

D. SERRE

Modèles cinétiques à répartition discrète des vitesses et à invariance galiléenne

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 27, n° 7 (1993), p. 803-815

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_7_803_0

© AFCET, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**MODÈLES CINÉTIQUES
 À RÉPARTITION DISCRÈTE DES VITESSES
 ET À INVARIANCE GALILÉENNE (*)**

par D. SERRE ⁽¹⁾

Communiqué par R. TEMAM

Résumé. — On construit ci-dessous des modèles de cinétique des gaz à répartition discrète des vitesses, analogues aux modèles de Broadwell ou de Cabannes à 14 vitesses, mais qui ont l'avantage d'être invariants par transformation Galiléenne. La contrepartie est que ces modèles sont quasilineaires. Leurs vitesses de propagation sont cependant très simples, ce sont les vitesses des particules ; en particulier, l'optique géométrique appliquée à ces systèmes ne conduit pas à la focalisation.

Abstract. — One derives below new discrete kinetics models in the spirit of Broadwell's and Cabannes', which are Galilean — invariant. The counterpart of this property is the loss of semilinearity. These models become quasilinear and non-conservative. The propagation speeds are though quite simple, these are particle velocities. Consequently, the geometrical optics, when applied to these models, does not yield to focusing.

1. INTRODUCTION

Le modèle cinétique de base est l'équation de Boltzmann. Le gaz est décrit par une densité $f(x, t, v)$ de particules au point $x \in \mathbb{R}^d$ au temps $t \in \mathbb{R}$ ayant la vitesse $v \in \mathbb{R}^d$. L'évolution de cette densité est gouvernée par

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \tag{1.1}$$

où Q est un terme intégral qui décrit les interactions entre particules de vitesses différentes en un même point au même instant. Ce terme est quadratique lorsqu'on ne tient compte que des collisions binaires. Les

(*) Manuscrit reçu le 22 septembre 1992.

(¹) Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, CNRS UMR 128, École Normale Supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France.

propriétés essentielles sont la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie qui traduisent cette conservation dans la collision :

$$\forall f(x, t, \cdot), \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} Q(f) dv &= \int_{\mathbb{R}^d} Q(f) \|v\|^2 dv = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^d} Q(f) v dv &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Comme l'approximation numérique d'une équation intégral-différentielle dans \mathbb{R}^{2d+1} (\mathbb{R}^7 si $d = 3$) est très coûteuse, on utilise parfois des modèles plus simples, dits à répartition discrète des vitesses (voir [Ga] pour une présentation générale). La densité est alors une fonction positive définie sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \times V$, où V est une partie finie de \mathbb{R}^d , l'ensemble des vitesses des particules. Ces modèles s'écrivent exactement comme (1.1), mais le terme d'interaction, noté maintenant $C(f)$, ne tient compte que des collisions entre particules incidentes de vitesses v_1, v'_1 appartenant à V , qui ressortent à des vitesses v, v' appartenant aussi à V , mais conservant toujours l'impulsion et l'énergie : $v + v' = v_1 + v'_1$, $\|v\|^2 + \|v'\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v'_1\|^2$.

Quand on passe du modèle continu au modèle discret, on perd deux propriétés essentielles :

— l'invariance Galiléenne. Si f est solution de (1.1), alors $g(x, t, v) = f(x - tc, t, v + c)$ est aussi une solution de (1.1), et cette transformation correspond à un changement de référentiel Galiléen. Mais l'hypothèse d'une répartition discrète des vitesses suppose l'existence d'un référentiel absolu ;

— la compacité des moyennes $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(v) F(x, t, v) dv$ pour les familles de fonctions F , bornées dans un espace de Lebesgue ainsi que $\frac{\partial F}{\partial t} + v \cdot \nabla_x F$.

Les lemmes de Golse, Lions, Perthame et Sentis [GLPS] ne sont plus vrais dans le cas discret où on traite $\sum_{v \in V} \phi(v) F(x, t, v)$, noté $\langle \phi F \rangle$. Cette

compacité est cruciale dans la théorie de l'existence de solutions renormalisées ([DiL]) et le serait sans doute pour l'étude de la limite thermodynamique.

