M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique

L. Paoli
M. Schatzman

Mouvement à un nombre fini de degrés de liberté avec contraintes unilatérales : cas avec perte d'énergie

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 27, n° 6 (1993), p. 673-717
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_6_673_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 27, n° 6, 1993, p. 673-717)

MOUVEMENT À UN NOMBRE FINI DE DEGRÉS DE LIBERTÉ AVEC CONTRAINTES UNILATÉRALES : CAS AVEC PERTE D'ÉNERGIE (*)

par L. PAOLI [1] et M. SCHATZMAN [1]

Communiqué par R. TEMAM

1. INTRODUCTION ET HYPOTHÈSES

Considérons f une fonction de $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, continue, lipschitzienne par rapport à ses deux dernières variables, de constante de Lipschitz L, et K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, d'intérieur non vide, à bord de classe C^2. La fonction indicatrice de K, ψ_K, définie par

$$\psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \in K\,, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une fonction convexe, semi-continue inférieurement, propre, c'est-à-dire non identiquement égale à $+\infty$ et de domaine

$$\text{dom}\,(\psi_K) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \psi_K(x) < +\infty\right\} = K\,.$$

Nous proposons une modélisation du mouvement d'un système à nombre fini de degrés de liberté, sujet à des contraintes convexes. Quand le point représentatif du système heurte le bord du convexe des contraintes K la composante normale de la vitesse est renversée et multipliée par un coefficient de restitution $e \in\,]0, 1]$, alors que la composante tangentielle est conservée. La formulation mathématique d'un tel modèle est

$$\begin{cases} \ddot{u} + \partial\psi_K(u) \ni f(t, u, \dot{u}) \\ \dot{u}(t+0) = -e\dot{u}_N(t-0) + \dot{u}_T(t-0) \\ \qquad \text{pour tout } t \text{ tel que } u(t) \in \partial K\,. \end{cases}$$

(*) Manuscrit reçu le 12 juin 1992, révisé le 22 mars 1993.

[1] Laboratoire d'Analyse Numérique, URA 740 CNRS, Université Lyon 1, 69622 Villeurbanne Cedex, France.

Nous démontrons un théorème général d'existence. Pour cela nous introduisons un système pénalisé, paramétré par un réel positif, λ destiné à tendre vers 0. Ce système ne satisfait pas les conditions du théorème d'existence de Carathéodory pour les systèmes différentiels. Nous devons donc mettre en œuvre une démonstration *ad hoc*, qui est d'ailleurs très proche de la preuve du théorème de Carathéodory. Nous obtenons alors des estimations d'énergie uniformes en λ, qui ne suffisent pas à passer à la limite. En effet, le terme de pénalisation, s'il n'est pas nul, est la somme de deux termes normaux ; l'un d'eux est un multiple de signe constant du vecteur normal, mais pas l'autre. La situation est donc plus délicate que dans [Sc] et [Pa]. Cette difficulté est surmontée au moyen de divers lemmes techniques, qui permettent d'affirmer que le terme de pénalisation est de masse bornée et donc de prouver la convergence. Finalement, par une étude locale, nous montrons que les composantes normale et tangentielle sont transmises à travers les chocs conformément aux lois imposées.

2. NOTATIONS ET RAPPELS D'ANALYSE CONVEXE

Soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$. On définit le cône tangent à K en x, $x \in \mathbb{R}^n$, par :

$$T_K(x) = \overline{\cup_{\lambda > 0} \lambda (K - x)}$$

et, pour $x \in K$, on appelle cône normal à K en x l'ensemble défini par :

$$N_K(x) = T_K(x)^{\perp} = \{y : \forall z \in T_K(x),\ (y, z) \leq 0\} .$$

L'hypothèse de régularité C^2 de ∂K signifie de manière plus précise que, pour tout $x \in \partial K$, il existe un unique vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$, $\nu(x)$, tel que $N_K(x) = \mathbb{R}^+ \nu(x)$ et que l'application $x \mapsto \nu(x)$ de ∂K dans $\mathbb{R}^n$ est de classe C^1, donc en particulier continue pour la topologie induite par $\mathbb{R}^n$ sur ∂K. On montre de manière classique qu'alors ∂K est une variété plongée de $\mathbb{R}^n$ [BeGo].

Le sous-différentiel $\partial \psi_K$ généralise la notion de différentielle. Il est défini sur K par :

$$\partial \psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \in \operatorname{Int}(K), \\ N_K(u) & \text{si} \quad u \in \partial K . \end{cases}$$

C'est un opérateur multivoque, maximal monotone, vérifiant la propriété :

$$\forall u \in K \quad \partial \psi_K(u) = \{z \in \mathbb{R}^n : 0 \geq (z, y)\ \forall y\ t.q\ u + y \in K\} .$$

On note P_K la projection sur K ; c'est une contraction de $\mathbb{R}^n$ ainsi que $I - P_K$. Posons $\varphi = \psi_K$ et, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda > 0$:

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{|u - P_K(u)|^2}{2\lambda}.$$

Cette fonction est différentiable et sa différentielle est définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n \quad \partial\varphi_\lambda(u) = \frac{u - P_K(u)}{\lambda}.$$

C'est l'approximation de Yosida de $\partial\varphi$. De plus, $\varphi_\lambda(u) \leqslant \varphi(u)$ et $\lim_{\lambda \to 0} \varphi_\lambda(u) = \varphi(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

Tous ces résultats peuvent être trouvés dans [R2], [Br2].

Notations :

Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ est noté (x, y), la norme euclidienne $|x|$. La norme d'une fonction $f \in L^\infty([0, \tau], \mathbb{R}^n)$, avec $0 < \tau \leqslant T$ est donnée par :

$$|f|_{\infty, \tau} = \inf \{M : |f(t)| \leqslant M \text{ pour presque tout } t \in [0, \tau]\}.$$

Si $\tau = T$, on notera plus simplement $|f|_\infty$. La dualité entre une mesure $\mu \in M^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ et une fonction $g \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$ est définie par :

$$\langle \mu, g \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \mu_j, g_j \rangle.$$

3. ÉNONCÉ DU THÉORÈME D'EXISTENCE

Nous supposons que la position initiale u_0 vérifie :

$$u_0 \in K. \tag{1}$$

Nous chercherons une solution telle que $u(t)$ soit dans K pour tout $t \in [0, T]$. Si u_0 est dans l'intérieur de K, il n'y a pas de discontinuité due à la contrainte et nous demandons que la vitesse initiale soit égale à un certain u_1 donné. Si u_0 est sur la frontière de K, la dérivée à droite $\dot{u}(0+0)$ de u en l'instant initial est nécessairement dans le cône tangent en u_0 à K. Par contre, il est physiquement réaliste de se donner une vitesse initiale telle qu'il y ait un saut de la vitesse à l'instant $t = 0$. Cela revient à lancer le point représentatif du système contre la paroi que représente le bord de K. Dans ce cas, $u_1 \in -T_K(u_0)$ car, ∂K étant régulier, on a $T_K(u_0) \cup (-T_K(u_0)) = \mathbb{R}^n$. On supposera donc :

$$u_1 \in T_K(u_0) \cup (-T_K(u_0)) = \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

