M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique

D. Sandri

Analyse d'une formulation à trois champs du problème de Stokes

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 27, n° 7 (1993), p. 817-841

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_7_817_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 27, n° 7, 1993, p. 817 à 841)

ANALYSE D'UNE FORMULATION À TROIS CHAMPS DU PROBLÈME DE STOKES (*)

par D. SANDRI (1)

Communiqué par R. TEMAM

Résumé. — *On étudie l'approximation numérique d'une formulation en contraintes-vitesse-pression du problème de Stokes. Cette formulation s'inspire de la loi de comportement de fluides viscoélastiques obéissant au modèle d'Oldroyd. On étudie les conditions de compatibilité que doivent vérifier les espaces d'approximations utilisés pour la résolution approchée de ce problème. On donne des exemples d'espaces d'éléments finis vérifiant ou non ces conditions et on termine par l'étude de la convergence d'une méthode de point fixe pour la résolution du problème approché.*

Summary. — Analysis of a three-fields approximation of Stokes problem. *We study the numerical approximation of a three fields formulation of Stokes's problem. The unknowns are extra stress tensor, velocity and pressure. This formulation is motivated by the study of viscoelastic fluids obeying Oldroyd constitutive equation. We study the inf-sup conditions relating extra stress tensor, velocity and pressure. We give some examples of finite element spaces satisfying or not satisfying these conditions and we conclude by the study of a fixed point method to solve the approximate problem.*

INTRODUCTION

Dans cet article nous étudions l'approximation numérique d'une version à 3 champs du problème de Stokes. Les inconnues sont σ le tenseur des extra-contraintes, v la vitesse et p la pression. Cette formulation est inspirée du modèle d'Oldroyd pour la loi de comportement de fluides polymères (voir [7]).

(*) Manuscrit reçu le 10 avril 1992 et sous forme révisée le 16 octobre 1992.
(1) U.A. CNRS-740 LAN, Bât. 101, Université de Lyon 1, 69622 Villeurbanne Cedex, France.
Ce travail a été en partie supporté par le GDR CNRS 901 « Rhéologie des polymères fondus ».

On considère le cas de l'écoulement d'un fluide dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, noté Ω, de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$. Si on note u la vitesse du fluide, σ le tenseur des extra-contraintes et p la pression alors le problème s'écrit :

$$(PO) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } (\sigma, u, p) \text{ tel que :} \\ \sigma = 2\,\alpha\, d(u) \text{ dans } \Omega\,, \\ -\nabla\,.\,\sigma - 2\,(1-\alpha)\,\nabla\,.\,d(u) + \nabla p = f \text{ dans } \Omega\,, \\ \nabla\,.\,u = 0 \text{ dans } \Omega\,, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

où $\nabla\,.\,\sigma = \sigma_{ij,j}$ désigne le vecteur divergence de σ, $d(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$ le tenseur des taux de déformation, ∇u est le tenseur des gradients de vitesse donné par $(\nabla u)_{ij} = u_{i,j}$, et $\nabla\,.\,u = u_{i,i}$ désigne la divergence de u. On note α un paramètre réel tel que $0 < \alpha \leq 1$.

Avant de donner une formulation variationnelle de ce problème, on introduit les espaces suivants : on se placera dans le cas $N = 2$ et

$T = (L^2(\Omega))^4_s$ désigne l'espace des tenseurs symétriques 2×2 à composantes dans $L^2(\Omega)$, muni du produit scalaire

$$(\sigma, \tau) = \int_\Omega \sigma : \tau = \int_\Omega \sigma_{ij}\, \tau_{ij}\,,$$

$V = (H^1_0(\Omega))^2$ est l'espace des fonctions de $(H^1(\Omega))^2$ de trace nulle sur $\partial\Omega$ et est muni du produit scalaire $(u, v) = (d(u), d(v))$ et

$Q = L^2_0(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions appartenant à $L^2(\Omega)$ et de moyenne nulle muni du produit scalaire induit.

On notera $\|\,.\,\|_T$, $\|\,.\,\|_V$ et $\|\,.\,\|_Q$ les normes respectives sur T, V et Q.

Le problème (PO) se met alors sous la forme variationnelle suivante :

Trouver $(\sigma, u, p) \in T \times V \times Q$ tel que

$$(PO_V) \qquad \begin{cases} (\sigma, \tau) - 2\,\alpha\,(d(u), \tau) = 0 & \forall \tau \in T\,, \\ (\sigma, d(v)) + 2(1-\alpha)(d(u), d(v)) - (p, \nabla\,.\,v) = (f, v) & \forall v \in V\,, \\ (\nabla\,.\,u, q) = 0 & \forall q \in Q\,. \end{cases}$$

On introduit alors une famille d'espaces de dimension finie $\{T_h \times V_h \times Q_h\}_{h>0} \subset T \times V \times Q$ et on définit le problème approché :

Trouver $(\sigma_h, u_h, p_h) \in T_h \times V_h \times Q_h$ tel que

$$(PO_h) \qquad \begin{cases} (\sigma_h, \tau_h) - 2\,\alpha\,(d(u_h), \tau_h) = 0 & \forall \tau_h \in T_h\,, \\ (\sigma_h, d(v_h)) + 2(1-\alpha)(d(u_h), d(v_h)) - (p_h, \nabla\,.\,v_h) = (f, v_h) & \forall v_h \in V_h\,, \\ (\nabla\,.\,u_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in Q_h\,. \end{cases}$$

Le problème (PO) peut se mettre sous forme abstraite :
Trouver $(\sigma, u, p) \in T \times V \times Q$ tel que

$$(P) \qquad \begin{cases} a(\sigma, \tau) - b(\tau, u) = 0 & \forall \tau \in T, \\ b(\sigma, v) + d(u, v) + c(v, p) = (f, v) & \forall v \in V, \\ c(u, q) = 0 & \forall q \in Q, \end{cases}$$

où l'on pourra prendre dans le cas du problème de Stokes :

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) &= \frac{1}{2\alpha}(\sigma, \tau), \\ b(\sigma, v) &= (\sigma, d(v)), \\ c(v, p) &= -(p, \nabla . v) \\ d(u, v) &= 2(1-\alpha)(d(u), d(v)). \end{aligned}$$

Le problème approché de (P) s'écrit alors :
Trouver $(\sigma_h, u_h, p_h) \in T_h \times V_h \times Q_h$ tel que

$$(P_h) \qquad \begin{cases} a(\sigma_h, \tau_h) - b(\tau_h, u_h) = 0 & \forall \tau_h \in T_h, \\ b(\sigma_h, v_h) + d(u_h, v_h) + c(v_h, p_h) = (f, v_h) & \forall v_h \in V_h, \\ c(u_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in Q_h. \end{cases}$$

Le premier et le deuxième paragraphe de ce travail sont consacrés à l'approximation numérique du problème abstrait (P). Dans le premier paragraphe on considère le cas correspondant à $\alpha = 1$ c'est-à-dire lorsque $d = 0$. Suivant [5] on étudie alors une formulation Lagrangienne de ce problème qui se place alors dans un cadre étudié dans [3]. On discute des conditions « inf-sup » que doivent vérifier les opérateurs du problème : dans [5] il a été montré que pour le cas $\alpha = 1$ les espaces d'approximations utilisés pour la résolution du problème de Stokes à 3 champs devaient vérifier la condition inf-sup tenseur-vitesse :

$$\exists \lambda > 0 \quad \text{tel que} \quad \inf_{v \in V_h} \sup_{(\tau, q) \in T_h \times Q_h} \frac{(\tau, d(v)) - (q, \nabla . v)}{\|v\|_V \, \|(\tau, q)\|_{T \times Q}} \geqslant \lambda,$$

qui se rajoute à la condition inf-sup vitesse pression classique :

$$\exists \gamma > 0 \quad \text{tel que} \quad \inf_{q \in Q_h} \sup_{v \in V_h} \frac{(\nabla . v, q)}{\|q\|_Q \, \|v\|_V} \geqslant \gamma .$$

Le deuxième paragraphe est consacré au cas où d est supposée V-elliptique. On montre alors, cette fois-ci en se plaçant dans un cadre étudié dans [1], que la condition inf-sup tenseur vitesse n'est plus nécessaire pour obtenir la convergence de la solution du problème approché.

Dans le troisième paragraphe on revient au problème de Stokes : on exhibe d'abord un exemple d'espace élément fini réaliste qui ne vérifie pas la condition inf-sup tenseur vitesse puis on construit à partir de l'élément de Taylor-Hood P_2/P_1 un espace élément fini d'approximation continue des contraintes qui vérifie cette condition. On s'inspirera de [8] pour la construction de cet élément et de [5] pour la vérification de la condition inf-sup. On trouvera la construction d'un autre type d'élément pour ce genre de problème, dans [9].

Enfin, le quatrième paragraphe est consacré à l'étude d'un point fixe, souvent utilisé dans le cas du problème d'Oldroyd (voir [7]), pour résoudre le problème (PO_h). On étudie la constante de contraction de ce point fixe en fonction de α et de la constante λ ci-dessus.