Nous proposons ici de construire des modèles alliant la simplicité, avec une répartition discrète des vitesses, et l'invariance Galiléenne. L'idée de base est que les vitesses des particules en un point (x, t) appartiennent à $v_0(x, t) + V$, où v_0 est leur vitesse moyenne à déterminer et V est un ensemble fini donné a priori comme ci-dessus. Nous aurons donc des modèles analogues à ceux de Broadwell ou de Cabannes, suivant le choix de V . De tels modèles, mais dans le cas des gaz sur réseaux, ont été construits par Koelman ([Ko]).

Le plan est le suivant. Dans la section suivante, on construit le modèle général. Au paragraphe III, on calcule les coefficients explicitement dans le cas de Broadwell et on montre une manière de résoudre une ligne de tourbillon initiale. Comme les systèmes obtenus sont quasilinéaires, on montre en IV qu'ils sont hyperboliques non conservatifs en général et on détermine leurs vitesses de propagation. Enfin la dernière section montre que le passage à la limite thermodynamique redonne des versions connues de l'équation d'Euler des fluides compressibles.

2. CONSTRUCTION DES MODÈLES

Soit V un ensemble fini de vecteurs de \mathbb{R}^d et G le groupe des isométries laissant V invariant. On suppose que $-id \in G$. Notre postulat est que les particules de gaz qui se trouvent en x à l'instant t prennent leurs vitesses dans un translaté $v_0(x, t) + V$ et que leur vitesse moyenne est $v_0(x, t)$. En notant $f(x, t, v_0(x, t) + v)$ les densités respectives de particules, on a

$$\sum_{v \in V} f(x, t, v_0 + v) v = 0. \tag{2.1}$$

Lorsque cela sera utile, on supposera en fait la parité de f :

$$f(x, t, v_0 + v) = f(x, t, v_0 - v), \quad \forall v \in V. \tag{2.2}$$

Pour imaginer un système gouvernant l'évolution des densités, on procède en deux étapes. On part de l'équation de Boltzman et on translate en vitesses la densité par la vitesse moyenne. L'équation obtenue est ensuite discrétisée en vitesses en respectant la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie.

2.1. Translation en vitesses

Soit $f(x, t, v) > 0$ une solution de l'équation de Boltzman. La densité de particules et la vitesse moyenne en un point (x, t) sont définies par :

$$\rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} f dv, \quad (\rho v_0)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} f v dv.$$

On définit la densité de particules ayant v pour vitesse relative par

$$g(x, t, v) = f(x, t, v_0(x, t) + v).$$

On trouve aisément l'équation suivante

$$\begin{aligned} (\partial_t + (v + v_0) \cdot \nabla_x) g(v) &= \\ &= Q(f)(v + v_0) + (\partial_t v_0 + (v + v_0) \cdot \nabla_x v_0) \cdot \nabla_v g(v). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Comme Q est invariant par transformation Galiléenne, on a $Q(f)(v + v_0) = Q(g)(v)$. De plus, la contrainte

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(v) v \, dv = 0,$$

qui découle de la définition, implique l'équation suivante, en utilisant (1.2) :

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g v \otimes v \, dv &= (\partial_t v_0 + (v_0 \cdot \nabla_x) v_0) \cdot \\ &\cdot \int_{\mathbb{R}^d} v \otimes \nabla_v g \, dv + \nabla_x v_0 \cdot \int_{\mathbb{R}^d} v \otimes v \otimes \nabla_v g \, dv. \end{aligned}$$

Mais

$$\int_{\mathbb{R}^d} v \otimes \nabla_v g \, dv = -\rho I_d,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} v \otimes v \otimes \nabla_v g \, dv = 0,$$

d'après la contrainte. Il reste donc l'équation

$$\rho (\partial_t + v_0 \cdot \nabla_x) v_0 + \nabla_x \cdot T = 0, \quad (2.4)$$

où $T = : \int_{\mathbb{R}^d} g v \otimes v \, dv$. Une autre équation est la conservation de la masse, qu'on obtient simplement en intégrant (2.3) par rapport à v . On a bien sûr

$$\rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} g \, dv, \text{ d'où}$$

$$(\partial_t + v_0 \cdot \nabla_x) \rho = \nabla_x v_0 \cdot \int_{\mathbb{R}^d} v \otimes \nabla_v g \, dv = -\rho \operatorname{div} v_0.$$

