

CHRISTINE BERNARDI

BRIGITTE MÉTIVET

BERNADETTE PERNAUD-THOMAS

**Couplage des équations de Navier-Stokes et de  
la chaleur : le modèle et son approximation  
par éléments finis**

*M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome  
29, n° 7 (1995), p. 871-921

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1995\\_\\_29\\_7\\_871\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1995__29_7_871_0)

© AFCET, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



## COUPLAGE DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES ET DE LA CHALEUR : LE MODÈLE ET SON APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS (\*)

par Christine BERNARDI <sup>(1)</sup>, Brigitte MÉTIVET <sup>(2)</sup>  
& Bernadette PERNAUD-THOMAS <sup>(2)</sup>

Communiqué par P. G. CIARLET

*Résumé. — On étudie un modèle de fluide visqueux incompressible où les équations de Navier-Stokes sont couplées avec celle de la chaleur. On démontre des résultats d'existence et d'unicité locale pour le problème continu, puis on effectue l'analyse numérique de son approximation dans des espaces d'éléments finis usuels.*

*Abstract. — This paper deals with a problem for viscous incompressible flows, where the Navier-Stokes equations are coupled with the heat equation. Existence and local uniqueness results are established. Next, a finite element approximation of the problem is presented and thoroughly analysed.*

### 1. INTRODUCTION ET DÉRIVATION DU MODÈLE

On s'intéresse ici à l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible régi par les équations de Navier-Stokes, lorsqu'elles sont couplées à l'équation de la chaleur par l'intermédiaire du terme source :

- (i) une force de gravité est imposée au fluide, elle est proportionnelle à la variation de densité, donc dépend de la température ;
- (ii) cette dernière est solution de l'équation de la chaleur avec un terme de convection lié à la vitesse du fluide.

Le modèle qui va être considéré ici est essentiellement le système formé par ces équations, dans le cadre de l'approximation proposée en 1903 par J. Boussinesq [2]. Sa justification détaillée est donnée à la fin de la présente section (voir aussi E. A. Spiegel et G. Veronis [11] et J.-P. Chabard [4]). Il a

---

<sup>(1)</sup> Analyse Numérique, Tour 55-65, 5<sup>e</sup> étage, C.N.R.S. & Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

<sup>(2)</sup> Electricité de France D.E.R./I.M.A./M.M.N., 1 avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart Cedex, France.

(\*) Reçu le 27 mars 1995.

été l'objet de nombreux travaux dans le cas d'un écoulement dépendant du temps, en particulier à cause des phénomènes de bifurcation qui interviennent pour certaines valeurs des paramètres physiques (voir par exemple l'article de D. D. Joseph [8], l'ouvrage de D. H. Sattinger [10] et les références qui y sont indiquées). Le cas stationnaire, auquel on s'intéresse ici, semble moins connu. Des études ont toutefois été effectuées par W. Velte [12] puis par P. H. Rabinowitz [9], elles traitent essentiellement des valeurs propres du problème linéarisé et de la stabilité qui en découle. Récemment, M. Gaultier et M. Lezaun [6] ont démontré l'unicité puis l'existence de la solution du problème continu posé dans un rectangle, lorsque certaines inégalités sont satisfaites par les paramètres physiques qui y interviennent. On présentera ici une généralisation de leurs résultats.

On considère d'abord le problème modèle, dérivé des équations de la mécanique des fluides et de la thermodynamique, dans un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Les conditions aux limites sont de type Dirichlet sur la vitesse et de type mixte Dirichlet et Neumann pour la température. Pour plus de clarté, on traite d'abord le cas plus simple où les conditions de Dirichlet sont homogènes, avant de passer au cas général. Des estimations *a priori* permettent d'établir un résultat d'unicité locale. On prouve également que le système d'équations admet toujours une solution ; la démonstration de ce résultat fait appel à la théorie du degré topologique et les arguments utilisés sont tirés de la thèse de H. Berestycki [1].

Dans la section suivante, on s'intéresse à l'approximation du problème complet. On utilise pour cela des espaces d'éléments finis usuels, tant pour la vitesse et la pression (où une condition inf-sup du type Babuška-Brezzi est nécessaire) que pour la température. On propose un problème discret, dont on effectue l'analyse numérique. L'outil principal est ici le théorème des fonctions implicites discret de F. Brezzi, J. Rappaz et P.-A. Raviart [3]. On démontre des majorations d'erreur à la fois sur la vitesse, la pression et la température. Une des conséquences est un ajustement optimal des ordres respectifs d'éléments finis à utiliser pour la vitesse et la température, comme l'indique la conclusion de l'article.

On considère le cas d'un fluide newtonien (ce qui revient à dire qu'il existe une relation linéaire et isotrope entre les contraintes et le taux de déformation). On écrit alors l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

puis l'équation de quantité de mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \operatorname{div}(\mu(\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad} \mathbf{u}^T)) - \operatorname{grad}(\mu' \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{grad} P = \mathbf{f}. \quad (1.2)$$

Dans ces équations, les quantités  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  et  $P$  désignent respectivement la masse volumique, la vitesse et la pression du fluide. Les paramètres  $\mu$  de viscosité dynamique et  $\mu'$  de viscosité secondaire sont supposés positifs. Enfin, le terme  $\mathbf{f}$  représente les forces volumiques. Il faut noter que, pour un fluide de viscosité et de masse volumique constantes, la viscosité cinématique  $\nu$  étant définie par l'équation  $\mu = \rho\nu$ , les équations se réduisent à

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \text{grad } p = \frac{\mathbf{f}}{\rho}, \quad (1.3)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (1.4)$$

où  $p = \frac{P}{\rho}$  est la pression cinématique.

Il faut en plus écrire l'équation de conservation de l'énergie. Le premier principe de la thermodynamique dit que la dérivée totale de l'énergie totale (somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique) est égale à la somme des puissances des forces appliquées, volumiques et surfaciques. On obtient le bilan d'énergie cinétique en multipliant l'équation (1.1) de conservation de la quantité de mouvement par la vitesse  $\mathbf{u}$  et on obtient par soustraction l'équation de l'énergie interne, notée  $e$  :

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) e \right) = \boldsymbol{\tau} \cdot \text{grad } \mathbf{u} - P \text{ div } \mathbf{u} - \text{div } \mathbf{q} + \mathcal{G}. \quad (1.5)$$

Dans cette équation, le premier membre est le taux de variation de l'énergie interne. Le tenseur  $\boldsymbol{\tau}$  est égal à  $\mu(\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad } \mathbf{u}^T) + \mu'(\text{div } \mathbf{u}) \text{Id}$ , de sorte que le terme  $\boldsymbol{\tau} \cdot \text{grad } \mathbf{u}$  représente la puissance des forces visqueuses. Les quantités  $-P \text{ div } \mathbf{u}$ ,  $-\text{div } \mathbf{q}$  et  $\mathcal{G}$  correspondent respectivement à la puissance des forces de pression, au flux de chaleur et à la source de chaleur.

On réécrit maintenant l'équation de bilan énergétique sous forme enthalpique, en posant :  $\rho h = \rho e + P$ , où  $h$  est l'enthalpie. On désigne par  $T$  la température du fluide, puis on introduit la chaleur spécifique à pression constante :

$$C_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p,$$

et le coefficient d'expansion thermique du fluide :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p.$$

Il est alors standard (voir par exemple J.-P. Chabard [4]) de traduire la conservation de l'enthalpie massique par une équation sur la température :

$$\begin{aligned} \rho C_P \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) \\ = \tau \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u} + \beta T \left( \frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P \right) - \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Le flux local de chaleur s'exprime à l'aide de la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\kappa \mathbf{grad} T, \quad (1.7)$$

où  $\kappa$  est la conductivité thermique.

On supposera ici que l'on est dans le cas d'un nombre de Mach très faible : on peut alors négliger les effets dus à la dissipation visqueuse, c'est-à-dire prendre  $\tau \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u}$  égal à 0. On néglige en outre les effets de dilatation thermique en comparaison des autres effets, ce qui revient à prendre  $\beta T \left( \frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) P \right)$  égal à 0. En définitive, l'équation d'énergie sera utilisée sous la forme suivante :

$$\rho C_P \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = \operatorname{div} (\kappa \mathbf{grad} T) + \mathcal{G}. \quad (1.8)$$

Considérons maintenant le cas de la convection thermique. On suppose la densité non constante, on reprend donc l'équation de conservation de la quantité de mouvement sous sa forme initiale (1.2). La force génératrice dans le cas du mouvement en convection naturelle est due au champ de température. Dans ce cas, pour le champ de gravitation, la force est donnée par :  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}_0$ , où  $\mathbf{g}_0$  est l'accélération de la pesanteur. On décompose la pression statique locale en deux termes :  $P = P_h + P_d$ , où  $P_h$  désigne la pression hydrostatique et  $P_d$  la pression dynamique résultant du mouvement du fluide. La pression hydrostatique vérifiant :

$$\mathbf{grad} P_h = \rho_0 \mathbf{g}_0,$$

l'équation de conservation de la quantité de mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \operatorname{div} (\mu \mathbf{grad} \mathbf{u}) - \mathbf{grad} (\mu' \operatorname{div} \mathbf{u}) + \mathbf{grad} P_d \\ = (\rho - \rho_0) \mathbf{g}_0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

De plus, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, on ne tient compte des variations de masse volumique que dans le second membre de cette

équation et la masse volumique est également supposée constante dans l'équation de conservation de la masse, qui s'écrit alors sous la forme (1.4). Finalement, la variation de masse volumique est une fonction linéaire de la variation de température :

$$\rho_0 - \rho = \rho\beta(T - T_0) . \quad (1.10)$$

En conclusion, dans le cas de l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible à faible nombre de Mach et en utilisant l'approximation de Bousinesq, on obtient le système suivant, dont les inconnues sont la vitesse  $\mathbf{u}$ , la pression  $P_d$  et la température  $T$  :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \operatorname{div} (\mu \mathbf{grad} \mathbf{u}) + \mathbf{grad} P_d &= -\beta\rho(T - T_0) \mathbf{g}_0 , \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 , \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) - \operatorname{div} (\kappa \mathbf{grad} T) = \mathcal{G} .$$

Pour travailler sur ce système, on divisera la première équation par  $\rho$  et la troisième par  $\rho C_p$  et on se limitera au cas stationnaire. On utilisera une forme un peu plus générale du second membre de l'équation de quantité de mouvement, en le prenant sous forme d'une fonction régulière de la température à dérivée bornée.

## 2. ÉTUDE DES ÉQUATIONS COUPLÉES

Comme indiqué dans la Section 1, la modélisation du problème dans le cas stationnaire se traduit par les équations suivantes, posées dans un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$  :

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{grad} p &= \mathbf{F}(T) \quad \text{dans } \Omega , \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans } \Omega , \\ -\lambda \Delta T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= g \quad \text{dans } \Omega , \end{aligned} \quad (2.1)$$

où les inconnues sont la vitesse  $\mathbf{u}$ , la pression  $p$  et la température  $T$ . Les coefficients  $\nu$  et  $\lambda$  sont supposés constants positifs. Les données sont une fonction  $\mathbf{F}$  assez régulière de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^d$  (typiquement, la fonction  $\mathbf{F}$  est une force de gravité proportionnelle à des variations de densité, donc dépendant de

la température) et une fonction  $g$  ne dépendant que de la variable d'espace. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet pour la vitesse et de type mixte Dirichlet-Neumann pour la température, elles s'écrivent :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_b \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad (2.2)$$

$$T = T_b \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial n} = G_b \quad \text{sur} \quad \Gamma_N, \quad (2.3)$$

où  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  sont des parties ouvertes disjointes de  $\partial\Omega$  telles que  $\overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$  soit égal à  $\partial\Omega$ .

L'étude s'effectue selon le plan suivant : hypothèses de travail et position d'un problème simplifié, estimations *a priori*, résultat d'unicité, résultat d'existence sur le problème simplifié, extension au problème d'origine.

## 2.1. Le problème simplifié

Dans ce qui suit, on suppose toujours que  $\Omega$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$ , à frontière lipschitzienne. La donnée essentielle est une fonction  $\mathbf{F}$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^d$  sur laquelle on effectue les hypothèses suivantes :

- (i) la fonction  $\mathbf{F}$  est continuellement dérivable sur  $\mathbb{R}$  à dérivée bornée ;
- (ii) il existe un réel  $T_0$  où la fonction  $\mathbf{F}$  s'annule.

On pose alors :

$$\alpha = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathbf{F}'(t)|. \quad (2.4)$$

Comme on va le voir, ce paramètre intervient de façon fondamentale dans notre étude. Puis, on effectue le changement de variable :  $\theta = T - T_0$  et on pose :  $\mathbf{f}(\theta) = \frac{1}{\alpha} \mathbf{F}(T)$ , de sorte que la fonction  $\mathbf{f}$  s'annule en 0 et est continuellement dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec la norme de sa dérivée  $\leq 1$ . Les équations (2.1) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{grad} p &= \alpha \mathbf{f}(\theta) \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ -\lambda \Delta \theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta &= g \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si l'on regarde ensuite les conditions aux limites (2.2) et (2.3), on voit que seule la condition de Dirichlet sur la température est modifiée par le changement de variable : l'équation (2.3) est remplacée maintenant par

$$\theta = \theta_b = T_b - T_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = G_b \quad \text{sur} \quad \Gamma_N. \quad (2.6)$$

Toutefois, dans un premier temps, on considère le cas plus simple où les conditions aux limites de type Dirichlet sont supposées homogènes, c'est-à-dire qu'on étudie les équations (2.5) munies des conditions aux limites

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad (2.7)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \quad \text{et} \quad \frac{\partial\theta}{\partial n} = G_b \quad \text{sur} \quad \Gamma_N. \quad (2.8)$$

Il est bien connu en effet que, dans le cas des équations de Navier-Stokes traitées isolément, la présence du terme de convection rend l'analyse des conditions aux limites non homogènes plus technique.