1. PREMIÈRE FORMULATION ABSTRAITE

Notations : Soit X un espace de Hilbert réel. On note $(\,,\,)_X$ le produit scalaire associé et $\| \,.\, \|_X$ la norme associée. X' désignera le dual topologique de X et on notera $\langle \,.\,,\,.\, \rangle_{X',X}$ la dualité X', X. On omettra les indices lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur les espaces. X est identifié à son dual par

$$\langle x, y \rangle_{X',X} = (x, y) \quad \forall x \in X\,, \quad \forall y \in X\,.$$

Soit Y un espace de Hilbert réel et T une application linéaire continue de X dans Y'. On notera T' l'opérateur transposé de T défini de Y dans X' par :

$$\langle T' y, x \rangle = \langle Tx, y \rangle \quad \forall y \in Y\,, \quad \forall x \in X\,.$$

On notera le noyau de T par

$$Z_T = \ker (T) = \{x \in X,\, Tx = 0\}\,.$$

On désignera par $Z_T^{\perp}$ l'orthogonal de Z_T et par $\mathring{Z}_T \subset X'$ le polaire de Z_T défini par :

$$\mathring{Z}_T = \{x' \in X',\, \langle x', x \rangle = 0\,;\, \forall x \in Z_T\}\,.$$

Par la suite nous utiliserons le lemme suivant (voir [6] Lemme 4.1, p. 58) qui est une conséquence du théorème de l'image fermée (voir [10]) :

LEMME 1.1 : *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\exists \theta > 0$, *tel que :*

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} \frac{\langle Tx, y \rangle}{\|y\|_Y \, \|x\|_X} \geq \theta\,, \tag{1.1}$$

(ii) *T' est un isomorphisme de Y sur $\mathring{Z}_T$ et :*

$$\|T' y\|_{X'} \geqslant \theta \|y\|_Y \quad \forall y \in Y , \tag{1.2}$$

(iii) *T est un isomorphisme de $Z_T^{\top}$ sur Y' et :*

$$\|Tx\|_{Y'} \geqslant \theta \|x\|_X \quad \forall x \in Z_T^{\top} . \tag{1.3}$$

Problème à trois champs

On considère maintenant trois espaces de Hilbert T, V et Q et a, b et c trois formes bilinéaires continues définies respectivement sur $T \times T$, $T \times V$ et $V \times Q$ et de normes respectives $\|a\|$, $\|b\|$ et $\|c\|$.

Pour $(f, g, k) \in T' \times V' \times Q'$ on considère le problème :

Trouver $(\sigma, u, p) \in T \times V \times Q$ tel que

$$(P) \qquad \begin{cases} a(\sigma, \tau) - b(\tau, u) = \langle f, \tau \rangle & \forall \tau \in T , \\ b(\sigma, v) + c(v, p) = \langle g, v \rangle & \forall v \in V , \\ c(u, q) = \langle k, q \rangle & \forall q \in Q . \end{cases}$$

Pour approcher ce problème on considère une famille d'espaces de dimension finie $\{T_h \times V_h \times Q_h\}_{h > 0} \subset T \times V \times Q$. On considère alors le problème approché :

Trouver $(\sigma_h, u_h, p_h) \in T_h \times V_h \times Q_h$ tel que

$$(P_h) \qquad \begin{cases} a(\sigma_h, \tau_h) - b(\tau_h, u_h) = \langle f, \tau_h \rangle & \forall \tau_h \in T_h , \\ b(\sigma_h, v_h) + c(v_h, p_h) = \langle g, v_h \rangle & \forall v_h \in V_h , \\ c(u_h, q_h) = \langle k, q_h \rangle & \forall q_h \in Q_h . \end{cases}$$

Le problème (P) peut se mettre sous la forme mixte suivante (voir [3], [5]) : soit $X = T \times Q$ alors (P) est équivalent à :

Trouver $((\sigma, p), u) \in X \times V$ tel que

$$(\mathscr{P}) \quad \begin{cases} \mathscr{A}((\sigma, p), (\tau, q)) + \mathscr{L}((\tau, q), u) = \langle \ell, (\tau, q) \rangle & \forall (\tau, q) \in X , \\ \mathscr{L}((\sigma, p), v) = \langle -g, v \rangle & \forall v \in V , \end{cases}$$

où $\mathscr{A}$ désigne la forme bilinéaire continue définie sur $X \times X$ par

$$\mathscr{A}((\sigma, p), (\tau, q)) = a(\sigma, \tau) \quad \forall ((\sigma, p), (\tau, q)) \in X \times X ,$$

où $\mathscr{L}$ désigne la forme bilinéaire continue définie sur $X \times V$ par

$$\mathscr{L}((\tau, q), v) = - b(\tau, v) - c(v, q) \quad \forall ((\tau, q), v) \in X \times V$$

et ℓ la forme linéaire continue définie par

$$\langle \ell, (\tau, q) \rangle = \langle f, \tau \rangle - \langle k, q \rangle \quad \forall (\tau, q) \in X .$$

On pose $X_h = T_h \times Q_h$, on associe alors au problème $(\mathscr{P})$ le problème approché :

Trouver $((\sigma_h, p_h), u_h) \in X_h \times V_h$ tel que

$(\mathscr{P}_h)$

$$\begin{cases} \mathscr{A}((\sigma_h, p_h), (\tau_h, q_h)) + \mathscr{L}((\tau_h, q_h), u_h) = \langle \ell, (\tau_h, q_h) \rangle & \forall (\tau_h, q_h) \in X_h , \\ \mathscr{L}((\sigma_h, p_h), v_h) = \langle -g, v_h \rangle & \forall v_h \in V_h . \end{cases}$$

Soit L l'application linéaire définie de X dans V' par

$$\langle L(\tau, q), v \rangle = \mathscr{L}((\tau, q), v) \quad \forall (\tau, q) \in X , \quad \forall v \in V ,$$

On a alors le résultat d'existence et d'unicité suivant (voir [3]) :

THÉORÈME 1.1 : *On suppose que les formes bilinéaires $\mathscr{A}$ et $\mathscr{L}$ vérifient les hypothèses suivantes :*

$(H1)$ $\quad \exists \alpha > 0$ *tel que* $\mathscr{A}(x, x) \geqslant \alpha \|x\|_X^2 ; \quad \forall x \in \ker L = Z_L ,$

$(H2)$ $\quad \exists \lambda > 0$ *tel que* $\inf_{v \in V} \sup_{x \in X} \dfrac{\mathscr{L}(x, v)}{\|v\|_V \|x\|_X} \geqslant \lambda ,$

alors le problème $(\mathscr{P})$ admet une unique solution $((\sigma, p), u)$ qui vérifie :

$$\|((\sigma, p), u)\|_{X \times V} \leqslant \mathscr{M}(\|\mathscr{A}\|, \alpha, \lambda) \|(\ell, g)\|_{X' \times V'} ,$$

avec

$$\mathscr{M}(x, y, z) = \max \left\{ (y^{-1} + z^{-1}(1 + xy^{-1})), (z^{-1} + xz^{-2})(1 + xy^{-1}) \right\} .$$

Ensuite on définit L_h de X_h dans V'_h par

$$\langle L_h(\tau, q), v \rangle = \mathscr{L}((\tau, q), v) \quad \forall (\tau, q) \in X_h , \quad \forall v \in V_h ,$$

on a alors le résultat abstrait d'approximation (voir [3]) :

THÉORÈME 1.2 : *On suppose que les hypothèses du Théorème* 1.1 *sont satisfaites. On suppose d'autre part que l'on a :*

$(H1)_h$ $\quad \exists \alpha_h > 0$ *tel que* $\mathscr{A}(x, x) \geqslant \alpha_h \|x\|_X^2 ; \quad \forall x \in \ker L_h = Z_{L_h} ,$

$(H2)_h$ $\quad \exists \lambda_h > 0$ *tel que* $\inf_{v \in V_h} \sup_{x \in X_h} \dfrac{\mathscr{L}(x, v)}{\|v\|_V \|x\|_X} \geqslant \lambda_h ,$

alors le problème $(\mathscr{P}_h)$ admet une unique solution $((\sigma_h, p_h), u_h)$ qui vérifie

$$\|(\sigma - \sigma_h, p - p_h)\|_{T \times Q} + \|u - u_h\|_V \leqslant$$

$$\leqslant c_h \left(\inf_{\tau_h \in T_h} \|\sigma - \tau_h\|_T + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q + \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V \right) ,$$

avec

$$c_h = \mathcal{M}\left(\|\mathcal{A}\|, \alpha_h, \lambda_h\right)\left(\|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{L}\|\right) + 1 .$$

Le but de ce paragraphe est de montrer l'équivalence de $(H1)$ et de $(H2)$ avec trois autres hypothèses qui « découplent » d'une certaine manière les conditions $(H1)$ et $(H2)$. A b et c on associe les opérateurs B : $T \to V'$ et $C : V \to Q'$ définis par :

$$\langle B\tau, v\rangle = b(\tau, v) \quad \forall \tau \in T, \quad \forall v \in V$$

$$\text{et} \quad \langle Cv, q\rangle = c(v, q) \quad \forall v \in V, \quad \forall q \in Q,$$

et on note Z_{BC} :

$$Z_{BC} = \{\tau \in T, b(\tau, v) = 0 ; \quad \forall v \in Z_C\} .$$

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1 : *Les hypothèses* $(H1)$ *et* $(H2)$ *sont équivalentes aux hypothèses suivantes :*

$(H3)$ $\quad \exists \alpha_0 > 0$ *tel que* $\quad a(\tau, \tau) \geqslant \alpha_0 \|\tau\|_T^2 \quad \forall \tau \in Z_{BC}$,