C'est-à-dire

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} (\rho v_0) = 0. \quad (2.5)$$

On en déduit que (2.4) peut être vu comme la conservation de la quantité de mouvement

$$\partial_t (\rho v_0) + \nabla_x \cdot (\rho v_0 \otimes v_0) + \nabla_x \cdot T = 0. \quad (2.6)$$

On utilise enfin (2.4) pour transformer (2.3) en une équation d'évolution pour g :

$$(\partial_t + (v + v_0) \cdot \nabla_v) g + \left(\frac{1}{\rho} \nabla_x \cdot T - (v \cdot \nabla_x) v_0 \right) \cdot \nabla_v g = Q(g). \quad (2.7)$$

Le système d'évolution, sans restriction sur l'ensemble des vitesses, est constitué de (2.4) et (2.7).

2.2. Discrétisation

Le passage à un modèle cinétique à répartition discrète des vitesses se fait de la manière suivante : on choisit comme d'habitude un ensemble fini $V = -V$ de vecteurs de \mathbb{R}^d . On considère g comme une fonction définie sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \times V$. Les opérations de moyenne en vitesse sont remplacées par une sommation sur V :

$$\langle \phi(\cdot) \rangle =: \sum_{v \in V} \phi(v),$$

en particulier

$$\rho(x, t) = \sum_{v \in V} g(x, t, v), \quad T(x, t) = \sum_{v \in V} g(x, t, v) v \otimes v.$$

Le terme intégral $Q(g)$ est remplacé comme dans les autres modèles discrets par $C(g)$, en général un polynôme quadratique

$$C(g)(v) = \sum_{(v', v'_1) \in V \times V} a(v', v'_1)(g(v') g(v'_1) - g(v) g(v_1)),$$

où $a(v', v'_1) \geq 0$ n'est non nul que s'il existe $v_1 \in V$ vérifiant les égalités

$$v + v' = v_1 + v'_1, \quad \|v\|^2 + \|v'\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v'_1\|^2.$$

Enfin, l'opérateur linéaire ∇_v est discrétisé :

$$(X \cdot \nabla_v g)(v) \simeq X(v) \cdot \sum_{v_1} g(v_1) \alpha(v, v_1) =: (X \cdot Dg)(v).$$

Les vecteurs $\alpha(v, v_1)$ seront choisis de manière à respecter les symétries du modèle et à satisfaire les égalités suivantes pour tout g satisfaisant $\langle gv \rangle = 0$:

$$\langle Dg \rangle = 0, \quad \langle v \otimes Dg \rangle = - \langle g \rangle I_d, \tag{2.8}$$

$$\langle v \otimes v \otimes Dg \rangle = 0. \tag{2.9}$$

Écrivons maintenant sous sa forme définitive le modèle discret :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\partial_t + v_0 \cdot \nabla_x) v_0 + \nabla_x \cdot T = 0 \\ (\partial_t + (v + v_0) \cdot \nabla_x) g(v) + \left(\frac{1}{\rho} \nabla_x \cdot T - (v \cdot \nabla_x) v_0 \right) \cdot Dg(v) = C(g)(v), \\ \rho = \langle g \rangle, \quad T = \langle gv \otimes v \rangle, \\ \langle gv \rangle \equiv 0. \end{array} \right. \quad \forall v \in V, \tag{2.10}$$

Bien entendu, la contrainte $\langle gv \rangle \equiv 0$ ne concerne que la condition initiale $g(x, 0, \dots)$ et les éventuelles conditions aux limites, puisqu'en raison de (2.8) et (2.9), elle est préservée au cours du temps. On notera aussi que, grâce à (2.8), la conservation de la masse (2.5) a toujours lieu. La construction effective d'un modèle discret revient donc à trouver un opérateur linéaire D sur \mathbb{R}^V satisfaisant (2.8) et (2.9). Nous demanderons de plus qu'il soit invariant sous l'action du groupe G des isométries qui préservent V :

$$\alpha(\theta v, \theta v_1) = \theta \alpha(v, v_1), \quad \forall \theta \in G, \quad \forall v, v_1 \in V. \quad (2.11)$$

Remarques :

1) Le système (2.10) est constitué de $d + |V|$ équations d'évolutions compatibles avec d contraintes linéaires. On le considérera donc comme un système quasi-linéaire du premier ordre en $|V|$ inconnues seulement. C'est avec cette restriction qu'on étudiera son type au paragraphe IV.