On termine ce paragraphe en précisant le cadre fonctionnel dans lequel s'effectue l'analyse du problème (2.5) (2.7) (2.8). L'espace des vitesses est l'espace  $\mathcal{V}$  défini par

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega\}. \quad (2.9)$$

L'espace des températures est l'espace  $H_*^1(\Omega)$  défini par

$$H_*^1(\Omega) = \begin{cases} \{\eta \in H^1(\Omega); \eta = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} & \text{si } \Gamma_D \text{ est de mesure positive,} \\ \{\eta \in H^1(\Omega); \int_{\Omega} \eta \, d\mathbf{x} = 0\} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Les normes sur ces espaces sont définies à partir de la semi-norme sur  $H^1(\Omega)$  :

$$\|\varphi\| = \left( \int_{\Omega} \mathbf{grad} \, \varphi \cdot \mathbf{grad} \, \varphi \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.11)$$

que l'on étend sans difficultés aux fonctions de  $H^1(\Omega)^d$ . On introduit maintenant quatre constantes liées à la géométrie du domaine : les constantes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}^*$  de Poincaré-Friedrichs définies par

$$\mathcal{P} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}}{\|v\|} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}^* = \sup_{\eta \in H_*^1(\Omega)} \frac{\|\eta\|_{L^2(\Omega)}}{\|\eta\|}, \quad (2.12)$$

les constantes  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}^*$  de Sobolev définies par

$$\mathcal{S} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|v\|_{L^4(\Omega)}}{\|v\|} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}^* = \sup_{\eta \in H_*^1(\Omega)} \frac{\|\eta\|_{L^4(\Omega)}}{\|\eta\|}. \quad (2.13)$$



On suppose que la fonction  $g$  appartient au dual de  $H_*^1(\Omega)$ , que la fonction  $G_b$  appartient à  $H^{-1/2}(\Gamma_N)$  et on note  $\gamma$  la constante

$$\gamma = \sup_{\eta \in H_*^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} g \eta \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} G_b \eta \, d\tau}{\|\eta\|} \quad (2.14)$$

(pour simplifier les notations, on utilise encore une intégrale pour les produits de dualité). Lorsque  $\Gamma_D$  est de mesure nulle, on suppose en outre vérifiée la condition de compatibilité habituelle :

$$\int_{\Omega} g \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} G_b \, d\tau = 0. \quad (2.15)$$

On peut finalement écrire une formulation variationnelle du problème dans l'espace  $X = \mathcal{V} \times H_*^1(\Omega)$  : trouver un couple  $U = (\mathbf{u}, \theta)$  de  $X$  tel que

$$\forall V = (\mathbf{v}, \eta) \in X,$$

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \mathbf{grad} \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \, \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \alpha \int_{\Omega} \mathbf{f}(\theta) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \lambda \int_{\Omega} \mathbf{grad} \, \theta \cdot \mathbf{grad} \, \eta \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \, \eta \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} g \eta \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} G_b \eta \, d\tau. \end{aligned} \quad (2.16)$$

On vérifie que le problème (2.16) est équivalent au problème (2.5) (2.7) (2.8). En effet, l'inconnue  $p$  a disparu dans (2.16). Mais on sait (V. Girault et P.-A. Raviart [7, Chapter I, Corollary 2.4]) que, pour toute solution  $(\mathbf{u}, \theta)$  dans  $X$  du problème (2.16), il existe une unique fonction  $p$  de  $L^2(\Omega)$  à moyenne nulle telle que le triplet  $(\mathbf{u}, p, \theta)$  soit solution des équations (2.5) (2.7) (2.8). C'est sous la forme (2.16) que va s'effectuer l'analyse du problème.

## 2.2. Estimations *a priori*

PROPOSITION 2.1 : Toute solution  $U = (\mathbf{u}, \theta)$  du problème (2.16) vérifie

$$\|\mathbf{u}\| \leq \alpha \frac{\mathcal{P} \mathcal{P}^*}{\nu} \|\theta\| \leq \alpha \frac{\mathcal{P} \mathcal{P}^* \gamma}{\nu \lambda}, \quad (2.17)$$

$$\|\theta\| \leq \frac{\gamma}{\lambda}. \quad (2.18)$$

*Démonstration :* L'équation  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega$  et la condition aux limites (2.7) entraîne que, pour toute fonction  $\varphi$  de  $H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varphi \varphi \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\varphi^2) \, d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \varphi^2 \, d\mathbf{x},$$

d'où

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varphi \varphi \, d\mathbf{x} = 0. \quad (2.19)$$

En choisissant  $\eta = \theta$  dans (2.16), on voit alors que

$$\lambda \|\theta\|^2 = \int_{\Omega} g \theta \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} G_b \theta \, d\tau \leq \gamma \|\theta\|,$$

d'où l'inégalité (2.18). D'autre part, les propriétés de la fonction  $\mathbf{f}$  et le théorème des accroissements finis entraînent que, pour tout réel  $t$ ,

$$|\mathbf{f}(t)| = |\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(0)| \leq |t|.$$

En choisissant  $\mathbf{v}$  égal à  $\mathbf{u}$  dans (2.16), on voit que l'équation (2.19) implique

$$\nu \|\mathbf{u}\|^2 = \alpha \int_{\Omega} \mathbf{f}(\theta) \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \leq \alpha \|\mathbf{f}(\theta)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d},$$

de sorte que

$$\nu \|\mathbf{u}\|^2 \leq \alpha \|\theta\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \alpha \mathcal{P} \mathcal{P}^* \|\theta\| \|\mathbf{u}\|,$$

ce qui, avec la majoration (2.18), donne l'inégalité (2.17).

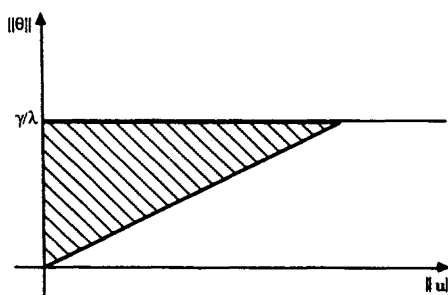


Figure 2.1. — Domaine des solutions éventuelles.

### 2.3. Résultat d'unicité

La proposition suivante énonce un résultat d'unicité qui n'est global que pour les petites valeurs de  $\alpha$ .

**PROPOSITION 2.2 :** *Le problème (2.16) admet au plus une solution  $U = (\mathbf{u}, \theta)$  vérifiant*

$$\|\theta\| < \frac{1}{\alpha} \frac{\nu}{\mathcal{S} \mathcal{P} \mathcal{P}^* \left( \frac{\mathcal{S}}{\nu} + \frac{\mathcal{S}^*}{\lambda} \right)}. \quad (2.20)$$

*Démonstration :* Soient  $U_1 = (\mathbf{u}_1, \theta_1)$  et  $U_2 = (\mathbf{u}_2, \theta_2)$  deux solutions du problème (2.16). En prenant  $\eta$  égal à  $\theta_1 - \theta_2$  dans la seconde équation de (2.16), on obtient

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\theta_1 - \theta_2) \cdot \mathbf{grad}(\theta_1 - \theta_2) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \theta_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \theta_2)(\theta_1 - \theta_2) \, d\mathbf{x} = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda \|\theta_1 - \theta_2\|^2 = - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)(\theta_1 - \theta_2)(\theta_1 - \theta_2) \, d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla) \theta_2 (\theta_1 - \theta_2) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre s'annule grâce à la propriété (2.19) et, en utilisant les constantes  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}^*$  définies en (2.13), on arrive à

$$\lambda \|\theta_1 - \theta_2\|^2 \leq \mathcal{S} \mathcal{S}^* \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| \|\theta_2\| \|\theta_1 - \theta_2\|,$$

ou, de façon équivalente,

$$\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \frac{\mathcal{S} \mathcal{S}^*}{\lambda} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| \|\theta_2\|. \quad (2.21)$$

Maintenant, on choisit  $\mathbf{v}$  égal à  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  dans la première équation de (2.16) :

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, d\mathbf{x} \\ = \alpha \int_{\Omega} (f(\theta_1) - f(\theta_2)) \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En notant comme précédemment que

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, dx = 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2 &\leq \mathcal{P}^2 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2 \|\mathbf{u}_2\| \\ &\quad + \alpha \mathcal{P} \mathcal{P}^* \|\theta_1 - \theta_2\| \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|. \end{aligned} \quad (2.22)$$

En appliquant d'une part la première majoration (2.17) à la solution  $U_2 = (\mathbf{u}_2, \theta_2)$  et d'autre part l'estimation (2.21), on aboutit à

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2 &\leq \alpha \mathcal{P}^2 \frac{\mathcal{P} \mathcal{P}^*}{\nu} \|\theta_2\| \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2 \\ &\quad + \alpha \mathcal{P} \mathcal{P}^* \frac{\mathcal{P} \mathcal{P}^*}{\lambda} \|\theta_2\| \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2. \end{aligned}$$

L'hypothèse (2.20) implique alors que  $\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|$  est égal à 0. Par conséquent,  $\mathbf{u}_1$  est égal à  $\mathbf{u}_2$  et, grâce à (2.21),  $\theta_1$  est égal à  $\theta_2$ , ce qui termine la démonstration.

*Remarque 2.3 :* On note  $\delta$  la constante

$$\delta = \frac{\nu}{\mathcal{P} \mathcal{P} \mathcal{P}^* \left( \frac{\mathcal{P}}{\nu} + \frac{\mathcal{P}^*}{\lambda} \right)}. \quad (2.23)$$

Pour tout  $\alpha > 0$ , on définit les domaines

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{D}}_{\alpha} &= \left\{ V = (\mathbf{v}, \eta) \in X; \|\mathbf{v}\| \leq \alpha \frac{\mathcal{P} \mathcal{P}^*}{\nu} \|\eta\| \text{ et } \|\eta\| \leq \frac{\gamma}{\lambda} \right\}, \\ \overline{\mathcal{B}}_{\alpha} &= \left\{ V = (\mathbf{v}, \eta) \in X; \|\eta\| < \frac{\delta}{\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Comme l'indique la figure ci-dessous, deux cas se produisent :

(i) si  $\alpha$  est  $< \frac{\delta \lambda}{\gamma}$ , le « triangle »  $\overline{\mathcal{D}}_{\alpha}$  est contenu dans la bande  $\mathcal{B}_{\alpha}$ , de sorte qu'il y a unicité globale de la solution de (2.16) ;

(ii) si  $\alpha$  est  $\geq \frac{\delta \lambda}{\gamma}$ , il existe une zone de  $\overline{\mathcal{D}}_{\alpha}$  qui n'est pas dans  $\mathcal{B}_{\alpha}$ , et il y a unicité de la solution  $U = (\mathbf{u}, \theta)$  de (2.16) uniquement dans la bande  $\mathcal{B}_{\alpha}$ . Il ressort de ce raisonnement qu'une condition suffisante d'unicité globale de la solution du problème (2.16) s'écrit de façon explicite

$$\frac{\alpha}{\lambda \nu} \sup_{\eta \in H^1_0(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} g \eta \, dx + \int_{\Gamma_N} G_b \eta \, d\tau}{\|\eta\|} < \frac{1}{\mathcal{P} \mathcal{P} \mathcal{P}^* \left( \frac{\mathcal{P}}{\nu} + \frac{\mathcal{P}^*}{\lambda} \right)}. \quad (2.25)$$

Cette inégalité ressemble à la condition suffisante pour l'unicité de la solution des équations de Navier-Stokes [7, Chapter IV, Thm 2.4].

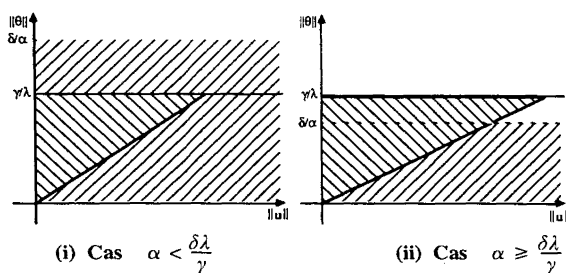


Figure 2.2. — Domaine d'unicité.

#### 2.4. Résultat d'existence sur le problème simplifié

Pour prouver le théorème d'existence, on fait appel à la théorie du degré topologique (voir Berestycki [1]). On commence par réécrire le problème (2.16) sous une forme plus adaptée. On note  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire associé à la norme  $\|\cdot\|$  dans  $X$ , c'est-à-dire que, pour tous  $U = (\mathbf{u}, \theta)$  et  $V = (\mathbf{v}, \eta)$  dans  $X$ , on pose

$$(U, V) = \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{grad} \theta \cdot \mathbf{grad} \eta \, dx.$$

On définit ensuite l'application  $\Phi^\alpha$  de  $X$  dans lui-même de la façon suivante : pour tous  $U = (\mathbf{u}, \theta)$  et  $V = (\mathbf{v}, \eta)$  dans  $X$ ,

$$\begin{aligned} (\Phi^\alpha(U), V) = & \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} \, dx \\ & + \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx - \alpha \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\theta) \cdot \mathbf{v} \, dx \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{grad} \theta \cdot \mathbf{grad} \eta \, dx + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \eta \, dx \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} g \eta \, dx - \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_N} G_b \eta \, d\tau. \end{aligned} \quad (2.26)$$

On constate à partir de la définition précédente que l'application  $\Phi^\alpha$  est de la forme  $Id + \mathcal{T}^\alpha$ , où l'application  $\mathcal{T}^\alpha$  est définie, pour tous  $U = (\mathbf{u}, \theta)$  et  $V = (\mathbf{v}, \eta)$  dans  $X$ , par

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}^\alpha(U), V) = & \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \alpha \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\theta) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \, \eta \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} g \eta \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_N} G_b \eta \, d\tau. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Le problème (2.16) est bien sûr équivalent à l'équation  $\Phi^\alpha(U) = 0$ .

On remarque ensuite que l'espace  $X$  est séparable puisque l'espace  $H^1(\Omega)$  l'est, et on introduit une suite  $(X_m)_m$  telle que chaque  $X_m$  est le produit d'un sous-espace de dimension finie de  $\mathcal{V}$  par un sous-espace de dimension finie de  $H_*^1(\Omega)$  et que

$$\forall m, \quad X_m \subset X_{m+1} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_m X_m} = X.$$

On note alors  $\Phi_m^\alpha$  et  $\mathcal{T}_m^\alpha$  les applications de  $X$  dans  $X_m$  définies de façon analogue à  $\Phi^\alpha$  et  $\mathcal{T}^\alpha$ : pour tous  $U = (\mathbf{u}, \theta)$  dans  $X$  et  $V_m = (\mathbf{v}, \eta)$  dans  $X_m$ ,

$$\begin{aligned} (\Phi_m^\alpha(U), V_m) = & \int_{\Omega} \mathbf{grad} \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \, \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & + \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \alpha \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\theta) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{grad} \, \theta \cdot \mathbf{grad} \, \eta \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \, \eta \, d\mathbf{x} \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} g \eta \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_N} G_b \eta \, d\tau, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_m^\alpha(U), V_m) = & \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \alpha \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\theta) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \, \eta \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} g \eta \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_N} G_b \eta \, d\tau. \end{aligned} \quad (2.29)$$

*Remarque 2.4 :* Avec les mêmes arguments que dans le Paragraphe 2.2, en remplaçant  $X$  par  $X_m$ , on vérifie facilement que les estimations (2.17) et (2.18) sont encore vraies pour toute solution  $U_m = (\mathbf{u}, \theta)$  dans  $X_m$  de l'équation  $\Phi_m^\alpha(U_m) = 0$ . En outre, les conditions d'unicité de la solution  $U_m$  dans  $X_m$  de l'équation  $\Phi_m^\alpha(U_m) = 0$  sont exactement les mêmes que pour le problème (2.16) et se démontrent de façon identique.

Pour tout paramètre  $\alpha > 0$ , on introduit un ouvert borné  $\mathcal{O}_\alpha$  de  $X$  tel que :

$$\left\{ V = (\mathbf{v}, \eta) \in X ; \|\mathbf{v}\| \leq \alpha \frac{\mathcal{P} \mathcal{P}^* \gamma}{\nu \lambda} \text{ et } \|\eta\| \leq \frac{\gamma}{\lambda} \right\} \subset \mathcal{O}_\alpha. \quad (2.30)$$

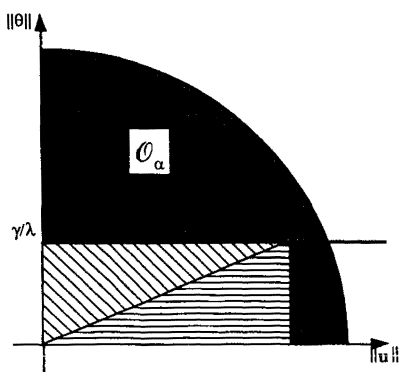


Figure 2.3. — Ouvert  $\mathcal{O}_\alpha$ .

