2.50	2.60	2.58
1/64	0.797E-3							
1/128	0.198E-3							
1/256	0.317E-3							

Pour le problème ($\mathcal{P}1$), nous avons étudié de façon analogue l'évolution asymptotique des erreurs relatives en flux : $\tilde{\eta}_{\ell=0} = |\bar{\phi} - \phi_{\ell=0}|/|\bar{\phi}|$ (sans zoom) et $\eta_{\ell=0}^{k=\gamma(0)} = |\bar{\phi} - \phi_{\ell=0}^{k=\gamma(0)}|/|\bar{\phi}|$ (zoom avec $\gamma(0) \wedge$ -cycles), où ϕ désigne le flux de chaleur moyen dans la direction Ox_2 et $\bar{\phi}$ le flux exact que l'on peut déterminer analytiquement [Angot et Caltagirone, 1988].

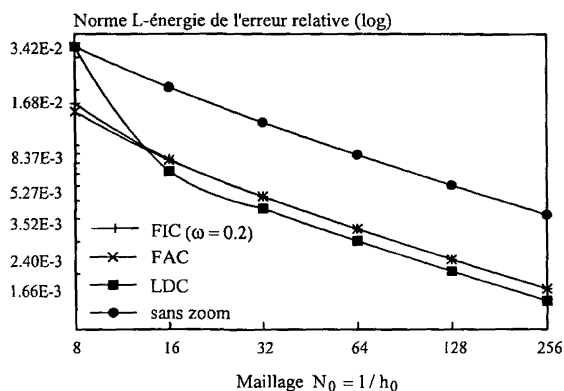


Figure 1. — Problème ($\mathcal{P}2$) - Zoom à deux grilles - $\gamma(0) = 2$ \wedge -cycles - $h_1 = h_0/2$
 $\hat{x}_1(\ell = 1) = \hat{x}_2(\ell = 1) = 0$ et $\bar{x}_1(\ell = 1) = \bar{x}_2(\ell = 1) = 0.25$.

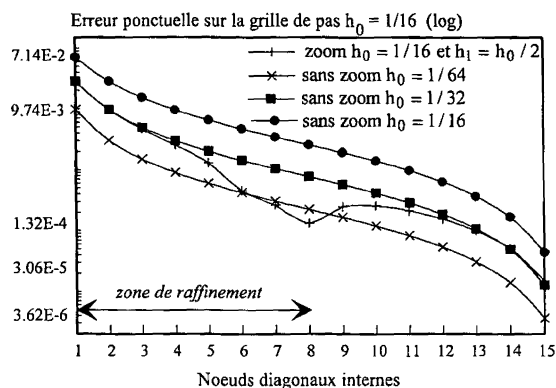


Figure 2. — Problème ($\mathcal{P}2$) - Zoom F.I.C. ($\omega = 0.31$) à deux grilles - $\gamma(0) = 2$ \wedge -cycles
 $\hat{x}_1(\ell = 1) = \hat{x}_2(\ell = 1) = 0$ et $\bar{x}_1(\ell = 1) = \bar{x}_2(\ell = 1) = 0.5$.

Les résultats en monogrille sont décrits avec une résolution « exacte » du système linéaire discret. Les résultats à deux grilles sont décrits avec $\gamma(0) = 2$ \wedge -cycles et une résolution « exacte » sur G_0 et G_1 . Les résultats en multigrille sont décrits avec $\gamma(0) = 10$ \wedge -cycles et une résolution « inexacte » sur chaque grille.

Pour le problème ($\mathcal{P}2$), nous avons étudié le taux de convergence des algorithmes L.D.C., F.A.C. et F.I.C. (tableau 3).