2) La condition (2.8) s'écrit encore

$$\sum_{v \in V} \alpha(v, v_1) = 0, \quad \forall v_1 \in V, \quad (2.12)$$

$$\sum_{v \in V} v \otimes \alpha(v, v_1) = -I_d, \quad \forall v_1 \in V. \quad (2.13)$$

Dans le cas où G est transitif (ce sont des modèles sans température), il suffit d'écrire (2.12) et (2.13) pour un vecteur v_1 particulier ; sinon il suffit de choisir un vecteur v_1 par orbite.

3. LE MODÈLE DE BROADWELL

3.1. Rappels

On se place pour simplifier en dimension $d = 2$ et on choisit $V = \{\pm e_1, \pm e_2\}$ comme dans le modèle de Broadwell. Rappelons la forme habituelle, qui ne respecte pas l'invariance Galiléenne

$$\begin{cases} (\partial_t + \partial_x) f_1 = N(f_i f_{-i} - f_1 f_{-1}) = : N\Delta, \\ (\partial_t - \partial_x) f_{-1} = N\Delta, \\ (\partial_t + \partial_x) f_i = -N\Delta, \\ (\partial_t - \partial_y) f_{-i} = -N\Delta. \end{cases}$$

On a assimilé \mathbb{R}^2 au plan complexe, avec $e_1 = 1$, $e_2 = i$, et on a noté $f_v = f(v)$.

3.2. Invariance

Le groupe d'invariance G est le groupe diédral D_4 à 8 éléments. La condition (2.11) ramène le calcul des vecteurs $\alpha(v, v_1)$ à celui des vecteurs $\alpha(v, 1)$, notés $\alpha(v)$. De plus il impose $\alpha(\bar{v}) = \overline{\alpha(v)}$, en particulier $\alpha(\pm 1)$ sont réels, c'est-à-dire parallèles à e_1 . Il suffit alors d'écrire (2.12) et (2.13) pour $v_1 = 1$, ainsi que (2.9). Les deux premières égalités donnent

$$1 \otimes (\alpha(1) - \alpha(-1)) + i \otimes (\alpha(i) - \overline{\alpha(i)}) = -I_2,$$

$$\alpha(1) + \alpha(-1) + \alpha(i) + \alpha(-i) = 0.$$

On en tire $\text{Im } \alpha(i) = -\frac{1}{2}$, $\alpha(\pm 1) = \mp \frac{1}{2} - \text{Re } \alpha(i)$. Enfin,

$$\begin{aligned} \langle Dgv \otimes v \rangle &= \\ &= (g(1) - g(-1))\{1 \otimes 1(\alpha(1) + \alpha(-1)) + i \otimes i(\alpha(i) + \alpha(-i))\} \\ &\quad + (g(i) - g(-i))\{i \otimes i(\alpha(1) + \alpha(-1))i + 1 \otimes 1(\alpha(i) + \alpha(-i))i\} \end{aligned}$$

est toujours nul quand $\langle gv \rangle = 0$, puisque cela signifie $g(1) = g(-1)$, $g(i) = g(-i)$. Il semble donc qu'à première vue, les coefficients du modèle de type Broadwell ne soient pas déterminés de manière unique. Le modèle lui-même est en fait complètement déterminé car l'opérateur D , restreint aux fonctions de \mathbb{R}^V qui satisfont $\langle gv \rangle = 0$, ne dépend pas du choix de $\text{Re } \alpha(i)$. Par exemple :

$$Dg(1) = -g(i) - g(1) = -\frac{\rho}{2}$$

et ainsi de suite. Finalement, notre modèle s'écrit à l'aide des inconnues $v_0(x, t)$, $g_1(x, t) = : g(x, t, 1)$, $g_i(x, t)$, sous la forme :

$$\begin{aligned} \rho (\partial_t + v_0 \cdot \nabla_x) v_0 + 2 \begin{pmatrix} \partial_1 g_1 \\ \partial_2 g_i \end{pmatrix} &= 0, \\ (\partial_t + v_0 \cdot \nabla_x) g_1 + \frac{\rho}{2} \partial_1 v_{01} &= N (g_i^2 - g_1^2), \\ (\partial_t + v_0 \cdot \nabla_x) g_i + \frac{\rho}{2} \partial_2 v_{02} &= N (g_1^2 - g_i^2). \end{aligned}$$