On s'intéresse tout d'abord aux propriétés de l'application  $\Phi^0$ , qui sont presque évidentes. Le système (2.16), pour  $\alpha$  égal à 0, se ramène à une équation de Navier-Stokes avec donnée et conditions aux limites nulles, qui a pour unique solution  $\mathbf{0}$ , et à une équation de la chaleur linéaire qui admet une solution unique dans  $H_*^1(\Omega)$ , que l'on notera  $\theta^0$ . Le couple  $U^0 = (\mathbf{0}, \theta^0)$  est dans ce cas l'unique solution du système (2.16). On en déduit le résultat suivant.

**PROPOSITION 2.5 :** *Soit  $\alpha$  un réel positif. Il existe un ouvert  $\mathcal{O}_\alpha$  de  $X$  tel que le degré de l'application  $\Phi^0$  par rapport à l'ouvert  $\mathcal{O}_\alpha$  et au point 0, est égal à  $+1$  ou à  $-1$ .*

*Démonstration :* La démonstration s'effectue en deux étapes : on s'intéresse successivement aux degrés des applications  $\Phi_m^0$  et  $\Phi^0$ .

1) Comme ci-dessus, on constate que le problème  $\Phi_m^0(U_m) = 0$  admet une solution  $U_m^0$  de la forme  $(\mathbf{0}, \theta_m^0)$  dans  $X_m$  et on vérifie qu'elle appartient à

$\mathcal{O}_\alpha$  et qu'elle est unique. Il reste donc à vérifier que  $D\Phi_m^0(U_m^0)$  est un isomorphisme de  $X_m$ . Soit donc  $V_m = (\mathbf{v}, \eta)$  un élément de  $X_m$  tel que  $D\Phi_m^0(U_m^0) \cdot V_m$  soit égal à 0. Ceci s'écrit, pour tout  $W_m = (\mathbf{w}, \xi)$  dans  $X_m$  :

$$\int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = 0 ,$$

$$\int_{\Omega} \text{grad } \eta \cdot \text{grad } \xi \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta_m^0 \xi \, d\mathbf{x} = 0 .$$

On en déduit immédiatement que  $\mathbf{v}$  et par suite  $\eta$  sont nuls. Par conséquent, le degré de l'application  $\Phi_m^0$  par rapport à l'ouvert  $\mathcal{O}_\alpha$  et au point 0, est égal au signe du déterminant de  $D\Phi_m^0(U_m^0)$ , donc à +1 ou à -1.

2) L'application  $\Phi^0$  s'écrit sous la forme  $Id + \mathcal{T}^0$ , où l'application  $\mathcal{T}^0$  est définie en (2.27). On note que les termes non linéaires intervenant dans (2.27) vérifient

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right| \leq \mathcal{S} \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^d} , \quad (2.31)$$

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \eta \, d\mathbf{x} \right| \leq \mathcal{S} \|\mathbf{u}\| \|\theta\| \|\eta\|_{L^4(\Omega)} ; \quad (2.32)$$

par conséquent, comme l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^4(\Omega)$  est compacte, l'application :

$$(\mathbf{u}, \theta) \mapsto (-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta)$$

est compacte de  $X$  dans  $H^{-1}(\Omega)^d \times (H_*^1(\Omega))'$ . On en déduit la compacité de l'application  $\mathcal{T}^0$  de  $\overline{\mathcal{O}}_\alpha$  dans  $X$ . Ensuite, on démontre la minoration, vraie pour tout  $V = (\mathbf{v}, \eta)$  dans  $X$  :

$$\|\Phi^0(V)\| \|V\| \geq (\Phi^0(V), V) \geq \|\mathbf{v}\|^2 + \|\eta\|^2 - \frac{2}{\lambda} \|\eta\| ,$$

d'où

$$\|\Phi^0(V)\| \geq (\|\mathbf{v}\|^2 + \|\eta\|^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\lambda} .$$



On peut donc choisir  $\mathcal{O}_\alpha$  « assez grand » pour que la condition (2.30) soit satisfaite et qu'il existe une constante positive  $c$  telle que

$$\forall V \in \partial \mathcal{O}_\alpha, \quad \|\Phi^0(V)\| \geq c.$$

Le degré de  $\Phi^0$  par rapport à l'ouvert  $\mathcal{O}_\alpha$  et au point 0 est alors égal au degré de  $\Phi_m^0$  par rapport à l'ouvert  $\mathcal{O}_\alpha \cap X_m$  et au point 0, à condition que

$$\sup_{V \in \mathcal{O}_\alpha} \|(\mathcal{T}^0 - \mathcal{T}_m^0)(V)\| \leq \frac{c}{2}. \quad (2.33)$$

On va exhiber un  $m$  tel que la propriété (2.33) soit vraie : en effet, pour tout  $V$  dans  $X$ , on observe que  $\mathcal{T}_m^0(V)$  est l'image de  $\mathcal{T}^0(V)$  par la projection orthogonale de  $X$  sur  $X_m$  et on déduit de la densité de  $\cup_m X_m$  dans  $X$  que

$$\lim_m \|(\mathcal{T}^0 - \mathcal{T}_m^0)(V)\| = 0.$$

Maintenant, l'image par  $\mathcal{T}^0$  de  $\overline{\mathcal{O}_\alpha}$  étant un compact de  $X$ , on obtient également

$$\lim_m \sup_{V \in \overline{\mathcal{O}_\alpha}} \|(\mathcal{T}^0 - \mathcal{T}_m^0)(V)\| = 0.$$

On en déduit qu'il existe un  $m$  tel que (2.33) soit vérifiée ; le degré de  $\Phi^0$  est alors égal au degré de l'application  $\Phi_m^0$  correspondante, donc à  $+1$  ou  $-1$ .

*Remarque 2.6 :* On peut, par le théorème du point fixe de Brouwer appliqué dans les espaces  $X_m$  et par un argument de densité, prouver que le problème (2.16) admet au moins une solution lorsque l'on a

$$\alpha < \frac{2\nu}{\mathcal{P}\mathcal{P}^*}. \quad (2.34)$$

En combinant ce résultat avec celui d'unicité, on peut démontrer directement que, sous la condition

$$\alpha^* < \inf \left\{ \frac{2\nu}{\mathcal{P}\mathcal{P}^*}, \frac{\delta\lambda}{\gamma} \right\}, \quad (2.35)$$

le degré de l'application  $\Phi^{\alpha^*}$  par rapport à l'ouvert  $\mathcal{O}_\alpha$  et au point 0, est égal à  $+1$  ou à  $-1$ .

**THÉORÈME 2.7 :** *Pour tout réel positif  $\alpha$ , le problème (2.16) admet au moins une solution dans  $X$ .*

*Démonstration :* Il suffit de prouver que le degré de l'application  $\Phi^\alpha$  par rapport à un ouvert  $\mathcal{O}_\alpha$  et au point 0, est non nul. Pour cela, on pose

$$\Psi(t, V) = \Phi^{t\alpha}(V).$$

On vérifie exactement comme précédemment que l'application  $\Psi - Id$  est compacte de  $[0, 1] \times \overline{\mathcal{O}_\alpha}$  dans  $X$ : en effet, on a, en plus des estimations (2.31) et (2.32), l'inégalité

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{f}(\theta) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right| \leq \mathcal{P}^* \|\theta\| \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^d},$$

et on utilise de nouveau la compacité de l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^4(\Omega)$ . D'autre part, les estimations (2.17) et (2.18) impliquent qu'aucune solution  $(t, U)$  de l'équation  $\Psi(t, U) = 0$  n'appartient à  $\partial\mathcal{O}_\alpha$ . Par conséquent, l'argument d'homotopie indique que le degré de  $\Psi(t, \cdot)$  par rapport à un ouvert  $\mathcal{O}_\alpha$  et au point 0 est indépendant de  $t$ , et donc que le degré de  $\Phi^\alpha$  est égal à celui de  $\Phi^0$ . Grâce à la proposition précédente, on choisit  $\mathcal{O}_\alpha$  tel que ce degré soit non nul et on conclut grâce à [1].

## 2.5. Extension au problème d'origine

On considère maintenant le problème (2.5) muni des conditions aux limites (2.2) et (2.6). On va étendre les résultats des Paragraphes 2.2 à 2.4 dans ce cas, on indiquera simplement les modifications à apporter aux démonstrations précédentes. Dans cette étude, on fera les hypothèses

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n} \, d\tau = 0, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_N. \quad (2.37)$$

La première condition est nécessaire pour que la condition  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  soit satisfaite, la seconde semble toujours vraie dans les cas réels (il n'y a pas de flux rentrant dans une paroi adiabatique). On sera également amené à supposer vérifiée la condition d'unicité de la solution des équations de Navier-Stokes avec second membre nul et la condition aux limites (2.2), ceci sera précisé par la suite.

Le traitement des conditions aux limites non homogènes repose essentiellement sur la construction de relèvements adéquats des données sur le bord.

LEMME 2.8 : Pour tout réel positif  $\varepsilon^*$  et pour toute fonction  $\theta_b$  dans  $H^{1/2}(\Gamma_D)$ , il existe une fonction  $\kappa$  de  $H^1(\Omega)$ , dont la trace sur  $\Gamma_D$  coïncide avec  $\theta_b$ , telle que

$$\|\kappa\|_{L^4(\Omega)} \leq \varepsilon^* \|\theta_b\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} \quad \text{et} \quad \|\kappa\| \leq \rho^*(\varepsilon^*) \|\theta_b\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}, \quad (2.38)$$

où  $\rho^*$  est une fonction décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

Démonstration : On sait qu'il existe une fonction  $\tilde{\kappa}$  dont la trace sur  $\Gamma_D$  est égale à  $\theta_b$  et qui vérifie

$$\|\tilde{\kappa}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\theta_b\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}.$$

On introduit une fonction  $\chi$  de  $W^{1,\infty}(\Omega)$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ , égale à 1 sur  $\Gamma_D$  et de support  $\Sigma$ . En posant  $\kappa = \tilde{\kappa}\chi$ , on vérifie que

$$\|\kappa\|_{L^4(\Omega)} \leq \|\tilde{\kappa}\|_{L^6(\Omega)} (\text{mes } \Sigma)^{\frac{1}{12}} \quad \text{et} \quad \|\kappa\| \leq \|\tilde{\kappa}\| + \|\tilde{\kappa}\|_{L^6(\Omega)} \|\mathbf{grad} \chi\|_{L^3(\Omega)^d}.$$

D'une part, on utilise l'injection continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^6(\Omega)$ . D'autre part, on rappelle que, comme l'ouvert  $\Omega$  est borné à frontière lipschitzienne, la fonction qui, à un point  $\mathbf{x}$  de  $\Omega$ , associe sa distance  $d(\mathbf{x})$  à la frontière  $\partial\Omega$ , appartient à  $W^{1,\infty}(\Omega)$ . On pose :

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq d(\mathbf{x}) \leq \delta, \\ 2 - \frac{d(\mathbf{x})}{\delta} & \text{si } \delta \leq d(\mathbf{x}) \leq 2\delta, \\ 0 & \text{si } d(\mathbf{x}) \geq 2\delta, \end{cases}$$

où  $\delta$  est un paramètre positif. Pour tout  $\varepsilon^* > 0$ , on peut choisir  $\delta$  suffisamment petit pour obtenir les estimations (2.38).

Le résultat suivant porte le nom de lemme de Hopf, il est démontré dans [7, Chapter IV, Lemma 2.3].

LEMME 2.9 : Pour tout réel positif  $\varepsilon$  et pour toute fonction  $\mathbf{u}_b$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)^d$  vérifiant la condition (2.36), il existe une fonction  $\mathbf{z}$  de  $H^1(\Omega)^d$  à divergence nulle, dont la trace sur  $\Gamma$  coïncide avec  $\mathbf{u}_b$ , telle que

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{z} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \leq \varepsilon \|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{z}\| \leq \rho(\varepsilon) \|\mathbf{u}_b\|_{H^{1/2}(\Gamma)^d}, \quad (2.39)$$

où  $\rho$  est une fonction décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

Pour  $\varepsilon$  égal à  $\frac{\nu}{2}$  et  $\varepsilon^*$  défini en fonction de  $\alpha$  (qui sera précisé par la suite), on désigne par  $\kappa$  et  $\mathbf{z}$  les fonctions introduites dans les lemmes précédents. On

pose alors :  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{z}$  et  $\theta^* = \theta - \kappa$ . On vérifie que le couple  $U^* = (\mathbf{u}^*, \theta^*)$  appartient à  $X$  et que la formulation (2.16) est toujours vérifiée pour le couple  $U = (\mathbf{u}, \theta)$ . On est alors en mesure de démontrer les estimations *a priori*.

**PROPOSITION 2.10 :** *On suppose les conditions (2.36) et (2.37) vérifiées. Il existe deux constantes positives  $a_1$  et  $a_2$  et une fonction  $\alpha$  croissante sur  $]0, +\infty[$ , ne dépendant que des données, telles que toute solution  $U = (\mathbf{u}, \theta)$  du problème (2.5) (2.2) (2.6) vérifie*

$$\|\mathbf{u}\| \leq a_1 + a_2 \alpha \|\theta\|_{H^1(\Omega)}, \quad (2.40)$$

$$\|\theta\|_{H^1(\Omega)} \leq a(\alpha). \quad (2.41)$$

*Démonstration :* Pour démontrer la première estimation, on choisit  $\mathbf{v}$  égal à  $\mathbf{u}^*$  dans la première équation (2.16) et en écrivant  $\mathbf{u}$  sous la forme  $\mathbf{u}^* + \mathbf{z}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{u}^*\|^2 = & -\nu \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{z} \cdot \text{grad } \mathbf{u}^* \, dx - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^* \, dx \\ & - \int_{\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{z} \cdot \mathbf{u}^* \, dx \\ & - \int_{\Omega} (\mathbf{z} \cdot \nabla) \mathbf{z} \cdot \mathbf{u}^* \, dx + \alpha \int_{\Omega} \mathbf{f}(\theta) \cdot \mathbf{u}^* \, dx. \end{aligned}$$

On voit en intégrant par parties que le terme  $\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}^* \, dx$  est nul et on utilise le lemme de Hopf précédent pour majorer  $\int_{\Omega} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{z} \cdot \mathbf{u}^* \, dx$ . On obtient

$$\nu \|\mathbf{u}^*\| \leq \nu \|\mathbf{z}\| + \varepsilon \|\mathbf{u}^*\| + c \|\mathbf{z}\|^2 + c' \alpha \|\theta\|_{H^1(\Omega)}.$$

On prend comme indiqué  $\varepsilon$  égal à  $\frac{\nu}{2}$  et on en déduit par l'inégalité triangulaire la majoration (2.40). On choisit maintenant  $\eta$  égal à  $\theta^*$  dans la seconde équation (2.16), ce qui donne

$$\begin{aligned} \lambda \|\theta^*\|^2 = & -\lambda \int_{\Omega} \text{grad } \kappa \cdot \text{grad } \theta^* \, dx \\ & - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta^* \theta^* \, dx - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \kappa \theta^* \, dx \\ & + \int_{\Omega} g \theta^* \, dx + \int_{\Gamma_N} G_b \theta^* \, d\tau. \end{aligned}$$

On observe que

$$-\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta^* \theta^* d\mathbf{x} = -\int_{\Gamma_N} (\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}) \theta^{*2} d\tau ;$$

d'après l'hypothèse (2.37), cette quantité est négative ou nulle. On voit aussi que

$$-\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \kappa \theta^* d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \kappa \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \theta^* d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \kappa (\mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}) \theta^* d\mathbf{x} ,$$

et on utilise le premier lemme pour majorer  $\|\kappa\|_{L^4(\Omega)}$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \lambda \|\theta^*\|^2 &\leq \|\theta^*\| (\lambda \|\kappa\| + \mathcal{S} \varepsilon^* \|\theta_b\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}) \|\mathbf{u}\| \\ &\quad + c \|\mathbf{u}_b\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)^d} \|\kappa\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} + \gamma , \end{aligned}$$

d'où

$$\|\theta^*\| \leq c_1 \varepsilon^* \|\mathbf{u}\| + c_2 \rho^*(\varepsilon^*) , \quad (2.42)$$

où  $\rho^*$  est la fonction introduite dans le lemme. L'inégalité de Poincaré-Friedrichs appliquée à  $\theta^*$  et l'inégalité triangulaire permettent alors d'obtenir

$$\|\theta\|_{H^1(\Omega)} \leq c_3 \varepsilon^* \|\mathbf{u}\| + c_4 \rho^*(\varepsilon^*) . \quad (2.43)$$

On insère maintenant l'estimation (2.40) de  $\|\mathbf{u}\|$  dans (2.43) et, en prenant  $\varepsilon^*$  égal à  $\frac{1}{2 c_3 a_2 \alpha}$ , on en déduit l'inégalité (2.41).