DÉFINITION 1 : *Soit une fonction f de $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qu'on suppose continue par rapport à l'ensemble de ses arguments et lipschitzienne par rapport à ses deux dernières variables, uniformément par rapport à la première. Soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, d'intérieur non vide, à bord régulier. On dit qu'une fonction u de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^n$ est une solution de*

$$\begin{cases} \ddot{u} + \partial\psi_K(u) \ni f(t, u, \dot{u}), \\ \dot{u}(t+0) = -e\dot{u}_N(t-0) + \dot{u}_T(t-0) \\ \qquad \text{pour tout } t \text{ tel que } u(t) \in \partial K, \end{cases} \tag{3}$$

où $\dot{u}_N$ et $\dot{u}_T$ sont les projections du vecteur $\dot{u}$ respectivement sur $\mathbb{R}\nu(u(t))$ et $(\mathbb{R}\nu(u(t)))^\perp$, avec les conditions initiales (1), (2) *si elle vérifie les assertions suivantes :*

u est lipschitzienne et $\dot{u}$ est à variation bornée, (4)

$u(t) \in K$, pour tout $t \in [0, T]$, (5)

pour toute fonction v continue, à valeurs dans K (6)

$$0 \geq \langle f(t, u, \dot{u}) - \ddot{u}, v - u \rangle,$$

les conditions initiales sont satisfaites au sens suivant (7)

$$u(0) = u_0$$

et

$$\begin{cases} \dot{u}(0+0) = u_1 & si \quad u_1 \in T_K(u_0), \\ \dot{u}(0+0) = -eu_{N,1} + u_{T,1} & si \quad u_1 \notin T_K(u_0), \end{cases}$$

où $u_{N,1}$ et $u_{T,1}$ sont les projections du vecteur u_1 respectivement sur $\mathbb{R}\nu(u_0)$ et $(\mathbb{R}\nu(u_0))^\perp$.

Pour démontrer l'existence d'une solution pour le système (3) nous utilisons une méthode de pénalisation. Nous définissons un nombre $\varepsilon \in [0, 1[$ par

$$\varepsilon = \frac{-\ln(e)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(e))^2}}, \tag{8}$$

ce qui équivaut à

$$e = \exp\left(-\frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right), \tag{9}$$

et une fonction G par

$$G(v, w) = \begin{cases} \dfrac{(v, w)\, v}{|v|^2} & \text{si} \quad v \text{ non nul,} \\ 0 & \text{si} \quad v = 0\,. \end{cases}$$

Nous avons alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2 : *Soit f une fonction de $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, continue, lipschitzienne par rapport à ses deux dernières variables, soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, d'intérieur non vide, à bord régulier et soient u_0 et u_1 satisfaisant* (1) *et* (2). *Alors le système*

$$\begin{cases} \ddot{u} + \partial\psi_K(u) \ni f(t, u, \dot{u})\,, \\ \dot{u}(t+0) = -\, e\dot{u}_N(t-0) + \dot{u}_T(t-0) \\ \qquad \text{pour tout } t \text{ tel que } u(t) \in \partial K\,, \end{cases} \tag{3}$$

admet une solution au sens de la définition 1. *Cette solution est obtenue comme limite forte dans $W^{1,p}([0, T], \mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$ et limite faible* dans $W^{1,\infty}([0, T], \mathbb{R}^n)$, quand λ tend vers 0, d'une sous-suite de la suite des solutions de*

$$\begin{cases} \ddot{u}_\lambda + \dfrac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\, G(u_\lambda - P_K(u_\lambda), \dot{u}_\lambda) + \dfrac{u_\lambda - P_K(u_\lambda)}{\lambda} = f(t, u_\lambda, \dot{u}_\lambda) \\ u_\lambda(0) = u_0\,, \\ \dot{u}_\lambda(0) = u_1\,. \end{cases} \tag{10}$$

4. ÉTUDE DU PROBLÈME PÉNALISÉ

Le système (10) est construit en remplaçant la frontière rigide de K par une frontière viscoélastique. Le terme $(u_\lambda - P_K(u_\lambda))/\lambda$ correspond à une force de rappel élastique et le terme $(2\,\varepsilon/\sqrt{\lambda})\, G(u_\lambda - P_K(u_\lambda), \dot{u}_\lambda)$ correspond à un frottement visqueux. Puisque λ est un paramètre destiné à tendre vers 0, la force ramenant le point représentatif du système dans K devient de plus en plus importante : à la limite, il ne peut plus quitter K. Le coefficient ε a été ajusté de façon que la condition de réflexion des vitesses sur le bord de K soit réalisée à la limite.

La pertinence de cette approche peut être vérifiée sur un exemple très simple : $n = 1$, $f = 0$ et $K = \mathbb{R}^+$. Le système (3) s'écrit :

$$\begin{cases} \ddot{u} + \partial\psi_{\mathbb{R}^+}(u) \ni 0\,, \\ \dot{u}(t+0) = -\, e\dot{u}(t-0) \quad \text{pour tout } t \text{ tel que } u(t) = 0\,. \end{cases} \tag{11}$$

Physiquement, le mouvement étudié est celui d'un point matériel heurtant un obstacle horizontal parfaitement rigide en l'absence de force extérieure. La pénalisation conduit à résoudre

$$\ddot{u}_\lambda + \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\,\dot{u}_\lambda\ \mathrm{sgn}^-(u_\lambda) + \frac{u_\lambda}{\lambda}\ \mathrm{sgn}^-(u_\lambda) = 0\,, \tag{12}$$

avec
$$\mathrm{sgn}^-(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \geqslant 0\,, \\ 1 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Si $u_\lambda(0) = a > 0$ et $\dot{u}_\lambda(0) = b < 0$, seules conditions initiales intéressantes, on définit

$$\tau = -\,a/b\,, \quad \tau_\lambda = \tau + \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,,$$

et on peut calculer analytiquement u_λ :

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} a + bt & \text{pour } t \in [0, \tau]\,, \\ e^{-\varepsilon(t-\tau)/\sqrt{\lambda}}\sin\left[(t-\tau)\dfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{\lambda}}\right]\dfrac{b\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} & \text{pour } t \in [\tau, \tau_\lambda]\,, \\ -\exp\left(-\dfrac{\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) b(t-\tau_\lambda) & \text{pour } t \in [\tau_\lambda, +\infty[\,. \end{cases}$$

Il est clair que $(u_\lambda)_\lambda$ converge vers u définie par :

$$u(t) = \begin{cases} a + bt & \text{pour} \quad t \in [0, \tau]\,, \\ -\,eb(t-\tau) & \text{pour} \quad t \in [\tau, +\infty[\,, \end{cases}$$

en vertu des relations (8) et (9) entre e et ε ; u est précisément la solution de (11) pour les conditions initiales $u(0) = a > 0$ et $\dot{u}(0) = b < 0$.