3.3. Évolution d'une ligne de tourbillon

Considérons une condition initiale $v_0(\cdot, 0)$, $g(\cdot, 0, v)$ qui ne dépende que d'une variable $x \cdot \xi$. La solution attendue aura la forme « onde plane », c'est-à-dire ne dépendra que de $x \cdot \xi$ et t . Voyons le cas où

$x \cdot \xi = z = : x_1 + x_2$. Notons $G(x_1 + x_2, t, v) = g(x, t, v)$,
 $q(x_1 + x_2, t) = v_0(x, t)$, ainsi que $u = q_1 + q_2$, $w = q_2 - q_1$ et $H = G_2 - G_1$.
 On a $\rho = 2(G_1 + G_2)$. Il vient le système découplé en partie

$$\partial_t \rho + \partial_z(\rho u) = 0, \quad \rho(\partial_t + u \partial_z) u + \partial_z \rho = 0, \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} \rho(\partial_t + u \partial_x) w + 2 \partial_x H = 0 \\ (\partial_t + u \partial_x) h + \frac{\rho}{2} \partial_x w = -NH\rho. \end{cases} \quad (3.15)$$

Une ligne de tourbillon à l'instant initial est donnée par

$$v_0(x, 0) = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(z) \\ -\operatorname{sgn}(z) \end{pmatrix}, \quad G_1(\cdot, 0) = G_2(\cdot, 0) = \text{Cte}.$$

De (3.14), on déduit que $u \equiv 0$ et $\rho = \text{Cte}$. Ainsi, (w, H) obéit au système linéaire à coefficients constants

$$\partial_t w + \frac{2}{\rho} \partial_z H = 0, \quad \partial_t H + \frac{\rho}{2} \partial_z w = NH\rho.$$

La discontinuité initiale en $z = 0$ se sépare en deux discontinuités en $z = \pm t$ dont les amplitudes sont de l'ordre de $\exp -\frac{Nt\rho}{2}$ pour t grand, tandis que la solution est régulière dans la zone $|z| < t$.

Remarque : Le système (3.14), (3.15) est hyperbolique, on verra au paragraphe suivant que c'est toujours le cas, et ses vitesses de propagation $u \pm 1$ sont de multiplicité constante égale à 2. On en déduit que ce système ne peut pas s'écrire sous forme conservative $\partial_t X + \nabla_x \cdot F(X) = M(X)$, d'après le résultat ci-dessous, dû indépendamment à Boillat [Bo], Guès [Gs] et Freistuhler [Fr] :

THÉORÈME 3.1 (Boillat 1972) : *Supposons que la matrice Jacobienne $D_X F$ ait une valeur propre $\lambda(X)$ de multiplicité constante $m \geq 2$, alors $D_X \lambda$ s'annule sur $\text{Ker}(D_X F - \lambda)$ c'est-à-dire que λ est « linéairement dégénérée ».*

Or on vérifie aisément que ce n'est pas le cas pour (3.14), (3.15).

Plus généralement, on ne peut donc pas espérer que nos modèles puissent être mis sous forme conservative. C'est évidemment un obstacle sérieux à leur utilisation au-delà de l'apparition d'ondes de chocs.

On aurait pu considérer la solution onde plane de la forme $v_0 = v_0(x_2, t)$, $g = g(x_2, t, v)$. Mais pour une donnée initiale satisfaisant $v_{02} = 0$, $g_1 = g_2 = \text{Cte}$, la solution aurait été indépendante du temps, la ligne de tourbillon ne s'étalant pas, au contraire du cas précédent.