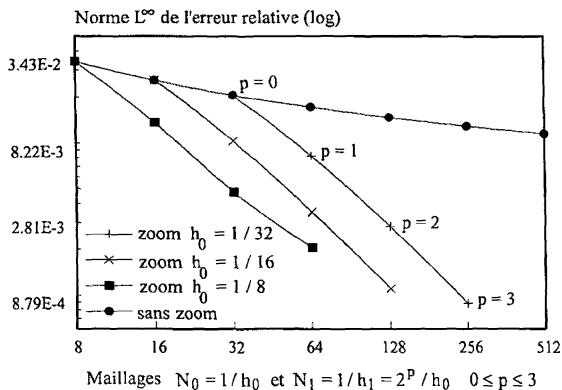


Figure 3a. — Problème ($\mathcal{P}2$) - Zoom F.I.C. ($\omega = 0.35$) à deux grilles - $\gamma(0) = 2$ \wedge -cycles
 $\hat{x}_1(\ell = 1) = \hat{x}_2(\ell = 1) = 0$ et $\hat{x}_1(\ell = 1) = \hat{x}_2(\ell = 1) = 0.5$.

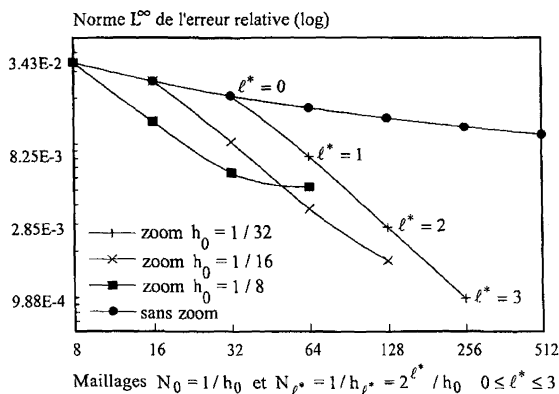


Figure 3b. — Problème ($\mathcal{P}2$) - Zoom F.I.C. ($\omega = 0.35$) multigrille - $\gamma(0) = 10$ \wedge -cycles.

Pour l'algorithme F.A.C., dans le cas d'un zoom à deux grilles avec une résolution « exacte » sur G_0 et G_1 , h_0 et h_1 étant fixés, on calcule la norme euclidienne du résidu composite $|r_{\ell=0}^k(u)|_2$ pour $k = 1$ à $\gamma(0) = 10$. On en déduit un taux de convergence ρ défini par la moyenne :

$$\rho = \left(\frac{|r_{\ell=0}^{k=\gamma(0)}(u)|_2}{|r_{\ell=0}^{k=1}(u)|_2} \right)^{\frac{1}{(\gamma(0)-1)}}.$$

Pour les algorithmes L.D.C. et F.I.C., dans le cas d'un zoom multi-niveaux avec une résolution « inexacte » sur chaque grille, h_0 , p et ℓ^* étant fixés, on

Tableau 2. — Problème ($\mathcal{P}2$) - Zoom multigrille - $\gamma(0) = 10$ \wedge -cycles - Norme L-énergie de l'erreur relative sur la solution en fonction de h_0 et ℓ^* .

h_0	SANS ZOOM $\ell^* = 0$	nombre de grilles	ZOOM LDC	ZOOM FIC	
				$\omega = 0.20$	$\omega = 0.35$
1/8	0.342E-1	$\ell^* = 1$	0.121E-1	0.140E-1	0.140E-1
		$\ell^* = 2$	0.483E-2	0.784E-2	0.726E-2
		$\ell^* = 3$	0.344E-2	0.741E-2	0.647E-2
		τ	2.15	1.66	1.74
1/16	0.206E-1	$\ell^* = 1$	0.719E-2	0.821E-2	0.822E-2
		$\ell^* = 2$	0.217E-2	0.313E-2	0.320E-2
		$\ell^* = 3$	0.753E-3	0.189E-2	0.194E-2
		τ	3.01	2.22	2.20
1/32	0.133E-1	$\ell^* = 1$	0.455E-2	0.528E-2	0.546E-2
		$\ell^* = 2$	0.145E-2	0.186E-2	0.193E-2
		$\ell^* = 3$	0.793E-3	0.713E-3	0.923E-3
		τ	2.56	2.65	2.43
1/64	0.888E-2				
1/128	0.607E-2				
1/256	0.420E-2				
1/512	0.294E-2				

calcule la norme de la différence entre deux itérés successifs $\delta_{\ell=0}^k = \|u_{\ell=0}^k - u_{\ell=0}^{k-1}\|_{L\text{-énergie}}$ pour $k = 1$ à $\gamma(0) = 10$. On en déduit un taux de convergence ρ défini par la moyenne :

$$\rho = \left(\frac{\delta_{\ell=0}^{k=\gamma(0)}}{\delta_{\ell=0}^{k=1}} \right)^{\frac{1}{(\gamma(0)-1)}}.$$

