

OLIVIER POISSON

**Étude numérique des pôles de résonance associés
à la diffraction d'ondes acoustiques et élastiques
par un obstacle en dimension 2**

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome
29, n° 7 (1995), p. 819-855

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1995__29_7_819_0

© AFCET, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



ÉTUDE NUMÉRIQUE DES PÔLES DE RÉSONANCE ASSOCIÉS À LA DIFFRACTION D'ONDES ACOUSTIQUES ET ÉLASTIQUES PAR UN OBSTACLE EN DIMENSION 2 (*)

par Olivier POISSON ⁽¹⁾

Communiqué par C. BARDOS

Résumé. — *L'article présente une approche originale du concept de pôle de résonance, introduit par Lax et Phillips, pour l'étude de la matrice de scattering associée à la propagation d'ondes dans un milieu acoustique Ω , non borné dans le plan ou l'espace. Cette approche est basée sur des équations intégrales obtenues dans le cadre stationnaire du problème de diffraction : les résonances sont caractérisées ainsi, comme pôles dans \mathbb{C} d'une famille S d'opérateurs dont on connaît explicitement les inverses, qui forment une famille analytique T , définie dans \mathbb{C} . Grâce aux éléments finis adaptés à la frontière bornée Γ de Ω , on passe immédiatement à l'élaboration d'un code de calcul des résonances. Le problème de la convergence numérique est résolu, ce qui justifie la méthode présentée. A partir des résultats numériques obtenus, on propose des conjectures qui s'ajoutent aux connaissances déjà acquises quant à la répartition des résonances dans \mathbb{C} . Enfin, le cas des ondes élastiques est abordé brièvement. On montre, sur l'exemple de la diffraction par le disque, le changement fondamental d'une telle situation, qu'on étaye de résultats numériques pour la fissure rectiligne.*

Mots-Clés : acoustique, élastodynamique, famille d'opérateurs méromorphe, résonances, scattering.

Abstract. — *This article presents a new approach regarding the resonance poles in the theory of Lax and Phillips, who studied the scattering matrix associated with the wave propagation in an acoustical and unbounded domain Ω , in 2D or 3D. Our approach is based on integral equations, developed from the stationary equations of diffraction : we characterize the resonances as poles in \mathbb{C} of a family S of operators. The family T of inverses is explicitly determined, and is analytic. Adapting the finite element method to the bounded boundary Γ of Ω , we develop a way of computing resonances. We also show the numerical convergence, justifying the interest of our approach. From these numerical results, we propose additional theorems on resonancy repartition in \mathbb{C} . Finally, the case of elastic waves is discussed briefly. We observe fundamental changes for the disk reflexion, compared to the previous situation. In this setting, we give some numerical results for the rectilinear slit.*

(*) Manuscrit reçu le 15 juin 1994 et sous forme révisée le 28 novembre 1994.

⁽¹⁾ UFR-MIM, Université de Provence, 3 Place Victor Hugo, Case 64, 13331 Marseille, Cedex 03.

1. INTRODUCTION

Le présent article est une contribution à la théorie de la diffraction qu'ont développée P. Lax et R. Phillips. Il complète la thèse de l'auteur [15], en discutant en particulier de la convergence des résonances numériques.

1.1. Notion de résonance

Nous considérons la diffraction d'ondes par un obstacle \mathcal{O} , ouvert borné de \mathbb{R}^D ($D = 2$ ou 3), connexe ou non, de frontière Γ régulière, ou régulière par morceaux, comme pour l'exemple type du polygone. Le domaine extérieur $\Omega = \mathbb{R}^D - \overline{\mathcal{O}}$ est connexe et représente un milieu acoustique. Le cas élastique sera plus succinctement abordé. Afin de présenter les résonances et la principale motivation de leur étude, nous posons le problème de Cauchy pour l'équation des ondes, qui ne sera pas développé par la suite :

$$(\hat{P}) : \begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} - \Delta \tilde{v} &= 0 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, +\infty[\\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma; \frac{\partial}{\partial \nu} : \text{dérivée normale} \\ \tilde{v}(0, x) &= \tilde{v}_0 \\ \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right)(t=0, x) &= \tilde{v}_1. \end{cases}$$

Nous privilégions dans (\hat{P}) , et pour la suite de l'article, la condition de Neumann sur Γ , mais c'est en général la condition de Dirichlet qui est étudiée, comme pour la formule (1) qui va suivre, et donnée dans Ramm [16] (voir aussi Sanchez [7]). Les données \tilde{v}_0 et \tilde{v}_1 ont pour support compact une boule B_R de rayon R , contenant \mathcal{O} . La solution \tilde{v} converge, localement en espace, vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$: on dit qu'il y a décroissance de l'énergie locale. De plus, si, pour simplifier, \mathcal{O} est un convexe de \mathbb{R}^3 et de bord régulier, alors pour tout x dans la boule B_R :

$$(1) \quad \tilde{v}(x, t) = \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_j(x) e^{-i\omega_j t} + o(e^{(\Im m(\omega_n) + \varepsilon)t}) \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Les ω_j sont appelés pôles (supposés simples) de la matrice \mathcal{S} , ou **résonances**, que l'on peut ici ranger selon l'ordre :

$$0 > \Im m(\omega_1) \geq \dots \geq \Im m(\omega_j) \geq \dots \rightarrow -\infty$$

Φ_j est obtenu à partir des données initiales et du mode dégénéré associé à ω_j . On voit donc que la décroissance de l'énergie est exponentielle, et le taux indépendant de \tilde{v}_0 et \tilde{v}_1 . Soulignons que ce cas est celui d'un obstacle convexe borné, à bord régulier. La section suivante donne des résultats dans d'autres cas très différents.

1.2. Localisation des résonances

Lax et Phillips donnent une caractérisation des résonances valable dans le cas général (voir [10]). Ils montrent le lien entre la géométrie de \mathcal{O} , la nature de la décroissance asymptotique en temps de l'énergie locale et la répartition des résonances dans le demi-plan complexe inférieur. Ainsi, pour le cas 3D, avec la condition de Dirichlet sur Γ , lorsque \mathcal{O} est dit non captif (à savoir que tout rayon de l'optique géométrique ressort définitivement de B_R au bout d'un temps fini), il existe une constante $a > 0$ telle que $\Im m(\omega) < -a$ pour toute résonance ω . Si, de plus, Γ est C^∞ , on établit un résultat asymptotique encore plus précis :

$$(2) \quad |\Im m(\omega)| \geq a + b \log |\Re e(\omega)| \quad a, b > 0$$

et si Γ est analytique :

$$(3) \quad |\Im m(\omega)| \geq a + b |\Re e(\omega)|^{1/3} \quad a, b > 0$$

et ce résultat est optimal (sous certaines conditions supplémentaires sur Γ) : il y a une infinité de résonances vérifiant :

$$(4) \quad |\Im m(\omega)| \leq C |\omega|^{1/3}.$$

La constante C peut être estimée (voir Bardos, Guillot, Ralston [1] et Bardos, Lebeau, Rauch [2]).

Par contre, s'il existe un rayon captif, comme dans le cas d'une cavité (voir fig. 1), alors il peut exister (ce n'est pas général à tous les obstacles captifs) une suite de résonances convergeant vers l'axe réel, asymptotiquement :

$$\Re e(\omega_j) \rightarrow +\infty \quad \Im m(\omega_j) \rightarrow 0.$$

Il n'y a plus alors de taux exponentiel de décroissance de l'énergie locale (voir Ikawa [8]).

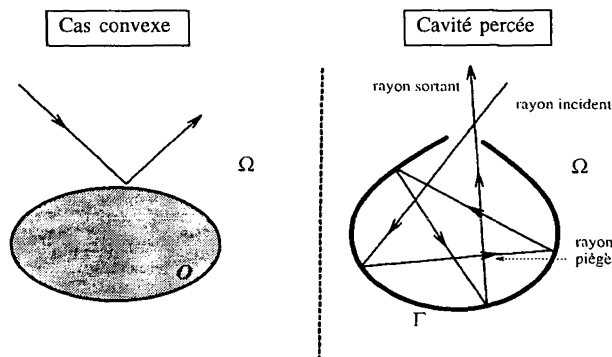


Figure 1. — Propagation et réflexions des rayons de l'optique géométrique.

1.3. Application à l'étude de la section efficace

Introduire des fréquences complexes est motivé par l'étude du problème stationnaire :

$$(P\omega) \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u - \omega^2 u &= 0 \text{ dans } \Omega & (1) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_\Gamma &= g \in V' & (\text{CN}) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u\right)(x) &= o(r^{\frac{1-D}{2}}) \text{ quand } r = |x| \rightarrow \infty & (\text{Cr1}) \\ u &= o(r^{\frac{1-D}{2}}) & (\text{Cr2}) \\ u &\in H_{\text{loc}}^1(\Omega); \end{array} \right.$$

Lorsque Γ est régulière, $V = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, donc $V' = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Lorsque Γ a des singularités du type ligne polygonale (présence de coins) : $\Gamma = \cup_j \bar{\Gamma}_j$ où les ouverts Γ_j sont réguliers, l'espace adapté V est moins usuel :

$$(5) \quad V = \{ \phi \in L^2(\Gamma), \phi|_{\Gamma_j} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j), \text{ et } \phi \text{ vérifie une condition} \}$$

de raccord au voisinage de chaque sommet de Γ }.

(Cf. Grisvard [4], théorèmes 1.5.1.3 et 1.5.2.3). On désigne par $\omega(>0)$ la fréquence (ou pulsation) d'une onde plane u_β^I , d'incidence β , se propageant dans Ω à la vitesse 1. La fonction $g = -\frac{\partial}{\partial \nu}(u_\beta^I)$ est la donnée sur le bord. La condition (Cr2) force la décroissance asymptotique en espace de l'onde diffractée u , solution unique de $(P\omega)$, tandis que (Cr1) est la condition de radiation : u est dite « onde sortante ». On définit alors les trois quantités suivantes :

- l'amplitude de diffusion $s_+(\theta, \beta, \omega)$ telle que :

$$(6) \quad u(x) \sim \frac{e^{i\omega r}}{r^{(D-1)/2}} s_+(\theta, \beta, \omega) \quad \text{où} \quad \theta = \frac{x}{r} \text{ et } r \rightarrow \infty$$

- $\sigma_\omega(\theta) = \int_{|\beta|=1} |s_+(\theta, \beta, \omega)|^2 d\beta$ qui est la section efficace différentielle

- $\sigma(\omega) = \int_{|\theta|=1} \sigma_\omega(\theta) d\theta$ qui est la section efficace (7)

σ est une fonction analytique strictement positive sur \mathbb{R}_+^* dont on étudie les maxima locaux en considérant le prolongement méromorphe de σ dans \mathbb{C} : on peut imaginer que σ atteint un maximum réel à proximité de la partie réelle d'un pôle de son prolongement. On démontre d'autre part (cf. Lax et Phillips) que les pôles de σ dans \mathbb{C} sont les résonances et leurs conjuguées, ce qui permet, si besoin était, de relier les deux problèmes (\hat{P}) et ($P\omega$). D'où l'idée de poser puis résoudre une extension cohérente de ($P\omega$) pour des fréquences complexes. Ceci n'est pas immédiat, car nous verrons qu'un tel problème ne doit admettre qu'une solution dont le comportement à l'infini ($|x|$ grand) est en $e^{i\omega r} \frac{1-D}{r^2}$, qui n'est pas borné lorsque $\Im(\omega) < 0$.

1.4. Les méthodes numériques de calcul des résonances

Les théorèmes énoncés précédemment ne prédisent pas localement l'existence ou non d'une résonance, et ne sont pas clairement vrais dans le cas 2D. D'où l'intérêt d'entreprendre un calcul numérique. Un tel objectif n'a été que très peu abordé. Il permet deux types d'approche :

La première approche, *via* le problème **instationnaire**, est celle de M. Wei, G. Majda et W. A. Strauss dans [18]. Ils considèrent des potentiels à symétrie sphérique en 3D (ce qui simplifie considérablement le problème, ramené au cas $D = 1$). Après avoir calculé la solution en temps \tilde{v} correspondante, une formule comparable à (1) identifie les résonances qui sont alors déterminées numériquement selon la vieille méthode de Prony.

La seconde approche se situe dans le cadre des équations **stationnaires** de l'hydrodynamique. M. Lenoir et C. Hazard [11, 5] ont effectué des calculs de résonances associées à la diffraction de la houle par un corps flottant.