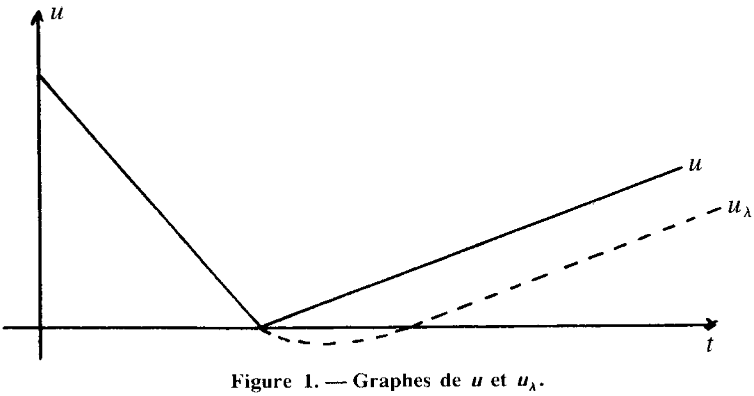

Figure 1. — Graphes de u et u_λ.

L'existence d'une solution pour le problème pénalisé n'est pas un résultat immédiat : les hypothèses du théorème de Carathéodory ne sont pas satisfaites. On a :

THÉORÈME 3 : *Soit f une fonction de $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, continue, lipschitzienne par rapport à ses deux dernières variables, soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, d'intérieur non vide, à bord régulier et u_0, u_1 deux points de K et $\mathbb{R}^n$ respectivement. Soit $\lambda > 0$. L'équation*

$$\ddot{u} + \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} G(u - P_K(u), \dot{u}) + \frac{u - P_K(u)}{\lambda} = f(t, u, \dot{u}) \tag{13}$$

avec les conditions initiales $u(0) = u_0$ et $\dot{u}(0) = u_1$ admet une solution $u \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ telle que $\dot{u}$ est absolument continue sur $[0, T]$, $\ddot{u}$ existe presque partout et l'égalité (13) a lieu presque partout.

Preuve : Supposons que le théorème soit démontré. Posons $v = \dot{u}$ et

$$V(t) = u_0 + \int_0^t v(s)\, ds\,, \quad g(v(t)) = V(t) - P_K(V(t)) \quad \forall t \in [0, T]\,.$$

Alors (13) s'écrit :

$$\dot{v} + \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} G(g(v), v) + \frac{1}{\lambda} g(v) = f(t, V, v)\,,$$

c'est-à-dire

$$\dot{v} = F(t, v)\,, \tag{14}$$

avec

$$F(t, v(t)) = f(t, V(t), v(t)) - \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} G(g(v(t)), v(t)) - \frac{1}{\lambda} g(v(t))\,. \tag{15}$$

On est ramené à une équation intégro-différentielle du premier ordre en v.

Le théorème de Carathéodory [CoLe] donne un résultat d'existence pour un système différentiel $\dot{u} = \phi(t, u)$ où la fonction $u \mapsto \phi(t, u)$ est continue pour presque tout t. Ici il n'en est rien, la fonction $F(t, v)$ est discontinue pour $g(v) = 0$. Malgré tout, nous nous inspirons de la démonstration de ce théorème pour établir l'existence locale d'une solution puis, par une inégalité d'énergie, nous montrons l'existence globale.

Existence locale d'une solution

Commençons par montrer un lemme décrivant certaines propriétés de F :

LEMME 4 : *Soit $v \in C^0([0, \tau], \mathbb{R}^n)$ avec $0 < \tau \leq T$. Alors $F(\,.\,, v) \in L^\infty([0, \tau], \mathbb{R}^n)$.*

Preuve : Soit $t \in [0, \tau]$. Puisque f est L-lipschitzienne par rapport à ses deux dernières variables, on a :

$$|f(t, V(t), v(t))| \leqslant |f(t, u_0, 0)| + L\left|\int_0^t v(s)\,ds\right| + L|v(t)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(\,.\,, u_0, 0)|_\infty + L|v|_{\infty, \tau}(t+1)\,.$$

On sait que la fonction $I - P_K$ est une contraction donc :

$$|g(t)| = |(I - P_K)(V(t))| \leqslant |u_0 - P_K(u_0)| + \left|\int_0^t v(s)\,ds\right| \leqslant t|v|_{\infty, \tau}\,.$$

Enfin, on a $|G(w, w')| \leqslant |w'|$ quels que soient $w, w' \in \mathbb{R}^n$. D'où :

$$|G(g(v(t)), v(t))| \leqslant |v(t)| \leqslant |v|_{\infty, \tau}\,.$$

En rassemblant tous ces résultats, on obtient finalement :

$$|F(t, v(t))| \leqslant |f(\,.\,, u_0, 0)|_\infty + L|v|_{\infty, \tau}(t+1) + \frac{t|v|_{\infty, \tau}}{\lambda} + \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\,|v|_{\infty, \tau}\,. \tag{16}$$

Soient C_1 et C_2 les nombres définis par :

$$C_1 = |f(\,.\,, u_0, 0)|_\infty\,, \quad \text{et} \quad C_2 = LT + L + \frac{T}{\lambda} + \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\,. \tag{17}$$

Nous tirons de (16) la majoration

$$|F(t, v(t))| \leqslant C_1 + C_2|v|_{\infty, \tau} \leqslant C \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, \tau]\,, \tag{18}$$

avec $C = C_1 + C_2|v|_{\infty, \tau}$.

Enfin, $F(t, v)$ est composée de fonctions continues sur les ensembles $\{t : g(v(t)) \neq 0\}$ et $\{t : g(v(t)) = 0\}$. La fonction $g(v)$ est continue, donc ces ensembles sont mesurables et $F(t, v)$ est une fonction mesurable. La majoration (18) implique alors que $F(t, v) \in L^\infty[0, \tau], \mathbb{R}^n)$. ■

En remarquant que $L^\infty([0, \tau], \mathbb{R}^n) \subset L^1([0, \tau], \mathbb{R}^n)$, le lemme 4 implique que, pour tout $v \in C^0([0, \tau], \mathbb{R}^n)$, $F(\,.\,, v)$ est une fonction de $L^1([0, \tau], \mathbb{R}^n)$.

On définit une suite de fonctions de la façon suivante :

$$v_p(t) = \begin{cases} u_1 & \text{si} \quad t \in [-1/p, 0]\,, \\ u_1 + \displaystyle\int_0^t F(s, v_p(s - 1/p))\,ds & \text{si} \quad t \in [0, T]\,. \end{cases} \tag{19}$$

Cette définition a un sens en vertu du lemme 4. Le lemme suivant établit que $v_p(t)$ est majoré par un nombre fixé, sur un intervalle de taille minorée, le tout indépendamment de p.