4.3. Analyse des résultats

1) Dans le cas sans zoom, l'erreur diminue de façon monotone avec le pas h_0 pour le problème ($\mathcal{P}2$) (tableau 2). Il n'en est pas de même pour le

Tableau 3. — Problème ($\mathcal{P}2$) - Zoom multigrille - $\gamma(0) = 10 \wedge$ -cycles. Taux de convergence en fonction de h_0 et p (cas à 2 grilles), de h_0 et ℓ^* (cas multigrille).

h_0	nombre de grilles	LDC			FIC ($\omega = 0.20$)			FAC		
		p=1	p=2	p=3	p=1	p=2	p=3	p=1	p=2	p=3
1/8	$\ell^* = 1$	0.51	0.49	0.51	0.45	0.48	0.47	0.14	0.15	0.15
	$\ell^* = 2$	0.45			0.43					
	$\ell^* = 3$	0.45			0.35					
1/16	$\ell^* = 1$	0.55	0.54	0.56	0.45	0.49	0.47	0.14	0.16	0.16
	$\ell^* = 2$	0.50			0.44					
	$\ell^* = 3$	0.50			0.41					
1/32	$\ell^* = 1$	0.49	0.54	0.52	0.50	0.52	0.55	0.15	0.17	0.18
	$\ell^* = 2$	0.51			0.45					
	$\ell^* = 3$	0.50			0.42					

problème ($\mathcal{P}1$) (tableau 1a-1b). En effet, avec la technique utilisée d'un maillage cartésien indépendant de la géométrie de l'hétérogénéité, la précision devient une fonction complexe du rayon du disque, du maillage, et de la position relative des mailles par rapport à l'interface entre les deux milieux [Angot et Caltagirone, 1988]. Le cas d'une inclusion carrée bien que mieux adaptée au maillage cartésien n'a pas volontairement été retenu ici, de même que les cas où le rapport de conductivités ou perméabilités varie de plusieurs ordres de grandeur. Des études de ce type sont effectuées dans [Angot et Caltagirone, 1988 ; Angot, 1989].

2) Les résultats présentés avec zoom dans les différents tableaux et figures, montrent de façon générale la décroissance de l'erreur relative globale, évaluée sur la grille de base G_0 . L'erreur diminue de façon monotone pour le problème ($\mathcal{P}2$) en fonction de p (cas à deux grilles) ou de ℓ^* (cas multigrille). On constate une analogie entre la variation de l'erreur à deux grilles en fonction de p (avec $\gamma(0) = 2 \wedge$ -cycles et une « résolution exacte » sur chaque grille), et celle en multigrille en fonction de ℓ^* (avec $\gamma(0) = 10 \wedge$ -cycles et une « résolution inexacte » sur chaque grille) (fig. 3a-3b). En ce qui concerne le problème ($\mathcal{P}1$), l'erreur décroît globalement lorsque p augmente, mais pas

de façon monotone. Il arrive même que l'erreur obtenue après zoom soit plus grande que celle obtenue sans zoom. On retrouve le phénomène déjà observé dans la remarque 1). C'est aussi pour cette raison que les résultats sont sensibles à la position et à la taille de la zone de zoom par rapport au disque d'hétérogénéité : les meilleurs résultats sont obtenus ici pour un zoom sur un quart du domaine Ω , soit $\hat{x}_1(\ell = 1) = \hat{x}_2(\ell = 1) = 0,25$ et $\bar{x}_1(\ell = 1) = \bar{x}_2(\ell = 1) = 0,75$ (tableau 1a-1b).