Le rapport [3] puis la thèse [15] se basent sur cette dernière approche. Ils présentent des résultats de calculs numériques de résonances associées à la diffraction par des obstacles bidimensionnels, pour le problème de Neumann sur Γ .

Dans cet article, nous résumons et complétons ces travaux, étendus au cadre des équations de l'élasticité, dans lequel les résultats présentent des différences fondamentales avec ceux de l'acoustique.

Nous allons entrer dans le vif du sujet. Le plan de l'article est le suivant :

En Sections 2.1 et 2.2, nous donnons successivement deux caractérisations des résonances pour les ondes acoustiques. La dernière, qui sera exploitée, introduit une famille analytique d'opérateurs $T(\omega)$ dont nous détaillons les propriétés en Sections 2.2 et 2.3.

En Section 2.4, nous construisons un algorithme convergent de calcul de résonances. La démonstration de la convergence est reportée en annexe.

La Section 2.5 rassemble les résultats numériques, et nous y proposons quelques conjectures quant à la répartition des résonances dans \mathbb{C} .

La Section 3 est consacrée à l'élasticité. L'analyse des résonances sur un cas simple montre que le phénomène physique en élasticité est très différent de celui relevant de l'acoustique.

2. ÉTUDE ET CALCUL NUMÉRIQUE DES RÉSONANCES POUR LA DIFFRACTION D'ONDES ACOUSTIQUES

Cette section est consacrée au problème stationnaire de diffraction d'ondes acoustiques. Grâce aux équations intégrales (voir Nédélec [13]), nous présentons une caractérisation des résonances qui se prête bien à la mise en œuvre d'un code numérique (cas $D = 2$), utilisant les éléments finis \mathcal{P}_1 classiques sur la frontière Γ . Nous analysons ensuite la convergence d'une telle méthode, et en particulier l'influence de la régularité de Γ sur l'ordre d'approximation des résonances par ce que nous appellerons les « résonances numériques ».

La notation suivante sera prise : pour $X \subset \mathbb{R}^{1 \text{ ou } 2}$, $s \in \mathbb{R}$, $\|u\|_{s,X}$ désigne la norme de $u \in H^s(X)$.

2.1. Position du problème

Revenons au problème de diffraction précédent $(P\omega)$ avec $\omega > 0$. Il admet une solution unique u , que l'on écrit $u = R^s(\omega)g$, où $R^s(\omega)$ est un opérateur borné de V' dans $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$. En fait, u est la limite quand $\varepsilon \searrow 0^+$ de la solution u_ε unique de :

$$(P\omega_\varepsilon) \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon - \omega_\varepsilon^2 u_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega \\ \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \right)_\Gamma = g \in V' \\ u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

où $\omega_\varepsilon \equiv \omega + i\varepsilon$. C'est une variante du principe d'absorption limite démontré par Wilcox dans [19]. Pour s'y ramener, il suffit de considérer un relèvement de g (ce qui est possible car V' est l'espace adapté). La résolution de $(P\omega_\varepsilon)$ se fait en considérant la coercivité de $i\bar{\omega}_\varepsilon \iint_\Omega [\nabla u \nabla \bar{v} - \omega_\varepsilon^2 u \bar{v}] dx$ sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. L'opérateur $R^s(\omega)$ tel que $u_\varepsilon = R^s(\omega_\varepsilon)g$ est encore

défini dans $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}^*$, où l'on note $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}, \Im m(z) > 0\}$. On démontre (cf. Poisson [15]) que la famille d'opérateurs R^s est analytique sur un tel domaine, et s'étend à $\mathbb{C}_- \equiv \{z \in \mathbb{C}, \Im m(z) < 0\}$ de façon méromorphe (selon la définition de Kato [9]). Les pôles de ce prolongement sont alors appelés résonances associées à \mathcal{O} (pour le problème de Neumann).

Cette caractérisation des résonances n'est pas encore satisfaisante car Ω est un domaine non borné. Pour pallier cette difficulté, nous effectuons la démarche qui suit.

2.2. Une autre caractérisation des résonances

Lorsque $\Im m(\omega) > 0$, ω^2 n'est pas valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ défini dans $\left\{u \in H^1(\mathcal{O}), \Delta u \in L^2(\mathcal{O}), \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_\Gamma = 0\right\}$. Nous prolongeons alors à \mathcal{O} la solution — notée u_g — de $(P\omega)$, en remplaçant dans $(P\omega)$ le domaine Ω par $\Omega' = \Omega \cup \mathcal{O}$.

L'onde $u_g \in H^1(\Omega')$ est ainsi connue explicitement à partir de son saut $\phi = [u_g]$ à travers Γ , comme potentiel de double couche (cf. Nédélec [13]) :

$$(8) \quad \forall x \in \Omega' \quad u_g(x) = - \int_\Gamma \left(\frac{\partial G(x, y, \omega)}{\partial \nu(y)} \right) \phi(y) d\gamma(y)$$

avec :

$$(9) \quad G(x, y, \omega) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\omega|x-y|) & N=2 \\ \frac{e^{i\omega|x-y|}}{4\pi|x-y|} & N=3 \end{cases}$$

$H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0.

Cela mène à définir pour $\Im m(\omega) > 0$ l'opérateur $S(\omega)$ de V' dans V par $\phi = S(\omega)g$. D'autre part, u_g est l'unique solution dans $H^1(\Omega')$ (et notée u^ϕ lorsque ϕ n'est pas fixée) du problème suivant :

$$\mathcal{P}' \begin{cases} -\Delta u - \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega' \\ [u] = \phi \in V \\ \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] = 0. \end{cases}$$

On définit donc l'opérateur $T(\omega)$ de $B(V, V')$ par $T(\omega)\phi \equiv (\partial u^\phi / \partial \nu)_\Gamma$, et l'on a immédiatement $T(\omega)^{-1} = S(\omega)$. On a

ainsi construit deux familles S et T analytiques pour $\Im m(\omega) > 0$. L'opérateur $T(\omega)$ a l'avantage d'être connu explicitement par la relation (8), et, dans le cas 2D, de la façon suivante ⁽²⁾ :

$$(10) \quad \langle T(\omega) \phi, \psi \rangle = b(\omega; \phi, \psi) \quad \forall (\phi, \psi) \in V \times V,$$

où :

$$(11) \quad b(\omega; \phi, \psi) = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\omega |x-y|) \left\{ \frac{d\phi(x)}{d\gamma(x)} \frac{d\bar{\psi}}{d\gamma(y)} - \right. \\ \left. - \omega^2 v(x) \cdot v(y) \phi(x) \bar{\psi}(y) \right\} d\gamma(x) d\gamma(y)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité dans $V' \times V$. La forme sesquilinéaire $b(\omega; \cdot, \cdot)$ s'étend analytiquement à $\Im m(\omega) \leq 0$, excepté pour le cas 2D sur $i\mathbb{R}_-$ qui est la coupure de la fonction de Hankel $H_0^{(1)}$. En notant $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} - i\mathbb{R}_-$ si $D = 2$ et $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ si $D = 3$, on étend ainsi **analytiquement** la définition de $T(\omega)$ à $\tilde{\mathbb{C}}$, de même que la solution de \mathcal{P}' en reprenant (8).

2.3. Propriétés de T . Ordre faible d'une résonance

La singularité au voisinage de 0 de $H_0^{(1)}(z)$ est $\frac{2i}{\pi} \log(-iz)$, d'où proviennent les propriétés de T qui suivent. Les plus fondamentales sont données ici, tandis que d'autres sont présentées en annexe 4.1.

1. $T(i)$ est un opérateur auto-adjoint défini positif.
2. $\forall \omega \in \tilde{\mathbb{C}}, T(\omega) - T(i)$ est un opérateur compact de $L^2(\Gamma)$. C'est donc une perturbation compacte de $T(i)$ (il est $T(i)$ -compact).
3. $\forall \omega \in \tilde{\mathbb{C}}, T(\omega)$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul (car c'est le cas pour $T(i)$), et son spectre est réduit à ses valeurs propres, qui sont isolées.
4. D'après le théorème de Steinberg (voir [17]), la famille $S \equiv T^{-1}$ s'étend de façon méromorphe à $\omega \in \tilde{\mathbb{C}}$. Les pôles de S sont à la fois les fréquences propres de \mathcal{O} , **réelles**, et les résonances (hors de \mathbb{R}).

Plus précisément, dans un voisinage $\mathcal{V}(\omega_0)$ d'un pôle ω_0 , S admet un développement de la forme :

$$(12) \quad S(\omega) = \sum_{k=-n}^{\infty} (\omega - \omega_0)^k S_k.$$

⁽²⁾ Il y a aussi en dimension 3 une formulation comparable, mais plus sophistiquée.

Les S_k sont bornés de V' dans V et $S_{-n} \neq 0$. L'entier strictement positif n est appelé **ordre du pôle** ω_0 . De plus, $\exists \rho > 0$, $\exists \delta > 0$ assez petits tels que si $z \in \mathcal{C}_\rho$ (i.e. : $|z| = \rho$), $|\omega - \omega_0| < \delta$, les quantités suivantes existent :

$$(13) \quad R(z, \omega) = (z - T(\omega))^{-1} : \text{résolvante de } T(\omega)$$

$$(14) \quad P(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\rho} R(z, \omega) dz$$

$$(15) \quad E_0(\omega) = P(\omega)(V').$$

$P(\omega)$ est la projection spectrale sur l'espace propre généralisé $E_0(\omega)$, selon la direction $E_1(\omega)$ (définie ainsi), avec de plus (cf. Kato [9] chap. III, § 5.6) :

- $\dim E_0(\omega) = m = \dim E_0(\omega_0)$, si δ est assez petit.
- $V = E_0(\omega) \oplus E_1(\omega)$
- $T(\omega)$ est un isomorphisme de $E_1(\omega)$ dans $\overline{E_1(\omega)}$ (fermeture de $E_1(\omega)$ dans V'). Si $\omega \neq \omega_0$, $T(\omega)|_{E_0(\omega)}$ est un automorphisme de $E_0(\omega)$, tandis que $T(\omega_0)|_{E_0(\omega_0)}$ est un opérateur nilpotent d'indice $\leq m$. On le représente par une matrice $M(\omega_0)$ d'ordre m , nilpotente.
- L'opérateur $U(\omega) = P(\omega_0)P(\omega) + (I - P(\omega_0))(I - P(\omega))$ transforme holomorphiquement $E_0(\omega)$ en $E_0(\omega_0)$ et $E_1(\omega)$ en $E_1(\omega_0)$.
- L'opérateur $F(\omega) = U(\omega)T(\omega)U^{-1}(\omega)$ envoie $E_0(\omega_0)$ dans lui-même et isomorphiquement $E_1(\omega_0)$ dans $\overline{E_1(\omega_0)}$. A sa restriction à $E_0(\omega_0)$ est associée une matrice $M(\omega)$ (une base de $E_0(\omega_0)$ est fixée).
- $\{M(\omega)\}_{\omega \in \mathcal{V}(\omega_0)}$ est une famille analytique de matrices d'ordre m , inversibles lorsque $\omega \neq \omega_0$. La famille M^{-1} est méromorphe, de pôle ω_0 d'ordre n .

• **L'ordre faible** ν de ω_0 est par définition l'ordre du zéro du déterminant de $M(\omega)$ en ω_0 . Il vérifie la minoration :

$$(16) \quad n \leq \nu.$$

• Howland [6] donne une caractérisation du cas $n = 1$: il faut et il suffit que ν soit égal à la dimension du noyau de $T(\omega_0)$.

Nous verrons que l'ordre faible a un rôle prépondérant, contrairement à n , sur la nature de la convergence des résonances numériques. Les définitions précédentes serviront de plus lors de l'étude numérique.

2.4. Etude numérique

Pour déterminer les résonances, il s'agit ainsi de rechercher les ω de partie imaginaire strictement négative pour lesquelles une valeur propre de $T(\omega)$ s'annule. Tout est donc prêt pour l'étude numérique correspondante.

2.4.1. Approximations de Γ , V et $T(\omega)$

Nous nous limitons au cas 2D assez simple à mettre en œuvre, mais le cas 3D se traite d'une façon analogue. Nous approchons Γ par une ligne polygo-

nale Γ_h composée de segments droits $\Gamma_h^i = (M_{i-1}^h, M_i^h)$ et de sommets M_i^h appartenant à Γ . Si P est un point anguleux de Γ , il est pris aussi comme sommet de Γ_h . Enfin, Γ_h est la frontière séparant deux ouverts disjoints de \mathbb{R}^2 : \mathcal{O}_h borné et approchant \mathcal{O} , et \mathcal{Q}_h son complémentaire, non borné et connexe. Le pas h est défini par :

$$h = \sup_{i=1, \dots, N} |M_{i-1}^h, M_i^h|$$

N est le nombre de nœuds. Nous schématisons tout ceci dans la figure 2.