$(H4)$ $\quad \exists \beta > 0$ *tel que* $\quad \inf_{v \in Z_C} \sup_{\tau \in T} \dfrac{b(\tau, v)}{\|v\|_V \, \|\tau\|_T} \geqslant \beta$,

$(H5)$ $\quad \exists \gamma > 0$ *tel que* $\quad \inf_{q \in Q} \sup_{v \in V} \dfrac{c(v, q)}{\|q\|_Q \, \|v\|_V} \geqslant \gamma$,

$(\alpha_0, \beta, \gamma)$ *étant fonction de* (α, λ) *et réciproquement.*

Cette proposition se transpose au cas discret en posant :

$$\langle B_h \tau, v\rangle = b(\tau, v) \quad \forall \tau \in T_h, \quad \forall v \in V_h$$

$$\text{et} \quad \langle C_h v, q\rangle = c(v, q) \quad \forall v \in V_h, \quad \forall q \in Q_h,$$

et on a alors la

PROPOSITION 1.2 : *Les hypothèses* $(H1)_h$, $(H2)_h$ *sont équivalentes aux hypothèses suivantes :*

$(H3)_h$ $\quad \exists \alpha_{0h} > 0$ *tel que* $\quad a(\tau, \tau) \geqslant \alpha_{0h} \|\tau\|_T^2 \quad \forall \tau \in Z_{B_h C_h}$,

$(H4)_h$ $\quad \exists \beta_h > 0$ *tel que* $\quad \inf_{v \in Z_{C_h}} \sup_{\tau \in T_h} \dfrac{b(\tau, v)}{\|v\|_V \, \|\tau\|_T} \geqslant \beta_h$,

$(H5)_h$ $\quad \exists \gamma_h > 0$ *tel que* $\quad \inf_{q \in Q_h} \sup_{v \in V_h} \dfrac{c(v, q)}{\|q\|_Q \, \|v\|_V} \geqslant \gamma_h$,

$(\alpha_{0h}, \beta_h, \gamma_h)$ *étant fonction de* (α_h, λ_h) *et réciproquement.*

Preuve de la Proposition 1.1 : Montrons tout d'abord, en s'inspirant directement de [5], l'implication $(H3)$ et $(H5) \Rightarrow (H1)$. On a pour $(\tau, q) \in Z_L$:

$$b(\tau, v) + c(v, q) = 0 \quad \forall v \in V\,, \tag{1.4}$$

d'où :

$$\sup_{v \in V - \{0\}} \frac{b(\tau, v)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{c(v, q)}{\|v\|_V} \geqslant \gamma \|q\|_Q\,,$$

d'où :

$$\|q\|_Q \leqslant \gamma^{-1} \|b\| \, \|\tau\|_T\,.$$

D'après (1.4) on a $\tau \in Z_{BC}$ et donc avec $(H3)$:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}((\tau, q), (\tau, q)) = a(\tau, \tau) &\geqslant \alpha_0 \|\tau\|_T^2 \\ &\geqslant \alpha_0\, \gamma^2 \|b\|^{-2} \, \|q\|_Q^2 \\ &\geqslant \frac{\alpha_0}{2} \min\,\{1, \gamma^2\|b\|^{-2}\} \, \|(\tau, q)\|_X^2\,,\end{aligned}$$

et on obtient $(H1)$ avec $\alpha = \dfrac{\alpha_0}{2} \min\,\{1, \gamma^2\|b\|^{-2}\}$ (la relation reste vraie si $b = 0$).

Montrons ensuite le point $(H4)$, $(H5) \Rightarrow (H2)$. Soit $v \in V$, on a $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in Z_C$ et $v_2 \in Z_C^{\perp}$. D'après $(H4)$ et le Lemme 1.1 appliqué aux espaces T, Z_C et à l'opérateur B on a :

$$\exists \tau \in T \quad \text{tel que} \quad b(\tau, w) = (v_1, w) \quad \forall w \in Z_C$$

vérifiant :

$$\|\tau\|_T \leqslant \frac{1}{\beta} \|v_1\|_V\,.$$

D'autre part d'après $(H5)$ et le Lemme 1.1 appliqué à V, Q et C, C' est un isomorphisme de Q sur $\mathring{Z}_C$ tel que

$$\|C' q\|_{V'} \geqslant \gamma \|q\|_Q \quad \forall q \in Q\,.$$

Comme $v_2 \in Z_C^{\perp}$, alors $\hat{v}_2$ l'élément de V' associé canoniquement à v_2 est dans $\mathring{Z}_C$, et alors il existe un unique $q \in Q$ tel que

$$C' q = \hat{v}_2 \quad \text{dans} \quad V' \quad \text{et}$$

$$\|C' q\|_{V'} = \|\hat{v}_2\|_{V'} = \|v_2\|_V \geqslant \gamma \|q\|_Q\,.$$

On obtient finalement pour $\mu = \|b\|^2/\beta^2$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}((-\tau, -\mu q), v) &= b(\tau, v) + \mu c(v, q) \\
&= b(\tau, v_1) + b(\tau, v_2) + \mu c(v_2, q) \\
&\geqslant \|v_1\|_V^2 - \|b\| \, \|\tau\|_T \, \|v_2\|_V + \mu \, \|v_2\|_V^2 \\
&\geqslant \|v_1\|_V^2 - \beta^{-1}\|b\| \, \|v_1\|_V \, \|v_2\|_V + \mu \, \|v_2\|_V^2 \\
&\geqslant \frac{1}{2} \, \|v_1\|_V^2 + \frac{\|b\|^2}{2\,\beta^2} \, \|v_2\|_V^2 , \\
&\geqslant \frac{1}{2} \left\{ \|v_1\|_V^2 + \|v_2\|_V^2 \right\} .
\end{aligned}$$

On a utilisé ici le fait que $\beta \leqslant \|b\|$. On obtient $(H2)$ en écrivant que :

$$\frac{\mathscr{L}((-\tau, -\mu q), v)}{\|\tau\|_T + \|\mu q\|_Q} \geqslant \frac{2^{-1}\|v\|_V^2}{\dfrac{1}{\beta} \, \|v\|_V + \dfrac{\mu}{\gamma} \, \|v\|_V} \geqslant \frac{2^{-1}\,\beta^2}{\beta + \|b\|^2/\gamma} \, \|v\|_V .$$

Réciproquement le point $(H2) \Rightarrow (H4)$ se déduit de :

$$\begin{aligned}
\inf_{v \in Z_C} \sup_{\tau \in T} \frac{b(\tau, v)}{\|v\|_V \, \|\tau\|_T} &= \inf_{v \in Z_C} \sup_{(\tau, q) \in X} \frac{b(\tau, v) + c(v, q)}{\|v\|_V \, \|(\tau, q)\|_X} . \\
&\geqslant \lambda \, \|v\|_V .
\end{aligned}$$

Montrons maintenant l'implication $(H1)$, $(H2) \Rightarrow (H5)$. Soit $q \in Q$, comme $C' q \in V'$, alors d'après $(H2)$ et le Lemme 1.1 appliqué à X, V, et L on a :

$$\exists (\tau, \tilde{q}) \in Z_L^\top \quad \text{tel que} \quad L(\tau, \tilde{q}) = -C' q \quad \text{et}$$

$$\|(\tau, \tilde{q})\|_X \leqslant \frac{1}{\lambda} \, \|C' q\|_{V'} . \tag{1.5}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}((\tau, \tilde{q}), v) = -c(v, q) \;\; \forall v \in V &\Leftrightarrow -b(\tau, v) - c(v, \tilde{q} - q) = 0 \;\; \forall v \in V \\
&\Leftrightarrow (\tau, \tilde{q} - q) \in Z_L .
\end{aligned}$$

En particulier, par orthogonalité, on a $((\tau, \tilde{q}), (\tau, \tilde{q} - q))_X = 0$, ce qui donne $(\tau, \tau) + (\tilde{q}, \tilde{q} - q) = 0$ et donc :

$$\|\tau\|_T^2 + \|\tilde{q}\|_Q^2 = (q, \tilde{q}) .$$

D'après l'hypothèse $(H1)$ de coercivité sur le noyau Z_L et comme $(\tau, \tilde{q}-q) \in Z_L$ on a

$$\begin{aligned}\|a\| \|\tau\|_T^2 \geqslant a(\tau, \tau) &\geqslant \alpha [\|\tau\|_T^2 + \|q-\tilde{q}\|_Q^2] \\ &\geqslant \alpha [\|\tau\|_T^2 + \|q\|_Q^2 - 2(q, \tilde{q}) + \|\tilde{q}\|_Q^2] \\ &\geqslant \alpha [\|\tau\|_T^2 + \|q\|_Q^2 - 2\|\tau\|_T^2 - 2\|\tilde{q}\|_Q^2 + \|\tilde{q}\|_Q^2],\end{aligned}$$

d'où :

$$(\|a\| + \alpha)\|\tau\|_T^2 + \alpha\|\tilde{q}\|_Q^2 \geqslant \alpha \|q\|_Q^2,$$

et donc avec (1.5) :

$$\sup_{v \in V - \{0\}} \frac{c(v, q)}{\|v\|_V} = \|C' q\|_{V'} \geqslant \lambda \|(\tau, \tilde{q})\|_X \geqslant C_1 \|q\|_Q,$$

avec $C_1 > 0$ constante indépendante de q.