On remarque entre un calcul sans zoom et avec zoom, que l'erreur entre deux incréments de p ou de ℓ^* est divisée par un facteur asymptotique moyen τ élevé, compris entre 1,5 et 3,5 (tableau 1a-1b, tableau 2).

3) L'erreur obtenue avec zoom est souvent plus petite que celle obtenue sans zoom sur une monogrille de base de pas $h_0 \leq h_{\ell^*}$. En particulier, la figure 2 montre que l'erreur discrète ponctuelle $|e_{\ell=0}^k(u)|$ évaluée en chaque nœud situé sur la diagonale de G_0 après deux \wedge -cycles de la méthode F.I.C. à deux grilles ($h_0 = 1/16$ et $h_1 = 1/32$) est globalement plus petite que l'erreur obtenue sans zoom ($\ell^* = 0$) en ces mêmes nœuds sur une monogrille de base G_0 de pas $h_0 = 1/32$. Les résultats avec zoom sont plus précis à l'intérieur de la zone de raffinement, et s'approchent asymptotiquement des valeurs obtenues sans zoom avec $h_0 = 1/32$, quand on s'éloigne de l'interface. La précision est donc globalement meilleure avec zoom et cela pour un coût moindre (tableau 4). Cependant, l'erreur ne diminue pas au-delà d'un certain seuil consistant avec l'ordre des schémas de discrétisation sur les diverses grilles [Hackbusch, 1985].

4) Pour les algorithmes F.A.C. et F.I.C., les résultats à deux grilles sont de même ordre de grandeur, et cela pour les deux problèmes ($\mathcal{P}1$) et ($\mathcal{P}2$) (tableau 1a-1b, fig. 1). Ces résultats sont meilleurs que ceux obtenus avec l'algorithme L.D.C. pour le problème ($\mathcal{P}1$), où la conservation du flux joue un rôle important. En revanche, pour le problème ($\mathcal{P}2$), les résultats avec L.D.C. s'avèrent être aussi bons que F.A.C. et F.I.C., voire même légèrement meilleurs dans certains cas (fig. 1). La méthode L.D.C. est inefficace si la zone de raffinement local ne contient pas suffisamment de nœuds grossiers sur lesquels les corrections de résidu doivent être effectuées ; dans ce cas, le zoom n'apporte pas de diminution de l'erreur ($\tau = 1$) (tableau 1a-1b, fig. 1).

5) Nous avons étudié pour l'algorithme F.I.C. multigrille les variations des normes L -énergie de l'erreur en fonction du nombre de \wedge -cycles ou du nombre d'itérations de gradient conjugué. On constate une certaine analogie entre ces deux figures. C'est en utilisant le plus grand nombre de grilles locales que l'erreur est la plus petite avec la réduction la plus rapide lorsqu'on augmente le nombre d'itérations de \wedge -cycles ou de gradient conjugué (fig. 4a-4b).

6) On remarque pour l'algorithme F.I.C. (ω) que le calcul converge pour des valeurs moyennes de ω comprises strictement entre 0 et 1, et diverge pour des valeurs supérieures à 1 (fig. 5a-5b). Il semblerait qu'un bon choix de valeurs de ω se situe entre 0,1 et 0,5 en ce qui concerne l'erreur (fig. 5a), et

Tableau 4. — Problème ($\mathcal{P}2$) - Temps CPU en secondes sur IBM RISC6000-320.
 Zoom à deux grilles ($\ell^* = 1$ et $p = 1, 2, 3$): $\gamma(0) = 2 \wedge$ -cycles.
 Zoom multigrille ($\ell^* = 1, 2, 3$ et $p = 1$): $\gamma(0) = 10 \wedge$ -cycles.