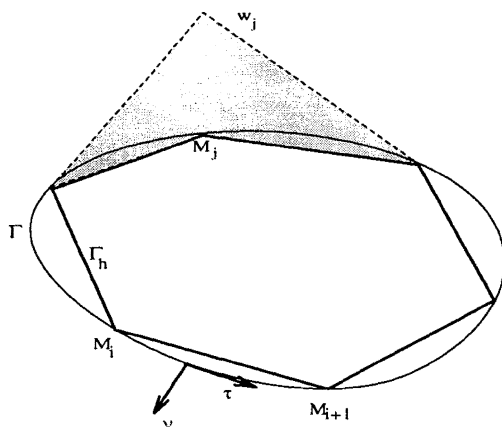


Figure 2. — Approximation de Γ et fonction de base discrète.

L'étude faite depuis la Section 1.3 étant applicable à Γ_h , on construit dans $L^2(\Gamma_h)$ l'espace $V^{(h)}$ adéquat (par la formule (5), mais avec Γ_h), l'opérateur $T^{(h)}(\omega)$ et la forme sesquilinéaire $b^{(h)}(\omega; \dots)$. Cependant, on ne s'intéressera pas aux résonances associées à Γ_h , qui sont les zéros non réels de $T^{(h)}$.

Soit W_h le sous-espace vectoriel de $V^{(h)}$, de dimension finie N , construit à partir des éléments finis \mathcal{P}_1 : une base est $\{w_i\}_{i=1, \dots, N}$ constituée des fonctions que nous représentons dans la figure 2 en traits hachurés.

$$(17) \quad w_i(M_j^h) = \delta_{ij}.$$

Construisons l'opérateur d'approximation discret $T_h(\omega)$: à $\phi_h \in W_h$ on associe $g_h = T_h(\omega) \phi_h \in W_h$ tel que $\forall \psi_h \in W_h$:

$$(18) \quad (g_h; \psi_h)_{0, h} \equiv \int_{\Gamma_h} g_h(x_h) \overline{\psi_h(x_h)} d\gamma_h(x_h) = b^{(h)}(\omega; \phi_h, \psi_h)$$

$T_h(\omega)$ est représentée par $B_h^{-1} A_h(\omega)$ dans la base $\{w_i\}$, où l'on a posé :

$$(19) \quad A_{h,i,j}(\omega) = b^{(h)}(\omega, w_i, w_j)$$

$$(20) \quad B_{h,i,j} = (w_i; w_j)_{0,h} = \int_{\Gamma_h} w_i(x_h) w_j(x_h) d\gamma_h(x_h)$$

B_h est la matrice de masse, indépendante de ω et toujours inversible. Nous ne nous en occuperons donc plus. $A_h(\omega)$ est la matrice de rigidité.

2.4.2. Définition et propriétés des résonances numériques

Nous appelons résonances numériques les zéros de la fonction analytique $\det A_h$, définie pour $\omega \in \mathbb{C}$. Elles ont les propriétés suivantes :

● THÉORÈME 2.1 : Si ω est une résonance numérique, alors $\Im m(\omega) \leq 0$.

La preuve est évidente, puisque si $\Im m(\omega) > 0$, $i\omega b^{(h)}(\omega; \dots)$ est coercive sur $V^{(h)}$: en effet, soit $\phi \in V^{(h)}$, et u la solution de \mathcal{P}' de donnée ϕ sur Γ_h ; alors $\Re e(i\omega b^{(h)}(\omega; \phi, \phi)) = \Im m(\omega) \|u\|_{1,\Omega_h}^2 \geq C \|\phi\|_{V^{(h)}}^2$.

$i\omega b^{(h)}(\omega; \dots)$ est donc coercive sur W_h muni de la norme de $V^{(h)}$.

● THÉORÈME 2.2 : En supposant qu'il n'y a pas de mode propre de $T(\omega)$ affine par morceaux (hypothèse raisonnable, en raison d'une certaine régularité attendue de ces modes), nous pouvons affirmer qu'il n'y a pas de résonance numérique réelle.

Preuve : Supposons que $\omega > 0$ soit une résonance numérique, associée au mode résonnant numérique $\phi^{(h)} \in W_h$. D'après le théorème 4.1 (en annexe 4.1) appliqué à Γ_h , $\mathcal{T}^{(h)}(\omega)$ est auto-adjoint positif ; il est non défini ici, donc d'après le théorème 4.1, ω est fréquence propre de \mathcal{O}_h et ϕ_h est dans le noyau de $T^{(h)}(\omega)$, cas que l'on exclut (puisque $\phi_h \in W_h$).

Remarquons que si l'on considère 0 comme fréquence propre du problème intérieur dans \mathcal{O}_h , associé au mode propre $u = 1$ dans \mathcal{O}_h , $u = 0$ dans Ω_h , alors $[u] \in W_h$, et 0 est aussi résonance numérique (par extension immédiate de cette notion ⁽³⁾). L'hypothèse du théorème n'est pas vérifiée dans ce cas exceptionnel. ■

Avant d'entamer le problème de convergence des résonances numériques selon h , détaillons le procédé de leur calcul numérique.

2.4.3. Algorithme de recherche des résonances

La quantité $\det(A_h(\omega))$ présente le désavantage d'être pratiquement incalculable directement (en raison de dépassement rapide quand h est petit de la valeur maximale ou minimale admise par l'ordinateur). Nous allons en choisir une autre à la place, et qui a les mêmes zéros.

⁽³⁾ En fait, $T(\omega)$ se prolonge continument à $\omega = 0$, mais pas analytiquement.

Soit $\omega \in \tilde{\mathbb{C}}$. Considérons les valeurs propres de $T_h(\omega)$: $\{\lambda_{h,i}(\omega)\}_{i=1,\dots,N}$, associées aux modes propres $e_{h,j}$. Soit $\lambda_{h,j}$ l'une d'elles, de plus petit module :

$$(21) \quad |\lambda_{h,j}| = \inf_{i=1,\dots,N} |\lambda_{h,i}|.$$

Lorsque ω est fixé, (21) définit l'indice j de façon unique, à moins que par un malheureux hasard, plusieurs valeurs propres aient le même plus petit module. Nous supposons qu'un tel cas ne se produit pas, sauf peut-être pour certaines valeurs (isolées) de ω , que nous ne considérerons pas ici pour simplifier. La valeur propre $\lambda_{h,j}(\omega)$, ainsi définie, est alors analytique dans un voisinage $Z_j \subset \tilde{\mathbb{C}}$ de ω , où elle reste la seule à vérifier (21). Nous schématisons ceci dans la figure 3 pour des fonctions réelles.

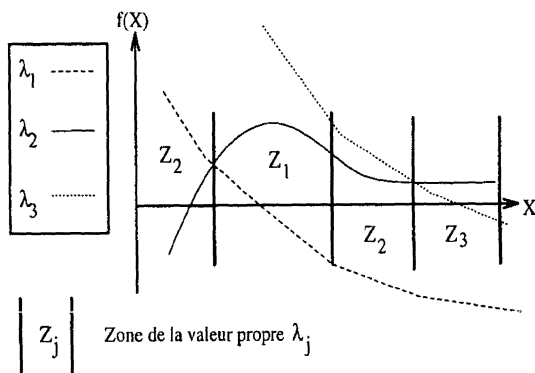


Figure 3. — Schéma des zones Z_j d'une fonction f prenant les valeurs minimales des $|\lambda_j(x)|$.

Nous posons alors : $f_h(\omega) = \lambda_{h,j}(\omega)$, et $\phi_h = e_{h,j}$. Supposons en outre que la multiplicité de $\lambda_j(\omega)$ soit 1. Comme la matrice $A_h(\omega)$ est symétrique complexe, $\bar{\phi}_h$ est mode propre de $A_h(\omega)^*$ pour la valeur propre $\bar{\lambda}_h$; il est dit mode adjoint de ϕ_h : $\forall \psi_h \in W_h$, $(T_h(\omega) \psi_h ; \bar{\phi}_h)_{0,h} = \lambda_h(\psi_h ; \phi_h)_{0,h}$. D'où la dérivée $f'_h(\omega)$:

$$(22) \quad f'_h(\omega) = \lambda'_{j,h} = \frac{(T'_h(\omega) \phi_h ; \bar{\phi}_h)_{0,h}}{(\phi_h ; \bar{\phi}_h)_{0,h}}.$$

L'opérateur $T'_h(\omega)$ a pour matrice $B_h^{-1} A'_h(\omega)$ dans la base $\{w_i\}$. Autrement dit, il est caractérisé par :

$$(23) \quad (T'_h(\omega) \phi ; \psi)_{0,h} = \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \right) b^{(h)}(\omega ; \phi, \psi) \quad \forall \phi, \psi \in W_h.$$

La dérivation de $b^{(h)}$ selon ω est faite analytiquement, en dérivant le noyau G . C'est pourquoi, il n'y a (presque) pas de calculs numériques supplémentaires pour obtenir $f'_h(\omega)$, une fois connu le mode propre ϕ_h .

L'écriture de l'algorithme de recherche des résonances est donc naturellement **la méthode de Newton** appliquée aux fonctions complexes, que nous rappelons ici : soit un choix d'une fréquence initiale ω_0 dans Z_j ; la suite ω_i est définie par :

$$(24) \quad \omega_{i+1} = \omega_i - \frac{f_h(\omega_i)}{f'_h(\omega_i)}.$$

L'étude de l'algorithme (h est fixé) est classique : s'il converge ($i \rightarrow \infty$), on obtient une (seule) résonance numérique, et il faut recommencer ensuite avec une autre fréquence de départ.

2.4.4. Analyse de la convergence selon h

La question qui se pose maintenant est de savoir si les résonances numériques approchent bien les pôles de S . Nous y répondons pour le cas où Γ est infiniment régulière, et faisons quelques remarques lorsqu'une singularité apparaît.

Voici le résultat principal :

THÉOREME 2.3 : (Convergence des résonances numériques)

Nous supposons la frontière de classe C^∞ . Il y a deux cas :

Cas 1 : Si ω_0 n'est pas un pôle de S , alors existent $\alpha > 0$ et $\delta > 0$ assez petits tels que ω ne soit pas pôle numérique dans le disque $B_\delta(\omega_0) = \{\omega / |\omega - \omega_0| \leq \delta\}$ dès que $h \leq \alpha$.

Cas 2 : Si ω_0 est un pôle de S , alors existent $\alpha > 0$ et $\delta > 0$ assez petits tels que dès que $h \leq \alpha$, il y a un ou des pôles numériques $\omega_{h,i}$ ($i = 1, \dots, k_h \leq \nu$) dans $B_\delta(\omega_0)$. De plus, chaque $\omega_{h,i}$ a l'ordre faible $\nu_{h,i} \geq 1$ tel que :

$$(25) \quad \sum_{i=1}^{k_h} \nu_{h,i} = \nu \text{ ordre faible de } \omega_0$$

$$(26) \quad |\omega_{h,i} - \omega_0| = O(h^{\frac{3}{2\nu}}).$$

Enfin, la considération de moyenne géométrique $\tilde{\omega}_h = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{k_h} \nu_{h,i} \omega_{h,i}$ permet d'améliorer nettement la convergence si $\nu > 1$ car :

$$(27) \quad |\tilde{\omega}_h - \omega_0| = O(h^{\frac{3}{2}}).$$

La preuve assez longue est reportée en annexe 4.2.

Remarques complémentaires :

• Cas où $\Gamma_h = \Gamma$:

Considérons Γ paramétrée par $\gamma : s \in [0, 1] \rightarrow \gamma(s) \in \mathbb{R}^2$. Lorsqu'on approche les fonctions définies sur Γ à partir d'éléments finis sur $[0, 1]$, on se place dans les conditions du théorème 2.3 avec $\varepsilon_{2,h} = \varepsilon_{3,h} = 0$ (définis en annexe 4.2), et la convergence numérique est en $\mathcal{O}(h^3)$.