*Remarque 2.11 :* L'estimation que l'on obtient pour  $\theta$  est très différente de celle du Paragraphe 2.2. En particulier, on ne peut en déduire que les solutions  $U = (\mathbf{u}, \theta)$  sont bornées indépendamment de  $\alpha$ .

Pour un relèvement  $\mathbf{z}$  fixé, on pose

$$A(\mathbf{z}) = \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{\int_{\Omega} (\mathbf{z} \cdot \nabla) \mathbf{z} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|} . \quad (2.44)$$

Il ressort de la démonstration précédente que la majoration sur  $\mathbf{u}^*$  s'écrit de façon plus précise

$$\|\mathbf{u}^*\| \leq 2 \|\mathbf{z}\| + \frac{2}{\nu} A(\mathbf{z}) + c \alpha \|\theta\|_{H^1(\Omega)} . \quad (2.45)$$

Pour obtenir un résultat d'unicité, on est obligé de faire une hypothèse analogue à celle qui assure l'unicité des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \text{grad } p &= \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_b \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Le relèvement  $\mathbf{z}$  correspondant à  $\varepsilon = \frac{\nu}{2}$  étant fixé, cette hypothèse s'écrit

$$\|\mathbf{z}\| + \frac{1}{\nu} A(\mathbf{z}) < \frac{\nu}{4 \mathcal{F}^2}. \quad (2.47)$$

Comme on le voit, elle ne porte que sur les données.

PROPOSITION 2.12 : *Sous l'hypothèse (2.47), il existe une constante positive  $b$  telle que le problème (2.5) (2.2) (2.6) admette au plus une solution  $U = (\mathbf{u}, \theta)$  vérifiant*

$$\|\theta\| < \frac{b}{\alpha}. \quad (2.48)$$

*Démonstration :* Comme dans le Paragraphe 2.3, on considère deux solutions  $U_1 = (\mathbf{u}_1, \theta_1)$  et  $U_2 = (\mathbf{u}_2, \theta_2)$  du problème (2.5) (2.2) (2.6) et on démontre exactement par les mêmes arguments l'inégalité (2.21). D'autre part, en multipliant la première équation de (2.16) par  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2 &= - \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, dx \\ &\quad + \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{f}(\theta_1) - \mathbf{f}(\theta_2)) \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, dx. \end{aligned}$$

On écrit

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, dx \\ &= \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, dx \\ &= \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla) \mathbf{z} \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, dx + \int_{\Omega} ((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla) \mathbf{u}_2^* \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, dx, \end{aligned}$$

puis on applique le lemme de Hopf et la majoration (2.45) et on en déduit

$$\frac{\nu}{2} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2 \leq \mathcal{P}^2 \left( 3 \|\mathbf{z}\| + \frac{2}{\nu} A(\mathbf{z}) + c\alpha \|\theta_2\|_{H^1(\Omega)} \right) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2 \\ + \alpha \mathcal{P} \mathcal{P}^* \|\theta_1 - \theta_2\| \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|.$$

En utilisant la majoration (2.21) pour  $\|\theta_1 - \theta_2\|$  dans cette inégalité, on en déduit que  $\mathbf{u}_1$  est égal à  $\mathbf{u}_2$  et par suite que  $\theta_1$  est égal à  $\theta_2$ .

*Remarque 2.13 :* Si l'on combine les résultats précédents, on voit qu'il y a unicité globale de la solution du problème (2.5) (2.2) (2.6) lorsque  $\alpha$  est assez petit, plus précisément lorsque

$$\alpha a(\alpha) < b.$$

Le théorème d'existence se démontre là encore par la théorie du degré topologique. La suite d'espaces  $(X_m)_m$  étant définie comme précédemment, on introduit les applications  $\tilde{\Phi}^\alpha$  et  $\tilde{\Phi}_m^\alpha$  : pour tous  $U^* = (\mathbf{u}^*, \theta^*)$  dans  $X$  et  $V = (\mathbf{v}, \eta)$  dans  $X$ ,

$$\begin{aligned} (\tilde{\Phi}^\alpha(U^*), V) &= \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\mathbf{u}^* + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} \, dx \\ &+ \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}^* + \mathbf{z}) \cdot \nabla)(\mathbf{u}^* + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v} \, dx \\ &- \alpha \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\theta^* + \kappa) \cdot \mathbf{v} \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\theta^* + \kappa) \cdot \mathbf{grad} \eta \, dx \\ &+ \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}^* + \mathbf{z}) \cdot \nabla)(\theta^* + \kappa) \eta \, dx \\ &- \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} g \eta \, dx - \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_N} G_b \eta \, d\tau, \end{aligned}$$

et, pour tous  $U^* = (\mathbf{u}^*, \theta^*)$  dans  $X$  et  $V_m = (\mathbf{v}, \eta)$  dans  $X_m$ ,

$$\begin{aligned} (\tilde{\Phi}_m^\alpha(U^*), V_m) = & \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\mathbf{u}^* + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} \, dx \\ & + \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}^* + \mathbf{z}) \cdot \nabla)(\mathbf{u}^* + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v} \, dx \\ & - \alpha \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f}(\theta^* + \kappa) \cdot \mathbf{v} \, dx \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{grad}(\theta^* + \kappa) \cdot \mathbf{grad} \eta \, dx \\ & + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}^* + \mathbf{z}) \cdot \nabla)(\theta^* + \kappa) \eta \, dx \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} g \eta \, dx - \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_N} G_b \eta \, d\tau. \end{aligned}$$

Pour tout paramètre  $\alpha > 0$ , on considère aussi un ouvert borné  $\tilde{\mathcal{O}}_\alpha$  tel que

$$\left\{ V = (\mathbf{v}, \eta) \in X; \|\mathbf{v} + \mathbf{z}\| \leq a_1 + a_2 \alpha \|\eta + \kappa\|_{H^1(\Omega)} \right. \\ \left. \text{et } \|\eta + \kappa\|_{H^1(\Omega)} \leq a(a) \right\} \subset \tilde{\mathcal{O}}_\alpha. \quad (2.49)$$

**PROPOSITION 2.14 :** *Soit  $\alpha$  un réel positif. On suppose les conditions (2.36), (2.37) et (2.47) vérifiées. Alors, il existe un ouvert  $\tilde{\mathcal{O}}_\alpha$  de  $X$  tel que le degré de l'application  $\tilde{\Phi}^0$  par rapport à l'ouvert  $\tilde{\mathcal{O}}_\alpha$  et au point 0, est égal à +1 où à -1.*

*Démonstration :* Exactement comme dans la proposition précédente, on peut vérifier que l'équation :  $\tilde{\Phi}_m^0(U_m^*) = 0$  a au plus une solution dans  $X_m$ . Pour démontrer l'existence, on rappelle que le système de Navier-Stokes (2.46) a au moins une solution  $\mathbf{u}^0$  et que, pour cette solution  $\mathbf{u}^0$ , l'équation de la chaleur

$$-\lambda \Delta \theta + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \theta = g$$

avec les conditions aux limites (2.6), a également une solution  $\theta^0$ . Le couple  $U^{*0} = (\mathbf{u}^0 - \mathbf{z}, \theta^0 - \kappa)$  est alors solution dans  $X$  de l'équation :  $\tilde{\Phi}^0(U^{*0}) = 0$ . En utilisant exactement les mêmes arguments (à savoir essentiellement le théorème de point fixe de Brouwer), on montre qu'il existe



une solution  $U_m^{*0}$  de l'équation :  $\tilde{\Phi}_m^0(U_m^*) = 0$ . Pour vérifier que  $D\tilde{\Phi}_m^0(U_m^{*0})$  est un isomorphisme, on considère un élément  $V_m = (\mathbf{v}, \eta)$  tel que  $D\tilde{\Phi}_m^0(U_m^{*0}) \cdot V_m$  soit égal à 0. Ceci s'écrit, pour tout  $W_m = (\mathbf{w}, \xi)$  dans  $X_m$  :

$$\int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{w} \, dx + \frac{1}{\nu} \int_{\Omega} (((\mathbf{u}_m^{*0} + \mathbf{z}) \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_m^{*0} + \mathbf{z})) \cdot \mathbf{w} \, dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} \text{grad } \eta \cdot \text{grad } \xi \, dx + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (((\mathbf{u}_m^{*0} + \mathbf{z}) \nabla) \eta + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\theta_m^{*0} + \kappa)) \xi \, dx = 0.$$

En choisissant  $\mathbf{w}$  égal à  $\mathbf{v}$  et  $\xi$  égal à  $\eta$  et en utilisant le lemme de Hopf, (2.45) et (2.47), on en déduit que  $\mathbf{v}$  puis  $\eta$  sont nuls. Par conséquent, le degré de l'application  $\tilde{\Phi}_m^0$  par rapport à l'ouvert  $\tilde{\mathcal{O}}_\alpha$  et au point 0, est égal à 1 ou à  $-1$ . En utilisant exactement le même argument de compacité que dans le Paragraphe 2.4, on en déduit la proposition.

Finalement, on fait appel au même argument d'homotopie que dans le Paragraphe 2.4, en posant

$$\tilde{\Psi}(t, V) = \tilde{\Phi}'^\alpha(V).$$

Les estimations *a priori* permettent de prouver que l'équation  $\tilde{\Psi}(t, V) = 0$  n'a aucune solution sur  $\partial\mathcal{O}_\alpha$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ce qui permet d'obtenir le dernier résultat.

**THÉORÈME 2.15 :** *On suppose les conditions (2.36), (2.37) et (2.47) vérifiées. Alors, pour tout réel positif  $\alpha$ , le problème (2.5) (2.2) (2.6) admet au moins une solution.*

En conclusion, en supposant vérifiées trois hypothèses naturelles sur la condition aux limites  $\mathbf{u}_b$ , on a démontré que le problème de départ admet toujours au moins une solution ; on a établi en outre un résultat d'unicité locale de cette solution, et un résultat d'unicité globale lorsque les variations du second membre  $\mathbf{F}$  (représentées par le paramètre  $\alpha$ ) ne sont pas trop grandes. On a fait pour cela deux suppositions sur la fonction  $\mathbf{F}$  : la première consiste à dire qu'elle s'annule en un point et on s'aperçoit sans peine que l'on peut se passer de cette nullité, à condition de modifier l'hypothèse donnant

l'unicité de la solution. La seconde consiste à supposer la fonction  $\mathbf{F}$  continuellement dérivable, on voit que l'on peut affaiblir cette condition : il suffit de supposer  $\mathbf{F}$  holdérienne. Toutefois, on n'utilisera pas ces améliorations dans les applications.

### 3. APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS

L'approximation s'effectue sur le système complet

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \text{grad } p &= \mathbf{F}(T) \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ -\lambda \Delta T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= g \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \quad (3.1)$$

muni des conditions aux limites

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_b \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.2)$$

$$T = T_b \quad \text{sur } \Gamma_D \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial n} = G_b \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (3.3)$$

On fait les mêmes hypothèses sur l'ouvert et les données que précédemment.

On va écrire une formulation un peu différente du problème (3.1) (3.2) (3.3). On introduit d'abord les opérateurs de Stokes  $S$  et de la chaleur  $L$ . Pour une condition aux limites fixée  $\mathbf{u}_b$ , l'opérateur  $S$  associe à toute distribution  $\mathbf{f}$  de  $H^{-1}(\Omega)^d$  la fonction  $\mathbf{w}$  de  $H^1(\Omega)^d$ , où le couple  $(\mathbf{w}, q)$  est la solution dans  $H^1(\Omega)^d \times (L^2(\Omega)/\mathbb{R})$  du problème

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{w} + \text{grad } q &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{w} &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{u}_b \quad \text{sur } \partial\Omega; \end{aligned} \quad (3.4)$$

on note  $\tilde{S}\mathbf{f}$  la fonction  $q$  du couple  $(\mathbf{w}, q)$ . L'opérateur  $S$  correspondant à une condition aux limites nulle est noté  $S^0$ . Pour une condition aux limites fixée  $T_b$ , l'opérateur  $L$  associe à toute distribution  $g$  du dual de  $H_*^1(\Omega)$  la solution  $Q$  du problème

$$-\lambda \Delta Q = g \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.5)$$

$$Q = T_b \quad \text{sur } \Gamma_D \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial n} = G_{0b} \quad \text{sur } \Gamma_N.$$

Pour la condition aux limites  $T_b$  nulle, l'opérateur est noté  $L^0$ . Puis, on définit l'application  $H$  de l'espace  $H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$  dans lui-même par

$$\forall V = (\mathbf{v}, R) \in H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega),$$

$$H(V) = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}(R) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ g + \tilde{G}_b - (\mathbf{v} \cdot \nabla) R \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

où  $\tilde{G}_b$  est défini par l'équation

$$\forall R \in H^1(\Omega), \quad \langle \tilde{G}_b, R \rangle = \int_{\Gamma_N} G_b R \, d\tau. \quad (3.7)$$

La continuité et la différentiabilité de cet opérateur sont faciles à vérifier à partir des injections de Sobolev. On voit aussi que, si un triplet  $(\mathbf{u}, p, T)$  de  $H^1(\Omega)^d \times (L^2(\Omega)/\mathbb{R}) \times H^1(\Omega)$  est solution du système (3.1) (3.2) (3.3), alors  $H(U)$  avec  $U = (\mathbf{u}, T)$  est nul. Réciproquement, pour toute solution  $U = (\mathbf{u}, T)$  de l'équation  $H(U) = 0$ , il existe une unique fonction  $p$  dans  $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$  telle que le triplet  $(\mathbf{u}, p, T)$  soit solution du système (3.1) (3.2) (3.3).