4. HYPERBOLICITÉ

4.1. Éléments propres

Le modèle général (2.10) est quasi-linéaire du premier ordre :

$$(\partial_t + A(v_0, g; \nabla_x)) \begin{pmatrix} v_0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C(g) \end{pmatrix} .$$

Le problème de Cauchy est linéairement bien posé si le système hyperbolique, c'est-à-dire si la matrice carrée $A(v_0, g; \xi)$ est diagonalisable à valeurs propres réelles pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. En fait, nous ne sommes concernés que par le spectre de la restriction de $A(v_0, g; \xi)$ au sous-espace invariant X de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^V$ défini par

$$X = \{ (w, G) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^V ; \langle Gv \rangle = 0 \} .$$

On a $A(\xi) = (v_0 \cdot \xi)I + B(\xi)$, où

$$B(\xi) \begin{pmatrix} w \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \langle v \cdot \xi Gv \rangle \\ -v \cdot \xi Dg \cdot w + v \cdot \xi G + \frac{1}{\rho} Dg \cdot \langle v \cdot \xi Gv \rangle \end{pmatrix} .$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres sont donc les solutions de

$$\langle v \cdot \xi Gv \rangle = \lambda \rho w , \tag{4.16}$$

$$-v \cdot \xi Dg \cdot w + v \cdot \xi G + \frac{1}{\rho} Dg \cdot \langle v \cdot \xi Gv \rangle = \lambda G . \tag{4.17}$$

En éliminant, il vient

$$(\lambda - v \cdot \xi)(G - Dg \cdot w) = 0 .$$

Fixons $\xi \in \mathbb{R}^d$ et définissons $V_\lambda = \{v \in V ; v \cdot \xi = \lambda\}$. Alors $G = H + Dg \cdot w$ où $\text{Supp } H \subset V_\lambda$. La contrainte $\langle Gv \rangle = 0$ fournit

$$w = \frac{1}{\rho} \langle Hv \rangle , \quad G = H + \frac{1}{\rho} Dg \cdot \langle Hv \rangle . \tag{4.18}$$

Réciproquement, si $H \in \mathbb{R}^V$ avec $\text{Supp } H \subset V_\lambda$ est donné, et si w, G sont définis par (4.18), alors (4.16) et (4.17) sont satisfaits car

$$\begin{aligned} \langle v \cdot \xi Gv \rangle &= \langle v \cdot \xi Hv \rangle + \frac{1}{\rho} \langle v \cdot \xi Dg \otimes v \rangle \langle Hv \rangle \\ &= \langle \lambda Hv \rangle + 0 = \lambda \rho w , \end{aligned}$$

en utilisant (2.11).

Ainsi, les valeurs propres de $B(\xi)$ sont les nombres de la forme $v \cdot \xi$ où $v \in V$. La dimension de $\text{Ker}(B(\xi) - \lambda I)$ est égale au cardinal de V_λ . La somme de ces dimensions est égale au cardinal de V , c'est-à-dire à $\dim X$ de sorte que $B(\xi)$, restreint à X est diagonalisable. Finalement :

THÉORÈME 4.1 : *Les modèles (2.10) sont hyperboliques. Dans la direction ξ les vitesses de propagation sont de la forme $(v_0 + v) \cdot \xi$, $v \in V$, de multiplicité égale au nombre d'éléments de V permettant cette écriture.*

4.2. Nature des champs caractéristiques

Pour comprendre la nature des phénomènes de propagation, même en ce qui concerne les ondes planes, il est essentiel de déterminer si les champs caractéristiques sont linéairement dégénérés ou vraiment non linéaires, c'est-à-dire si $d_{(v_0, g)} \lambda$ s'annule sur $\text{Ker}(A(\xi) - \lambda I)$ ou non, avec $\lambda = (v_0 + v) \cdot \xi$.