h_0	nombre de grilles	SANS ZOOM	LDC			FIC ($\omega = 0.20$)			FAC		
			p=1	p=2	p=3	p=1	p=2	p=3	p=1	p=2	p=3
1/16	$\ell^* = 1$	0.10	0.21	0.73	4.56	0.19	0.67	4.53	0.25	0.92	6.53
	$\ell^* = 1$		0.16			0.15					
	$\ell^* = 2$		0.29			0.28					
	$\ell^* = 3$		0.40			0.39					
1/32	$\ell^* = 1$	0.39	1.30	5.54	33.9	1.27	5.17	34.2	1.49	7.30	48.9
	$\ell^* = 1$		0.99			0.96					
	$\ell^* = 2$		1.81			1.79					
	$\ell^* = 3$		2.70			2.70					
1/64	$\ell^* = 1$	2.51	10.1	38.5	260	10.1	39.4	264	11.3	52.3	371
	$\ell^* = 1$		7.27			7.22					
	$\ell^* = 2$		13.8			13.9					
	$\ell^* = 3$		20.6			21.1					
1/128	$\ell^* = 1$	18.5	76.6	294		76.7	303		85.9	396	
	$\ell^* = 1$		54.2			54.7					
	$\ell^* = 2$		104			103					
	$\ell^* = 3$		155			158					
1/256	$\ell^* = 1$	143	585								
	$\ell^* = 1$		426								
	$\ell^* = 2$		847								
	$\ell^* = 3$										

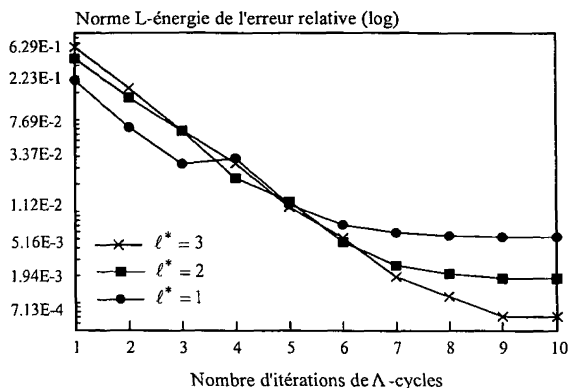


Figure 4a. — Problème ($\mathcal{P}2$) - Zoom F.I.C. ($\omega = 0.2$) multigrille - $h_0 = 1/32$.

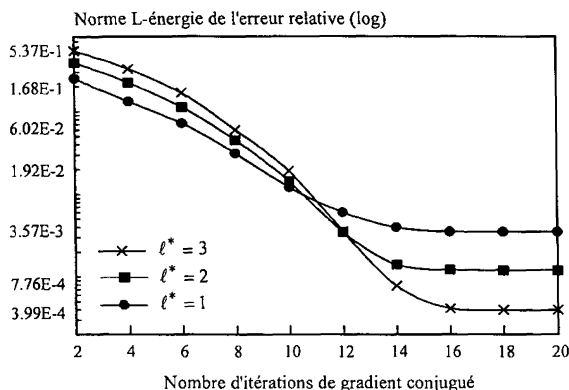


Figure 4b. — Problème ($\mathcal{P}2$) - Zoom F.I.C. ($\omega = 0.2$) multigrille - $\gamma(0) = 10$ Λ -cycles $h_0 = 1/64$.

entre 0,1 et 0,2 pour un taux de convergence optimal (fig. 5b). De plus, le choix d'une valeur moyenne bien choisie donne des résultats de même ordre de grandeur que le calcul explicite de ω^* par la formule (11.b), et s'avère même parfois meilleur. En outre, les calculs pour F.I.C. (ω) sont plus économiques, car ils ne prennent en compte que les flux grossiers et les flux fins sur l'interface entre les sous-domaines.

7) Les taux de convergence observés pour les trois algorithmes sur le problème ($\mathcal{P}2$) sont strictement inférieurs à 1, validant ainsi leur convergence sur ce problème (tableau 3).