On fait désormais l'hypothèse suivante : le couple  $U$  est une solution non singulière de l'équation  $H(U) = 0$ , au sens que

l'opérateur  $DH(U)$  est un isomorphisme

$$\text{de } H_0^1(\Omega)^d \times H_*^1(\Omega) \text{ dans lui-même.} \quad (3.8)$$

En écrivant l'opérateur  $DH(U)$  de façon plus explicite :

$$\forall W = (\mathbf{w}, Q) \in H_0^1(\Omega)^d \times H_*^1(\Omega),$$

$$DH(U) \cdot W = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S^0 & 0 \\ 0 & L^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}'(T) Q - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ - (\mathbf{u} \cdot \nabla) Q - (\mathbf{w} \cdot \nabla) T \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

et en utilisant la compacité des termes non linéaires, on voit que l'hypothèse (3.8) équivaut à dire que la seule solution  $(\mathbf{w}, q, Q)$  dans  $H_0^1(\Omega)^d \times (L^2(\Omega)/\mathbb{R}) \times H_*^1(\Omega)$  du système

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad & \nu \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathbf{w} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}) q \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F}'(T) Q \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \forall r \in L^2(\Omega), \quad & \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{w}) q \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall R \in H_*^1(\Omega), \quad & \lambda \int_{\Omega} \mathbf{grad} R \cdot \mathbf{grad} Q \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) R + (\mathbf{w} \cdot \nabla) T) Q \, d\mathbf{x} = 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

est la solution nulle. On note aussi que, par le théorème d'inversion locale, l'hypothèse (3.8) implique une propriété d'unicité locale de la solution  $U$ . Le but est maintenant de construire une approximation de  $U$  dans un espace de dimension finie et d'en analyser la convergence.

L'étude s'effectue selon le plan suivant : présentation du problème discret, lemmes techniques, conclusions, exemples d'éléments finis.

### 3.1. Présentation du problème discret

On désigne par  $h$  le paramètre de discrétisation, que l'on suppose réel positif destiné à tendre vers 0. On introduit trois sous-espaces de dimension finie  $Y_h$ ,  $M_h$  et  $Z_h$  contenus respectivement dans  $H^1(\Omega)^d$ ,  $L^2(\Omega)$  et  $H^1(\Omega)$ . On pose :

$$Y_h^0 = Y_h \cap H_0^1(\Omega)^d \quad \text{et} \quad Z_h^* = Z_h \cap H_*^1(\Omega).$$

On est alors en mesure d'énoncer les hypothèses suivantes, que l'on supposera toujours vérifiées par la suite :

(i) il existe une constante  $\beta$  positive indépendante de  $h$  telle que

$$\forall r_h \in M_h / \int_{\Omega} r_h \, d\mathbf{x} = 0, \sup_{\mathbf{v}_h \in Y_h^0} \frac{-\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}_h) r_h \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|} \geq \beta \|r_h\|_{0,\Omega}; \quad (3.11)$$

(ii) il existe un réel  $\ell_Y \geq 1$  et un opérateur  $\mathcal{J}_h$  défini sur les fonctions continues de  $\overline{\Omega}$  dans  $\mathbb{R}^d$ , à valeurs dans  $Y_h$ , tel que

$$\forall \mathbf{v} \in H^k(\Omega)^d,$$

$$\|\mathbf{v} - \mathcal{J}_h \mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d} \leq ch^{k-1} \|\mathbf{v}\|_{H^k(\Omega)^d}, \quad \frac{d}{2} < k \leq \ell_Y + 1; \quad (3.12)$$

$$\forall r \in H^{k-1}(\Omega),$$

$$\inf_{r_h \in M_h} \|r - r_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{k-1} \|r\|_{H^{k-1}(\Omega)}, \quad 1 < k \leq \ell_Y + 1; \quad (3.13)$$

on suppose en outre que, pour toute fonction  $\mathbf{v}$  de  $H^1(\Omega)^d$  continue sur  $\overline{\Omega}$ , la trace de  $\mathcal{J}_h \mathbf{v}$  sur  $\partial\Omega$  ne dépend que de la trace  $\mathbf{k}$  de  $\mathbf{v}$  sur  $\partial\Omega$ , on note  $i_h \mathbf{k}$  cette trace et on fait l'hypothèse supplémentaire :

$$\int_{\partial\Omega} i_h \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, d\tau = \int_{\partial\Omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, d\tau; \quad (3.14)$$

(iii) il existe un réel  $\ell_z \geq 1$  et un opérateur d'interpolation  $\mathcal{J}_h$  défini sur les fonctions continues sur  $\overline{\Omega}$ , à valeurs dans  $Z_h$ , tel que

$$\forall R \in H^k(\Omega), \quad \|R - \mathcal{J}_h R\|_{H^\ell(\Omega)} \leq ch^{k-\ell} \|R\|_{H^k(\Omega)},$$

$$\frac{d}{2} < k \leq \ell_z + 1, \quad \ell = 0 \text{ ou } 1; \quad (3.15)$$

on suppose aussi que pour toute fonction  $R$  de  $H^1(\Omega)$  continue sur  $\overline{\Omega}$ , la trace de  $\mathcal{J}_h R$  sur  $\Gamma_D$  ne dépend que de la trace  $\chi$  de  $R$  sur  $\Gamma_D$ , et on note  $j_h \chi$  cette trace.

Bien entendu, l'hypothèse (iii) est satisfaite par tous les espaces d'éléments finis usuels et les hypothèses (i) et (ii) sont classiques pour les couples d'espaces d'éléments finis utilisés pour l'approximation du problème de Stokes. Des exemples seront donnés à la fin du chapitre.

Il faut également préciser comment s'effectue l'approximation du terme  $\mathbf{F}(R)$ . La fonction  $R$  étant connue aux nœuds de l'opérateur d'interpolation  $\mathcal{I}_h$ , on sait calculer la quantité  $\mathbf{F}(R)$  en ces nœuds, et donc construire la fonction de  $Z_h^d$  qui interpole  $\mathbf{F}(R)$ . Plus précisément, on pose pour toute fonction  $R$  continue sur  $\bar{\Omega}$  :

$$\mathbf{F}_h(R) = \mathcal{I}_h[\mathbf{F}(R)] = \mathcal{I}_h[\mathbf{F}(\mathcal{I}_h R)] . \quad (3.16)$$

On en déduit immédiatement les propriétés suivantes : pour toutes fonctions  $R$  et  $Q$  continues sur  $\bar{\Omega}$ , la différentielle  $D\mathbf{F}_h(R) \cdot Q$  s'écrit

$$D\mathbf{F}_h(R) \cdot Q = \mathcal{I}_h[\mathbf{F}'(R) Q] = \mathcal{I}_h[\mathbf{F}'(\mathcal{I}_h R) \mathcal{I}_h Q] ; \quad (3.17)$$

si la fonction  $\mathbf{F}(R)$  appartient à  $H^k(\Omega)$  pour un entier  $k$  vérifiant  $\frac{d}{2} < k \leq \ell_Z + 1$ , on a la majoration

$$\|\mathbf{F}(R) - \mathbf{F}_h(R)\|_{L^2(\Omega)^d} \leq ch^k \|\mathbf{F}(R)\|_{H^k(\Omega)^d} . \quad (3.18)$$

On peut alors énoncer le problème discret, sous forme variationnelle :  
trouver un triplet  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  de  $Y_h \times (M_h/\mathbb{R}) \times Z_h$  tel que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_h \in Y_h^0, \quad & \nu \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}_h) p_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F}_h(T_h) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} , \\ \forall r_h \in M_h, \quad & \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h) r_h \, d\mathbf{x} = 0 , \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \forall Q_h \in Z_h^*, \quad & \lambda \int_{\Omega} \mathbf{grad} T_h \cdot \mathbf{grad} Q_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) T_h Q_h \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} g Q_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} G_b Q_h \, d\mathbf{x} , \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\mathbf{u}_h = i_h \mathbf{u}_b \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad \text{et} \quad T_h = j_h T_b \quad \text{sur} \quad \Gamma_D . \quad (3.20)$$

Pour étudier ce système, on va l'écrire sous la même forme que le problème continu. Dans ce but, on introduit les opérateurs  $S_h$  et  $L_h$ , analogues discrets des opérateurs  $S$  et  $L$ . La condition aux limites  $\mathbf{u}_b$  étant toujours fixée, pour toute distribution  $\mathbf{f}$  de  $H^{-1}(\Omega)^d$ ,  $S_h \mathbf{f}$  est la fonction  $\mathbf{w}_h$  vérifiant la condition

$$\mathbf{w}_h = i_h \mathbf{u}_b \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.21)$$

et telle que le couple  $(\mathbf{w}_h, q_h)$  soit la solution dans  $Y_h \times (M_h/\mathbb{R})$  du problème

$$\forall \mathbf{v}_h \in Y_h^0, \quad \nu \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}_h) q_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \quad (3.22)$$

$$\forall r_h \in M_h, \quad \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{w}_h) r_h \, d\mathbf{x} = 0.$$

Lorsque  $\mathbf{u}_b$ , et donc  $i_h \mathbf{u}_b$ , sont nuls, l'opérateur  $S_h$  est noté  $S_h^0$ . D'autre part, pour toute distribution  $g$  du dual de l'espace  $H_*^1(\Omega)$ , la fonction  $Q_h = L_h g$  appartient à  $M_h$ , vérifie la condition

$$Q_h = j_h T_b \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (3.23)$$

et est solution du problème

$$\forall R_h \in Z_h, \quad \lambda \int_{\Omega} \mathbf{grad} Q_h \cdot \mathbf{grad} R_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g R_h \, d\mathbf{x}. \quad (3.24)$$

On désigne par  $L_h^0$  l'opérateur  $L_h$  dans le cas particulier où la donnée  $T_b$  est nulle.

Sous les hypothèses (3.11) à (3.15), on peut tout de suite rappeler les résultats de stabilité et de convergence concernant ces opérateurs.

(i) Pour toute distribution  $\mathbf{f}$  de  $H^{-1}(\Omega)^d$ , on a

$$\|S_h^0 \mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)^d} \leq c \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}. \quad (3.25)$$

Si en outre la fonction  $S\mathbf{f}$  appartient à  $H^k(\Omega)^d$  pour un entier  $k$  vérifiant  $\frac{d}{2} < k \leq \ell_Y + 1$ , on a la majoration d'erreur

$$\|(S - S_h) \mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)^d} \leq ch^{k-1} (\|S\mathbf{f}\|_{H^k(\Omega)^d} + \|\tilde{S}\mathbf{f}\|_{H^{k-1}(\Omega)^d}). \quad (3.26)$$

(ii) Pour toute distribution  $g$  du dual de  $H_*^1(\Omega)$ , on a

$$\|L_h^0 g\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|g\|_{(H_*^1(\Omega))'}. \quad (3.27)$$

Si en outre la fonction  $Lg$  appartient à  $H^k(\Omega)$  pour un entier  $k$  vérifiant  $\frac{d}{2} < k \leq l_z + 1$ , on a la majoration d'erreur

$$\|(L - L_h)g\|_{H^1(\Omega)} \leq ch^{k-1} \|Lg\|_{H^k(\Omega)}. \quad (3.28)$$

De ces propriétés, on peut facilement déduire le résultat de convergence suivant, qui est vrai dès que les fonctions  $\mathbf{u}_b$  et  $T_b$  appartiennent respectivement aux espaces  $H^s(\partial\Omega)^d$  et  $H^s(\Gamma_D)$  pour un réel  $s > \frac{d-1}{2}$ :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^d, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|(S - S_h)\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)^d} = 0, \\ \forall g \in (H_*^1(\Omega))', \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|(L - L_h)g\|_{H^1(\Omega)} = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Finalement, on introduit l'application  $H_h$  qui est définie de l'espace  $H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$  dans lui-même par

$$\forall V = (\mathbf{v}, R) \in H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega),$$

$$H_h(V) = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_h & 0 \\ 0 & L_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_h(R) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ g + \tilde{G}_b - (\mathbf{v} \cdot \nabla) R \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

où  $\tilde{G}_b$  est défini par (3.7). Il faut noter que cette application est continuellement différentiable et envoie le sous-espace  $Y_h \times Z_h$  dans lui-même. D'autre part, le système (3.19) (3.20) s'écrit maintenant sous la forme équivalente:  $H_h(U_h) = 0$ , où  $U_h$  est le couple  $(\mathbf{u}_h, T_h)$  (l'hypothèse (3.11) permet en effet de calculer une pression  $p_h$  dans  $M_h$ , unique à une constante additive près, à partir de  $U_h$ ).

La formulation ci-dessus permet d'étudier le problème (3.19) (3.20) en utilisant le théorème des fonctions implicites discrets (F. Brezzi, J. Rappaz et P.-A. Raviart [3], M. Crouzeix et J. Rappaz [5]). Dans la proposition qui suit, on énonce avec les notations appropriées une version un peu différente de ce résultat, qui se démontre en appliquant [5, Thm. 3.1] à l'application:  $U^* = (\mathbf{u}^*, T^*) \mapsto H_h(\mathbf{u}^* + \mathcal{F}_h \mathbf{u}, T^* + \mathcal{F}_h T)$ .



PROPOSITION 3.1 : *On suppose qu'il existe un couple  $\tilde{U}_h$  de  $Y_h \times Z_h$  tel que  $DH_h(\tilde{U}_h)$  soit un isomorphisme de  $Y_h^0 \times Z_h^*$  dans lui-même. On pose*

$$\varepsilon_h = \|H_h(\tilde{U}_h)\|_{H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)}, \quad (3.31)$$

$$\gamma_h = \|(DH_h(\tilde{U}_h))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y_h^0 \times Z_h^*, Y_h^0 \times Z_h^*)}, \quad (3.32)$$

$$A_h(\mu) = \sup \{ \|DH_h(\tilde{U}_h) - DH_h(V_h)\|_{\mathcal{L}(Y_h^0 \times Z_h^*, Y_h^0 \times Z_h^*)}; \\ V_h \in Y_h \times Z_h \quad \text{et} \quad \|V_h - \tilde{U}_h\|_{H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)} \leq \mu \}. \quad (3.33)$$

Si on a

$$2 \gamma_h A_h(2 \gamma_h \varepsilon_h) < 1, \quad (3.34)$$

pour tout  $\mu \geq 2 \gamma_h \varepsilon_h$  tel que  $\gamma_h A_h(\mu) < 1$ , il existe une unique solution  $U_h$  de l'équation  $H_h(U_h) = 0$  vérifiant

$$\|U_h - \tilde{U}_h\|_{H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)} \leq \mu. \quad (3.35)$$

De plus, on a l'estimation

$$\|U_h - \tilde{U}_h\|_{H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)} \leq \frac{\gamma_h}{1 - \gamma_h A_h(\mu)} \|H_h(\tilde{U}_h)\|_{H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)}. \quad (3.36)$$

Dans toute la suite, on fait les hypothèses de régularité suivantes sur le triplet  $(\mathbf{u}, p, T)$  solution du système (3.1) (3.2) (3.3) :

$$\mathbf{u} \in H^m(\Omega) \quad \text{et} \quad p \in H^{m-1}(\Omega), \quad \frac{d}{2} < m \leq \ell_Y + 1, \quad (3.37)$$

$$T \in H^s(\Omega), \quad \frac{d}{2} < s \leq \ell_Z + 1.$$

On suppose aussi

la fonction  $\mathbf{F}$  de classe  $C^{\ell_Z+1}$ , à dérivée seconde uniformément bornée, (3.38)

de sorte que, par la formule de Leibnitz, la fonction  $\mathbf{F}(T)$  appartient au même  $H^s(\Omega)$  que  $T$ . On choisit maintenant  $\tilde{U}_h$  égal au couple  $(\mathcal{F}_h \mathbf{u}, \mathcal{F}_h T)$ . Le paragraphe suivant est consacré à l'estimation des quantités  $\varepsilon_h$ ,  $\gamma_h$  et  $\mathcal{A}_h(\mu)$ .