• Cas où Γ n'est pas régulière :

La présence d'un angle dans Γ diminue la régularité des modes propres (ils ne sont plus dans $H^2(\Gamma)$ ⁽⁴⁾) ; donc leur approximation dans $H^{-s}(\Gamma)$ ⁽⁵⁾ par les éléments finis est d'autant moins bonne. De même, si Γ est une fissure (voir la description en 2.5.1 des obstacles infiniment minces), ce qui correspond à la présence d'un angle π , on s'attend à ce que l'ordre d'approximation des modes propres soit celui de l'approximation de la fonction type $s \mapsto \sqrt{s} \sqrt{1-s}$ sur $[0, 1]$ par des éléments finis \mathcal{P}_1 sur $[0, 1]$. On trouve l'ordre $\mathcal{O}(h)$ (voir [15]), qui est donc la vitesse de convergence des résonances numériques.

2.5. Exemples numériques

Nous n'insistons pas dans cette section sur une validation du code numérique, étape déjà effectuée (cf. [14]), notamment par comparaison avec les résonances du disque acoustique, connues « parfaitement ». Le point essentiel ici est d'établir, grâce aux résultats numériques, des conjectures quant à la répartition des résonances dans \mathbb{C} , pour certains types d'obstacles.

2.5.1.. Extension aux obstacles minces

Pour commencer par le plus simple, il est judicieux de noter que les équations intégrales permettent de traiter le cas d'obstacles infiniment minces. Le saut $[u]$ n'a plus alors la même signification puisque $\mathcal{O} = \emptyset$: en notant arbitrairement deux zones au voisinage de Γ , l'une supérieure et l'autre inférieure, $[u]$ est alors simplement la différence entre les quantités limites u_- et u_+ dans ces zones (cf. fig. 4). Pour que la physique soit respectée, il faut imposer une condition de nullité aux extrémités de Γ , c'est-à-dire remplacer $H^{1/2}(\Gamma)$ par $V = H_{00}^{1/2}(\Gamma)$. Ainsi, la fissure rectiligne $[0, 1] \times \{0\}$ maillée régulièrement est le cas le plus élémentaire à mettre en œuvre.

2.5.2. Autres obstacles étudiés

Une suggestion de G. Lebeau et J. C. Guillot est de calculer les résonances d'ellipses $E_{a,b} = \{(x = a \cos \theta, y = b \sin \theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$ pour obtenir en

⁽⁴⁾ Que l'on ne définit d'ailleurs pas.

⁽⁵⁾ Idem !

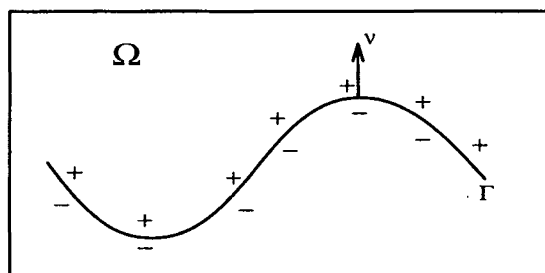


Figure 4. — Obstacle infiniment mince.

fonction de a , b et R le comportement asymptotique, lorsque R est grand, de N_R : nombre de résonances dans la boule $[0, R]$. Cela permet en plus de savoir si la fissure rectiligne peut être considérée comme limite d'ellipses s'aplatissant.

Notre algorithme ne se limitant pas aux obstacles convexes ou non captifs, nous l'avons éprouvé sur la fissure double $[0, 1] \times \{\pm e/2\}$ de largeur e , et sur la forme plus compliquée de sinusoides $\{(x \in [-\pi, \pi], y = \alpha \sin x)\}$ de hauteur α .

2.5.3. Résultats et conjectures

Les figures A, B, ..., F montrent dans l'ordre les résonances de la fissure rectiligne $[0, 1]$, des ellipses $E_{a,b}$ pour $a = 1$, $b = 1$ (cercle), $b = 0,1$, $0,5$, d'une fissure double ($e = 0,25$), d'une sinusoides ($\alpha = 0,5$). D'autres

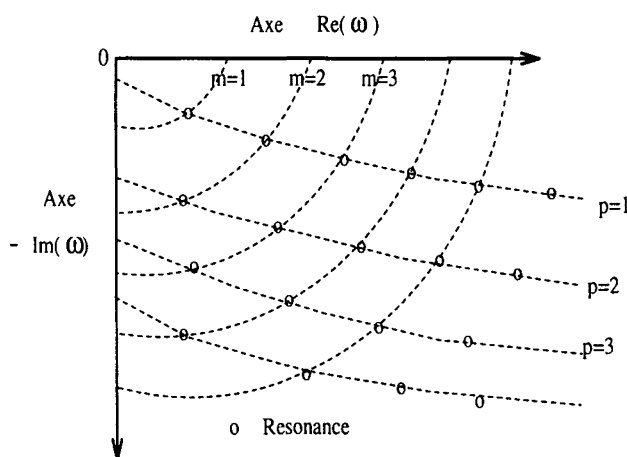


Figure 5. — Schéma du réseau de courbes pour les résonances des obstacles convexes.

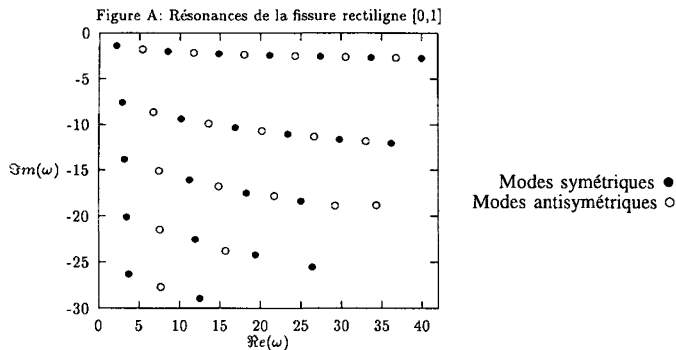


Figure A. — Résonances de la fissure rectiligne [0, 1].

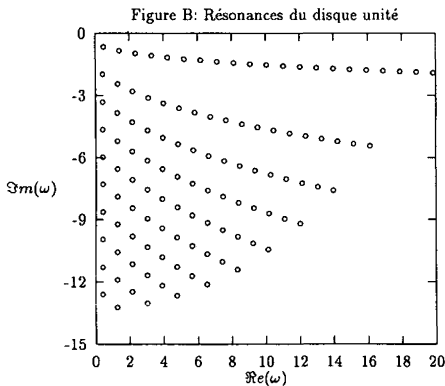


Figure B. — Résonances du disque unité.

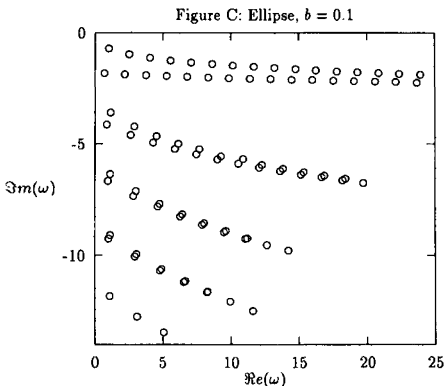
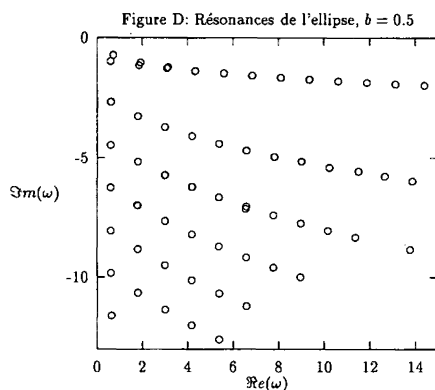
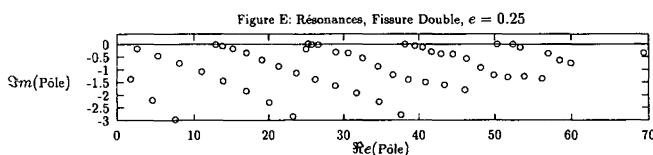
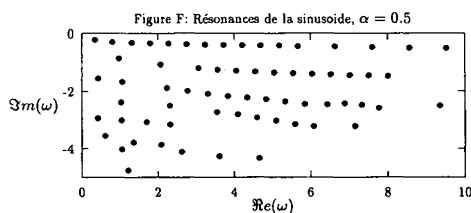


Figure C. — Ellipse, $b = 0,1$.

Figure D. — Résonances de l'ellipse, $b = 0,5$.Figure E. — Résonances. Fissure Double, $e = 0,25$.Figure F. — Résonances de la sinusoïde, $\alpha = 0,5$.

calculs ont été effectués (*cf.* Poisson [15]), dont la présentation n'ajoute rien ici.

On constate d'abord pour les obstacles convexes que les résonances se placent assez régulièrement aux nœuds $\omega_{p,m}$ d'un réseau de courbes (*cf.* fig. 5), ce qui rend la méthode de Newton performante, puisque les points initiaux dans l'algorithme sont faciles à choisir lorsque les premiers résultats sont acquis. Par extrapolation de ce que l'on sait pour le cas 3D, nous pouvons énoncer certaines conjectures sur la nature de $\omega_{p,m}$ lorsque $m \rightarrow +\infty$:

Cas de la fissure rectiligne $[0, 1]$ **Conjecture 2.1**

$$\begin{cases} \Re(\omega_{1,m}) \sim a + m \cdot \pi \\ \Im(\omega_{1,m}) \sim b + \frac{1}{2} \log(\Re(\omega_{1,m})) \end{cases}$$

Nous obtenons $a = 2,23$, $b = 0,932$. Il est remarquable que l'état asymptotique soit atteint (numériquement) dès $m = 1$.

Cas des ellipses

Conjecture 2.2 : Soit l_b la circonférence de $E_{1,b}$.

Lorsque $m \rightarrow \infty$, les résonances $\omega_{p,m}$ de $E_{1,b}$ sont telles que :

$$|\omega_{p,m+1} - \omega_{p,m}| = \frac{2\pi}{l_b} \quad \text{et} \quad \Im(\omega_{p,m}) \sim O(\Re(\omega_{p,m})^{\frac{1}{3}}).$$

D'autre part, on voit que seule une partie des résonances (Neumann) de l'ellipse $E_{1,b}$ converge vers les résonances (Neumann) de $[-1, 1]$ ⁽⁶⁾. On peut penser que le reste converge vers les résonances de $[-1, 1]$ **associées au problème de Dirichlet**.

La figure *G* représente une droite de pente $1/2$ et $\sqrt{N_R}$ en fonction de R : on trouve pour les ellipses $a = 1$, $b = 0,05, 0,1, 0,25, 0,5, 0,75, 1$, la formule $\sqrt{N_R} \sim p_b R$. La figure *H* met en évidence la propriété $p_b \approx \omega(a+b)$ quand $a = 1$, avec $\omega = 0,48 \approx \frac{1}{2}$. D'où la

Conjecture 2.3 : Pour l'ellipse $E_{a,b}$, $\sqrt{N_R} \sim \frac{1}{2}(a+b)R$ lorsque $R \rightarrow +\infty$.

D'autre part, lorsque $a = 1$ et $b \rightarrow 0$, on peut vérifier que la densité N_R converge vers deux fois celle de la fissure $[-1, 1]$ (pour le problème de Neumann).

Cas de la fissure double

La figure *E* montre des résonances très proches de l'axe réel, sans pour autant que $\Re(\omega)$ soit grand. Ceci est en accord avec les résultats théoriques en 3D sur la diffraction par plusieurs obstacles. Nous posons donc la

Conjecture 2.4 : Il existe une suite de résonances ω_n telles que

$$\Im(\omega_n) \approx 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{e}.$$

Cas de la sinusoïde

Les résultats (cf. fig. *F*) sont difficiles à obtenir car la répartition des résonances est peu prévisible et la méthode de Newton est parfois longue à converger. Cela incite à changer la fonction f_h de la partie 2.4.3.

⁽⁶⁾ qui sont les résonances de $[0, 1]$, divisées par 2.

Effet des résonances sur les sections efficaces

Pour $\omega > 0$, une expression de la section efficace différentielle ⁽⁷⁾ est :

$$(28) \quad \sigma_{\omega}(\beta) = \omega^{-1} \Im (\langle S(\omega) q_{\beta}, q_{\beta} \rangle)$$

où $q_{\beta} \equiv -\frac{\partial}{\partial \nu}(u'_{\beta})$. La formulation (28) met bien en lumière le rôle des résonances sur la présence de maxima locaux de σ_{ω} ou de σ .