A cause du caractère exact de la méthode, on note pour F.A.C. un taux de convergence ρ élevé, valant en moyenne 0,16, qui est indépendant des pas de

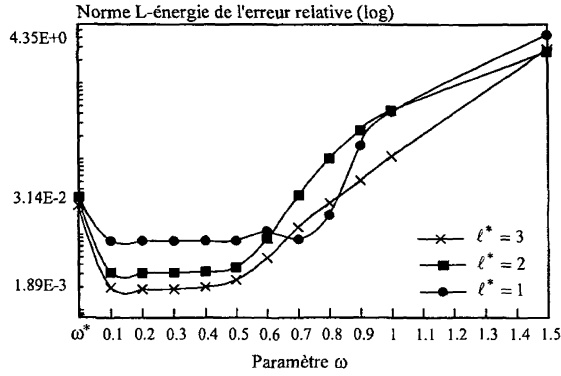


Figure 5a. — Problème ($\mathcal{P}2$) - Zoom F.I.C. multigrille - $\gamma(0) = 10$ \wedge -cycles - $h_0 = 1/16$.

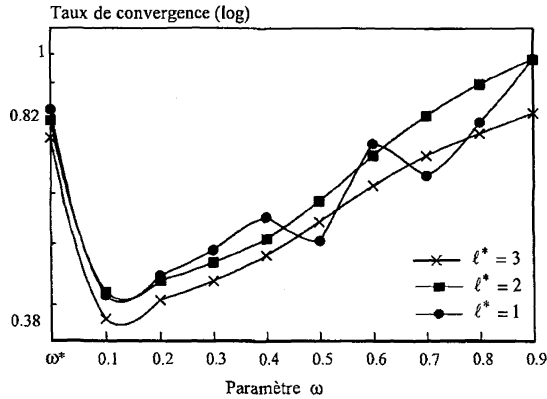


Figure 5b. — Problème ($\mathcal{P}2$) - Zoom F.I.C. multigrille - $\gamma(0) = 10$ \wedge -cycles - $h_0 = 1/16$.

discrétisation h_0 et h_1 , et nettement meilleur que L.D.C. ou F.I.C. On notera également que la norme du résidu composite peut continuer à diminuer au cours des \wedge -cycles, alors que l'erreur stagne, limitée par le seuil de l'erreur de discrétisation.

On constate un taux de convergence égal en moyenne à 0,46 pour F.I.C. ($\omega = 0,2$) et à 0,51 pour L.D.C., soit légèrement meilleur pour l'algorithme F.I.C. En outre, l'utilisation de l'algorithme A.F.A.C. mieux adapté au cas multigrille mais convergeant deux fois moins vite que F.A.C. donnerait un taux de convergence ρ voisin de 0,38, c'est-à-dire plus proche de celui de F.I.C.

Ces taux de convergence sont peu sensibles aux variations de h_0 et h_1 (cas à deux grilles), ou de h_0 et ℓ^* (cas multigrille). Cependant, les taux de convergence de F.I.C. ont tendance à s'améliorer sensiblement au fur et à mesure que le nombre de niveaux de grilles locales ℓ^* augmente (tableau 3).

Il est à noter également que le choix d'un paramètre ω optimal pour F.I.C. (ω), qui donnerait la solution la meilleure, n'assure pas forcément le meilleur taux de convergence (fig. 5a-5b). Lorsqu'on utilise la méthode F.I.C. avec une correction aux nœuds grossiers strictement intérieurs à la zone de zoom, on obtient un taux de convergence voisin de 0,03 pour la résolution des équations de Navier-Stokes d'un modèle de circulation océanique [Angot et Laugier, 1994 ; 1995].

8) Nous avons comparé dans le tableau 4 les temps de calcul comprenant l'étape d'initialisation en plus des itérations \wedge -cycles. On constate des temps CPU quasiment identiques pour les méthodes L.D.C. et F.I.C. : en effet, ces algorithmes nécessitent un nombre d'opérations de même ordre de grandeur. La méthode F.A.C. qui requiert des temps de calcul plus élevés est moins économique à cause de l'utilisation de la grille composite.