### 3.2. Lemmes techniques

Pour tous couples  $V = (\mathbf{v}, R)$  de  $H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$  et  $W = (\mathbf{w}, Q)$  de  $H_0^1(\Omega)^d \times H_*^1(\Omega)$ , on voit que

$$DH_h(V) \cdot W = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_h^0 & 0 \\ 0 & L_h^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_h[\mathbf{F}'(R)Q] - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ - (\mathbf{v} \cdot \nabla) Q - (\mathbf{w} \cdot \nabla) R \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

En comparant cette expression avec (3.9), on voit que, pour tout  $W_h = (\mathbf{w}_h, Q_h)$  dans  $Y_h^0 \times Z_h^*$ ,

$$DH_h(\tilde{U}_h) \cdot W_h \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} &= DH(U) \cdot W_h + \begin{pmatrix} S^0 - S_h^0 & 0 \\ 0 & L^0 - L_h^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}'(T) Q_h - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}_h - (\mathbf{w}_h \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ - (\mathbf{u} \cdot \nabla) Q_h - (\mathbf{w}_h \cdot \nabla) T \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} S_h^0 & 0 \\ 0 & L_h^0 \end{pmatrix} \\ &\left( \begin{pmatrix} (\mathbf{F}'(T) Q_h) - \mathcal{F}_h[\mathbf{F}'(T) Q_h] - ((\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_h - (\mathbf{w}_h \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}) \\ - ((\mathbf{u} - \mathcal{F}_h \mathbf{u}) \cdot \nabla) Q_h - (\mathbf{w}_h \cdot \nabla)(T - \mathcal{F}_h T) \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Cette équation nous permet de montrer le premier lemme.

LEMME 3.2 : *On fait l'hypothèse*

$$\forall Q_h \in Z_h^*, \|\mathbf{F}'(T) Q_h - \mathcal{F}_h[\mathbf{F}'(T) Q_h]\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \varepsilon(h) \|Q_h\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0. \quad (3.41)$$

Alors, il existe un réel  $h_0$  tel que, pour  $h \leq h_0$ , l'opérateur  $DH_h(\tilde{U}_h)$  soit un isomorphisme de  $Y_h^0 \times Z_h^*$  dans lui-même. La constante  $\gamma_h$  est alors majorée par une constante  $\gamma$  indépendante de  $h$ .

*Démonstration :* Une conséquence immédiate de l'hypothèse (3.8) est qu'il existe une constante  $c_0$  positive telle que, pour tout  $W_h = (\mathbf{w}_h, Q_h)$  dans  $Y_h^0 \times Z_h^*$ ,

$$\|DH(U) \cdot W_h\|_{H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)} \geq c_0 \|W_h\|_{H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)}. \quad (3.42)$$

Le lemme sera donc démontré si on prouve que

$$\sup_{\|W_h\|_{H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)} \leq 1} \|DH_h(\tilde{U}_h) \cdot W_h - DH(U) \cdot W_h\|_{H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)} \leq \eta(h),$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = 0$ . (3.43)

On va établir successivement la convergence des deux derniers termes figurant dans (3.40).

1) On déduit aisément de l'équation (3.29) que, si  $\mathcal{X}_\gamma$  et  $\mathcal{X}_z$  sont des compacts respectivement de  $H^{-1}(\Omega)^d$  et de  $(H_*^1(\Omega))'$ , on a la convergence

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\mathbf{f} \in \mathcal{X}_\gamma} \|(S - S_h) \mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)^d} = 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{g \in \mathcal{X}_z} \|(L - L_h) g\|_{H^1(\Omega)} = 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

Or, l'image de la boule unité de  $H_0^1(\Omega)^d \times H_*^1(\Omega)$  par l'application :

$$(\mathbf{w}, Q) \mapsto \mathbf{F}'(T) Q - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

est un compact de  $H^{-1}(\Omega)^d$ , et son image par l'application :

$$(\mathbf{w}, Q) \mapsto -(\mathbf{u} \cdot \nabla) Q - (\mathbf{w} \cdot \nabla) T$$

est un compact de  $(H_*^1(\Omega))'$ . On déduit donc de (3.44) la convergence de l'avant-dernier terme de (3.40).

2) D'après les propriétés de stabilité (3.25) et (3.27) et l'hypothèse (3.41), on voit que, pour prouver la convergence du dernier terme, il suffit de montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u} - \mathcal{J}_h \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|T - \mathcal{J}_h T\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

C'est une conséquence directe des propriétés (3.26) et (3.28) et des hypothèses de régularité sur la solution  $(\mathbf{u}, p, T)$ .

En regroupant tous ces résultats on obtient le lemme.

LEMME 3.3 : On fait l'hypothèse

$$\forall Q_h \in Z_h^*, \forall R_h \in Z_h^*, \quad \|\mathcal{J}_h[(\mathbf{F}'(R_h) - \mathbf{F}'(\mathcal{J}_h T)) Q_h]\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c \|R_h - \mathcal{J}_h T\|_{H^1(\Omega)} \|Q_h\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.45)$$

Alors, il existe une constante  $c$  positive telle que, pour tout réel  $\mu > 0$ , la constante  $A_h(\mu)$  soit majorée par  $c\mu$ .

Démonstration : D'après (3.39), en posant  $V_h = (\mathbf{v}_h, R_h)$  et  $W_h = (\mathbf{w}_h, Q_h)$ , on a

$$\begin{aligned} & DH_h(\tilde{U}_h) \cdot W_h - DH_h(V_h) \cdot W_h \\ &= \begin{pmatrix} S_h^0 & 0 \\ 0 & L_h^0 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{aligned} & \mathcal{J}_h[(\mathbf{F}'(R_h) - \mathbf{F}'(\mathcal{J}_h T)) Q_h] - ((\mathbf{v}_h - \mathcal{J}_h \mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_h - (\mathbf{w}_h \cdot \nabla)(\mathbf{v}_h - \mathcal{J}_h \mathbf{u}) \\ & - ((\mathbf{v}_h - \mathcal{J}_h \mathbf{u}) \cdot \nabla) Q_h - (\mathbf{w}_h \cdot \nabla)(R_h - \mathcal{J}_h T) \end{aligned} \right). \end{aligned}$$

Si l'on suppose que

$$\|\mathcal{J}_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H^1(\Omega)^d} + \|\mathcal{J}_h T - R_h\|_{H^1(\Omega)} \leq 2\mu,$$

en utilisant les propriétés de stabilité (3.25) et (3.27) et l'hypothèse (3.45), on obtient le lemme.

Remarque 3.4 : Comme on le verra par la suite, les hypothèses (3.41) et (3.45) sont vérifiées pour tous les espaces  $Z_h$  d'éléments finis usuels. En effet, elles se démontrent aisément par des inégalités inverses locales.

LEMME 3.5 : Sous les hypothèses de régularité (3.37) et (3.38), il existe une constante  $c$  positive ne dépendant que de la solution  $U$  telle que

$$\varepsilon_h \leq ch^{\inf\{m, s\} - 1}. \quad (3.46)$$

Démonstration : De l'équation  $H(U) = 0$ , on déduit

$$\begin{aligned} H_h(\tilde{U}_h) &= \tilde{U}_h - U - \begin{pmatrix} S - S_h & 0 \\ 0 & L - L_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}(T) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ g + \tilde{G}_b - (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} S_h^0 & 0 \\ 0 & L_h^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T)] - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathcal{J}_h \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{J}_h \mathbf{u} \\ - (\mathbf{u} \cdot \nabla) T + (\mathcal{J}_h \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{J}_h T \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_h \leq & \| \mathbf{u} - \mathcal{J}_h \mathbf{u} \|_{H^1(\Omega)^d} + \| T - \mathcal{J}_h T \|_{H^1(\Omega)} \\
 & + \| (S - S_h)(\mathbf{F}(T) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \|_{H^1(\Omega)^d} \\
 & + \| (L - L_h)(g + \tilde{G}_b - (\mathbf{u} \cdot \nabla) T) \|_{H^1(\Omega)} \\
 & + \| S_h^0 \|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega)^d, H_b^1(\Omega)^d)} \| \mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T)] \\
 & \quad - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathcal{J}_h \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{J}_h \mathbf{u} \|_{H^{-1}(\Omega)^d} \\
 & + \| L_h^0 \|_{\mathcal{L}((H^1(\Omega))', H_b^1(\Omega))} \| (\mathbf{u} \cdot \nabla) T - (\mathcal{J}_h \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{J}_h T \|_{(H_b^1(\Omega))'}.
 \end{aligned}$$

On majore ces différents termes par les arguments suivants :

1) en utilisant les propriétés (3.12) et (3.15) et l'hypothèse de régularité (3.37) ;

2) en notant que

$$\mathbf{u} = S(\mathbf{F}(T) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \quad \text{et} \quad T = L(g + \tilde{G}_b - (\mathbf{u} \cdot \nabla) T),$$

et en combinant les propriétés (3.26) et (3.28) avec l'hypothèse de régularité (3.37) ;

3) en utilisant les estimations de stabilité (3.25) et (3.27), en écrivant les décompositions

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathcal{J}_h \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{J}_h \mathbf{u} \\
 & = ((\mathbf{u} - \mathcal{J}_h \mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \mathcal{J}_h \mathbf{u}) - ((\mathbf{u} - \mathcal{J}_h \mathbf{u}) \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \mathcal{J}_h \mathbf{u}), \\
 & (\mathbf{u} \cdot \nabla) T - (\mathcal{J}_h \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathcal{J}_h T \\
 & = ((\mathbf{u} - \mathcal{J}_h \mathbf{u}) \cdot \nabla) T + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(T - \mathcal{J}_h T) - ((\mathbf{u} - \mathcal{J}_h \mathbf{u}) \cdot \nabla)(T - \mathcal{J}_h T),
 \end{aligned}$$

et en utilisant les propriétés (3.12), (3.15), (3.18), (3.37) et (3.38) (grâce à la formule de Leibnitz, cette dernière entraîne que  $\mathbf{F}(T)$  appartient à  $H^s(\Omega)^d$ ).

### 3.3. Résultats et conclusions

Le résultat principal se déduit facilement de ce qui précède.

**THÉOREME 3.6 :** *Soit  $(\mathbf{u}, p, T)$  une solution du problème (3.1) (3.2) (3.3) vérifiant les hypothèses (3.8) et (3.37). On fait les hypothèses (3.38), (3.41) et*

(3.45). Alors, il existe un réel positif  $H_0$  tel que, pour tout  $h \leq H_0$ , le problème (3.19) (3.20) ait une solution  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  dans  $Y_h \times (M_h/\mathbb{R}) \times Z_h$ . En outre, cette solution vérifie la majoration d'erreur

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^d} + \|T - T_h\|_{H^1(\Omega)} \leq ch^{\inf\{m, s\} - 1}, \quad (3.47)$$

où la constante  $c$  ne dépend que de la solution  $(\mathbf{u}, p, T)$  et de la fonction  $\mathbf{F}$ .

*Démonstration :* Pour appliquer la proposition, on vérifie que

$$2\gamma_h A_h(2\gamma_h \varepsilon_h) \leq ch^{\inf\{m, s\} - 1}.$$

Pour  $h$  assez petit, cette quantité est inférieure à 1, de sorte que l'équation  $H_h(U_h) = 0$  admet une solution  $U_h = (\mathbf{u}_h, T_h)$  dans  $Y_h \times Z_h$ . On déduit alors de l'hypothèse (3.11) qu'il existe une fonction  $p_h$  de  $M_h$ , unique à une constante additive près, telle que le triplet  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  soit solution de (3.19) (3.20). Ensuite, on déduit de (3.36) l'estimation

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^d} + \|T - T_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c\varepsilon_h,$$

ce qui donne par le Lemme 3.5 l'estimation d'erreur (3.47).

*Remarque 3.7 :* L'étude de l'unicité de la solution du problème (3.19) (3.20) s'effectue exactement comme pour le problème continu. Pour  $h$  assez petit, le résultat d'unicité est identique (et donc en général non global).

**PROPOSITION 3.8 :** *Sous les hypothèses du théorème et sous l'hypothèse supplémentaire*

$$\forall Q_h \in Z_h^*, \forall R_h \in Z_h^*,$$

$$\|\mathcal{J}_h[\mathbf{F}(Q_h) - \mathbf{F}(R_h)]\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c\|Q_h - R_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.48)$$

la solution  $(\mathbf{u}, p, T)$  vérifie en outre la majoration d'erreur

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq ch^{\inf\{m, s\} - 1}. \quad (3.49)$$

*Démonstration :* En utilisant l'hypothèse (3.11), on voit que, pour n'importe quelle fonction  $r_h$  de  $M_h$  de même valeur moyenne que  $p_h$ ,

$$\|p_h - r_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in Y_h^0} \frac{-\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}_h)(p_h - r_h) \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{v}_h\|}.$$

On calcule

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}_h)(p_h - r_h) \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega} \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T_h)] \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \nu \int_{\Omega} \mathbf{grad} \, \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{grad} \, \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\
&\quad - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}_h) r_h \, d\mathbf{x} \\
&= - \int_{\Omega} (\mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T_h)]) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} \mathbf{grad} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{grad} \, \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}_h)(p - r_h) \, d\mathbf{x} .
\end{aligned}$$

On en déduit par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} &\leq \|p - r_h\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^d} \\
&\quad + \|\mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T_h)]\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + \|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\quad + \|(\mathbf{u} \cdot \nabla) T - (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) T_h\|_{L^2(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Pour conclure, on utilise d'abord l'hypothèse (3.13) et les décompositions :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h &= ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\
&\quad - ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) , \\
(\mathbf{u} \cdot \nabla) T - (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) T_h &= ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla) T + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(T - T_h) \\
&\quad - ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla)(T - T_h) .
\end{aligned}$$

Il reste à évaluer le terme  $\|\mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T_h)]\|_{L^2(\Omega)^d}$ ; pour cela, on note que, grâce à l'hypothèse (3.48),

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T_h)]\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \leq \|\mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T)]\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathcal{J}_h[\mathbf{F}(\mathcal{J}_h T) - \mathbf{F}(T_h)]\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \leq \|\mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T_h)]\|_{L^2(\Omega)^d} + c \|\mathcal{J}_h T - T_h\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \|\mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T)]\|_{L^2(\Omega)^d} + c(\|T - \mathcal{J}_h T\|_{L^2(\Omega)} + \|T - T_h\|_{H^1(\Omega)}), \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Une méthode de dualité d'Aubin-Nitsche permet d'obtenir une majoration plus fine de l'erreur sur la vitesse et la température en norme  $L^2(\Omega)$ .