Il reste le point $(H1)$ et $(H2) \Rightarrow (H3)$. Soit $\tau \in Z_{BC}$, on a $\langle B\tau, v\rangle = 0$ $\forall v \in Z_C$ et donc $-B\tau \in \overset{\circ}{Z}_C$. Comme $(H5)$ est vérifiée et d'après le Lemme 1.1, il existe $q \in Q$ tel que $C' q = -B\tau$ dans V' et donc on voit que $(\tau, q) \in Z_L$, d'où :

$$\begin{aligned}a(\tau, \tau) &= \mathscr{A}((\tau, q), (\tau, q)) \\ &\geqslant \alpha(\|\tau\|_T^2 + \|q\|_Q^2) \\ &\geqslant \alpha\|\tau\|_T^2,\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

La preuve de la Proposition 1.2 se fait de manière analogue.

2. DEUXIÈME FORMULATION ABSTRAITE

Nous considérons maintenant une modification du problème (P). Soit d une forme bilinéaire continue définie sur $V \times V$ et de norme $\|d\|$. On considère le problème :

Trouver $(\sigma, u, p) \in T \times V \times Q$ tel que

$$(Q) \qquad \begin{cases} a(\sigma, \tau) - b(\tau, u) = \langle f, \tau\rangle & \forall \tau \in T, \\ b\langle\sigma, v\rangle + d(u, v) + c(v, p) = \langle g, v\rangle & \forall v \in V, \\ c(u, q) = \langle k, q\rangle & \forall q \in Q. \end{cases}$$

Ce problème peut se mettre sous la forme suivante : Soit $X = T \times V \times Q$ muni du produit scalaire

$$x = (\sigma, u, p), \quad y = (\tau, v, q), \quad (x, y) = (\sigma, \tau) + (u, v) + (p, q),$$

alors (Q) est équivalent à :
Trouver $x \in X$ tel que

$$(\mathcal{Q}) \qquad \mathcal{A}(x, y) = \langle \ell, y \rangle \quad \forall y \in X ,$$

avec :

$$\mathcal{A}((\sigma, u, p), (\tau, v, q)) = a(\sigma, \tau) - b(\tau, u) - b(\sigma, v) - d(u, v) - c(v, p) - c(u, q) \quad \forall ((\sigma, u, p), (\tau, v, q)) \in X \times X$$

et

$$\langle \ell, (\tau, v, q) \rangle = \langle f, \tau \rangle - \langle k, q \rangle - \langle g, v \rangle \quad \forall (\tau, v, q) \in X .$$

On a alors le résultat suivant d'existence et d'unicité (voir [1]) :

THÉORÈME 2.1 : *On suppose que la forme bilinéaire* $\mathcal{A}$ *satisfait les trois hypothèses suivantes :*

$$(A1) \qquad \exists A \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que} \quad \mathcal{A}(x, y) \leqslant A \|x\|_X \|y\|_X \quad \forall x, y \in X ,$$

$$(A2) \qquad \exists \rho > 0 \quad \textit{tel que} \quad \sup_{x \in X} \frac{\mathcal{A}(x, y)}{\|x\|_X} \geqslant \rho \|y\|_X \quad \forall y \in X ,$$

$$(A3) \qquad \exists \rho' > 0 \quad \textit{tel que} \quad \sup_{y \in X} \frac{\mathcal{A}(x, y)}{\|y\|_X} \geqslant \rho' \|x\|_X \quad \forall x \in X ,$$

alors le problème $(\mathcal{Q})$ *admet une unique solution* $x \in X$ *telle que* $\|x\|_X \leqslant (1/\rho')\|\ell\|_{X'}$.

Maintenant on considère une formulation approchée du problème $\mathcal{Q}$. Soit $\{X_h\}_{h>0} = \{T_h \times Q_h \times V_h\}_{h>0} \subset T \times Q \times V$ une famille d'espaces de dimension finie, on considère le problème approché :
Trouver $x_h \in X_h$ tel que

$$(\mathcal{Q}_h) \qquad \mathcal{A}(x_h, y_h) = \langle \ell, y_h \rangle \quad \forall y_h \in X_h .$$

On a alors le résultat abstrait d'approximation (voir [1]) :

THÉORÈME 2.2 : *On suppose que les hypothèses du Théorème* 2.1 *sont satisfaites. On suppose d'autre part que l'on a :*

$$(A2)_h \qquad \exists \rho_h > 0 \quad \textit{tel que} \quad \sup_{x \in X_h} \frac{\mathcal{A}(x, y)}{\|x\|_X} \geqslant \rho_h \|y\|_X \quad \forall y \in X ,$$

$$(A3)_h \qquad \exists \rho'_h > 0 \quad \textit{tel que} \quad \sup_{y \in X_h} \frac{\mathcal{A}(x, y)}{\|y\|_X} \geqslant \rho'_h \|x\|_X \quad \forall x \in X ,$$

alors le problème $(\mathcal{Q}_h)$ *admet une unique solution* $x_h \in X_h$ *telle que*

$$\|x_h\|_X \leqslant (1/\rho_h')\|\ell\|_{X_h'}$$

et telle que si x *désigne la solution du problème* $(\mathcal{Q})$ *alors*

$$\|x - x_h\|_X \leqslant \left(1 + \frac{A}{\rho_h'}\right) \inf_{y_h \in X_h} \|x - y_h\|_X .$$

Dans ce qui suit on supposera que a et d sont symétriques et coercives :

$$(A4) \qquad \begin{cases} \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad a(\tau, \tau) \geqslant \alpha \|\tau\|_T^2 \quad \forall \tau \in T_h , \\ \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad d(v, v) \geqslant \delta \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V_h . \end{cases}$$

D'après la continuité des formes bilinéaires a, b, c et d, $\mathcal{A}$ est donc continue et $(A1)$ est vérifiée. Le but de ce paragraphe est de montrer que les hypothèses $(A2)$ et $(A3)$ sont vérifiées si la condition inf-sup suivante est vérifiée :

$$(A5) \qquad \exists \gamma > 0 \quad \text{tel que} \quad \inf_{q \in Q} \sup_{v \in V} \frac{c(v, q)}{\|q\|_Q \|v\|_V} \geqslant \gamma .$$

Ce résultat est décrit dans la

PROPOSITION 2.1 : *On suppose que la condition* $(A5)$ *est vérifiée. On pose :*

$$(A6) \qquad \lambda = \inf_{v \in V} \sup_{(\tau, q) \in T \times Q} \frac{b(\tau, v) + c(v, q)}{\|v\|_V \|(\tau, q)\|_{T \times Q}} \geqslant 0 ,$$

alors les hypothèses $(A2)$ *et* $(A3)$ *sont vérifiées avec des constantes* ρ *et* ρ' *de la forme*

$$\rho = \rho' = \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{\min\{\alpha, \delta + \omega, \mu\}}{1 + \max\{2\omega\lambda^{-1}, \mu\gamma^{-1}\}}$$

où ω *et* μ *sont donnés par*

$$\omega = \frac{\alpha\lambda^2}{4} \|a\|^{-2}, \quad \mu = \frac{\gamma^2 \alpha(\delta + \omega)}{2\|b\|^2 (\delta + \omega) + \alpha \|d\|^2},$$

avec la convention $\omega\lambda^{-1} = 0$ *si* $\lambda = 0$.

La version discrète de la Proposition 2.1 peut s'écrire de la manière suivante :

PROPOSITION 2.2 : *On suppose que la condition* inf-sup *suivante est vérifiée :*

$$(A5)_h \qquad \exists \gamma_h > 0 \quad \textit{tel que} \quad \inf_{q \in Q_h} \sup_{v \in V_h} \frac{c(v, q)}{\|q\|_Q \|v\|_V} \geqslant \gamma_h$$

et soit

$$(A6)_h \qquad \lambda_h = \inf_{v \in V_h} \sup_{(\tau, q) \in T_h \times Q_h} \frac{b(\tau, v) + c(v, q)}{\|v\|_V \, \|(\tau, q)\|_{T \times Q}} \geqslant 0 ,$$

alors les hypothèses $(A2)_h$ *et* $(A3)_h$ *sont vérifiées avec des constantes* ρ_h *et* ρ_h' *de la forme*

$$\rho_h = \rho_h' = \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{\min\{\alpha, \delta + \omega_h, \mu_h\}}{1 + \max\{2\,\omega_h \lambda_h^{-1}, \mu_h \gamma_h^{-1}\}}$$

où ω_h *et* μ_h *sont donnés par*

$$\omega_h = \frac{\alpha \lambda_h^2}{4} \|a\|^{-2} ; \quad \mu_h = \frac{\gamma_h^2 \alpha (\delta + \omega_h)}{2\|b\|^2 (\delta + \omega_h) + \alpha \|d\|^2},$$

avec la convention $\omega_h \lambda_h^{-1} = 0$ *si* $\lambda_h = 0$.