L'effet parfois spectaculaire de la proximité des résonances à l'axe réel sur les fonctions $\sigma(\omega)$ et $\sigma(\beta, \omega) = \sigma_{\omega}(\beta)$ est obtenu en séparant les résultats sur une figure en deux parties par l'axe horizontal \mathbb{R}_+ : dans la partie supérieure, l'abscisse est $\omega > 0$, l'ordonnée est la fonction $\sigma(\omega)$ ⁽⁸⁾. La partie inférieure de la figure est le demi-plan complexe \mathbb{C}_- , où sont placées les résonances. Nous faisons coïncider l'axe $\omega > 0$ des abscisses de σ (partie supérieure) avec l'axe $\Re(\omega)$ des abscisses $\Re(\omega)$ (partie inférieure). Ces deux axes sont donc à la même échelle. Ainsi, en figure (i), une résonance de la fissure double très proche de l'axe réel provoque l'apparition d'un pic de σ d'autant plus étroit.

En coordonnées polaires (ρ, β) , nous représentons la fonction $\rho = \sigma_{\omega}(\beta)$ paramétrée par ω , proche d'une résonance. L'axe $\beta = 0$ est commun avec celui des fissures rectilignes simple ou doubles. Donc, lorsque $\beta = 0$, ρ est toujours nul, puisque nous considérons que le champ total vérifie la condition frontière de Neuman sur Γ . Il en serait tout autrement avec une condition de type Dirichlet. Remarquons qu'une telle représentation est inutile pour le cas du disque, puisque les courbes se réduisent à $\rho = \text{Cte}(\omega)$, en raison de la symétrie circulaire.

En figures (j) et (k), on s'aperçoit que le phénomène de résonance n'apparaît que pour certaines directions de propagation de l'onde incidente.

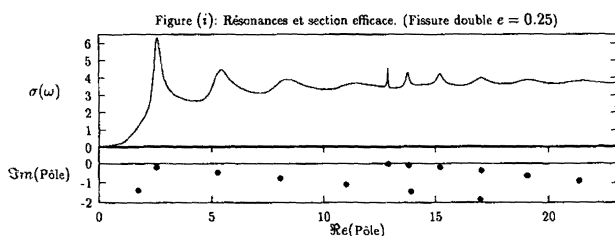


Figure (i). — Résonances et section efficace. (Fissure double $e = 0,25$).

3. DIFFRACTION D'ONDES ÉLASTIQUES

Dans cette partie, nous présentons brièvement une caractérisation des résonances, comparable à celle du cas acoustique, et propre aussi à une mise en œuvre numérique. Puis nous énonçons et démontrons, dans le cas du

⁽⁷⁾ Prolongeable au cas d'une fréquence propre.

⁽⁸⁾ A une constante multiplicative près.

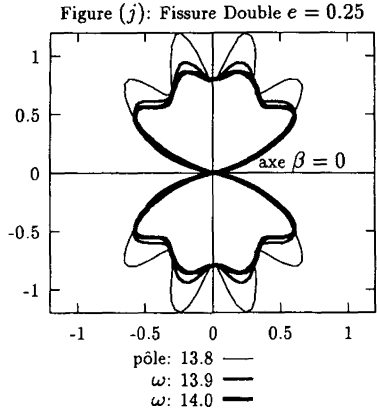


Figure (j). — Fissure double $e = 0,25$.

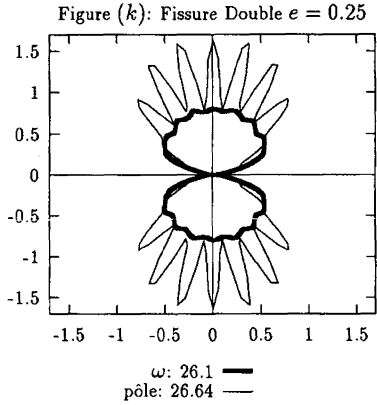


Figure (k). — Fissure double $e = 0,25$.

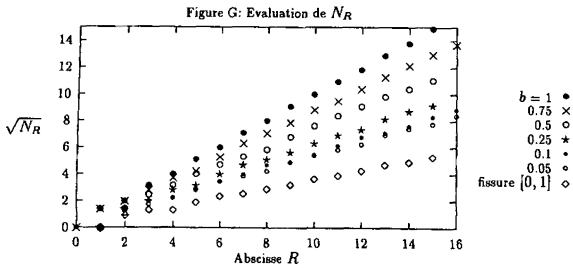
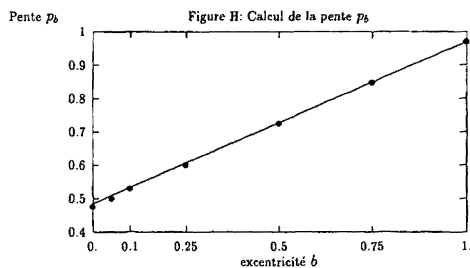


Figure G. — Evaluation de N_R .


 Figure H. — Calcul de la pente p_b .

disque, un théorème de convergence asymptotique de résonances vers l'axe réel. L'influence de telles résonances est mise en évidence sur la courbe des sections efficaces. Enfin, nous présentons des résultats numériques pour la fissure rectiligne.

3.1. Caractérisation des résonances

Nous considérons cette fois un milieu plan extérieur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ élastique, homogène et isotrope. Il est caractérisé par les coefficients de Lamé λ et μ , et par la densité ρ , tous strictement positifs. Pour simplifier, on prend $\rho = 1$, et on pose

V_s : vitesse de propagation des ondes « S » : $V_s^2 = \mu$

V_p : vitesse de propagation des ondes « P » : $V_p^2 = \lambda + 2\mu$.

$$(29) \quad \alpha = \frac{V_s}{V_p}.$$

Le problème correspondant à $(P\omega)$ pour le cas acoustique est de trouver $\underline{u} = (u_1, u_2)$ tel que, σ étant le tenseur des contraintes :

$$(Q\omega) \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \omega^2 u_i = 0, i = 1, 2 \text{ dans } \Omega & (1) \\ \sigma(\underline{u}) \cdot \underline{\nu} = \underline{g} \in V' & (\text{CN}) \\ \text{conditions à l'infini sur } u & (\text{Cr1}), (\text{Cr2}) \\ \underline{u} \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)^2 & \end{array} \right.$$

où ici, $V = H^1(\Gamma)^2$. Les conditions à l'infini sont simplement $\underline{u} \in H^1(\Omega)^2$ si $\Im(\omega) > 0$, et sont :

$$(30) \quad \underline{\sigma}_r(\underline{u}) - i\omega(V_p u_r \underline{e}_r + V_s u_\theta \underline{e}_\theta) = o(r^{-\frac{1}{2}}) \quad (\text{Cr1})$$

$$(31) \quad \underline{u} = O(r^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{lorsque } r \rightarrow \infty \quad (\text{cr2})$$

si $\omega \in \mathbb{R}^*$. On a noté $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$ la base associée aux coordonnées polaires.

Lorsque $\Im(\omega) > 0$, en prolongeant $(Q\omega)$ au domaine intérieur \mathcal{O} , on définit, comparablement au cas acoustique et en reprenant des notations identiques, l'opérateur $S(\omega)$ de V' dans V , par $S(\omega) \underline{g} = [\underline{u}]$, où \underline{u} est la solution de $(Q\omega)$. L'inverse $T(\omega)$ de $S(\omega)$ est connu explicitement, même pour les valeurs de ω dans $\hat{\mathbb{C}}$, bien que la formulation qui correspond à (11) soit nettement plus compliquée. $S(\omega)$ possède alors comme pôles dans $\hat{\mathbb{C}}$ les fréquences propres intérieures (réelles) et les résonances (non réelles). L'exemple simple suivant du disque montre qu'il n'y a pas de théorèmes sur la répartition des résonances équivalents à ceux énoncés précédemment pour le cas acoustique.

3.2. Cas du disque élastique

Ici, Γ est le cercle centré en 0 et de rayon a . Nous poserons $\omega_s = \frac{\omega \cdot a}{V_s}$ et $\omega_p = \frac{\omega \cdot a}{V_p}$. La solution \underline{u} de $(Q\omega)$ est cherchée sous la forme

$$(32) \quad \underline{u} = \underline{\nabla} \Phi + \underline{\nabla} \wedge (\Psi \underline{e}_z) \quad \text{où} \quad \underline{e}_z \perp (\underline{e}_r, \underline{e}_\theta).$$

En décomposant Φ , Ψ , $\underline{g} = (g^{(1)}, g^{(2)})$ selon la base $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(0; 2\pi)$:

$$g^{(i)}(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n^{(i)} e^{in\theta}, \quad \Phi(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n(r) e^{in\theta}, \text{ etc...}$$

et mené par des calculs classiques, on obtient :

$$(33) \quad \begin{cases} \Phi_n(r) = ia_n H_n^{(1)}\left(\omega \frac{r}{V_p}\right) \\ \Psi_n(r) = b_n H_n^{(1)}\left(\omega \frac{r}{V_s}\right) \end{cases}$$

où

$$(34) \quad \begin{cases} M_{11}^n(\omega) a_n + M_{12}^n(\omega) b_n = -\left(\frac{a}{V_s}\right)^2 i g_n^{(1)} \\ M_{21}^n(\omega) a_n + M_{22}^n(\omega) b_n = -\left(\frac{a}{V_s}\right)^2 g_n^{(1)} \end{cases}$$

et

$$(35) \quad \begin{cases} M_{11}^n(\omega) = -2 \omega_p H_n^{(1)'}(\omega_p) + (2n^2 - \omega_s^2) H_n^{(1)}(\omega_p) \\ M_{12}^n(\omega) = 2n(\omega_p H_n^{(1)'}(\omega_s) - H_n^{(1)}(\omega_s)) \\ M_{21}^n(\omega) = 2n(\omega_p H_n^{(1)'}(\omega_p) - H_n^{(1)}(\omega_p)) \\ M_{22}^n(\omega) = -2 \omega_s H_n^{(1)'}(\omega_s) + (2n^2 - \omega_s^2) H_n^{(1)}(\omega_s) . \end{cases}$$

Il en résulte que les résonances du disque élastique pour le problème de Neumann extérieur sont les zéros des déterminants $D_n(\omega)$ des matrices $M^n(\omega)$, lorsque n décrit \mathbb{N} . D'où le

THÉORÈME 3.1 : (Résonances presque réelles). *Il existe une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de résonances, telle que :*

$$(36) \quad \omega_n a = nx_n + iny_n$$

où quand $n \rightarrow \infty$:

$$(37) \quad \begin{cases} V_s x_n \rightarrow C_R \text{ vitesse de Rayleigh} \\ y_n \simeq -(c) \cdot e^{-2\frac{n}{a}\Phi(C_R)} < 0 \end{cases}$$

et $\Phi(C_R) > 0$. On a donc :

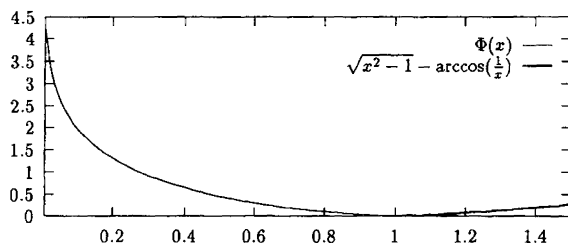
$$(38) \quad |\operatorname{Im}(\omega_n)| \simeq (c) \cdot \operatorname{Re}(\omega_n) \cdot e^{-\tau \operatorname{Re}(\omega_n)}, \quad \tau = \frac{2V_s}{C_R} \Phi(C_R) > 0.$$

Remarques :

- Dans (37), (c) désigne une constante multiplicative strictement positive connue.

- Il est commode de faire la simplification suivante, en supprimant les unités : $V_s = 1$ et $C_R \in]0; 1[$. Φ est alors la fonction analytique sur $]0; 1[$, C^1 sur \mathbb{R}_+ , est définie par (voir la figure 6) :

$$(39) \quad \Phi(x) = \log \left[\frac{(1 + \sqrt{1 - x^2})}{x} \right] - \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in]0; 1[.$$

Figure 6. — Fonction Φ .

La convergence vers l'axe réel est donc d'autant plus rapide que C_R est petit.