5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous avons introduit dans cette étude les concepts généraux mis en œuvre pour la résolution de problèmes aux limites par des techniques adaptatives de raffinement local multigrille. Nous avons décrit trois types d'algorithmes L.D.C., F.A.C. et F.I.C., et comparé leurs performances sur deux exemples de problèmes elliptiques. L'analyse de l'erreur discrète sur chaque problème fait apparaître une nette diminution de cette erreur sur tout le domaine. On remarque que malgré son caractère non exact, l'algorithme F.I.C. donne des résultats quasiment identiques à ceux de l'algorithme F.A.C. Cependant, la méthode F.A.C. nécessite des coûts de calcul par itération plus importants mais elle possède le meilleur taux de convergence. L'utilisation de l'algorithme F.I.C. comme préconditionnement du problème discret pourrait être intéressante, notamment dans la version approchée F.I.C. (ω), où ω joue le rôle d'un paramètre de relaxation.

On étudie actuellement des extensions aux équations de Navier-Stokes [Khadra, 1994 ; Caltagirone, Khadra et Angot, 1995].

Remerciements :

Les auteurs tiennent à remercier les rapporteurs qui, par leurs remarques judicieuses, ont permis d'améliorer grandement la première version de cet article.

Nous remercions également Pierre Fabrie du laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université Bordeaux I pour les précieux conseils qu'il nous a prodigués.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Ph. ANGOT et J. P. CALTAGIRONE, 1988, Homogénéisation numérique en thermique des structures hétérogènes périodiques, *Actes EUROTHERM n° 4*, Nancy, pp. 122-126.
- [2] Ph. ANGOT, 1989, Contribution à l'étude des transferts thermiques dans des systèmes complexes ; Application aux composants électroniques, *Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux I, Spécialité Mécanique*.
- [3] Ph. ANGOT and J. P. CALTAGIRONE, 1990, New graphical and computational architecture concept for numerical simulation on supercomputers, *Proc. 2-nd World Congress on Computational Mechanics*, Stuttgart, pp. 973-976.
- [4] Ph. ANGOT, J. P. CALTAGIRONE et K. KHADRA, 1992, Une méthode adaptative de raffinement local : la Correction du Flux à l'Interface, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **315**, Série I, pp. 739-745.
- [5] Ph. ANGOT, J. P. CALTAGIRONE, K. KHADRA et P. MOREL, 1992, Concept de zoom en architecture de calcul ; Etude comparative de trois méthodes adaptatives de raffinement local : L.D.C., F.A.C. et F.I.C., *Rapport interne IMST 92-04*, juin.
- [6] Ph. ANGOT, 1994, Parallel multi-level and domain decomposition methods, *Calculateurs parallèles, L.T.C.P.*, **6**, pp. 9-14.
- [7] Ph. ANGOT et M. LAUGIER, 1994, La méthode F.I.C. de raccordement conservatif de sous-domaines emboîtés pour un modèle de circulation océanique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **319**, Série II, pp. 993-1000.
- [8] Ph. ANGOT and M. LAUGIER, 1995, Conservative matching of non-conforming grids on nested subdomains ; Application to an ocean circulation model, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, soumis.
- [9] D. BAI and A. BRANDT, 1987, Local mesh refinement multilevel techniques, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **8**, pp. 109-134.
- [10] R. E. BANK and A. WEISER, 1985, Some a posteriori error estimates for elliptic partial differential equations, *Math. Comp.*, **44**, pp. 283-301.
- [11] R. E. BANK, 1986, A posteriori error estimates, adaptive local mesh refinement and multigrid iteration, *Lecture Notes in Mathematics*, W. Hackbusch and U. Trottenberg, eds., Springer-Verlag, **1228**, pp. 7-23.
- [12] R. E. BANK, T. F. DUPONT and H. YSERENTANT, 1988, The hierarchical basis multigrid methods, *Numer. Math.*, **52**, pp. 427-458.
- [13] M. J. BERGER and J. OLIGER, 1984, Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations, *J. Comput. Phys.*, **53**, pp. 484-512.
- [14] C. BERNARDI, Y. MADAY and A. PATERA, 1989, A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method, *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*, H. Brezis and J. L. Lions, eds., Pitman Research.
- [15] P. E. BJORSTAD and O. B. WIDLUND, 1986, Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned into substructures, *SIAM J. Numer. Anal.*, **23**, pp. 1097-1120.