Preuve de la Proposition 2.1 : Comme $\mathscr{A}$ est symétrique, il suffit de montrer que pour tout $x \in X$, il existe un $y \in X$ tel que $\mathscr{A}(x, y) \geqslant C_1 \|x\|_X^2$ et $\|y\|_X \leqslant C_2 \|x\|_X$ avec C_1 et C_2 indépendantes de x. On obtient alors la Proposition 2.1 avec $\rho = \rho' = C_1/C_2$. On considère donc $x = (\sigma, u, p) \in X$ et on prend $y = (\tau, v, q)$ de la forme

$$\tau = \sigma - \omega \eta \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{\alpha \lambda^2}{4} \|a\|^{-2},$$

$$v = -u - \mu w \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\gamma^2 \alpha (\delta + \omega)}{2\|b\|^2 (\delta + \omega) + \alpha \|d\|^2},$$

$$q = p - \omega r ;$$

où η, w et r satisfont :

$$\begin{cases} \eta = 0 \quad \text{et} \quad r = 0 \quad \text{si} \quad \lambda = 0 \quad \text{et sinon} \\ b(\eta, u) + c(v, r) = \|u\|_V^2 \quad \text{et} \quad \|(\eta, r)\|_{T \times Q} \leqslant \lambda^{-1} \|u\|_V , \end{cases}$$

$$c(w, p) = \|p\|_Q^2 \quad \text{et} \quad \|w\|_V \leqslant \gamma^{-1} \|p\|_Q .$$

L'existence de η, r et de w étant une conséquence du Lemme 1.1, de l'hypothèse $(A5)$ et de $(A6)$.

Remarque 2.1 : L'introduction des champs η et r n'est pas indispensable mais elle permet d'obtenir une constante de coercivité positive même si $\delta = 0$, pourvu que l'on ait alors $\lambda > 0$.

On a :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}((\sigma, u, p), (\tau, v, q)) &= a(\sigma, \tau) - b(\tau, u) - b(\sigma, v)\\ &\quad - d(u, v) - c(v, p) - c(u, q)\\ &= a(\sigma, \sigma) - \omega a(\sigma, \eta) - b(\sigma, u) + \omega b(\eta, u) + b(\sigma, u) + \mu b(\sigma, w)\\ &\quad + d(u, u) + \mu d(u, w) + c(u, p) + \mu c(w, p) - c(u, p) + \omega c(u, r)\\ &= a(\sigma, \sigma) - \omega a(\sigma, \eta) + \omega b(\eta, u) + \mu b(\sigma, w)\\ &\quad + d(u, u) + \mu d(u, w) + \mu c(w, p) + \omega c(u, r)\\ &\geqslant \alpha \|\sigma\|_T^2 - \omega \|a\| \|\sigma\|_T \|\eta\|_T + \omega \|u\|_V^2 - \mu \|b\| \|\sigma\|_T \|w\|_V\\ &\quad + \delta \|u\|_V^2 - \mu \|d\| \|u\|_V \|w\|_V + \mu \|p\|_Q^2 .\end{aligned}$$

Dans ce qui suit on prendra la convention $\omega\lambda^{-1} = \omega\lambda^{-2} = \omega^2\lambda^{-2} = 0$ si $\lambda = 0$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}((\sigma, u, p), (\tau, v, q)) \geqslant \alpha \|\sigma\|_T^2 + (\delta + \omega)\|u\|_V^2 + \mu \|p\|_Q^2\\ &- \omega\lambda^{-1}\|a\| \|\sigma\|_T \|u\|_V - \mu\gamma^{-1}\|b\| \|\sigma\|_T \|p\|_Q - \mu\gamma^{-1}\|d\| \|u\|_V \|p\|_Q .\end{aligned}$$

En écrivant que

$$\omega\lambda^{-1}\|a\| \|\sigma\|_T \|u\|_V \leqslant \frac{\alpha}{4} \|\sigma\|_T^2 + \alpha^{-1}\omega^2\lambda^{-2}\|a\|^2 \|u\|_V^2 ,$$

$$\mu\gamma^{-1}\|b\| \|\sigma\|_T \|p\|_Q \leqslant \frac{\alpha}{4} \|\sigma\|_T^2 + \alpha^{-1}\mu^2\gamma^{-2}\|b\|^2 \|p\|_Q^2 ,$$

et que

$$\mu\gamma^{-1}\|d\| \|u\|_V \|p\|_Q \leqslant \frac{(\delta + \omega)}{2} \|u\|_V^2 + \frac{1}{2} (\delta + \omega)^{-1} \mu^2\gamma^{-2}\|d\|^2 \|p\|_Q^2$$

on obtient :

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}((\sigma, u, p), (\tau, v, q)) \geqslant\\ &\quad\geqslant \frac{\alpha}{2} \|\sigma\|_T^2 + \left(\frac{(\delta + \omega)}{2} - \alpha^{-1}\omega^2\lambda^{-2}\|a\|^2 \right) \|u\|_V^2\\ &\quad\quad + \left(\mu - \alpha^{-1}\mu^2\gamma^{-2}\|b\|^2 - \frac{1}{2} (\delta + \omega)^{-1} \mu^2\gamma^{-2}\|d\|^2 \right) \|p\|_Q^2\\ &\quad\geqslant \frac{\alpha}{2} \|\sigma\|_T^2 + \left(\frac{\delta}{2} + \omega \left(\frac{1}{2} - \omega\alpha^{-1}\lambda^{-2}\|a\|^2 \right) \right) \|u\|_V^2\\ &\quad\quad + \left(\mu \left(1 - \mu\gamma^{-2}\left(\alpha^{-1}\|b\|^2 + \frac{1}{2} (\delta + \omega)^{-1}\|d\|^2 \right) \right) \right) \|p\|_Q^2\\ &\quad\geqslant \frac{\alpha}{2} \|\sigma\|_T^2 + \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\omega}{4} \right) \|u\|_V^2 + \frac{\mu}{2} \|p\|_Q^2 .\end{aligned}$$

On obtient finalement le résultat avec

$$\begin{aligned}\|y\|_X &\leq \|\sigma\|_T + \omega(\|\eta\|_T + \|r\|_Q) + \|u\|_V + \mu\|w\|_V + \|p\|_Q \\ &\leq \sqrt{3}(1 + \max\{2\,\omega\lambda^{-1}, \mu\gamma^{-1}\})\|x\|_X . \quad \square\end{aligned}$$

La démonstration de la Proposition 2.2 est identique.

Remarque 2.2 : Lorsque d est de la forme $d = \varepsilon e$ où e est une forme bilinéaire continue et $\varepsilon > 0$ on a une estimation de ρ et ρ' en fonction de ε lorsque ε tend vers 0 qui est obtenue de la manière suivante : tout d'abord on peut sans perdre de généralité supposer que $e(v, v) \geq \|v\|_V^2$ ensuite on considère un $\varepsilon_0 > 0$ et $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. On voit que μ est borné indépendamment de ε car :

$$\mu = \frac{2^{-1}\gamma^2\alpha\|b\|^{-2}}{1 + \alpha 2^{-1}\|b\|^{-2}\|e\|^2\dfrac{\varepsilon^2}{(\varepsilon + \omega)}}$$

et donc

$$\frac{2^{-1}\gamma^2\alpha\|b\|^{-2}}{1 + \alpha 2^{-1}\|b\|^{-2}\|e\|^2\varepsilon_0} \leq \mu \leq 2^{-1}\gamma^2\alpha\|b\|^{-2} .$$

Ensuite ω vérifie

$$\omega\lambda^{-1} = \frac{\alpha\lambda}{4}\|a\|^{-2} \leq \frac{\alpha\sqrt{2}(\|b\| + \|c\|)}{4}\|a\|^{-2} .$$

On peut alors avec ces estimations de ω et μ choisir ρ et ρ' de la forme

$$\rho = \rho' = C(\varepsilon + \lambda^2)$$

avec C indépendante de ε et δ.

Ainsi dans le cas discret, si γ_h est indépendant de h et si $\lambda_h = 0$, on peut prendre ρ_h et ρ_h' de la forme $\rho_h = \rho_h' = C\varepsilon$, C étant indépendante de h et de ε. La convergence de la solution du problème approché n'est alors plus uniforme en ε quand ε tend vers 0. On sait en fait que dans le cas $\varepsilon = 0$ $(d = 0)$ cette solution peut ne pas exister.

Retour au problème de Stokes

On applique les résultats précédents à la formulation à trois champs du problème de Stokes. On pose : $T = (L^2(\Omega))_s^4$, $Q = L_0^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)^2$. On prend comme formes bilinéaires a, b, c et d :

$$\begin{aligned}a(\sigma, \tau) &= \frac{1}{2\alpha}(\sigma, \tau) , \\ b(\sigma, v) &= (\sigma, d(v)) , \\ c(v, p) &= -(p, \nabla . v) , \\ d(u, v) &= 2(1 - \alpha)(d(u), d(v)) .\end{aligned}$$

Dans ce cas les formes bilinéaires a, b et d sont continues. On notera qu'avec ce choix, la norme de a tend vers $+\infty$ lorsque α tend vers 0. Ce choix est motivé par le fait que dans les modèles viscoélastiques on s'intéressera plutôt à des valeurs de α proches de 1. Les hypothèses $(H3)$ et $(H3)_h$ sont toujours vérifiées car a est T-elliptique, $(A4)$ est vérifiée lorsque $0 < \alpha < 1$, $(H4)$ est vérifié car $d(V) \subset T$ et $(H5)$ est une conséquence de ([6] Corollaire 2.4, p. 24).