Preuve :

On choisit pour simplifier $a = 1$, et on remplace ω par $n\Omega$, où Ω est dans un voisinage complexe \mathcal{V} de C_R . Grâce aux propriétés asymptotiques des fonctions de Bessel, on démontre que $D_n(n\Omega)$ s'écrit :

$$(40) \quad D_n(n\Omega) = -n^4 Y_n(n\Omega) Y_n(n\Omega_p) F\left(\Omega, \frac{1}{n}\right)$$

où :

$$(41) \quad F(\Omega, \varepsilon) \equiv A(\Omega, \varepsilon) + ie^{-2\Phi(\Omega)/\varepsilon} B(\Omega, \varepsilon)$$

avec

$$(42) \quad \begin{cases} A(\Omega, \varepsilon) = f_R(\Omega) + O(\varepsilon) \\ f_R(\Omega) = (2 - \Omega^2)^2 - 4(1 - \Omega^2)^{\frac{1}{2}}(1 - \alpha^2 \Omega^2)^{\frac{1}{2}} \text{ fonction de Rayleigh} \\ B(\Omega, \varepsilon) = \frac{1}{2} \{ (2 - \Omega^2)^2 + 4(1 - \Omega^2)^{\frac{1}{2}}(1 - \alpha^2 \Omega^2)^{\frac{1}{2}} \} + O(\varepsilon) \end{cases}$$

A et B sont réelles lorsque $0 < \Omega < 1$, et continues et différentiables pour $(\Omega, \varepsilon) \in \mathcal{V} \times [0, \varepsilon_0]$. Le terme $ie^{-2\Phi(\Omega)/\varepsilon} B(\Omega, \varepsilon)$ apparaît donc comme

une perturbation exponentiellement petite (quand $n \rightarrow +\infty$) de la fonction F , qui vérifie d'autre part $F(C_R, 0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial \Omega}(C_R, 0) \neq 0$. Pour conclure, on fait appel (deux fois) au théorème des fonctions implicites. ■

3.3. Définition et expression des sections efficaces

Lorsque l'onde incidente est de pression « P » (respect. de cisaillement « S »), la nature du champ diffracté à l'infini permet de définir une section efficace σ^P (respect : σ^S). Ainsi, pour le disque, on trouve :

$$(43) \quad \sigma^{P/S} = \frac{4 a^4 \omega}{V_s^4} \sum_{n \in \mathbb{N}} |A_{p,n}|^2 + |A_{s,n}|^2$$

$$(44) \quad A_{p,n} = \frac{1}{D_n(\omega)} \{ 2 n [\omega_p H_n^{(1)'}(\omega_p) - H_n^{(1)}(\omega_p)] (ig_n^{(1)})$$

$$(45) \quad + \{ [2 \omega_p H_n^{(1)'}(\omega_p) + (\omega_s^2 - 2 n^2) H_n^{(1)}(\omega_p)] g_n^{(2)} \}$$

$$A_{s,n} = \frac{1}{D_n(\omega)} \{ [2 \omega_s H_n^{(1)'}(\omega_s) + (\omega_s^2 - 2 n^2) H_n^{(1)}(\omega_s)] (ig_n^{(1)})$$

$$+ \{ 2 n [\omega_s H_n^{(1)'}(\omega_s) - H_n^{(1)}(\omega_s)] g_n^{(2)} \}$$

avec dans le cas « S » :

$$(46) \quad \begin{cases} ig_{s,n}^{(1)} = \frac{(-i)^{n+1}}{2} \omega [J_{n-2}(\omega_s) - J_{n+2}(\omega_s)] \\ g_{s,n}^{(2)} = \frac{(-i)^{n+1}}{2} \omega [J_{n-2}(\omega_s) + J_{n+2}(\omega_s)] \end{cases}$$

et pour le cas « P » :

$$(47) \quad \begin{cases} ig_{p,n}^{(1)} = -\frac{(-i)^n}{2} \alpha^2 \omega \left[2 \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) J_n(\omega_p) + J_{n-2}(\omega_p) + J_{n+2}(\omega_p) \right] \\ g_{p,n}^{(2)} = -\frac{(-i)^n}{2} \alpha^2 \omega [J_{n-2}(\omega_p) - J_{n+2}(\omega_p)] . \end{cases}$$

A très haute fréquence ω , l'effet des résonances sur σ^P est négligeable, tandis que σ^S présente au voisinage de $\Re(\omega_n)$ un pic, certes de hauteur proportionnelle à ω^{-1} , mais d'épaisseur exponentiellement petite. Les calculs numériques confirment ces évaluations (cf. fig. 7 avec $\alpha = 0,5$).

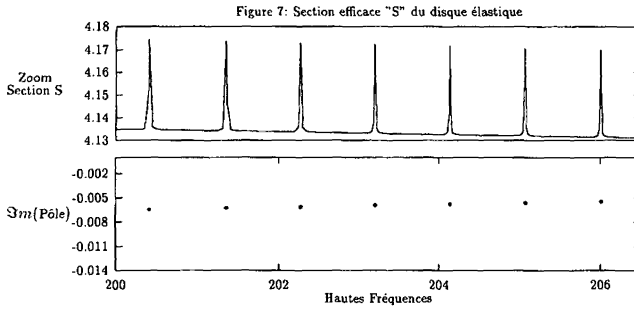


Figure 7. — Section efficace « S » du disque élastique.

3.4. Résultat numérique pour la fissure rectiligne

L'opérateur $T(\omega)$ se découple en fait en : $T(\omega)(\underline{\phi}) = (T_1(\omega) \phi_1, T_2(\omega) \phi_2)$ où ϕ_i est scalaire. On a donc deux sortes de résonances : les zéros de T_1 et ceux de T_2 , ce que nous constatons dans la figure 8 qui montre les résonances de la fissure $[0, 1] \times \{0\}$.

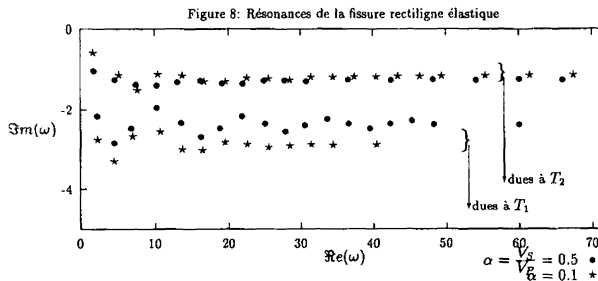


Figure 8. — Résonances de la fissure rectiligne élastique.

4. ANNEXE

 4.1. Propriétés complémentaires de T

On définit les opérateurs $\bar{T}(\omega)$, $\mathcal{I}T(\omega)$, et les formes sesquilinéaires $\bar{b}(\omega; \dots)$, $\mathcal{I}b(\omega; \dots)$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{T}(\omega) \bar{\phi} &= \overline{T(\omega) \phi} & \forall \phi \in V \\ \mathcal{I}T(\omega) &= \frac{1}{2i} [T(\omega) - \bar{T}(\omega)] \\ \bar{b}(\omega; \phi, \psi) &= \overline{b(\omega; \bar{\phi}, \bar{\psi})} & \forall \phi, \psi \in V \\ \mathcal{I}b(\omega; \phi, \psi) &= \frac{1}{2i} [b(\omega; \phi, \psi) - \bar{b}(\omega; \phi, \psi)] & \forall \phi, \psi \in V. \end{aligned}$$

Remarquons que $T^*(\omega) = \bar{T}(\omega) = T(-\bar{\omega})$, pour tout $\omega \in \mathbb{C}$. On a le résultat important pour la localisation des résonances numériques qui suivra.

THÉORÈME 4.1 : *Lorsque $\omega > 0$, $-\mathcal{I}T(\omega)$ est auto-adjoint positif. De plus, ω est fréquence propre de \mathcal{O} si et seulement si 0 est valeur propre de $\mathcal{I}T(\omega)$.*

Preuve : $-\mathcal{I}T(\omega)$ est auto-adjoint d'après la remarque précédente. Le reste repose sur la propriété de flux d'une onde sortante u solution de (1) : on considère une sphère S_R de rayon R assez grand, et le flux :

$$(48) \quad \mathcal{F}_I(u) \equiv \mathcal{I}m \left(\int_{S_R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \bar{u} dS \right)$$

qui est indépendant de R , puisque :

$$(49) \quad \mathcal{F}_I(u) = - \mathcal{I}m \left(\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \bar{u} d\gamma \right).$$

Le flux $\mathcal{F}_I(u)$ est toujours positif, et ne s'annule que si $u = 0$ dans Ω (voir Sanchez [7]). Pour tout $\phi \in V$, soit u^ϕ donné par (8) : son flux est $-\mathcal{I}b(\omega; \phi, \phi) \geq 0$. Donc $-\mathcal{I}T(\omega)$ est auto-adjoint positif. Supposons 0 valeur propre de $\mathcal{I}T(\omega)$, associée au mode propre ϕ ; donc $u^\phi = 0$ dans Ω , donc la dérivée normale de u^ϕ — autrement dit $T(\omega) \phi$ — est nulle sur Γ . Or $u^\phi \neq 0$ dans \mathcal{O} , car $\phi \neq 0$; donc ω est fréquence propre de \mathcal{O} . La démonstration de la réciproque est triviale, en considérant que $\mathcal{I}b(\omega; \phi, \phi) = \mathcal{I}m(b(\omega; \phi, \phi))$, pour tout $\phi \in V$. ■

4.2. Démonstration de la convergence numérique

Nous donnons ici une démonstration détaillée du théorème 2.3.

4.2.1. *Préliminaires*

On procède en deux étapes pour le cas 2, la première incluant la démonstration du cas 1. Nous allons considérer ω_0 fixé, pôle (cas 2) ou non (cas 1), une boule $B_\delta(\omega_0)$ centrée en ω_0 , de rayon $\delta > 0$ « assez petit », des nombres complexes z — comparables aux valeurs propres de $T(\omega)$ — au voisinage de 0 : $|z| \leq \rho$ (cas 1 ; on peut se restreindre à $z = 0$) ou $|z| = \rho$ (cas 2) ; le réel $\rho > 0$ sera fixé.

On notera pour plus de commodité $O(\varepsilon_h)$ toute quantité dépendant (*a priori*) de z, ω, h , se comportant quand $h \rightarrow 0$ comme ε_h (ou pouvant être négligeable devant ε_h : voir formules (26), (27)), uniformément en z, ω : $O(\varepsilon_h)$ ne dépend donc que de h, δ, ρ .

Pour tout réel s , $\|\cdot\|_s$ désigne la norme dans $H^s(\Gamma)$.

L'opérateur $K(z, \omega)$ désignera $T(\omega) - T(i) - zI$; il est $T(i)$ -compact.

4.2.2. *1^{re} étape*

Il s'agit de montrer, en la quantifiant, la convergence de l'espace propre généralisé $E_h(\omega)$ associé à $T_h(\omega)$ ⁽⁹⁾, quand $h \rightarrow 0$, **uniformément** selon ω dans $B_\delta(\omega_0)$. Pour cela, on évaluera uniformément selon (z, ω) la norme (à préciser) de la différence, $R(z, \omega) - R_h(z, \omega)$, des résolvantes respectives de $T(\omega)$ et $T_h(\omega)$ en z .

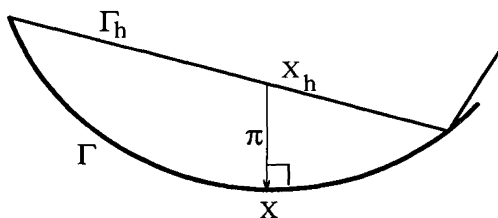


Figure 9. — Projection orthogonale π sur Γ .

Pour donner des estimations de T par T_h , on introduit (cf. Nédélec [13]) la projection π de Γ_h orthogonalement sur Γ (cf. fig. 9). On a ainsi les définitions suivantes :

(i) la transformation Π_h de $L^2(\Gamma)$ dans $L^2(\Gamma_h)$ par :

$$(50) \quad \phi^{(h)}(x_h) \equiv \Pi_h \phi(\pi^{-1} x) \text{ noté } \phi(x) \quad \text{p.p. } x \in \Gamma$$

⁽⁹⁾ Ce sera plus exactement $\hat{T}_h(\omega)$.