Or $d_{(v_0, g)} \lambda = \xi \cdot dv_0$, ce qui donne, appliqué à (w, G) donné par (4.18) :

$$d\lambda \cdot \begin{pmatrix} w \\ G \end{pmatrix} = \xi \cdot w = \frac{1}{\rho} \langle Hv \cdot \xi \rangle = \frac{\lambda - v_0 \cdot \xi}{\rho} \langle H \rangle .$$

THÉORÈME 4.2 : *La valeur propre $\lambda = (v_0 + v) \cdot \xi$, $v \in V$, n'est linéairement dégénérée que dans les directions ξ orthogonales à v .*

4.3. Propagation

Lorsqu'on applique les méthodes de l'optique géométrique à (2.10), on constate tout d'abord que l'équation eikonale est linéaire, la v -ième phase satisfaisant

$$\partial_t \phi_v + (v_0 + v) \cdot \nabla_x \phi_v = 0 .$$

Si l'état qu'on perturbe est au repos, la phase est donc définie globalement, par $\phi_v(x, t) = \phi_v(x - tv, 0)$, il n'y a pas de phénomène de focalisation. La création de singularité en temps fini semble donc un fait purement monodimensionnel, dû à la vraie non-linéarité des champs caractéristiques.

La seconde remarque est l'apparition de résonances : il y a toujours des directions ξ dans lesquelles les équations $\langle m \rangle = 0$, $\langle mv \cdot \xi \rangle = 0$ ont des solutions à coefficients entiers. Les phases $\phi_v(x, t) = \xi \cdot (x - t(v_0 + v))$ résonnent alors puisque

$$\sum_{v \in V} m(v) \phi_v = 0 .$$

5. LIMITES THERMODYNAMIQUES

La limite thermodynamique d'un système (2.10) s'obtient lorsque $N \rightarrow \infty$, $C(g) = NC_0(g)$. En suivant Bardos, Golse et Levermore [BGL], on suppose qu'un théorème H a lieu, qui force $g(x, t, \cdot)$ à tendre vers une Maxwellienne, solution de $C_0(g) = 0$. Cette Maxwellienne dépend de paramètres internes tels que la densité $\rho(x, t)$, la température $\theta(x, t)$. On détermine l'évolution de ces paramètres et de v_0 en utilisant les lois de conservation qu'on peut déduire de (2.10). On en connaît au moins $d + 1$, soit (2.5) et (2.6). En fait, si les coefficients vectoriels $\alpha(v, v_1)$ satisfont la condition raisonnable supplémentaire (lorsque $\langle gv \rangle = 0$) $\langle \|v\|^2 v \otimes Dg \rangle = -2\rho eI - 2T$, on aura aussi la loi de conservation

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} \|v_0\|^2 \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} \|v_0\|^2 \right) v_0 \right) + \\ + \operatorname{div} (Tv_0) + \operatorname{div} \left\langle \frac{1}{2} g \|v\|^2 v \right\rangle = 0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

où $\rho e(x, t) = \frac{1}{2} \langle g \|v\|^2 \rangle$ est l'énergie interne.

5.1. Le modèle de type Broadwell

Ici, (5.19) n'a pas d'utilité puisque $e = \frac{1}{2} \rho$. Les Maxwelliennes sont les distributions (g_1, g_i) telles que $g_1 = g_i = \frac{1}{4} \rho$. La limite thermodynamique est complètement décrite par (2.5) et (2.6) avec

$$\begin{aligned} T = \langle gv \otimes v \rangle &= \frac{\rho}{2} (1 \otimes 1 + i \otimes i) = \frac{\rho}{2} I : \\ \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div} (\rho v_0) = 0, \\ \partial_t (\rho v_0) + \operatorname{div} (\rho v_0 \otimes v_0) + \frac{1}{2} \nabla \rho = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

C'est l'équation d'Euler d'un gaz parfait isotherme.

5.2. Le modèle à 8 vitesses ($d = 2$)

On prend $V = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_1 \pm e_2\}$. Ce modèle est avec température, on a

$$\frac{1}{2} \rho(x, t) \leq e(x, t) \leq \rho(x, t).$$

Soit $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = -e_1$, $v_4 = -e_2$, $v_5 = e_1 + e_2$, $v_6 = -e_1 + e_2$, $v_7 = -e_1 - e_2$, $v_8 = e_1 - e_2$, et g_1, \dots, g_8 les densités correspondantes. La contrainte $\langle gv \rangle = 0$ s'écrit

$$\begin{aligned} g_2 + g_5 + g_6 &= g_4 + g_7 + g_8, \\ g_1 + g_5 + g_8 &= g_3 + g_6 + g_7. \end{aligned} \quad (5.20)$$