Dans le cadre du problème de Stokes les conditions inf-sup $(H2)_h$, $(H4)_h$ et $(H5)_h$ s'écrivent alors :

$$(H2)_h \quad \exists \lambda_h > 0 \quad \text{tel que} \quad \inf_{v \in V_h} \sup_{(\tau, q) \in T_h \times Q_h} \frac{(\tau, d(v)) - (q, \nabla . v)}{\|v\|_V \; \|(\tau, q)\|_{T \times Q}} \geqslant \lambda_h ,$$

$$(H4)_h \qquad \exists \beta_h > 0 \quad \text{tel que} \quad \inf_{v \in Z_{C_h}} \sup_{\tau \in T_h} \frac{(\tau, d(v))}{\|v\|_V \; \|\tau\|_T} \geqslant \beta_h ,$$

où l'on rappelle que

$$Z_{C_h} = \{v \in V_h ; \; (q, \nabla . v) = 0, \; \forall q \in Q_h\} ,$$

$$(H5)_h \qquad \exists \gamma_h > 0 \quad \text{tel que} \quad \inf_{q \in Q_h} \sup_{v \in V_h} \frac{(\nabla . v, q)}{\|q\|_Q \; \|v\|_V} \geqslant \gamma_h .$$

Avec la Proposition 1.2, on vérifie facilement que lorsque $(H5)_h$ est vérifiée, l'hypothèse $(H2)_h$ est alors équivalente à $(H4)_h$.

On a pour ce problème, comme conséquence des deux paragraphes précédents, le résultat d'approximation suivant :

PROPOSITION 2.3 : *Soit (σ, u, p) la solution du problème (PO_V). On suppose que les espaces V_h et Q_h vérifient la condition $(H5)_h$ avec une constante γ_h indépendante de h, alors, pour $0 < \alpha < 1$, le problème (PO_h) admet une unique solution (σ_h, u_h, p_h) qui vérifie :*

$$\|\sigma - \sigma_h\|_T + \|u - u_h\|_V + \|p - p_h\|_Q \leqslant$$
$$\leqslant C \left(\inf_{\tau_h \in T_h} \|\sigma - \tau_h\|_T + \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q \right) ,$$

avec C indépendante de h et de α pour $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1 < 1$.

Si de plus les espaces T_h et V_h vérifient la condition $(H4)_h$ avec β_h indépendante de h, alors, pour $0 < \alpha \leqslant 1$, (PO_h) admet une unique solution qui vérifie l'estimation ci-dessus avec C indépendante de α pour $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Remarque 2.3 : Dans le cas où $0 \leqslant \alpha < \alpha_0 < 1$, on peut avec une autre formulation faible, obtenir les résultats de la Proposition 2.3, avec une constante C indépendante de α (voir [2]).

Remarque 2.4 : Une manière simple de vérifier $(H4)_h$ est de choisir V_h tel que $d(V_h) \subset T_h$, ce qui conduit à un choix d'approximation des contraintes par des éléments discontinus.

3. UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS POUR LE PROBLÈME DE STOKES À TROIS CHAMPS

Le but de ce paragraphe est de donner, dans le cadre du problème de Stokes à trois champs, d'abord un exemple réaliste d'espaces éléments finis $\{T_h \times V_h \times Q_h\}_{h>0} \subset T \times V \times Q$ qui vérifie uniformément par rapport à h la condition inf-sup vitesse-pression discrète $(H5)_h$ mais qui ne vérifie pas la condition $(H4)_h$. Ensuite on construit un espace d'éléments finis qui lui, vérifie les conditions $(H4)_h$ et $(H5)_h$.

3.1. Un exemple d'espace ne vérifiant pas la condition inf-sup tenseur-vitesse

Dans ce qui suit $\{\mathscr{C}_h\}_{h>0}$ désignera une famille conforme de partitions de Ω en triangles K, h étant le plus grand des diamètres des triangles K de $\mathscr{C}_h$.

On considère ensuite l'élément P_0 discontinu pour les tenseurs, l'élément fini P_1-bulle pour les vitesses et l'élément P_1 continu pour les pressions définis par :

$$T_h = \left\{\tau \in T\,;\, \tau|_K \in P_0(K)^4,\ \forall K \in \mathscr{C}_h\right\},$$

$$V_h = \left\{v \in V \cap \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})^2\,;\, v|_K \in \mathscr{P}(K)^2,\ \forall K \in \mathscr{C}_h\right\},$$

$$Q_h = \left\{q \in Q \cap \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})\,;\, q|_K \in P_1(K),\ \forall K \in \mathscr{C}_h\right\},$$

où $P_k(K)$ désigne l'espace des polynômes de degré k sur le triangle K et $\mathscr{P}(K) = P_1(K) \oplus ev\,\{\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\}$ (ev = espace vectoriel engendré par) où les $\lambda_{i\,\{1 \leq i \leq 3\}}$ désignent les coordonnées barycentriques du triangle K.

On définit alors la fonction bulle associée à K par $b_K = 27\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$ et qui vaut 1 au centre de gravité de K. L'élément vitesse-pression ainsi défini vérifie alors la condition inf-sup vitesse pression $(H5)_h$ (voir [6]).

Soit $V_{\text{bulle}} = \left\{ev\,\{b_K\}_{K \in \mathscr{C}_h}\right\}^2 \subset V_h$, pour montrer que $(H4)_h$ n'est pas vérifiée on cherche un $v \in Z_{C_h} \cap V_{\text{bulle}}$ non nul, tel que

$$b(\tau, v) = (\tau, d(v)) = 0 \quad \forall \tau \in T_h,$$

ce qui permettra de conclure. Montrons tout d'abord que $V_{\text{bulle}} \subset Z_{B_h}$. Soit $v \in V_{\text{bulle}}$:

$$v = \sum_{K \in \mathscr{C}_h} B_K\, b_K, \quad \text{avec} \quad B_K \in \mathbb{R}^2,$$

soit $\tau \in T_h$, on a :

$$\int_{\Omega} \tau : d(v) = \sum_{K \in \mathscr{C}_h} \int_K \tau : d(v) = \sum_{K \in \mathscr{C}_h} \tau_{ij}|_K \int_K d_{ij}(v)$$

$$\text{car} \quad \tau_{ij}|_K \in \mathbb{R} \quad \forall K \in \mathscr{C}_h$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathscr{C}_h} \tau_{ij} \int_K (v_{i,j} + v_{j,i})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathscr{C}_h} \tau_{ij} \int_{\partial K} (v_i n_j + v_j n_i) ,$$

$(n = (n_1, n_2)$ normale unitaire extérieure à $\partial K)$

$$= 0 \quad \text{car} \quad v|_{\partial K} = 0 \quad \forall K \in \mathscr{C}_h .$$

Donc $V_{\text{bulle}} \cap Z_{C_h} \subset Z_{B_h}$ et le problème se ramène à trouver un v non nul appartenant à $V_{\text{bulle}} \cap Z_{C_h}$. Soit C_b défini de V_{bulle} sur Q_h' par

$$\langle C_b v, q \rangle = c(v, q) = -(q, \nabla . v) \quad \forall v \in V_{\text{bulle}}, \quad \forall q \in Q_h ,$$

alors, d'après le théorème du rang, $\ker C_b = V_{\text{bulle}} \cap Z_{C_h} \neq \{0\}$ si $\dim V_{\text{bulle}} > \dim Q_h' = \dim Q_h$. Or si N est le nombre de triangles de $\mathscr{C}_h$ alors $\dim V_{\text{bulle}} = 2N$ et on a en général

$$\dim Q_h = (\text{nombre de sommets de la triangulation} - 1) < 2N ,$$

ce qui permet de conclure. □

3.2. Construction d'un élément fini triangulaire vérifiant la condition inf-sup tenseur vitesse

Dans ce paragraphe on considère l'élément de Taylor-Hood P_2/P_1 pour discrétiser les vitesses et les pressions, cet élément vérifiant la condition inf-sup vitesse pression $(H5)_h$ (voir [6]), et une approximation $P1$ continue des contraintes. Les espaces T_h, V_h et Q_h sont alors définis par :

$$T_h = \left\{ \tau \in T \cap \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})^4 ; \ \tau|_K \in P_1(K)^4, \ \forall K \in \mathscr{C}_h \right\} ,$$

$$V_h = \left\{ v \in V \cap \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})^2 ; \ v|_K \in P_2(K)^2, \ \forall K \in \mathscr{C}_h \right\} ,$$

$$Q_h = \left\{ q \in Q \cap \mathscr{C}^0(\bar{\Omega}) ; \ q|_K \in P_1(K), \ \forall K \in \mathscr{C}_h \right\} .$$

Le but de ce paragraphe est de construire à partir de T_h un espace d'approximation continue $\tilde{T}_h$ des contraintes qui vérifie la condition plus forte que $(H4)_h$:

$$(H6)_h \qquad \exists \tilde{\beta}_h > 0 \quad \text{tel que} \quad \inf_{v \in V_h} \sup_{\tau \in \tilde{T}_h} \frac{(\tau, d(v))}{\|v\|_V \ \|\tau\|_T} \geq \tilde{\beta}_h ,$$

avec $\tilde{\beta}_h$ indépendant de h, et d'obtenir ainsi une famille d'espaces éléments finis $\left\{\tilde{T}_h \times V_h \times Q_h\right\}_{h>0}$ qui vérifie uniformément par rapport à h les hypothèses $(H1)_h$ et $(H2)_h$.

Pour faire cela on suit une idée de [8] en ce qui concerne des éléments quadrilatères (Q_2^9 vitesse), qui consiste en quelque sorte à rajouter des bulles à l'espace T_h utilisé (Q_1). Le principe de la démonstration est celui décrit dans [5] pour l'élément construit dans [8]. Cette démonstration se simplifie dans le cadre de triangles et conduit à rajouter un nombre plus faible de degrés de liberté sur chaque composante des tenseurs (3 d.d.l au lieu de 9 d.d.l).