LEMME 5 : *Il existe* $\tau \in]0, T]$ *tel que, pour tout* p, *on ait :*

$$\forall t \in [0, \tau] \quad |v_p(t)| \leqslant |u_1| + 1 .$$

Preuve : Par continuité de v_p il existe $\tau_p > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \tau_p]$ on ait $|v_p(t)| \leqslant |u_1| + 1$. Il s'agit donc de montrer que la suite $(\tau_p)_p$ admet un minorant strictement positif.

Pour tout $t \in [0, \tau_p]$, on a :

$$|v_p(t)| =$$

$$= \left| u_1 + \int_0^t F(s, v_p(s - 1/p))\, ds \right| \leqslant |u_1| + \int_0^t |F(s, v_p(s - 1/p))|\, ds .$$

En utilisant la majoration (18), on obtient :

$$|v_p(t)| \leqslant |u_1| + t(C_1 + C_2(|u_1| + 1)) \quad \forall t \in [0, \tau_p] .$$

Mais, pour tout $t \in [0, (C_1 + C_2(|u_1| + 1))^{-1}]$, on a :

$$|u_1| + t(C_1 + C_2(|u_1| + 1)) \leqslant |u_1| + 1 .$$

Donc il suffit de prendre :

$$\tau = \min \left\{ \frac{1}{C_1 + C_2(|u_1| + 1)}, T \right\}, \tag{20}$$

pour conclure la démonstration. ■

Considérons la restriction de v_p à l'intervalle $[0, \tau]$. C'est une fonction de $C^0([0, \tau], \mathbb{R}^n)$ qu'on notera encore v_p. De plus, la suite des $(v_p)_p$ est bornée dans $C^0([0, \tau], \mathbb{R}^n)$ et il résulte des lemmes 4 et 5 qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall p > 0 , \quad \forall t \in [0, \tau] , \quad |F(t, v_p(t - 1/p))| \leqslant C , \tag{21}$$

et donc

$$\forall p > 0 , \quad \forall (t, t') \in [0, \tau]^2 , \quad |v_p(t) - v_p(t')| \leqslant C\,|t - t'| , \tag{22}$$

c'est-à-dire que la suite $(v_p)_p$ est équicontinue.

On peut appliquer le théorème d'Ascoli : il existe une sous-suite, encore noté v_p, convergeant uniformément sur $[0, \tau]$ vers une fonction que nous noterons v.

Il faut maintenant identifier la limite de $\int_0^t F(s, v_p(s-1/p))\,ds$. On veut montrer que :

$$\forall t \in [0, \tau] \quad \int_0^t F(s, v_p(s-1/p))\,ds \to \int_0^t F(s, v(s))\,ds\,. \tag{23}$$

D'après le lemme 4, on sait que $F(s, v(s)) \in L^1([0, \tau], \mathbb{R}^n)$ et la relation (21) nous donne une condition de domination. Il suffit donc de montrer que $F(s, v_p(s-1/p))$ converge vers $F(s, v(s))$ presque partout sur $[0, \tau]$: c'est l'objet du lemme suivant.

LEMME 6 : *On a la convergence suivante :*

$$F(s, v_p(s-1/p)) \to F(s, v(s)) \textit{ presque partout sur } [0, \tau]\,.$$

Preuve : Notons $w_p(t) = v_p(t-1/p)$ et $W_p(t) = u_0 + \int_0^t w_p(s)\,ds$, pour tout $t \in [0, \tau]$. Avec ces notations, on a :

$$F(\,.\,, v_p(\,.\,-1/p)) =$$
$$= f(\,.\,, W_p, w_p) - \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} G((I-P_K)\,W_p, w_p) - \frac{1}{\lambda}(I-P_K)\,W_p\,.$$

Il est clair que w_p converge uniformément vers v sur $[0, \tau]$. Par suite W_p converge vers V dans $C^1([0, \tau], \mathbb{R}^n)$ fort.

Les fonctions f et $(I-P_K)$ sont continues, donc pour tout $t \in [0, \tau]$:

$$f(t, W_p(t), w_p(t)) \to f(t, V(t), v(t))\,,$$
$$(I-P_K)(W_p(t)) \to (I-P_K)(V(t)) = g(v(t))\,.$$

Ainsi, pour établir le lemme, il reste à montrer que :

$$G((I-P_K)(W_p), w_p) \to G((I-P_K)(V), v) \tag{24}$$

presque partout sur $[0, \tau]$.

Puisque la fonction $(x, y) \mapsto G(x - P_K(x), y)$ est continue sur $(\partial K)^c \times \mathbb{R}^n$, on aura déjà la convergence (24) en tout t tel que $V(t) \notin \partial K$.

Soit $E = \{t \in [0, \tau] : V(t) \in \partial K\}$. Puisque V est continue c'est un fermé relativement à $[0, \tau]$. En particulier, c'est un ensemble mesurable. Considérons E' l'ensemble de ses points de Lebesgue [HeSt]. Tout point t de E' est non isolé dans E, c'est-à-dire qu'on peut l'approcher par une suite de $(t_n)_n$ telle que, pour tout n, $t_n \in E$. Alors, par construction $V(t_n) \in \partial K$ pour tout n. Ainsi $V(t_n) - V(t) \in T_K(V(t))$ et $V(t_n) - V(t) \in -T_K(V(t_n))$.

Les produits scalaires $(V(t_n) - V(t)/(t_n - t), \nu(V(t)))$ et $(V(t_n) - V(t)/(t_n - t), \nu(V(t_n)))$ sont de signes opposés. D'autre part, ils convergent vers $(V'(t), \nu(V(t)))$ c'est-à-dire vers $(v(t), \nu(V(t)))$ car ∂K est régulier. Donc $(v(t), \nu(V(t))) = 0$.

Fixons $t \in E'$ et omettons de préciser que les valeurs des fonctions sont prises en t. On remarque que, si $W_p \in K$, alors :

$$G((I - P_K) W_p, w_p) = 0 = G((I - P_K) V, v).$$

Par contre, si $W_p \notin K$:

$$G((I - P_K) W_p, w_p) = (\nu(P_K W_p), w_p) \, \nu(P_K W_p),$$

où ν est le vecteur normal défini dans la section 2. Alors :

$$\begin{aligned} G((I - P_K) W_p, w_p) &\leq |\nu(P_K W_p), w_p - v| + |(\nu(P_K W_p) - \nu(V), v)| + \\ &+ |(\nu(V), v)| \leq |w_p - v| + |\nu(P_K W_p) - \nu(V)| \, |v| . \end{aligned}$$

Cette relation, avec la continuité de ν sur ∂K montre la convergence de $G((I - P_K) W_p, w_p)$ en t. La convergence (24) a lieu en tout point de $E^c \cup E'$; le complémentaire de cet ensemble est négligeable pour la mesure de Lebesgue [HeSt], ce qui achève la preuve du lemme. ■

On a établi la convergence de la suite $(v_p)_p$ vers v dans $C^0([0, \tau], \mathbb{R}^n)$ fort et, grâce au lemme 6, on sait que $\int_0^t F(s, v_p(s - 1/p)) \, ds$ converge vers $\int_0^t F(s, v(s)) \, ds$ pour tout $t \in [0, \tau]$. Donc, en passant à la limite dans (19), on trouve :

$$v(t) = u_1 + \int_0^t F(s, v(s)) \, ds$$

pour tout $t \in [0, \tau]$, c'est-à-dire v est absolument continue sur $[0, \tau]$, $\dot{v}$ existe presque partout et $\dot{v} = F(t, v)$ presque partout. Comme $\dot{V} = v$, $\dot{V}$ est absolument continue sur $[0, \tau]$, $\ddot{V}$ existe presque partout et

$$\ddot{V} = f(t, V, \dot{V}) - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} G(V - P_K(V), \dot{V}) - \frac{V - P_K(V)}{\lambda} \quad \text{p.p.}$$

De plus, $V(0) = u_0$ et $\dot{V}(0) = u_1$. Donc V est une solution locale.