(ii) l'espace $V_h \subset H^1(\Gamma) \subset V$:

$$(51) \quad V_h = \{ \psi_h \in V, \psi_h(x) = \psi^{(h)}(x_h), \text{ où } \psi^{(h)} \text{ décrit } W_h \}$$

(iii) les formes sesquilinéaires $b(z, \omega)$ et $b_h(z, \omega)$ sur $V \times V$ par :

$$b(z, \omega; \phi, \psi) = b(\omega; \phi, \psi) - z \langle \phi, \psi \rangle$$

$$b_h(z, \omega; \phi, \psi) = b^{(h)}(\omega; \Pi_h \phi, \Pi_h \psi) - z \langle \phi, \psi \rangle$$

(iv) l'opérateur $\hat{T}_h(\omega) \in B(V_h, V_h)$ tel que :

$$\langle \hat{T}_h(\omega) \phi_h, \psi_h \rangle = b_h(0, \omega; \phi_h, \psi_h) \quad \forall \phi_h, \psi_h \in V_h$$

(v) les résolvantes $R(z, \omega) = (zI - T(\omega))^{-1}$ et $R_h(z, \omega) = (zI - \hat{T}_h(\omega))^{-1} p_h$, p_h étant la projection de V' sur V_h , orthogonale pour le produit scalaire dans $L^2(\Gamma)$. Remarquons que $R_h(0, \cdot)$ est méromorphe dans $\tilde{\mathbb{C}}$: ses pôles sont les résonances numériques.

Les quantités suivantes permettent d'évaluer la vitesse de convergence cherchée :

1. L'approximation d'éléments assez réguliers de V par ceux de V_h :

$$(52) \quad \varepsilon_{0,h}(\phi) = \inf_{\psi_h \in V_h} \|\phi - \psi_h\|_V$$

$$(53) \quad \varepsilon_{1,h}(\phi) = \sup_{\phi \in H^1(\Gamma)} \inf_{\psi_h \in V_h} \frac{\|\phi - \psi_h\|_V}{\|\phi\|_2}.$$

Lorsque $\phi \in H^2(\Gamma)$, on aura $\varepsilon_{0,h}(\phi) \leq \varepsilon_{1,h}(\phi) \|\phi\|_2$.

2. L'approximation de la forme $b(z, \omega)$ par $b_h(z, \omega)$:

$$(54) \quad \varepsilon_{2,h}(\omega) = \sup_{\psi_h \in V_h} \sup_{w_h \in V_h} \frac{|b_h(z, \omega; \psi_h, w_h) - b(z, \omega; \psi_h, w_h)|}{\|\psi_h\|_V \|\psi_h\|_V}$$

$$(55) \quad \varepsilon_{3,h}(\omega) = \sup_{\phi \in H^1(\Gamma)} \sup_{\psi_h \in V_h} \frac{|b_h(z, \omega; \phi, \psi_h) - b(z, \omega; \phi, \psi_h)|}{\|\phi\|_1 \|\psi_h\|_V}.$$

LEMME 4.1 : On a les résultats suivants quand $h \rightarrow 0$:

1. $\forall \phi \in V, \varepsilon_{0,h}(\phi) \rightarrow 0$.

2. $\varepsilon_{1,h} = O(h^{\frac{3}{2}})$.

3. $\varepsilon_{2,h} = O(h)$.

4. $\varepsilon_{3,h} = O(h^{\frac{3}{2}})$.

Les deux dernières équivalences sont uniformes en ω et indépendantes de z .

Preuve : Il est connu (Lenoir [11]) que l'erreur d'interpolation pour un élément simplicial courbe reste la même que pour un élément droit, donc :

$$(56) \quad \inf_{\psi_h \in V_h} \|\phi - \psi_h\|_1 = O(h) \|\phi\|_2$$

$$(57) \quad \inf_{\psi_h \in V_h} \|\phi - \psi_h\|_0 = O(h^2) \|\phi\|_2$$

d'où la majoration 2 du lemme, obtenue par interpolation d'espaces. La convergence 1 s'en déduit par densité de $H^2(\Gamma)$ dans V .

Pour les points 3 et 4, l'étude de M. N. Leroux [12] montre que la quantité principale à majorer provient de la singularité de la fonction de Hankel $H_0^{(1)}$, indépendante de ω , ce qui revient à se limiter au cas $\omega = i$:

$$\mathcal{Q} = \left| \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} (\log |x - y| - \log |x_h - y_h|) \{ \phi'(x) \bar{\psi}'(y) + \right. \\ \left. + O(h^2) \phi(x) \bar{\psi}(y) \} d\gamma(x) d\gamma(y) \right|.$$

Le terme $O(h^2)$ provient de l'approximation des tangentes à Γ , et :

$$\left| \frac{x_h - y_h}{x - y} - 1 \right| \leq C_{\Gamma} h^2$$

$$\text{d'où} \quad \mathcal{Q} = O(h^2) \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \{ |\phi'(x) \psi'(y)| + |\phi(x) \psi(y)| \} d\gamma(x) d\gamma(y)$$

lorsque $\phi, \psi \in H^1(\Gamma)$. L'inégalité inverse pour

$$\psi_h \in V_h : \|\psi_h\|_1 \leq Ch^{-1} \|\psi_h\|_0,$$

qui entraîne par interpolation : $\|\psi_h\|_1 \leq Ch^{-\frac{1}{2}} \|\psi_h\|_0$, permet d'obtenir les majorations 3 et 4 du lemme, uniformes en ω dans tout compact de $\hat{\mathbb{C}}$. ■

Considérons le cas 1 : ω_0 non zéro de T . On pose $D_{\rho, \delta} = B_{\rho}(0) \times B_{\delta}(\omega_0)$. Les valeurs propres de $T(\omega)$ étant isolées, et T étant analytique, alors existent $\rho, \delta > 0$ assez petits tels que $T(\omega_0) - zI$ soit inversible $\forall (z, \omega) \in D_{\rho, \delta}$. On pose :

$$(58) \quad \beta(z, \omega) = \inf_{\phi \in V} \sup_{\psi \in V} \frac{|b(z, \omega; \phi, \psi)|}{\|\phi\|_V \|\psi\|_V}$$

$$(59) \quad \beta_h(z, \omega) = \inf_{\phi_h \in V_h} \sup_{\psi_h \in V_h} \frac{|b_h(z, \omega; \phi_h, \psi_h)|}{\|\phi_h\|_V \|\psi_h\|_V}$$

donc $\beta(z, \omega) = \|R(z, \omega)\|^{-1} > 0$. Le fait que $T(\omega) - zI$ soit inversible et se décompose en $T(i)$ (V -coercif) + $K(z, \omega)$ ($T(i)$ -compact) implique que la famille $b_h(z, \omega)$ est stable (cf. Lenoir [11]) :

$$\beta_h(z, \omega) \geq \beta'(z, \omega) > 0 \quad \text{dès que } 0 < h \leq h(z, \omega).$$

De plus, de l'analyticité de T , on a : $\forall \phi, \psi \in V, \forall \phi_h, \psi_h \in V_h, \forall \omega, \omega' \in B_\delta(\omega_0), \forall z, z' \in B_\rho(0)$

$$|b(z, \omega; \phi, \psi) - b(z', \omega'; \phi, \psi)| \leq (|z - z'| + |\omega - \omega'| C_\delta) \|\phi\|_V \|\psi\|_V$$

$$|b_h(z, \omega; \phi_h, \psi_h) - b_h(z', \omega'; \phi_h, \psi_h)| \leq (|z - z'| + |\omega - \omega'| C_\delta) \|\phi_h\|_V \|\psi_h\|_V$$

d'où l'on déduit que les deux fonctions β et β_h sont continues dans $D_{\rho, \delta}$, et que β_h l'est uniformément selon h . On peut donc minorer $\beta(z, \omega)$ et $\beta_h(z, \omega)$ par $\beta_{\rho, \delta} > 0$, dès que $0 < h \leq h_0$, indépendamment de $(z, \omega) \in D_{\rho, \delta}$. On vient de prouver que non seulement il n'y a pas de résonance numérique dans un voisinage de ω_0 (cas $z = 0$), mais en plus que l'ensemble résolvant de $T_h(\omega)$ contient un voisinage de 0, indépendant de h .

Considérons le cas 2 : ω_0 zéro de T . 0 sera la seule valeur propre de $T(\omega_0)$ dans une petite boule $B_\rho(0)$, où $\rho > 0$. Soit $C_\rho = \partial B_\rho(0)$; $\forall z \in C_\rho, zI - T(\omega_0)$ est inversible, et $\exists \delta(\rho) > 0$ assez petit tel que $\forall \omega \in B_\delta(\omega_0), zI - T(\omega)$ soit inversible. On pose cette fois $D_{\rho, \delta} = C_\rho \times B_\delta(\omega_0)$, et on peut refaire l'analyse précédente du cas 1 : dans $D_{\rho, \delta}$ ainsi modifié, il existe un réel $h_\rho > 0$ tel que $zI - T_h(\omega)$ soit inversible dès que $0 < h \leq h_\rho$, avec $0 < \beta_1 \leq \|R_h(z, \omega)\| \leq \beta_2$, où β_1 et β_2 ne dépendent que de ρ .

Soit $g \in V', u = R(z, \omega)g, u_h = R_h(z, \omega)g$ (pour $0 < h \leq h_\rho$), $R_h(z, \omega)$ ayant été défini par (v) dans la 1^{re} étape. On a le

LEMME 4.2 : $\exists \alpha > 0, \exists C_S > 0$, ne dépendant que de ρ , tels que

$$\forall h \in]0, \alpha], \|u - u_h\|_V \leq C_S(\varepsilon_{0, h}(u) + \varepsilon_{2, h}\|u\|_V).$$

Preuve : Soient, d'une part, C_ρ un majorant de $\|zI - T(\omega)\|$, et, d'autre part, $\beta_{\rho, \delta} > 0$ un minorant de $\beta(z, \omega)$ et de $\beta_h(z, \omega)$ lorsque $(z, \omega) \in D_{\rho, \delta}$. Une valeur admissible de C_S est : $C_S = 1 + \beta_{\rho, \delta}^{-1}(1 + C_\rho)$, dès que $\varepsilon_{2, h} < 1$ (cf. [11], chap. V : c'est le théorème de Strang, avec en plus l'uniformité selon z et ω). ■

Considérons $g \in H^1(\Gamma)$; la régularité de Γ entraîne que u est dans $H^2(\Gamma)$, et $\|u\|_2 \leq C(z, \omega) \|g\|_1$. $C(z, \omega)$ peut être majoré indépendamment de z et ω , car, en fait, $zI - T(\omega)$ reste analytique en tant qu'opérateur de $H^2(\Gamma)$ dans $H^1(\Gamma)$ ($T(i) \in B(H^2(\Gamma), H^1(\Gamma))$ et $K(z, \omega)$ est $T(i)$ -compact). Des lemmes 4.1 et 4.2, on tire :

$$(60) \quad \|R(z, \omega) - R_h(z, \omega)\| = O(h)$$

la norme étant celle de $B(H^1(\Gamma), V)$. Nous allons améliorer la convergence grâce au

LEMME 4.3 :

$$\|R(z, \omega) - R_h(z, \omega)\| = O(h^{\frac{3}{2}})$$

la norme étant celle de $B(H^1(\Gamma), H^{-1}(\Gamma))$.

Preuve : La quantité du désigne par la suite la différence $u - u_h$.

$$\|du\|_{-1} = \sup_{q \in H^1(\Gamma)} \frac{|\langle du, q \rangle|}{\|q\|_1}.$$

Posons $\bar{q} = (T(\omega) - zI) \bar{\psi}$; donc $\psi = (T(\omega) - zI)^{*(-1)} q$, et $\|\psi\|_2 = O(\|q\|_1)$. Pour tout $\psi_h \in V_h$, on a :

$$\begin{aligned} \langle du, q \rangle &= b(z, \omega; du, \psi) = b(z, \omega; du, \psi - \psi_h) + b_h(z, \omega; u_h, \psi_h) - \\ &\quad b(z, \omega; u_h, \psi_h) \end{aligned}$$

$$Q = |b_h(z, \omega; u_h, \psi_h) - b(z, \omega; u_h, \psi_h)|$$

est majoré par $\varepsilon_{3,h} \|u_h\|_V \|\psi_h\|_1$. La construction de la projection ψ_h de ψ dans $B(H^2(\Gamma), V_h)$ montre que $\|\psi_h\|_1 = O(1) \|\psi\|_1$. De plus, $\|u_h\|_V = O(1) \|u\|_V$, donc :

$$Q = O(\varepsilon_{3,h}) \|u\|_V \|\psi\|_1.$$

On obtient finalement :

$$(62) \quad \|du\|_{-1} = O(\varepsilon_{1,h})(\varepsilon_{1,h} + \varepsilon_{2,h}) \|u\|_V + O(\varepsilon_{3,h}) \|u\|_2$$

d'où le résultat grâce au lemme 4.1. ■

Remarque : on peut montrer aussi que $\|du\|_0 = O(h^{\frac{3}{2}})$. Par contre, il n'y a rien à tirer de plus d'une norme plus faible $\|du\|_{-s}$, $s > 1$. Le choix $s = 1$ dans (62) est utile pour voir que lorsque $\varepsilon_{2,h} = \varepsilon_{3,h} = 0$, la convergence est en $O(h^3)$.