PROPOSITION 3.9 : *On suppose*

$$\text{l'ouvert } \Omega \text{ convexe ou de classe } \mathcal{C}^{1,1}, \quad (3.50)$$

*et les réels  $m$  et  $s$  de l'hypothèse (3.37) supérieurs ou égaux à 2. Sous les hypothèses du théorème et sous l'hypothèse supplémentaire*

$$\begin{aligned} \forall R_h \in Z_h^*, \quad & \|(Id - \mathcal{J}_h)[\mathbf{F}(R_h) - \mathbf{F}(\mathcal{J}_h T)]\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \leq ch \|R_h - \mathcal{J}_h T\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

*la solution  $(\mathbf{u}_h, p_h, T_h)$  vérifie la majoration d'erreur*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|T - T_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{\inf\{m, s\}}. \quad (3.52)$$

*Démonstration :* On a

$$\begin{aligned} & \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|T - T_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = \sup_{\mathbf{M} \in L^2(\Omega)^d, N \in L^2(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} N(T - T_h) \, d\mathbf{x}}{\left( \|\mathbf{M}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|N\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$



Pour une fonction quelconque  $\mathbf{M}$  de  $L^2(\Omega)^d$  et une fonction quelconque  $N$  de  $L^2(\Omega)$ , on résout le problème consistant à chercher un triplet  $(\mathbf{w}, q, Q)$  de  $H_0^1(\Omega)^d \times (L^2(\Omega)/\mathbb{R}) \times H_*^1(\Omega)$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \quad v \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathbf{w} \cdot \mathbf{grad} v \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) v \cdot \mathbf{w} \, dx \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) v \cdot \mathbf{w} - \int_{\Omega} (\mathbf{div} v) q \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} \, dx, \end{aligned}$$

$$\forall r \in L^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\mathbf{div} \mathbf{w}) r \, dx = 0,$$

$$\begin{aligned} \forall R \in H_*^1(\Omega), \quad \lambda \int_{\Omega} \mathbf{grad} Q \cdot \mathbf{grad} R \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) R Q \, dx \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) T Q \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{F}'(T) R \cdot \mathbf{w} \, dx + \int_{\Omega} N R \, dx. \quad (3.54) \end{aligned}$$

Si  $W$  représente le couple  $(\mathbf{w}, Q)$ , le problème s'écrit de façon équivalente :

$$(DH(U))^* \cdot W = \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & L_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ N \end{pmatrix},$$

où  $(DH(U))^*$  est l'opérateur adjoint de  $DH(U)$ . D'après l'hypothèse (3.8), il admet donc une solution unique. Par des techniques identiques à celles employées pour les équations de Navier-Stokes, on vérifie facilement que, sous l'hypothèse (3.50), cette solution possède la propriété de régularité

$$\|\mathbf{w}\|_{H^2(\Omega)^d} + \|q\|_{H^1(\Omega)} + \|Q\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\|\mathbf{M}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|N\|_{L^2(\Omega)}),$$

où la constante  $c$  dépend de  $(\mathbf{u}, T)$ . D'après les hypothèses (3.12), (3.13) et (3.15), il existe alors une fonction  $\mathbf{w}_h$  de  $Y_h^0$  (égale à  $\mathcal{F}_h \mathbf{w}$ ), une fonction  $q_h$  de  $M_h$  et une fonction  $Q_h$  de  $Z_h^*$  (égale à  $\mathcal{F}_h Q$ ) telles que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{H^1(\Omega)^d} + \|q - q_h\|_{L^2(\Omega)} + \|Q - Q_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \\ \leq ch(\|\mathbf{M}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|N\|_{L^2(\Omega)}). \quad (3.55) \end{aligned}$$

A partir du problème (3.54), on peut calculer

$$\int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} N(T - T_h) \, d\mathbf{x}$$

en fonction de  $(\mathbf{w}, q, Q)$ . En soustrayant la formulation variationnelle du problème (3.1) (3.2) (3.3) et le problème discret (3.19) (3.20), appliqués à  $(\mathbf{w}_h, q_h, Q_h)$ , on a aussi

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \mathbf{grad} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{grad} \, \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{w}_h) p \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{w}_h) p_h \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} (\mathbf{F}(T) - \mathcal{F}_h[\mathbf{F}(T_h)]) \cdot \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x}, \\ & \lambda \int_{\Omega} \mathbf{grad} (T - T_h) \cdot \mathbf{grad} \, Q_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \, Q_h \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) T_h \, Q_h \, d\mathbf{x} = 0, \end{aligned}$$

de sorte qu'en combinant ces deux équations avec (3.54), on obtient

$$\int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} N(T - T_h) \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^5 T_i,$$

avec

$$\begin{aligned} T_1 &= \nu \int_{\Omega} \mathbf{grad} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{grad} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\mathbf{x} \\ & + \lambda \int_{\Omega} \mathbf{grad} (T - T_h) \cdot \mathbf{grad} (Q - Q_h) \, d\mathbf{x}, \\ T_2 &= - \int_{\Omega} (\operatorname{div} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)) q \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{w}_h) (p - p_h) \, d\mathbf{x}, \\ T_3 &= \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_4 &= \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla)(T - T_h) Q \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla) T Q \, d\mathbf{x} \\
&\quad - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) T Q_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) T_h Q_h \, d\mathbf{x} , \\
T_5 &= - \int_{\Omega} \mathbf{F}'(T)(T - T_h) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{F}(T) \cdot \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x} \\
&\quad - \int_{\Omega} \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T_h)] \cdot \mathbf{w}_h \, d\mathbf{x} .
\end{aligned}$$

Il reste à analyser successivement chacun de ces termes, en tenant compte des majorations (3.47), (3.49) et (3.55).

1) Pour le premier terme, il suffit d'écrire

$$T_1 \leq c(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\Omega)^d} |\mathbf{w} - \mathbf{w}_h|_{H^1(\Omega)^d} + |T - T_h|_{H^1(\Omega)} |Q - Q_h|_{H^1(\Omega)}) .$$

2) En tenant compte des propriétés des divergences des fonctions  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_h$  et  $\mathbf{w}$ , on a

$$T_2 = - \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h))(q - q_h) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h))(p - p_h) \, d\mathbf{x} ,$$

de sorte que

$$T_2 \leq c(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\Omega)^d} \|q - q_h\|_{L^2(\Omega)} + |\mathbf{w} - \mathbf{w}_h|_{H^1(\Omega)^d} \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}}) .$$

3) On note que le terme  $T_3$  s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
T_3 &= \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla) \mathbf{u}_h \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} ,
\end{aligned}$$

de sorte que

$$T_3 \leq ch \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^d} + c' \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^d}^2 .$$

On utilise le fait que  $m$  est  $\geq 2$  pour prouver que le second terme est au moins du même ordre que le premier.

4) De la même façon, on a

$$T_4 = \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla) T_h (Q - Q_h) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) (T - T_h) (Q - Q_h) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla) (T - T_h) Q d\mathbf{x},$$

et on en déduit

$$T_4 \leq ch(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^d} + \|T - T_h\|_{H^1(\Omega)}) \\ + c' \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^d} \|T - T_h\|_{H^1(\Omega)},$$

d'où le résultat puisque  $m$  est  $\geq 2$ .

5) Finalement, on écrit le dernier terme sous la forme

$$T_5 = \int_{\Omega} \mathbf{F}'(T)(T - T_h) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{F}(T) + \mathbf{F}'(T)(T_h - T) - \mathbf{F}(T_h)) \cdot \mathbf{w}_h d\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega} (\mathbf{F}(T_h) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T_h)]) \cdot \mathbf{w}_h d\mathbf{x}.$$

Comme les dérivées première et seconde de la fonction  $\mathbf{F}$  sont bornées, on en déduit

$$T_5 \leq c(\|T - T_h\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|T - T_h\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \\ + \|\mathbf{F}(T_h) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T_h)]\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{w}_h\|_{L^2(\Omega)^d}),$$

ce qu'on écrit encore

$$\begin{aligned} T_5 \leq & c \left( \|T - T_h\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|T - T_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \right. \\ & + (\| \mathbf{F}(\mathcal{J}_h T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(\mathcal{J}_h T)] \|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \left. + \| (Id - \mathcal{J}_h)[\mathbf{F}(\mathcal{J}_h T) - \mathbf{F}(T_h)] \|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{w}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \right). \end{aligned}$$

On utilise alors l'hypothèse (3.51) pour le dernier terme et on obtient

$$\begin{aligned} T_5 \leq & c \left( \|T - T_h\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|T - T_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \|\mathbf{w}\|_{H^2(\Omega)^d} \right. \\ & + (\|T - \mathcal{J}_h T\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T)]\|_{L^2(\Omega)^d} \\ & \left. + h \|T - T_h\|_{H^1(\Omega)} + h \|T - \mathcal{J}_h T\|_{H^1(\Omega)}) \|\mathbf{w}\|_{H^2(\Omega)^d} \right). \end{aligned}$$

Ceci donne le résultat souhaité, car  $s$  est  $\geq 2$ .

*Remarque 3.10 :* Sous l'hypothèse (3.50), on peut facilement vérifier, en généralisant les arguments utilisés pour les équations de Navier-Stokes, qu'on a bien la propriété (3.37) avec  $m \geq 2$  et  $s \geq 2$  dès que les données sont assez régulières : la fonction  $g$  dans  $L^2(\Omega)$ , les conditions de bord  $\mathbf{u}_b$ ,  $T_b$  et  $G_b$  dans  $H^{3/2}(\partial\Omega)^d$ ,  $H^{3/2}(\Gamma_D)$ , et  $H^{1/2}(\Gamma_N)$  respectivement.

Toutefois, en utilisant le fait que le second membre  $\mathbf{F}(T)$  est borné dans  $L^2(\Omega)^d$  dès que la fonction  $T$  est dans  $L^2(\Omega)$ , on peut obtenir une majoration un peu plus fine sur la vitesse et la pression.

**PROPOSITION 3.11 :** *Sous les hypothèses du théorème et sous les hypothèses supplémentaires (3.48), (3.50) et (3.51), la solution  $(\mathbf{u}, p, T)$  vérifie en outre, pour  $h$  assez petit, la majoration d'erreur*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq ch^{\inf\{m-1, s\}}. \quad (3.56)$$

*Démonstration :* En comparant la formulation variationnelle du problème (3.1) (3.2) (3.3) et le problème discret (3.19) (3.20), on voit que, pour tout  $\mathbf{v}_h$  dans  $X_h$ ,

$$\begin{aligned} \nu |\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)^d}^2 = & - \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h)(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h))(p - p_h) \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} (\mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T_h)]) \cdot (\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

L'hypothèse (3.11) entraîne qu'il existe une fonction  $\mathbf{v}_h$  de  $X_h$  vérifiant

$$\forall r_h \in M_h, \quad \int (\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)) r_h d\mathbf{x} = 0 \quad \text{et}$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H^1(\Omega)^d} \leq c \|\mathbf{u} - \mathcal{J}_h \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d},$$

de sorte qu'en choisissant ce  $\mathbf{v}_h$ , on obtient facilement

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\Omega)^d} &\leq c(\|\mathbf{u} - \mathcal{J}_h \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h\|_{L^4(\Omega)^d} \\ &\quad + \|\mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T_h)]\|_{L^2(\Omega)^d}). \end{aligned}$$

Pour estimer les deux derniers termes, on fait appel aux décompositions

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h &= ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ &\quad + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) - ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T_h)] = \mathbf{F}(T) - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(T)] + \mathcal{J}_h[\mathbf{F}(\mathcal{J}_h T) - \mathbf{F}(T_h)].$$

En utilisant les résultats précédents et l'hypothèse (3.48), on en déduit la majoration désirée sur la vitesse, puis l'estimation correspondante sur la pression.

### 3.4. Exemples d'éléments finis

Il faut maintenant prouver que les hypothèses (3.11) à (3.14) pour le couple d'espaces  $(Y_h, M_h)$  et que les hypothèses (3.15), (3.41), (3.45), (3.48) et (3.51) pour l'espace  $Z_h$ , sont vérifiées par les espaces d'éléments finis que l'on utilise habituellement pour ce type de problème. Pour cela, on suppose que  $\Omega$  est un polygone ou un polyèdre, et on associe au paramètre  $h$  une triangulation du domaine  $\Omega$  :  $\mathcal{T}_h$  désigne un ensemble fini de triangles (resp. de tétraèdres) de diamètre  $\leq h$ , dont l'union est  $\overline{\Omega}$  et tels que l'intersection de deux triangles adjacents (resp. de deux tétraèdres adjacents) soit un sommet ou un côté (resp. un sommet, une arête ou une face) de chacun des deux triangles (resp. tétraèdres) ; on choisit aussi la triangulation telle que l'intersection d'un élément avec  $\Gamma_D$  soit ou bien vide ou bien un sommet ou un côté (resp. un sommet, une arête ou une face) de l'élément. On suppose la famille  $(\mathcal{T}_h)_h$  régulière, au sens que le rapport du diamètre de n'importe quel élément de  $\mathcal{T}_h$  à celui du cercle inscrit (resp. de la sphère inscrite) dans cet élément est

majoré par une constante indépendante de  $h$ . Pour tout entier  $n \geq 0$ , on désigne par  $\mathbb{P}_n(K)$  l'espace des polynômes de degré total  $\leq n$  sur un triangle ou un tétraèdre  $K$ . On note aussi  $\lambda_1^K, \dots, \lambda_{d+1}^K$  les coordonnées barycentriques sur un élément  $K$ .

Les hypothèses (3.11) à (3.14) sont en fait vérifiées pour tous les couples d'espaces  $(Y_h, M_h)$  utilisés pour la discrétisation du problème de Stokes (on réfère à [7, Chapter II] pour la démonstration de ces propriétés). On va en donner deux exemples.

*Exemple 1 (élément de Taylor-Hood) :* Dans le cas de la dimension 2, on pose

$$Y_h = \{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^2; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_{h|K} \in \mathcal{P}(K)^2 \},$$

$$M_h = \{ r_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}); \forall K \in \mathcal{T}_h, r_{h|K} \in \mathbb{P}_1(K) \},$$

où  $\mathcal{P}(K)$  désigne indifféremment soit l'espace des fonctions continues sur  $K$  et affines sur chacun des 4 triangles construits en joignant les milieux des côtés de  $K$ , soit l'espace  $\mathbb{P}_2(K)$  (il faut noter que l'entier  $\ell_\gamma$  est égal à 1 dans le premier cas et à 2 dans le second). On sait alors que l'hypothèse (3.11) est vraie. La propriété (3.13) est aussi standard. En utilisant l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux sommets et aux milieux des côtés des éléments, on a la propriété (3.12). Toutefois, pour obtenir la propriété (3.14), on doit introduire l'opérateur  $\mathcal{J}_h$  défini par

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \begin{cases} \forall \mathbf{a} \text{ sommet de } K, & (\mathcal{J}_h \mathbf{v})(\mathbf{a}) = \mathbf{v}(\mathbf{a}), \\ \forall F \text{ côté de } K, & \int_F \mathcal{J}_h \mathbf{v} \, d\tau = \int_F \mathbf{v} \, d\tau. \end{cases}$$

Les propriétés (3.12) et (3.14) sont alors simultanément vérifiées.

*Exemple 2 :* On pose

$$Y_h = \{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_{h|K} \in \mathcal{P}'(K) \},$$

$$M_h = \{ r_h \in L^2(\overline{\Omega}); \forall K \in \mathcal{T}_h, r_{h|K} \in \mathbb{P}_0(K) \},$$

où  $\mathcal{P}'(K)$  désigne l'espace engendré par  $\mathbb{P}_1(K)^d$  et les  $d+1$  fonctions  $\left( \prod_{j=1, j \neq k}^{d+1} \lambda_j^K \right) \mathbf{n}_k$ ,  $1 \leq k \leq d+1$ , où  $\mathbf{n}_k$  est le vecteur unitaire normal à la face d'équation  $\lambda_k^K = 0$ . L'entier  $\ell_\gamma$  est égal à 1. Là aussi, les propriétés

(3.11) et (3.13) sont standard, les propriétés (3.12) et (3.14) sont vérifiées pour l'opérateur  $\mathcal{J}_h$  défini par

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \begin{cases} \forall \mathbf{a} \text{ sommet de } K, & (\mathcal{J}_h \mathbf{v})(\mathbf{a}) = \mathbf{v}(\mathbf{a}), \\ \forall F \text{ côté (resp. face) de } K, & \int_F \mathcal{J}_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\tau = \int_F \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\tau. \end{cases}$$

Finalement, on pose

$$Z_h = \{R_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) ; \forall K \in \mathcal{T}_h, R_{h|K} \in \mathbb{P}_{\ell_Z}(K)\}, \quad (3.57)$$

et on désigne par  $\mathcal{J}_h$  l'opérateur d'interpolation de Lagrange sur le treillis principal d'ordre  $\ell_Z$  sur chaque élément. La propriété (3.15) est alors vérifiée. Il reste à établir les majorations (3.41), (3.45), (3.48) et (3.51), ce qui fait l'objet du lemme suivant.