Remarquons que cette solution locale est définie sur $[0, \tau]$ avec $\tau > 0$, ne dépendant que de u_0 et u_1 à travers la relation (20).

Existence globale d'une solution

Commençons par démontrer un lemme.

LEMME 7 : *Soit* $u \in C^1([0, \tau'], \mathbb{R}^n)$, $\tau' \in]0, T]$, *tel que* $\dot{u}$ *soit absolument continue sur* $[0, \tau']$, $\ddot{u}$ *existe presque partout et que l'égalité* (13) *ait lieu presque partout. Alors il existe une constante* $C = C(u_0, u_1) \geq 0$ *telle que, pour tout* $t \in [0, \tau']$, $|u(t)| \leq C$ et $|\dot{u}(t)| \leq C$.

Preuve : L'égalité presque partout

$$\ddot{u} + \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} G(u - P_K(u), \dot{u}) + \frac{u - P_K(u)}{\lambda} = f(t, u, \dot{u}) \tag{13}$$

nous dit en particulier que $\ddot{u}$ est égale presque partout à une fonction de $L^1([0, \tau'], \mathbb{R}^n)$, donc est elle-même une fonction intégrable sur $[0, \tau']$. Multiplions scalairement (13) par $\dot{u}$. On obtient :

$$(\ddot{u}, \dot{u}) + \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} (G(u - P_K(u), \dot{u}), \dot{u}) + \frac{(u - P_K(u), \dot{u})}{\lambda} =$$
$$= (f(t, u, \dot{u}), \dot{u}) \quad \text{p.p.}\,,$$

et en remarquant que :

$$(G(u - P_K(u), \dot{u}), \dot{u}) = \begin{cases} \left(\dfrac{u - P_K(u)}{|u - P_K(u)|}, \dot{u} \right)^2 \geq 0 & \text{si} \quad u \notin K\,, \\ 0 \quad \text{sinon}\,, \end{cases}$$

on a

$$(\ddot{u}, \dot{u}) + \frac{(u - P_K(u), \dot{u})}{\lambda} \leq (f(t, u, \dot{u}), \dot{u}) \quad \text{p.p.} \tag{25}$$

La relation (25) s'écrit encore :

$$(\ddot{u}, \dot{u}) + (\partial \varphi_\lambda(u), \dot{u}) \leq (f(t, u, \dot{u}), \dot{u}) \quad \text{p.p.}$$

On peut intégrer de 0 à t, pour tout $t \in [0, \tau']$. On a :

$$\int_0^t (\ddot{u}, \dot{u})\, ds + \varphi_\lambda(u(t)) - \varphi_\lambda(u_0) \leq \int_0^t (f(s, u(s), \dot{u}(s)), \dot{u}(s))\, ds\,.$$

Mais $\varphi_\lambda(u) = |u - P_K(u)|^2/2\,\lambda \geq 0$ et $\varphi_\lambda(u_0) = 0$ donc

$$\int_0^t (\ddot{u}, \dot{u})\, ds \leq \int_0^t (f(s, u(s), \dot{u}(s)), \dot{u}(s))\, ds\,.$$

D'autre part, $|\dot{u}|^2$ est absolument continue sur $[0, \tau']$, dérivable presque partout de dérivée $2(\ddot{u}, \dot{u})$. Ainsi, $|\dot{u}(t)|^2 = |u_1|^2 + 2\int_0^t (\ddot{u}, \dot{u})\, ds$ pour tout $t \in [0, \tau']$ et

$$|\dot{u}(t)|^2 \leqslant |u_1|^2 + 2\int_0^t (f(s, u(s), \dot{u}(s)), \dot{u}(s))\, ds .$$

Comme f est lipschitzienne, on a :

$$|\dot{u}(t)|^2 \leqslant |u_1|^2 + 2\int_0^t (|f(s, u_0, u_1)| + L|u_1|)|\dot{u}(s)|\, ds + \\ + 2L\int_0^t |\dot{u}(s)|^2\, ds + 2L\int_0^t |u(s) - u_0|\,|\dot{u}(s)|\, ds .$$

Mais pour $s \leqslant t$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|u(s) - u_0| \leqslant \sqrt{t}\left(\int_0^t |\dot{u}(\sigma)|^2\, d\sigma\right)^{1/2} .$$

Donc en utilisant de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\int_0^t |u(s) - u_0|\,|\dot{u}(s)|\, ds \leqslant t\int_0^t |\dot{u}(s)|^2\, ds ,$$

et avec la relation $2xy \leqslant x^2 + y^2$, on obtient :

$$|\dot{u}(t)|^2 \leqslant K_1 + K_2\int_0^t |\dot{u}(s)|^2\, ds ,$$

avec

$$K_1 = |u_1|^2 + T\left(\max_{s \in [0, T]} |f(s, u_0, u_1)| + L|u_1|\right) ,$$

$$K_2 = \max_{s \in [0, T]} |f(s, u_0, u_1)| + L|u_1| + 2L(T+1) .$$

Le lemme de Gronwall implique alors

$$|\dot{u}(t)|^2 \leqslant K_1\, e^{K_2 t} \leqslant K_1\, e^{K_2 T} \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T] , \tag{26}$$

et par une intégration immédiate

$$|u(t)| \leqslant |u_0| + T\sqrt{K_1}\, e^{K_2 T/2} \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T] . \tag{27}$$

Le lemme est donc démontré avec $C = \max\left\{K_1\, e^{K_2 T},\quad |u_0| + T\sqrt{K_1}\, e^{K_2 T/2}\right\}$. ■

On sait qu'il existe une solution locale, V, à l'équation (13) pour des conditions initiales données. Puisque $V \in C^1([0, \tau], \mathbb{R}^n)$, avec $\tau > 0$, $V(\tau)$ et $\dot{V}(\tau)$ peuvent servir de nouvelles conditions initiales en $t = \tau$. On peut ainsi prolonger au-delà de τ la fonction V, en une solution de (13) au sens décrit dans le théorème 3.