L'étude des collisions qui mettent en jeu les particules de vitesses v_1 et v_3 montre que les Maxwelliennes satisfont

$$\begin{aligned} \gamma(g_2 g_4 - g_1 g_3) + \delta(g_3(g_5 + g_8) - g_1(g_6 + g_7)) &= 0, \\ \gamma(g_2 g_4 - g_1 g_3) + \delta(g_1(g_6 + g_7) - g_3(g_5 + g_8)) &= 0, \end{aligned}$$

où $\gamma, \delta > 0$ sont des nombres qui représentent des probabilités de collision frontale ou à 135 degrés. On a donc

$$g_1 g_3 = g_2 g_4, \quad g_3(g_5 + g_8) = g_1(g_6 + g_7). \quad (5.21)$$

De (5.21) et (5.20), on tire $g_1 = g_3$ et par symétrie $g_2 = g_4$. De (5.21) il vient alors $g_1 = g_2$ qu'on note \bar{g} . L'étude des collisions qui mettent en jeu g_5, \dots, g_8 donne alors ($\varepsilon > 0$)

$$\begin{aligned} \varepsilon(g_6 g_8 - g_5 g_7) + \delta \bar{g}(g_6 + g_8 - 2 g_5) &= 0, \\ \varepsilon(g_5 g_7 - g_6 g_8) + \delta \bar{g}(g_5 + g_7 - 2 g_6) &= 0, \\ \varepsilon(g_6 g_8 - g_5 g_7) + \delta \bar{g}(g_6 + g_8 - 2 g_7) &= 0, \\ \varepsilon(g_5 g_7 - g_6 g_8) + \delta \bar{g}(g_5 + g_7 - 2 g_8) &= 0. \end{aligned}$$

On en tire $g_5 = g_7$, $g_6 = g_8$, puis $(\varepsilon(g_5 + g_6) + 2 \delta \bar{g})(g_6 - g_5) = 0$. Le premier facteur étant strictement positif, on a $g_5 = g_6$, noté \bar{h} . La limite thermodynamique est donc décrite par v_0 et deux paramètres internes, la densité $\rho = 4(\bar{g} + \bar{h})$ et l'énergie $e = 2 \bar{g} + 4 \bar{h}$. Leur évolution est décrite par (2.5), (2.6), (5.19), avec $T = \langle gv \otimes v \rangle = \rho e I$ et $\langle g \|v\|^2 v \rangle = 0$. C'est donc l'équation d'Euler d'un gaz parfait polytropique de coefficient adiabatique $\gamma = 2$.

Ces limites sont évidemment beaucoup plus réalistes que lorsqu'on part d'un modèle sans invariance Galiléenne.

RÉFÉRENCES

[Ga] R. GATIGNOL, 1975, Théorie cinétique des gaz à répartition discrète des vitesses, *Lecture Notes in Physics 36*, Springer Verlag.

M² AN Modélisation mathématique et Analyse numérique
Mathematical Modelling and Numerical Analysis

- [GLPS] F. GOLSE, P.-L. LIONS, B. PERTHAME, R. SENTIS, 1988, Regularity of the moments of the solution of a transport equation, *J. of Funct. Anal.*, 76, 110-125.
- [DiL] R. DiPERNA, P.-L. LIONS, 1989, On the Cauchy problem for the Boltzmann equation : global existence and weak stability results, *Annals of Maths*, 130, 321-366.
- [Ko] J. KOELMAN, 1991, A simple lattice Boltzmann scheme for Navier-Stokes fluid flow, *Europhysic Letters*, 15, 603-607.
- [Bo] G. BOILLAT, 1972, Chocs caractéristiques, *Comptes Rendus Acad. Sc.*, 274, 1018-1021.
- [Gs] O. GUÈS, 1989, *Solutions oscillantes de systèmes hyperboliques non linéaires*, Journées EDP, St Jean-de-Monts, 1989, École Polytechnique, exposé IX.
- [Fr] H. FREISTUHLER, 1990, *Linear degeneracy and shock waves*, Preprint, Aachen.
- [BGL] C. BARDOS, F. GOLSE, D. LEVERMORE, 1991, Fluid dynamic limits of discrete velocity kinetic equations, in *Advances in kinetic theory and continuum mechanics*, Gatignol, Soubbaramayer eds. Springer Verlag.