**LEMME 3.12 :** *Les majorations (3.41), (3.45), (3.48) et (3.51) sont vérifiées pour l'espace  $Z_h$  défini en (3.57).*

*Démonstration :* On prouve les quatre majorations successivement. On note  $h_K$  le diamètre de n'importe quel élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ .

1) Etant donné un élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ , on connaît la majoration, vraie pour  $p > d$  :

$$\forall R \in W^{1,p}(K), \quad \|R - \mathcal{J}_h R\|_{L^2(K)} \leq ch_K^{1+\frac{d}{2}-\frac{d}{p}} \|R\|_{W^{1,p}(K)}. \quad (3.58)$$

On l'applique à la fonction  $\mathbf{F}'(T) Q_h$  :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{F}'(T) Q_h - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}'(T) Q_h]\|_{L^2(K)^d}^2 \\ & \leq ch_K^{2\left(1+\frac{d}{2}-\frac{d}{p}\right)} \|\mathbf{F}'(T) Q_h\|_{W^{1,p}(K)^d}^2 \\ & \leq ch_K^{2\left(1+\frac{d}{2}-\frac{d}{p}\right)} (\|\mathbf{F}'(T)\|_{L^\infty(K)^d}^2 \|Q_h\|_{W^{1,p}(K)}^2 \\ & \quad + \|\mathbf{F}''(T)\|_{L^\infty(K)^d}^2 \|(\mathbf{grad} T) Q_h\|_{L^p(K)^d}^2). \end{aligned}$$



Comme les dérivées premières et secondes de la fonction  $\mathbf{F}$  sont uniformément bornées, on en déduit

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{F}'(T) Q_h - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}'(T) Q_h] \|_{L^2(K)^d}^2 \\ & \leq ch_K^2 \left(1 + \frac{d}{2} - \frac{d}{p}\right) (\|Q_h\|_{W^{1,p}(K)}^2 + \|\mathbf{grad} T\|_{L^p(K)^d}^2 \|Q_h\|_{L^\infty(K)}^2). \end{aligned}$$

On rappelle l'inégalité inverse, vraie pour tous  $p$  et  $q$ ,  $1 \leq q \leq p \leq +\infty$ , et pour  $k$  égal à 0 ou 1 :

$$\forall R_h \in Z_h, \quad \|R_h\|_{W^{k,p}(K)} \leq ch_K^{\frac{d}{p} - \frac{d}{q}} \|R_h\|_{W^{k,q}(K)}. \quad (3.59)$$

On l'applique deux fois, avec  $q = 2$ , pour des valeurs de  $k$  et  $p$  différentes, et on obtient

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{F}'(T) Q_h - \mathcal{J}_h[\mathbf{F}'(T) Q_h] \|_{L^2(K)^d}^2 \\ & \leq c(h_K^2 \|Q_h\|_{H^1(K)}^2 + h_K^2 \left(1 - \frac{d}{p}\right) \|T\|_{W^{1,p}(\Omega)}^2 \|Q_h\|_{H^1(K)}^2) \end{aligned}$$

(d'après l'hypothèse (3.37), la fonction  $T$  appartient à  $H^s(\Omega)$  pour un réel  $s > \frac{d}{2}$ , donc à  $W^{1,p}(\Omega)$  pour un réel  $p > d$  d'après le théorème de Sobolev). En sommant l'inégalité précédente sur tous les éléments  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ , on obtient (3.41).

2) On voit facilement que, pour toute fonction  $R$  continue sur  $\overline{\Omega}$ ,

$$\|\mathcal{J}_h R\|_{L^2(K)}^2 \leq ch_K^d \|R\|_{L^\infty(K)}^2. \quad (3.60)$$

On applique cette inégalité à la fonction  $(\mathbf{F}'(R_h) - \mathbf{F}'(\mathcal{J}_h T)) Q_h$  et on obtient

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{J}_h[(\mathbf{F}'(R_h) - \mathbf{F}'(\mathcal{J}_h T)) Q_h]\|_{L^2(K)^d}^2 \\ & \leq ch_K^d \|\mathbf{F}'(R_h) - \mathbf{F}'(\mathcal{J}_h T)\|_{L^\infty(K)^d}^2 \|Q_h\|_{L^\infty(K)}^2. \end{aligned}$$

On utilise alors le fait que la dérivée seconde de  $\mathbf{F}$  est bornée, ce qui donne

$$\|\mathcal{J}_h[(\mathbf{F}'(R_h) - \mathbf{F}'(\mathcal{J}_h T)) Q_h]\|_{L^2(K)^d}^2 \leq ch_K^d \|R_h - \mathcal{J}_h T\|_{L^\infty(K)}^2 \|Q_h\|_{L^\infty(K)}^2,$$

puis deux fois l'inégalité inverse (3.59) avec  $k = 0$ ,  $p = +\infty$  et  $q = 4$  :

$$\|\mathcal{F}_h[(\mathbf{F}'(R_h) - \mathbf{F}'(\mathcal{F}_h T)) Q_h]\|_{L^2(K)^d}^2 \leq c \|R_h - \mathcal{F}_h T\|_{L^4(K)}^2 \|Q_h\|_{L^4(K)}^2,$$

et on somme sur les éléments  $K$  de  $\mathcal{T}_h$  en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|\mathcal{F}_h[(\mathbf{F}'(R_h) - \mathbf{F}'(\mathcal{F}_h T)) Q_h]\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq c \|R_h - \mathcal{F}_h T\|_{L^4(\Omega)}^2 \|Q_h\|_{L^4(\Omega)}^2.$$

L'espace  $H^1(\Omega)$  étant d'après le théorème de Sobolev inclus dans  $L^4(\Omega)$ , on obtient (3.45).

3) On applique maintenant l'inégalité (3.60) à  $\mathbf{F}(Q_h) - \mathbf{F}(R_h)$  :

$$\|\mathcal{F}_h[\mathbf{F}(Q_h) - \mathbf{F}(R_h)]\|_{L^2(K)^d}^2 \leq ch_K^d \|\mathbf{F}(Q_h) - \mathbf{F}(R_h)\|_{L^\infty(K)^d}^2,$$

et comme la dérivée de la fonction  $\mathbf{F}$  est bornée,

$$\|\mathcal{F}_h[\mathbf{F}(Q_h) - \mathbf{F}(R_h)]\|_{L^2(K)^d}^2 \leq ch_K^d \|Q_h - R_h\|_{L^\infty(K)}^2.$$

On utilise encore l'inégalité inverse (3.59) avec  $k = 0$ ,  $p = +\infty$  et  $q = 2$ , et on obtient

$$\|\mathcal{F}_h[\mathbf{F}(Q_h) - \mathbf{F}(R_h)]\|_{L^2(K)^d}^2 \leq c \|Q_h - R_h\|_{L^2(K)}^2,$$

d'où (3.48) en sommant sur les éléments  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ .

4) Finalement, on applique la majoration (3.58) à la fonction  $\mathbf{F}(R_h) - \mathbf{F}(\mathcal{F}_h T)$ , ce qui donne (on prend  $p > d$ )

$$\begin{aligned} & \| (Id - \mathcal{F}_h)[\mathbf{F}(R_h) - \mathbf{F}(\mathcal{F}_h T)] \|_{L^2(K)^d}^2 \\ & \leq ch_K^{2\left(1 + \frac{d}{2} - \frac{d}{p}\right)} \|\mathbf{F}(R_h) - \mathbf{F}(\mathcal{F}_h T)\|_{W^{1,p}(K)^d}^2 \\ & \leq ch_K^{2\left(1 + \frac{d}{2} - \frac{d}{p}\right)} (\|\mathbf{F}(R_h) - \mathbf{F}(\mathcal{F}_h T)\|_{L^p(K)^d}^2 \\ & \quad + \|\mathbf{F}'(R_h) \cdot \mathbf{grad} R_h - \mathbf{F}'(\mathcal{F}_h T) \cdot \mathbf{grad} \mathcal{F}_h T\|_{L^p(K)}^2) \\ & \leq ch_K^{2\left(1 + \frac{d}{2} - \frac{d}{p}\right)} (\|\mathbf{F}(R_h) - \mathbf{F}(\mathcal{F}_h T)\|_{L^p(K)^d}^2 \\ & \quad + \|\mathbf{F}'(R_h) \cdot (\mathbf{grad} R_h - \mathbf{grad} \mathcal{F}_h T)\|_{L^p(K)}^2 \\ & \quad + \|(\mathbf{F}'(R_h) - \mathbf{F}'(\mathcal{F}_h T)) \cdot \mathbf{grad} \mathcal{F}_h T\|_{L^p(K)}^2). \end{aligned}$$

Comme les deux premières dérivées de  $\mathbf{F}$  sont bornées, on en déduit

$$\begin{aligned} & \| (Id - \mathcal{F}_h)[\mathbf{F}(R_h) - \mathbf{F}(\mathcal{F}_h T)] \|_{L^2(K)^d}^2 \\ & \leq ch_K^2 \left( 1 + \frac{d}{2} - \frac{d}{p} \right) ( \| R_h - \mathcal{F}_h T \|_{W^{1,p}(K)}^2 + \| R_h - \mathcal{F}_h T \|_{L^\infty(K)}^2 \| \mathbf{grad} \mathcal{F}_h T \|_{L^p(K)^d}^2 ). \end{aligned}$$

Il est clair, d'après les propriétés de l'opérateur  $\mathcal{F}_h$ , que  $\| \mathbf{grad} \mathcal{F}_h T \|_{L^p(K)^d}$  est majoré par une constante fois  $\| T \|_{W^{1,p}(K)}$ . D'autre part, on choisit un réel  $q$  égal à 6 dans le cas de la dimension 3 et aussi grand que l'on veut (mais fini) en dimension 2, et on applique l'inégalité inverse (3.59) :

$$\begin{aligned} & \| (Id - \mathcal{F}_h)[\mathbf{F}(R_h) - \mathbf{F}(\mathcal{F}_h T)] \|_{L^2(K)^d}^2 \leq c(h_K^2 \| R_h - \mathcal{F}_h T \|_{H^1(K)}^2 \\ & \quad + h_K^2 \left( 1 + \frac{d}{2} - \frac{d}{p} - \frac{d}{q} \right) \| R_h - \mathcal{F}_h T \|_{L^q(K)}^2 \| T \|_{W^{1,p}(K)}^2 ). \end{aligned}$$

On somme alors sur les triangles  $K$  de  $\mathcal{T}_h$  en utilisant l'inégalité de Hölder pour le second terme :

$$\begin{aligned} & \| (Id - \mathcal{F}_h)[\mathbf{F}(R_h) - \mathbf{F}(\mathcal{F}_h T)] \|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq ch^2 \left( \| R_h - \mathcal{F}_h T \|_{H^1(\Omega)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \| R_h - \mathcal{F}_h T \|_{L^q(K)}^2 \| T \|_{W^{1,p}(\Omega)}^2 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^d \right) \left( 1 - \frac{2}{p} - \frac{2}{q} \right) \right). \end{aligned}$$

Grâce au théorème d'inclusion de Sobolev, ceci donne le résultat cherché.

Le tableau suivant compare les majorations d'erreur obtenues dans les différentes normes, lorsque les éléments finis utilisés pour la vitesse et la pression sont ceux des exemples 1 et 2, et que la vitesse, la température et la pression sont supposées avoir la régularité maximale, selon que la température est choisie dans un espace de fonctions affines par morceaux ( $\ell_Z = 1$ ) ou quadratiques par morceaux ( $\ell_Z = 2$ ) :

		$\  \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \ _{H^1(\Omega)^d}$	$\  p - p_h \ _{L^2(\Omega)}$	$\  T - T_h \ _{H^1(\Omega)}$	$\  \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \ _{L^2(\Omega)^d}$	$\  T - T_h \ _{L^2(\Omega)}$
$\ell_V = 1$	$\ell_Z = 1$	$h$	$h$	$h$	$h^2$	$h^2$
	$\ell_Z = 2$	$h$	$h$	$h$	$h^2$	$h^2$
$\ell_V = 2$	$\ell_Z = 1$	$h^2$	$h^2$	$h$	$h^2$	$h^2$
	$\ell_Z = 2$	$h^2$	$h^2$	$h^2$	$h^3$	$h^3$

En conclusion, on propose un problème discret pour approcher les équations de Navier-Stokes et de la chaleur couplées, qui possède une solution pour  $h$  assez petit et sous certaines hypothèses. On donne plusieurs exemples d'élé-

ments finis pour lesquels ces hypothèses sont vraies. On établit des estimations d'erreur entre les solutions exacte et approchée. Les espaces d'approximation de la vitesse et de la température peuvent *a priori* être choisis de façon indépendante. Toutefois, au vu des estimations et pour un meilleur rapport qualité-prix de l'approximation, il semble que des éléments finis du même ordre doivent être utilisés pour la construction des deux espaces ou bien, au vu de la dernière majoration, que l'ordre des éléments finis pour la vitesse doit être supérieur d'une unité à celui des éléments finis pour la température.

### RÉFÉRENCES

- [1] H. BERESTYCKI, 1975, *Méthodes topologiques et problèmes aux limites non linéaires*, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université Pierre et Marie Curie.
- [2] J. BOUSSINESQ, 1903, *Théorie analytique de la chaleur*, Volume 2, Gauthier-Villars, Paris.
- [3] F. BREZZI, J. RAPPAPAZ, P.-A. RAVIART, 1980, Finite-dimensional approximation of nonlinear problems. Part I : Branches of nonsingular solutions, *Numer. Math.*, **36**, pp. 1-25.
- [4] J.-P. CHABARD, 1989, *N3S Code for Fluid Mechanics - Release 2.0*, Electricité de France Report HE41/89.14, Chatou.
- [5] M. CROUZEIX, J. RAPPAPAZ, 1990, *On Numerical Approximation in Bifurcation Theory, Recherches en Mathématiques Appliquées*, **13**, Masson, Springer-Verlag, Paris, Berlin.
- [6] M. GAULTIER, M. LEZAUN, 1989, Equations de Navier-Stokes couplées à des équations de la chaleur : résolution par une méthode de point fixe en dimension infinie, *Ann. Sc. Math. Québec*, **13**, pp. 1-17.
- [7] V. GIRAULT, P.-A. RAVIART, 1986, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York.
- [8] D. D. JOSEPH, 1965, On the stability of the Boussinesq equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **20**, pp. 59-71.
- [9] P. H. RABINOWITZ, 1968, Existence and nonuniqueness of rectangular solutions of the Bénard problem, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **29**, pp. 32-57.
- [10] D. H. SATTINGER, 1978, *Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory, Lecture Notes in Math.*, **762**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York.
- [11] E. A. SPIEGEL, G. VERONIS, 1980, On the Boussinesq approximation for a compressible fluid, *Astrophys. Journal*, **131**, pp. 442-447.
- [12] W. VELTE, 1964, Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **16**, pp. 97-125.