Les hypothèses du lemme 7 sont vérifiées par V. Donc il existe $C = C(u_0, u_1)$ tel que $|V|_{\infty, \tau} \leq C$ et $|\dot{V}|_{\infty, \tau} \leq C$. Posons :

$$C_3 = \sup_{t \in [0, T], \ |u| \leq C} |f(t, u, 0)| , \quad \tau_{\min} = \frac{1}{C_3 + C_2(C+1)} ,$$

avec C_2 donné par la relation (17). Il est clair que $\tau_{\min}$ ne dépend que de u_0 et u_1 et que $\tau \geq \min\{\tau_{\min}, T\}$.

La solution prolongée au-delà de τ sera définie sur $[0, \tau + \tau']$ avec τ' donné par la relation, déduite de (20)

$$\tau' = \min \left\{ \frac{1}{\sup_{t \in [0, T]} |f(t, V(\tau), 0)| + C_2(|\dot{V}(\tau)| + 1)} , T - \tau \right\} .$$

On a $\tau' \geq \min\{\tau_{\min}, T - \tau\}$, et les hypothèses du lemme 7 sont encore vérifiées par ce prolongement. Si $\tau + \tau' < T$, on peut répéter le raisonnement. Au bout d'au plus $1 + (T - \tau)/\tau_{\min}$ opérations de ce type, on obtiendra un prolongement de la solution locale à $[0, T]$ tout entier, c'est-à-dire une solution globale. ■

5. CONVERGENCE DE LA PÉNALISATION

La démonstration du théorème 2 va se faire en plusieurs étapes. Nous savons, d'après le théorème 3, que le système pénalisé admet une solution $u_\lambda \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Nous commençons par établir des bornes pour u_λ, $\dot{u}_\lambda$ et $\varphi_\lambda(u_\lambda)$ (lemme 8). Nous donnons des bornes, au sens des mesures, sur $\dot{u}_\lambda$ (lemmes 9 à 12) et nous montrons qu'il est possible d'extraire une sous-suite dont la limite u vérifie (6). Il nous restera à faire l'étude locale du renversement de la vitesse aux chocs, étude qui aura lieu à la section 6.

LEMME 8 : *Il existe une constante C telle que, pour tout $\lambda > 0$:*

$$|du_\lambda/dt|_\infty \leq C , \quad |u_\lambda|_\infty \leq C , \quad |\varphi_\lambda(u_\lambda)|_\infty \leq C .$$

Preuve : En remarquant que maintenant u_λ est définie sur $[0, T]$, le lemme 7 donne :

$$|\dot{u}_\lambda(t)|^2 + 2\,\varphi_\lambda(u_\lambda(t)) \leq |u_1|^2 + 2 \int_0^t (f(s, u_\lambda(s), \dot{u}_\lambda(s)), \dot{u}_\lambda(s))\, ds$$

pour tout $t \in [0, T]$, puis :

$$\begin{aligned} & |\dot{u}_\lambda(t)|^2 \leq K_1 e^{K_2 t} \leq K_1 e^{K_2 T} \\ \text{et} \quad & |u_\lambda(t)| \leq |u_0| + T\sqrt{K_1}\, e^{K_2 T/2} \quad \forall t \in [0, T] . \end{aligned} \tag{28}$$

On a également

$$2\, \varphi_\lambda(u_\lambda(t)) + K_1 + K_2 \int_0^t |\dot{u}_\lambda(s)|^2\, ds \leq 2\, E ,$$

avec $E = K_1 e^{K_2 T}/2$, ce qui démontre le lemme. ■

Puisque $(u_\lambda)_\lambda$ est une famille bornée et équicontinue de $C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$, on peut extraire une sous-suite, encore notée u_λ, telle que :

$$\begin{aligned} u_\lambda \to u & \quad \text{dans} \quad C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \text{ fort} , \\ \dot{u}_\lambda \to \dot{u} & \quad \text{dans} \quad L^\infty([0, T], \mathbb{R}^n) \text{ faible*} , \\ \varphi_\lambda(u_\lambda) \to \chi & \quad \text{dans} \quad L^\infty([0, T], \mathbb{R}^n) \text{ faible*} . \end{aligned}$$

Donc $u \in W^{1,\infty}([0, T], \mathbb{R}^n) \cap C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$, ce qui équivaut à u lipschitzienne [Br1]. D'autre part, $\varphi_\lambda(u_\lambda) \leq E$ implique que $|u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t))| \leq \sqrt{2\, E\lambda}$ et $\varphi(P_K(u_\lambda(t))) \leq E$ pour tout $t \in [0, T]$. Donc $P_K(u_\lambda)$ converge uniformément vers u et puisque φ est semi-continue inférieurement $\varphi(u(t)) \leq E$ pour tout $t \in [0, T]$, c'est-à-dire $u(t) \in \mathrm{dom}(\varphi)$ pour tout $t \in [0, T]$.

On a ainsi établi le point (5).

Dans la suite de cet article, nous identifierons les fonctions de $L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ et les mesures de $M^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Soit

$$\mu_\lambda = \frac{2\, \varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\, G(u_\lambda - P_K(u_\lambda), \dot{u}_\lambda) + \frac{u_\lambda - P_K(u_\lambda)}{\lambda} , \tag{29}$$

$$\mu_{\lambda,1} = \frac{2\, \varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\, G(u_\lambda - P_K(u_\lambda), \dot{u}_\lambda) \quad \text{et} \quad \mu_{\lambda,2} = \frac{u_\lambda - P_K(u_\lambda)}{\lambda} . \tag{30}$$

Grâce à notre identification, il est clair que μ_λ, $\mu_{\lambda,1}$ et $\mu_{\lambda,2}$ sont des mesures. On va montrer que $(\mu_\lambda)_\lambda$ est une suite bornée de $M^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ en étudiant successivement les suites $(\mu_{\lambda,1})_\lambda$ et $(\mu_{\lambda,2})_\lambda$.

Soit $U_\lambda^- = \{t \in [0, T] : u_\lambda(t) \notin K\}$. C'est un ouvert de $[0, T]$ qui s'écrit $U_\lambda^- = \cup_j I_{\lambda,j}$, où les $I_{\lambda,j}$ sont les composantes connexes de U_λ^- et $I_{\lambda,j} \cap\,]0, T[\, = \,]\alpha_j, \beta_j[$, $\alpha_j < \beta_j$. Nous introduisons la notation $I_{\lambda,j}$ pour tenir compte des cas où $\alpha_j = 0$ ou $\beta_j = T$.

LEMME 9 : *Il existe une constante C telle que, pour tout $\lambda > 0$:*

$$\int_0^T |\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t))|\, dt \leqslant C .$$

Preuve : Puisque dom $(\varphi) = K$ est d'intérieur non vide, il existe un point $a \in \mathbb{R}^n$ et un réel $r > 0$ tels que la boule fermée, $B_r(a)$, de centre a et de rayon r soit incluse dans dom (φ).