On construit $\tilde{T}_h$ de la manière suivante : on considère le triangle K de la figure 1 ci-dessous :

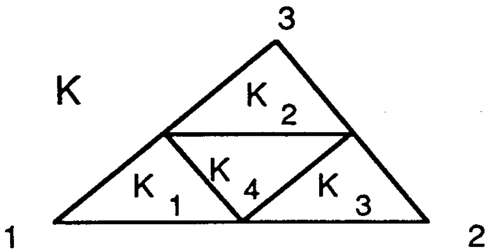

Fig. 1

K est subdivisé en quatre triangles et on note K_i, $i = 1, 2, 3$, les trois triangles ayant un sommet commun avec K, les deux autres sommets de chacun de ces triangles étant pris sur les milieux des arêtes de K. A chaque K_i on associe alors la fonction bulle b_i, et à la place de l'élément $P_1(K)$, on prend pour les tenseurs l'espace $\tilde{\mathscr{P}}(K) = P_1(K) \oplus ev\,\{b_1, b_2, b_3\}$ et pour $\tilde{T}_h$:

$$\tilde{T}_h = \left\{\tau \in T \cap \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})^4 \,;\; \tau|_K \in \tilde{\mathscr{P}}(K)^4,\ \forall K \in \mathscr{C}_h\right\}.$$

On a alors la

PROPOSITION 3.1 : *Le couple* $(\tilde{T}_h, V_h)$ *vérifie la condition* inf-sup

$$\exists \tilde{\beta} > 0 \quad \textit{tel que} \quad \inf_{v \in V_h} \sup_{\tau \in \tilde{T}_h} \frac{(\tau, d(v))}{\|v\|_V \, \|\tau\|_T} \geqslant \tilde{\beta}\,.$$

Preuve : La Proposition est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 3.1 : *Pour tout* $t \in P_1(K)$ $\exists s \in ev\{b_1, b_2, b_3\}$ *tel que*

$$\int_K sr = \int_K tr \quad \forall r \in P_1(K) \tag{3.1}$$

et tel que $\|s\|_{L^2(K)} = \kappa \|t\|_{L^2(K)}$, *avec* $\kappa = \sqrt{\frac{40}{21}}$.

Preuve du Lemme : Notons λ_i, $i = 1, 2, 3$ les coordonnées barycentriques du triangle K telles que λ_i vaut 1 au sommet n° i de K.

Soit $t = \sum_{j=1}^{3} t_j \lambda_j \in P_1(K)$, alors une solution de (3.1) est donnée par $s = \sum_{j=1}^{3} s_j b_j \in \tilde{\mathscr{P}}(K)$ où $s = (s_1, s_2, s_3)$ est la solution de $As = f$, A et f étant donnés après un calcul simple par

$$A_{ij} = \int_K b_j \lambda_i = \frac{3|K|}{160} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} t_j \int_K \lambda_j \lambda_i = \frac{|K|}{12} \begin{pmatrix} 2t_1 + t_2 + t_3 \\ 2t_2 + t_1 + t_3 \\ 2t_3 + t_1 + t_2 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors pour s :

$$s = \frac{80}{27|K|} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad f = \frac{40}{81} \begin{pmatrix} 4t_1 + t_2 + t_3 \\ 4t_2 + t_1 + t_3 \\ 4t_3 + t_1 + t_2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\|s\|^2_{L^2(K)} = \sum_{j=1}^{3} s_j^2 \|b_j\|^2_{L^2(K)} =$$

$$= \frac{20|K|}{63} (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) = \frac{40}{21} \|t\|^2_{L^2(K)}. \quad \square$$

La Proposition 3.1 se démontre alors de la manière suivante : soit $v \in V_h$, alors pour tout triangle K de la triangulation $\mathscr{C}_h$, $d(v)|_K$ appartient à $P_1(K)^4$. Donc d'après le lemme 3.1 il existe $\sigma_K \in ev\{b_1, b_2, b_3\}^4$, symétrique, tel que

$$\int_K \sigma_K : d(v) = \|d(v)\|^2_{L^2(K)}$$

et $\|\sigma_K\|_{L^2(K)} = \kappa \|d(v)\|_{L^2(K)}$. Soit σ défini par $\sigma|_K = \sigma_K$. Alors $\sigma \in \tilde{T}_h$ et vérifie

$$\frac{(\sigma, d(v))}{\|\sigma\|_T \|v\|_V} = \kappa^{-1}.$$

et on obtient la Proposition 3.1 avec $\tilde{\beta} \geq \kappa^{-1}$. □

On a alors avec ce choix d'espace et les résultats usuels d'interpolation (voir [4]) le résultat de convergence suivant :

PROPOSITION 3.2 : *On suppose que la solution du problème* (PO) *vérifie* $(\sigma, u, p) \in (H^2(\Omega))^4 \times (H^3(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$, *alors la solution* $(\sigma_h, u_h, p_h) \in \tilde{T}_h \times V_h \times Q_h$ *du problème* (PO_h) *vérifie*

$$\|\sigma - \sigma_h\|_T + \|u - u_h\|_V + \|p - p_h\|_Q \leq Ch^2(\|\sigma\|_{2,2} + \|u\|_{3,2} + \|p\|_{2,2}),$$

avec C *indépendante de* α *pour* $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq 1$.

4. SUR UNE MÉTHODE DE POINT FIXE

Nous considérons dans ce paragraphe une méthode de point fixe pour résoudre le problème de Stokes à 3 champs approché :

Trouver $(\sigma, u, p) \in T_h \times V_h \times Q_h$ tel que

$$(Q_h) \quad \begin{cases} (\sigma, \tau) - 2\alpha(d(u), \tau) = 0 & \forall \tau \in T_h, \\ (\sigma, d(v)) + 2(1-\alpha)(d(u), d(v)) - (p, \nabla . v) = (f, v) & \forall v \in V_h, \\ (\nabla . u, q) = 0 & \forall q \in Q_h. \end{cases}$$

Soit $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, on considère le point fixe suivant :

Trouver $(\tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{p}) \in T_h \times V_h \times Q_h$ tel que

$$(\tilde{Q}_h) \quad \begin{cases} (\tilde{\sigma}, \tau) - 2\alpha(d(u), \tau) = 0 \quad \forall \tau \in T_h, \\ (\tilde{\sigma}, d(v)) + 2(1-\alpha+\bar{\alpha})(d(\tilde{u}), d(v)) \\ \qquad - (\tilde{p}, \nabla . v) = (f, v) + 2\bar{\alpha}(d(u), d(v)) \\ \qquad \forall v \in V_h, \\ (\nabla . \tilde{u}, q) = 0 \quad \forall q \in Q_h. \end{cases}$$

Ce point fixe est souvent utilisé en viscoélasticité (voir [7]) où la première équation est beaucoup plus compliquée, et donc il est intéressant de traiter cette équation séparément.

Nous étudions la convergence de ce point fixe en fonction de la constante β_h de la condition inf-sup tenseur vitesse $(H4)_h$ définie au paragraphe 2. On remarquera que $\beta_h \leq 1$.

Dans tout ce qui suit on supposera que $1 - \alpha + \bar{\alpha} > 0$ et $0 < \alpha \leq 1$ et on supposera que la condition inf-sup vitesse pression $(H5)_h$ est vérifiée. Alors d'après le Lemme 1.1 le problème $(\tilde{Q}_h)$ est équivalent au problème :

Trouver $(\tilde{\sigma}, \tilde{u}) \in T_h \times Z_{C_h}$ tel que

$$(\tilde{Q}'_h) \begin{cases} (\tilde{\sigma}, \tau) - 2\,\alpha\,(d(u), \tau) = 0 \quad \forall \tau \in T_h\,, \\ (\tilde{\sigma}, d(v)) + 2(1 - \alpha + \bar{\alpha})(d(\tilde{u}), d(v)) = (f, v) + 2\,\bar{\alpha}\,(d(u), d(u)) \\ \qquad \forall v \in Z_{C_h}\,, \end{cases}$$

et la constante de Lipschitz du point fixe $(\tilde{Q}_h)$ (vu comme application de V_h dans V_h) est la norme de l'application linéaire $F_{\bar{\alpha}} : Z_{C_h} \to Z_{C_h}$, qui à u associe la solution $\tilde{u}$ du problème linéaire $\tilde{Q}'_h$ avec $f = 0$.

Le problème $(\tilde{Q}'_h)$ est bien posé : on résout d'abord la première équation, puis la seconde avec $(1 - \alpha + \bar{\alpha}) > 0$. On a alors la

PROPOSITION 4.1 : *Soit* $\phi(\bar{\alpha}) = \dfrac{\alpha}{1 - \alpha + \bar{\alpha}} \sqrt{\left(\dfrac{\bar{\alpha}}{\beta_h\,\alpha}\right)^2 + 1 - 2\,\dfrac{\bar{\alpha}}{\alpha}}$, *alors sous les conditions* $(H4)_h$ *et* $(H5)_h$ *on a* $\|F_{\bar{\alpha}}\| \leq \phi(\bar{\alpha})$, *et* $\phi(\bar{\alpha})$ *est minimale pour* $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 = \dfrac{\beta_h^2\,\alpha}{\beta_h^2\,\alpha + (1 - \alpha)}$.