- [16] J. H. BRAMBLE, J. E. PASCIAK and A. H. SCHATZ, 1986, An iterative method for elliptic problems on regions partitioned into substructures, *Math. Comp.*, **46**, pp. 361-369.
- [17] J. H. BRAMBLE, R. E. EWING, J. E. PASCIAK and A. H. SCHATZ, 1988, A preconditioning technique for the efficient solution of problems with local grid refinement, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **67**, pp. 149-159.
- [18] J. H. BRAMBLE, J. E. PASCIAK and J. XU, 1990, Parallel multilevel preconditioners, *Math. Comp.*, **55**, pp. 1-22.
- [19] A. BRANDT, 1973, Multi-Level Adaptive Techniques (MLAT) for fast numerical solution to boundary value problems, *Lecture Notes in Physics*, H. Cabannes and R. Temam, eds., Springer-Verlag, **18**, pp. 82-89.
- [20] A. BRANDT, 1977, Multi-level adaptive solution to boundary-value problems, *Math. Comp.*, **31**, pp. 333-390.
- [21] J. P. CALTAGIRONE, K. KHADRA et Ph. ANGOT, 1995, Sur une méthode de raffinement local multigrille pour la résolution des équations de Navier-Stokes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **320**, Série IIb, pp. 295-302.
- [22] M. EL GANAOU, 1993, Etude de schémas multigrilles adaptatifs pour un problème d'advection-diffusion, *D.E.A. de Mécanique, Université Aix-Marseille II*, juillet.
- [23] W. HACKBUSCH and U. TROTTEBERG, 1982, eds., Multigrid Methods, *Lecture Notes in Mathematics*, **960**, Springer-Verlag.
- [24] W. HACKBUSCH, 1984, Local Defect Correction Method and Domain Decomposition Techniques, in *Defect Correction Methods, Theory and Applications*, K. Böhmer and H. J. Stetter, eds., *Computing Supplementum*, Springer-Verlag, **5**, pp. 89-113.
- [25] W. HACKBUSCH, 1985, Multi-Grid Methods and Applications, *Series in Computational Mathematics*, Springer-Verlag.
- [26] K. KHADRA, Ph. ANGOT and J. P. CALTAGIRONE, 1993, A comparison of locally adaptive multigrid methods : L.D.C., F.A.C. and F.I.C., *NASA Conf. Publ. 3224, 6th Copper Mountain Conference on Multigrid Methods*, N. D. Melson, S. F. McCormick and T. A. Manteuffel, eds., **1**, pp. 275-292.
- [27] K. KHADRA, 1994, Méthodes adaptatives de raffinement local multigrille ; Applications aux équations de Navier-Stokes et de l'énergie, *Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux I, Spécialité Mathématiques Appliquées*, mars.
- [28] P. LE TALLEC, 1994, Domain decomposition methods in computational mechanics, *Comput. Mech. Adv.*, **1**, pp. 121-220.
- [29] S. F. McCORMICK, 1984, Fast Adaptive Composite Grid (F.A.C.) Methods : theory for the variational case, in *Defect Correction Methods, Theory and Applications*, K. Böhmer and H. J. Stetter, eds., *Computing Supplementum*, Springer-Verlag, **5**, pp. 115-121.
- [30] S. F. McCORMICK, ed., 1987, Multigrid Methods, *Frontiers in Appl. Math.*, **3**, SIAM, Philadelphia.
- [31] S. F. McCORMICK, 1989, Multilevel adaptive methods for partial differential equations, *Frontiers in Appl. Math.*, **6**, SIAM, Philadelphia.

- [32] S. V. PATANKAR, 1980, Numerical heat transfer and fluid flow, *Hemisphere Publishing Corporation*, New-York.
- [33] U. RÜDE, 1993, Fully adaptive multigrid methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, **30**, pp. 230-248.
- [34] J. XU, 1992, Iterative methods by space decomposition and subspace correction, *SIAM Rev.*, **34**, pp. 581-613.