Soit $z \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$ telle que $|z(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \in [0, T]$. Par définition de $\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t))$, on a :

$$\varphi_\lambda(a + rz(t)) - \varphi_\lambda(u_\lambda(t)) \geqslant (\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t)),\, a + rz(t) - u_\lambda(t))$$

pour tout $t \in [0, T]$. Puisque $a + rz(t) \in K$ pour tout $t \in [0, T]$, $\varphi_\lambda(a + rz) = 0$ et on a

$$0 \geqslant -\varphi_\lambda(u_\lambda(t)) \geqslant (\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t)),\quad a + rz(t) - u_\lambda(t))$$

pour tout $t \in [0, T]$.

En intégrant de 0 à T on obtient :

$$r\left|\int_0^T (\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t)),\, z(t))\, dt\right| \leqslant \left|\int_0^T (\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t)),\, u_\lambda(t) - a)\, dt\right| .$$

Mais,

$$\begin{aligned}\int_0^T (\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t)),\, u_\lambda(t) - a)\, dt &= \int_0^T (\ddot{u}_\lambda(t),\, a - u_\lambda(t))\, dt + \\ &+ \int_0^T \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} (G(u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t)),\, \dot{u}_\lambda(t)),\, a - u_\lambda(t))\, dt \\ &- \int_0^T (f(t, u_\lambda(t), \dot{u}_\lambda(t)),\, a - u_\lambda(t))\, dt .\end{aligned}$$

D'après le lemme 8, on sait qu'il existe un compact D de $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $\lambda > 0$, on ait $(t, u_\lambda(t), \dot{u}_\lambda(t)) \in D$. Puisque u_λ est borné indépendamment de λ et que f est continue donc bornée sur D, on en conclut que :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T (f(t, u_\lambda(t), \dot{u}_\lambda(t)),\, a - u_\lambda(t))\, dt\right| &\leqslant \\ &\leqslant \int_0^T |f(t, u_\lambda(t), \dot{u}_\lambda(t))|\, |a - u_\lambda(t)|\, dt \\ &\leqslant T \sup_{(t, v, w) \in D} |f(t, v, w)| \sup_{t \in [0, T],\, \lambda > 0} |u_\lambda(t) - a| < +\infty\end{aligned}$$

c'est-à-dire est borné uniformément par rapport à λ.

D'autre part, en intégrant par parties $\int_0^I (\ddot{u}_\lambda(t),\ a - u_\lambda(t))\,dt$, ce qui est loisible car la fonction $\dot{u}_\lambda$ est absolument continue, et en utilisant encore les résultats du lemme 8, on trouve :

$$\int_0^T (\ddot{u}_\lambda(t),\ a - u_\lambda(t))\,dt = [(\dot{u}_\lambda,\ a - u_\lambda)]_0^T + \int_0^T |\dot{u}_\lambda(t)|^2\,dt$$

et

$$\left|\int_0^T (\ddot{u}_\lambda(t),\ a - u_\lambda(t))\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{K_1}\,e^{K_2 T/2}(|u_0| + |a| + T\sqrt{K_1}\,e^{K_2 T/2}) + K_1(e^{K_2 T} - 1)/K_2\,,$$

c'est-à-dire finalement :

$$\left|\int_0^T (\ddot{u}_\lambda(t),\ a - u_\lambda(t))\,dt\right| \leqslant \mathrm{Cte}\,.$$

Il reste à examiner

$$\int_0^T \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\,(G(u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t)),\ \dot{u}_\lambda(t)),\ a - u_\lambda(t))\,dt\,.$$

Posons :

$$\nu_\lambda(t) = \frac{u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t))}{|u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t))|} = \nu(P_K(u_\lambda(t)))\,, \quad \text{pour} \quad t \in U_\lambda^-\,.$$

Avec cette notation, pour $t \in U_\lambda^-$, on a :

$$G(u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t)),\ \dot{u}_\lambda(t)) = (\dot{u}_\lambda(t),\ \nu_\lambda(t))\,\nu_\lambda(t)\,,$$

et donc

$$\frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\int_0^T (G(u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t)),\ \dot{u}_\lambda(t)),\ a - u_\lambda(t))\,dt =$$

$$= \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\int_{U_\lambda^-} (\dot{u}_\lambda(t),\ \nu_\lambda(t))(a - u_\lambda(t),\ \nu_\lambda(t))\,dt\,,$$

qu'on décompose en la somme des deux termes suivants :

$$\frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\int_{U_\lambda^-} (\dot{u}_\lambda(t),\ \nu_\lambda(t))(a - P_K(u_\lambda(t)),\ \nu_\lambda(t))\,dt\ +$$

$$+ \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\int_{U_\lambda^-} (\dot{u}_\lambda(t),\ \nu_\lambda(t))(P_K(u_\lambda(t)) - u_\lambda(t),\ \nu_\lambda(t))\,dt\,. \tag{31}$$

Mais

$$(P_K(u_\lambda) - u_\lambda, \nu_\lambda) = - |u_\lambda - P_K(u_\lambda)| ,$$

et donc le deuxième terme de (31) est égal à :

$$-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \int_{U_\lambda^-} (\dot{u}_\lambda(t), \nu_\lambda(t)) |u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t))| \, dt ,$$

dont on majore la valeur absolue par :

$$\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \int_0^T |\dot{u}_\lambda(t)| \sqrt{2\lambda E} \, dt = 2\varepsilon\sqrt{2E}\, TC .$$

Pour le premier terme de (31), on remarque que :

$$(\dot{u}_\lambda, \nu_\lambda) = \frac{d}{dt}(|u_\lambda - P_K(u_\lambda)|) \quad \text{sur} \quad U_\lambda^- .$$

Donc le premier terme s'intègre par parties sur chacun des intervalles $I_{\lambda,j} =]\alpha_j, \beta_j[$ pour donner :

$$\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \sum_j [|u_\lambda - P_K(u_\lambda)| (a - P_K(u_\lambda), \nu_\lambda)]_{\alpha_j}^{\beta_j} +$$
$$+ \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \sum_j \int_{\alpha_j}^{\beta_j} |u_\lambda - P_K(u_\lambda)|(s) \times$$
$$\times \left(\left(\frac{d}{ds} P_K(u_\lambda), \nu_\lambda \right)(s) - (a - P_K(u_\lambda), \dot{\nu}_\lambda)(s) \right) ds .$$

Mais, sauf si $T = \beta_j$, le terme tout intégré est nul, la seule contribution possible étant majorée par :

$$\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{2\lambda E}(|a| + |u_\lambda - P_K(u_\lambda)| (T) + |u_\lambda|(T)) \leq$$
$$\leq 2\varepsilon\sqrt{2E}\,(|a| + \sqrt{2\lambda E} + C) .$$

Le terme intégral est majoré par :

$$\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{2\lambda E}\, T \sup_{U_\lambda^-} \left(\left| \frac{d}{dt} P_K(u_\lambda) \right| + |a - P_K(u_\lambda)| |\dot{\nu}_\lambda| \right) ,$$

et comme u_λ et P_K sont lipschitziennes et l'application $x \mapsto \nu(x)$ est de classe C^1, l'expression (31) est bien majorée en valeur absolue indépendamment de λ.