LEMME 4.4 : Soient $P_h(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_h} R_h(z, \omega) dz$ et $E_h(\omega) = P_h(\omega)(V')$. L'espace $E_h(\omega)$ est de dimension finie $m = \dim E_0(\omega_0)$, dès que $0 < h \leq h_0$ assez petit. $E_h(\omega)$ converge fortement vers $E(\omega)$ au sens où leur distance (cf. Kato [9], chap. IV, § 2.) $\hat{\delta}(E_h(\omega), E(\omega))$ converge vers 0 :

$$(63) \quad \hat{\delta}(E_h(\omega), E(\omega)) = O(h^{\frac{3}{2}}).$$

Preuve : Du lemme 4.3 et des définitions des projecteurs spectraux $P(\omega)$ et $P_h(\omega)$, on tire trivialement :

$$\|P(\omega) - P_h(\omega)\| = O(h) \text{ (resp. } O(h^{\frac{3}{2}}))$$

pour la norme de $B(H^1(\Gamma), V)$ (resp. $B(H^1(\Gamma), H^{-1}(\Gamma))$).

La distance $\hat{\delta}(X, Y)$ entre deux sous-espaces de dimension finie d'un Hilbert H est définie par :

$$\hat{\delta}(X, Y) = \max(\delta(X, Y), \delta(Y, X))$$

avec

$$\delta(X, Y) = \sup_{x \in X} \frac{\text{dist}(x, Y)}{\|x\|_H}, \quad \text{dist}(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|_H.$$

Considérons d'abord $H = V$. Soit $u_h \in E_h(\omega)$, donc invariant par $P_h(\omega)$; on choisit $u = P(\omega) u_h$. On a donc :

$$\|u_h - u\|_V \leq O(h) \|u_h\|_1 \leq O(h^{\frac{1}{2}}) \|u_h\|_V.$$

La dernière majoration vient de l'inégalité inverse. D'où $\delta(E_h(\omega), E_0(\omega)) = O(h^{\frac{1}{2}})$. Inversement, soit $u \in E_0(\omega)$, donc invariant par $P(\omega)$; on choisit $u_h = P_h(\omega) u$. Comme $\dim E_0(\omega) = m$, toutes les normes sur $E_0(\omega)$ sont équivalentes (indépendamment de ω), donc :

$$\delta(E_0(\omega), E_h(\omega)) = O(h) \sup_{E_0(\omega)} \frac{\|u\|_1}{\|u\|_V} = O(h)$$

et $\hat{\delta}(E_0(\omega), E_h(\omega)) = o(1)$. Dès que le gap est strictement inférieur à 1, les deux espaces $E_0(\omega)$ et $E_h(\omega)$ ont même dimension m .

Considérons maintenant $H = H^{-1}(\Gamma)$. Comme les normes sur $E_0(\omega)$ ou $E_h(\omega)$ sont équivalentes (indépendamment de ω et de h), on trouve que la distance est un $O(h^{\frac{3}{2}})$. ■

4.2.3. 2^e étape

Soient $\{u_i\}_{i=1, \dots, m}$ et $\{u_{h,i}\}_{i=1, \dots, m}$ des bases respectives de $E_0(\omega)$ et $E_h(\omega)$, telles que $\|u_i - u_{h,i}\| = O(h^{\frac{3}{2}})$ ⁽¹⁰⁾.

Posons $A_{i,j}(\omega) = b(\omega; u_i, u_j)$ et $A_{h,i,j}(\omega) = b_h(\omega; u_{h,i}, u_{h,j})$, coefficients respectifs des matrices $m \times m$ $A(\omega)$ et $A_h(\omega)$. On note $f(\omega) = \det A(\omega)$ et $f_h(\omega) = \det A_h(\omega)$. On vérifie maintenant facilement qu'on est dans les conditions suivantes :

- f et f_h sont analytiques dans $B_\delta(\omega_0)$ (où se limite l'étude qui suit, δ étant fixé).

- Le seul zéro de f est ω_0 .

- Les zéros de f_h sont exactement les résonances numériques (dans $B_\delta(\omega_0)$).

- $\|f - f_h\|_\infty = O(r_h)$ avec $r_h = h^{\frac{3}{2}}$.

Avec ceci, nous allons pouvoir conclure sur le cas 2. Pour simplifier, on pose $\xi = \omega - \omega_0 \in B_\delta(0)$, $g_{(h)}(\xi) = f_{(h)}(\xi + \omega_0)$. La fonction g est de la forme : $g(\xi) = \xi^\nu \psi(\xi)$, où ψ est analytique et non nulle dans $B_\delta(0)$. Ainsi, pour tout $\mu \in]0, \delta]$, la quantité $Q_\mu = \sup_{|\xi| \leq \mu} |\psi(\xi)|^{-1}$ est majorée indépendamment de μ par la constante $c_\delta = \sup_\mu Q_\mu$; on en déduit :

$$(64) \quad \sup_{|\xi| \leq \mu} \frac{1}{|g_h(\xi)|} \leq \frac{c_\delta}{\mu^\nu - O(r_h)}$$

ce qui implicitement signifie que le plus grand module δ_h des zéros $\xi_{h,i}$ de g_h (s'il en existe) est majoré par $O(r_h^{1/\nu})$.

Soit $\theta_h(\xi) = \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} - \frac{g'_h(\xi)}{g_h(\xi)}$, lorsque $|\xi| = \delta$. On a la majoration évidente :

$$|\theta_h(\xi)| \leq \frac{1}{|g_h(\xi)|} \left(\left| \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} \right| |g_h(\xi) - g(\xi)| + |g'_h(\xi) - g'(\xi)| \right)$$

$|g'_h - g'| = O(r_h)$ est évident lorsqu'on exprime les dérivées de g et g_h par une intégrale de Cauchy (c'est le théorème de Weierstrass).

⁽¹⁰⁾ Remarquons que le choix de la norme n'a plus d'importance (on peut prendre celle de V par exemple).

De plus, $\left| \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} \right| \leq C(1 + \delta^{-1})$, donc :

$$|\theta_h(\xi)| = \frac{O(r_h)(1 + \delta^{-1})}{\delta^v - O(r_h)} = O(r_h) \text{ uniformément en } \xi : |\xi| = \delta. \quad (65)$$

La formule classique des résidus donne la différence des ordres faibles v et v_h (cf. la Section 2.3 et l'énoncé du théorème 2.3) :

$$|v_h - v| = \left| \int_{|\xi|=\delta} \theta_h(\xi) d\xi \right| = O(r_h) < 1 \text{ dès que } h \text{ est assez petit.}$$

Donc $v_h = v$, δ_h existe dans $]0, \delta[$ et $\delta_h = O(h^{\frac{3}{2v}})$. Améliorons cette approximation de ω_0 grâce à $\tilde{\omega}_h$. Reprenons g et g_h et posons :

$$(66) \quad \tilde{\xi}_h = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{k_h} v_{h,i} (\omega_{h,i} - \omega_0)$$

$$(67) \quad P_h(\xi) = \prod_{i=1}^{k_h} (\xi - \xi_{h,i})^{v_{i,h}}$$

$$(68) \quad g_h(\xi) = P_h(\xi) \psi_h(\xi).$$

Soit $\{\varepsilon_h\}_h$ une suite de réels positifs, bornée ou convergeant vers 0. Nous dirons qu'une fonction ϕ_h est un $\tilde{O}(\varepsilon_h)$ lorsque : $\exists \mu \in]0, \delta]$, ϕ_h est analytique dans $B_\mu(0)$, et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists C_k > 0$, $\forall \xi \in B_\mu(0)$, $|\phi_h^{(k)}(\xi)| \leq C_k \varepsilon_h$.

LEMME 4.5 : • Si $\{\phi_h\}_h$ est une famille analytique dans $B_\delta(0)$ telle que $\sup_{|\xi| \leq \delta} |\phi_h(\xi)| = O(\varepsilon_h)$, alors $\phi_h = \tilde{O}(\varepsilon_h)$.

• $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k}{d\xi^k} \tilde{O}(\varepsilon_h) = \tilde{O}(\varepsilon_h)$ (qui a un sens évident).

• $\tilde{O}(\varepsilon_h) * \tilde{O}(\varepsilon'_h) = \tilde{O}(\varepsilon_h * \varepsilon'_h)$.

Appliquons ce lemme (dont la démonstration est immédiate) en considérant :

$$P_h(\xi) = \frac{g_h(\xi)}{\psi_h(\xi)} = \frac{\xi^v \psi(\xi)}{\psi_h(\xi)} + \frac{\tilde{O}(r_h)}{\psi_h(\xi)} = \xi^v \tilde{O}(1) + \tilde{O}(r_h)$$

car ψ_h^{-1} converge uniformément vers ψ^{-1} dans $B_\delta(0)$. On a donc, pour $0 \leq k \leq v$:

$$P_h^{(k)}(\xi) = \frac{d^k}{d\xi^k} (\xi^v \tilde{O}(1)) + \tilde{O}(r_h) = \sum_{j=0}^k \xi^{v-k+j} \tilde{O}(1) + \tilde{O}(r_h)$$

et lorsque $k = \nu - 1$ et $\xi = 0$:

$$-\nu ! \tilde{\xi}_h = P_h^{(k)}(0) = O(r_h)$$

sur quoi se conclut le théorème 2.3.

RÉFÉRENCES

- [1] C. BARDOS, J. C. GUILLOT and J. RALSTON, 1982, La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Applications à la théorie de la diffusion, *Comm. Partial Diff. Equ.*, **7**, pp. 905-958.
- [2] C. BARDOS, G. LEBEAU and J. RAUCH, 1987, Scattering frequencies and Gevrey 3 singularities, *Inv. Math. Soc.*, **1**, pp. 77-114.
- [3] O. POISSON et P. JOLY, juin 1991, Calculs des pôles de résonance associés à la diffraction d'ondes acoustiques et élastiques par un obstacle en dimension 2. Technical Report 1430, INRIA. Rapport Interne.
- [4] P. GRISVARD, 1992, *Singularities in boundary value problems*, Masson, Springer-Verlag.
- [5] C. HAZARD, 1991, *Étude des résonances pour le problème linéarisé des mouvements d'un navire sur la houle*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie.
- [6] J. S. HOWLAND, 1971, Simple poles of operator-valued-functions, *Journal of mathematical analysis and applications*, **36**, pp. 12-21.
- [7] J. SANCHEZ HUBERT and E. SANCHEZ PALENCIA, 1989, *Vibration and coupling of continuous Systems, Asymptotic Methods*, Springer-Verlag.
- [8] M. IKAWA, 1983, On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles, *Journal of mathematics of Kyoto university*, **23**(1).
- [9] T. KATO, 1966, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag.
- [10] P. LAX and R. PHILLIPS, 1967, *Scattering theory*, Academic press.
- [11] M. LENOIR, 1987, Approximation par éléments finis des problèmes elliptiques. Technical report, E.N.S.T.A.
- [12] M. N. LEROUX, 1977, Méthode d'éléments finis pour la résolution numérique de problèmes extérieurs en dimension 2, *R.A.I.R.O.*, **XI**(1) pp. 27-53.
- [13] J. C. NEDELEC, 1988, Notions sur les Equations Intégrales, Théorie et Approximation. Technical report, Cours de D.E.A., Ecole Polytechnique, C.M.A.P.
- [14] O. POISSON, 1992, Calcul des pôles de résonance associés à la diffraction d'ondes acoustiques par un obstacle en dimension deux, *C.R.A.S. Paris*, **315**, série I, pp. 747-752.
- [15] O. POISSON, août 1992, *Calculs des pôles de résonance associés à la diffraction d'ondes acoustiques et élastiques par un obstacle en dimension 2*. Thèse, Université Paris IX.
- [16] A. RAMM, 1988, *Scattering by obstacles*, D. Reidel publishing company.

- [17] S. STEINBERG, 1968, Meromorphic families of compact operators, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **31**, pp. 372-380.
- [18] M. WEI, G. MAJDA and W. A. STRAUSS, 1986, Imaginary poles of radial potentials. *Minnesota, Minneapolis, MN 55455*.
- [19] C. H. WILCOX, 1975, *Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains*, Springer-Verlag.