Pour $1/\sqrt{2} < \beta_h \leq 1$ *ou pour* $0 < \beta_h \leq 1/\sqrt{2}$ *et* $\alpha < \dfrac{1}{2(1 - \beta_h^2)}$ *le point fixe converge lorsque* $\bar{\alpha}$ *est pris dans un voisinage suffisamment petit de* $\bar{\alpha}_0$.

Preuve : Soit $v \in Z_{C_h}$ alors $v \in (Z_{C_h})'$. D'après le Lemme 1.1 et la condition $(H4)_h$ il existe $\tau \in T_h$ que l'on notera τ_v qui vérifie :

$$(\tau_v, d(w)) = \langle v, w \rangle = (d(v), d(w))\,, \quad \forall w \in Z_{C_h}$$
$$\text{et} \quad \|\tau_v\|_T \leq \beta_h^{-1} \|v\|_V = \beta_h^{-1} \|d(v)\|_T\,.$$

On a alors pour $v \in Z_{C_h}$:

$$\begin{aligned} 2(1 - \alpha + \bar{\alpha})(d(\tilde{u}), d(v)) &= 2\,\bar{\alpha}\,(d(u), d(v)) - (\tilde{\sigma}, d(v)) \\ &= 2\,\bar{\alpha}\,(d(u), \tau_v) - (\tilde{\sigma}, d(v)) \\ &= \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\,(\tilde{\sigma}, \tau_v) - (\tilde{\sigma}, d(v)) \\ &= \left(\tilde{\sigma}, \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\,\tau_v - d(v)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\|\tilde{u}\|_V = \sup_{v \in Z_{C_h}} \frac{(d(\tilde{u}), d(v))}{\|v\|_V} = \frac{1}{2(1 - \alpha + \bar{\alpha})} \sup_{v \in Z_{C_h}} \frac{\left(\tilde{\sigma}, \dfrac{\bar{\alpha}}{\alpha}\,\tau_v - d(v)\right)}{\|v\|_V}\,.$$

On en déduit

$$\|F_{\bar\alpha}\| = \sup_{u \in Z_{C_h}} \frac{\|F_{\bar\alpha}(u)\|_V}{\|u\|_V} = \sup_{u \in Z_{C_h}} \frac{\|\tilde u\|_V}{\|u\|_V}$$

$$= \frac{1}{2(1-\alpha+\bar\alpha)} \sup_{u \in Z_{C_h}} \frac{1}{\|u\|_V} \sup_{v \in Z_{C_h}} \frac{\left(\tilde\sigma, \frac{\bar\alpha}{\alpha}\tau_v - d(v)\right)}{\|v\|_V}$$

et comme $\|\tilde\sigma\|_T \leqslant 2\,\alpha\,\|u\|_V$ on obtient :

$$\|F_{\bar\alpha}\| \leqslant \frac{\alpha}{(1-\alpha+\bar\alpha)} \sup_{v \in Z_{C_h}} \frac{\left\|\frac{\bar\alpha}{\alpha}\tau_v - d(v)\right\|_T}{\|v\|_V}.$$

D'autre part on a :

$$\left\|\frac{\bar\alpha}{\alpha}\tau_v - d(v)\right\|_T^2 = \left\|\frac{\bar\alpha}{\alpha}\tau_v\right\|_T^2 - 2\frac{\bar\alpha}{\alpha}(\tau_v, d(v)) + \|d(v)\|_T^2$$

$$= \left(\frac{\bar\alpha}{\alpha}\right)^2 \|\tau_v\|_T^2 - 2\frac{\bar\alpha}{\alpha}(d(v), d(v)) + \|d(v)\|_T^2$$

$$\leqslant \left[\left(\frac{\bar\alpha}{\beta_h\,\alpha}\right)^2 + 1 - 2\frac{\bar\alpha}{\alpha}\right] \|d(v)\|_T^2,$$

et on obtient finalement

$$\|F_{\bar\alpha}\| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha+\bar\alpha}\sqrt{\left(\frac{\bar\alpha}{\beta_h\,\alpha}\right)^2 + 1 - 2\frac{\bar\alpha}{\alpha}} \overset{\text{déf}}{=} \phi(\bar\alpha).$$

Ensuite on a

$$\phi'(\bar\alpha) = \frac{(\beta_h^2\,\alpha + 1 - \alpha)\,\bar\alpha - \beta_h^2\,\alpha}{\beta_h^2\,\alpha\,(1-\alpha+\bar\alpha)^2\sqrt{\left(\frac{\bar\alpha}{\beta_h\,\alpha}\right)^2 + 1 - 2\frac{\bar\alpha}{\alpha}}}$$

et donc ϕ a un minimum sur $]\alpha - 1, +\infty[$ en

$$\bar\alpha_0 = \frac{\beta_h^2\,\alpha}{\beta_h^2\,\alpha + (1-\alpha)}.$$

Pour $\alpha = 1$, on a $\bar\alpha_0 = 1$ et $\phi(1) = \sqrt{\frac{1}{\beta_h^2} - 1}$ ce qui donne la Proposition 4.1 dans le cas $\alpha = 1$.

Pour $\alpha < 1$, un calcul donne en exprimant β_h^2 en fonction de $\bar{\alpha}_0$:

$$\phi(\bar{\alpha}_0) = \frac{\alpha}{1 - \alpha + \bar{\alpha}_0} \sqrt{\frac{\bar{\alpha}_0(1 - \bar{\alpha}_0)}{\alpha(1 - \alpha)} + 1 - 2\frac{\bar{\alpha}_0}{\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha + \bar{\alpha}_0} \sqrt{\frac{(1 - \alpha + \bar{\alpha}_0)(\alpha - \bar{\alpha}_0)}{\alpha(1 - \alpha)}} = \sqrt{\frac{\alpha(\alpha - \bar{\alpha}_0)}{(1 - \alpha + \bar{\alpha}_0)(1 - \alpha)}}$$

et on obtient $\phi(\bar{\alpha}_0) < 1$ si $(1 - 2\alpha + \bar{\alpha}_0) > 0$, ce qui est équivalent à

$$\alpha < \frac{1}{2(1 - \beta_h^2)}, \tag{4.1}$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque 4.1 : Si $(H4)_h$ est vérifiée avec $\beta_h = 1$, ce qui est le cas si $d(Z_{C_h}) \subset T_h$, alors pour tout $v \in V_h$ on a :

$$\|\tau_v\|_T \leqslant \|d(v)\|_T \quad \text{et} \quad \|\tau_v - d(v)\|_T^2 = \|\tau_v\|_T^2 - 2(\tau_v, d(v)) + \|d(v)\|_T^2$$
$$= \|\tau_v\|_T^2 - \|d(v)\|_T^2$$
$$\leqslant \|v\|_V^2 - \|v\|_V^2 = 0,$$

ce qui montre que $d(Z_{C_h}) \subset T_h$. De la même manière on a l'équivalence :

$$(H6)_h \quad \text{est vérifiée avec} \quad \tilde{\beta}_h = 1 \Leftrightarrow d(V_h) \subset T_h.$$

Remarque 4.2 : Si $d(V_h) \subset T_h$ alors $\beta_h = 1$, et alors pour $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 = \alpha$ le point fixe converge en une itération.

Remarque 4.3 : On voit donc que lorsque $\beta_h > 1/\sqrt{2}$ le point fixe est toujours convergent pour $\bar{\alpha}$ bien choisi. D'autre part lorsque β_h tend vers 0 la condition (4.1) donne, à la limite, $\alpha < 1/2$ pour assurer la convergence du point fixe. On a effectivement convergence pour $\beta_h = 0$ et $\alpha < 1/2$ (voir [2]). Des essais numériques ont montré que dans ce cas $\beta_h = 0$ le point fixe convergeait seulement pour $\alpha < 1/2$ et $\bar{\alpha}$ proche de 0.

Remarque 4.4 : L'élément présenté au paragraphe 3.2 vérifie la condition $\beta_h > 1/\sqrt{2}$.

REMERCIEMENTS

Je remercie le rapporteur pour sa relecture attentive de la première version de cet article, ainsi que pour ses diverses remarques.

RÉFÉRENCES

[1] I. BABUSKA, 1971, Error-bounds for finite element method, *Numer. Math.*, 16, 322-333.

[2] J. BARANGER, D. SANDRI, 1992, Formulation of Stokes's problem and the linear elasticity equations suggested by Oldroyd model for viscoelastics flows, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 26, 331-345.

[3] F. BREZZI, 1974, On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 8, 129-151.

[4] P. G. CIARLET, 1978, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam.

[5] M. FORTIN, R. PIERRE, 1989, On the convergence of the mixed method of Crochet and Marchal for viscoelastic flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 73, 341-350.

[6] V. GIRAULT, P. A. RAVIART, 1986, *Finite element method for Navier-Stokes equations, Theory and Algorithms*, Springer, Berlin Heidelberg New York.

[7] R. KEUNINGS, 1989, in : Tucker Ch. III (ed.), *Computer Modeling for Polymer Processing*, 403-469. Munich : Hanser Verlag.

[8] J. M. MARCHAL, M. J. CROCHET, 1987, A new finite element for calculating viscoelastic flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 26, 77-114.

[9] V. RUAS, An optimal three field finite element approximation of the Stokes system with continuous extra stresses, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, à paraître.

[10] K. YOSHIDA, 1980, *Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.