Donc finalement :

$$r\left|\int_0^T (\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t)), z(t))\,dt\right| \leq C\,,$$

pour tout $z \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n)\; t.q\,|z|_\infty \leq 1$,

et puisque r ne dépend que de dom (φ), on a :

$$\left|\int_0^T (\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t)), z(t))\,dt\right| \leq C\,,$$

pour tout $z \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n)\; t.q\,|z|_\infty \leq 1$,

ce qui signifie précisemment [D] que

$$\int_0^T |\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t))|\,dt \leq C\,. \qquad \blacksquare$$

Le lemme 9 montre donc que la suite $(\mu_{\lambda,2})_\lambda$ est bornée dans $M^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Pour montrer que $(\mu_\lambda)_\lambda$ est une suite de mesures bornée il suffit donc de montrer que $(\mu_{\lambda,1})_\lambda$ est aussi bornée dans $M^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Pour cela introduisons quelques notations : notons sur U_λ^-

$$g_\lambda = f(\,.\,, u_\lambda, \dot{u}_\lambda)\,,\quad z_\lambda = u_\lambda - P_K(u_\lambda) = |u_\lambda - P_K(u_\lambda)|\;\nu_\lambda\,, \tag{32}$$

et

$$v_\lambda = (\dot{u}_\lambda, z_\lambda/|z_\lambda|) = (\dot{u}_\lambda, \nu_\lambda)\,, \tag{33}$$

qui est la valeur de la composante normale de la vitesse. Les fonctions g_λ et v_λ sont continues et z_λ est lipschitzienne. Étudions plus précisément dans les deux lemmes suivants la fonction v_λ.

LEMME 10 : *Pour tout j, v_λ a une limite à droite en α_j, c'est-à-dire*

$$v_\lambda(\alpha_j + 0) = \lim_{t \to \alpha_j,\, t \in I_{\lambda,j}} v_\lambda(t) < +\infty$$

et de plus, pour tout $t \in I_{\lambda,j}$, la relation suivante a lieu :

$$\begin{aligned} v_\lambda(t) = v_\lambda(\alpha_j + 0)\exp\left(-2\,\varepsilon\frac{t-\alpha_j}{\sqrt{\lambda}}\right) + \int_{\alpha_j}^t \exp\left(-2\,\varepsilon\frac{t-s}{\sqrt{\lambda}}\right) \times \\ \times\left\{(g_\lambda(s), \nu_\lambda(s)) - \frac{|z_\lambda(s)|}{\lambda} + (\dot{u}_\lambda(s), \dot{\nu}_\lambda(s))\right\} ds \end{aligned} \tag{34}$$

Preuve : Fixons j et plaçons-nous sur $]\alpha_j, \beta_j[$. Presque partout sur $]\alpha_j, \beta_j[$, on a :

$$\ddot{u}_\lambda + \frac{2\,\varepsilon v_\lambda}{\sqrt{\lambda}}\,\nu_\lambda = g_\lambda - \frac{z_\lambda}{\lambda}. \tag{35}$$

On veut déduire de cette relation une équation différentielle ordinaire du premier ordre avec v_λ comme inconnue. Multiplions scalairement par ν_λ. On obtient :

$$(\ddot{u}_\lambda, \nu_\lambda) + \frac{2\,\varepsilon v_\lambda}{\sqrt{\lambda}} = (g_\lambda, \nu_\lambda) - \frac{|z_\lambda|}{\lambda}, \quad \text{p.p.sur }]\alpha_j, \beta_j[\,. \tag{36}$$

D'autre part, v_λ est une fonction absolument continue. En effet, on a :

$$|v_\lambda(x) - v_\lambda(y)| \leq |\dot{u}_\lambda(x) - \dot{u}_\lambda(y)| + |\dot{u}_\lambda(y)|\,|\nu_\lambda(x) - \nu_\lambda(y)|\,.$$

Mais ν_λ est composée de fonctions lipschitziennes, donc est absolument continue. Puisque $\dot{u}_\lambda$ est absolument continue, il en est de même pour v_λ. Sa dérivée au sens des distributions est égale à sa dérivée presque partout donnée par :

$$\dot{v}_\lambda = (\ddot{u}_\lambda, \nu_\lambda) + (\dot{u}_\lambda, \dot{\nu}_\lambda) \quad \text{p.p.}$$

En reportant dans (36), on obtient :

$$\dot{v}_\lambda + \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}\,v_\lambda = (g_\lambda, \nu_\lambda) - \frac{|z_\lambda|}{\lambda} - (\dot{u}_\lambda, \dot{\nu}_\lambda) \quad \text{au sens des distributions}\,.$$

Posons

$$w_\lambda = (g_\lambda, \nu_\lambda) - \frac{|z_\lambda|}{\lambda} - (\dot{u}_\lambda, \dot{\nu}_\lambda)\,. \tag{37}$$

D'après tout ce qui précède, il est clair que $w_\lambda \in L^\infty(U_\lambda^-, \mathbb{R}^n)$, d'où $w_\lambda \in L^1(U_\lambda^-, \mathbb{R}^n)$. On a donc :

$$\dot{v}_\lambda + 2\,\varepsilon\,\frac{v_\lambda}{\sqrt{\lambda}} = w_\lambda\,,$$

cette relation ayant lieu sur U_λ^- à la fois presque partout et au sens des distributions. En multipliant sur $I_{\lambda,j}$ cette relation par $\exp(2\,\varepsilon(t-\alpha_j)/\sqrt{\lambda})$, on peut l'intégrer et on conclut que, pour $t \in I_{\lambda,j}$:

$$v_\lambda(t) = k\exp\left(-2\,\varepsilon\,\frac{t-\alpha_j}{\sqrt{\lambda}}\right) + \int_{\alpha_j}^{t} \exp\left(-2\,\varepsilon\,\frac{t-s}{\sqrt{\lambda}}\right) w_\lambda(s)\,ds\,.$$

Il est alors immédiat que la limite suivante existe :

$$\lim_{t \to \alpha_j,\, t \in I_{\lambda\, j}} v_\lambda(t)\,,$$

et est égale à k. Si on pose $k = v_\lambda(\alpha_j + 0)$, on trouve bien la relation (34). ■

LEMME 11 : *Il existe une constante C telle que, pour tout $\lambda > 0$:*

$$\sum_j |v_\lambda(\alpha_j + 0)| \leqslant C\,.$$

Preuve : L'idée de la démonstration consiste à remarquer tout d'abord que $v_\lambda(\alpha_j + 0)$ est positif ou nul. Alors, si $v_\lambda(\alpha_j + 0)$ est strictement positif, il est estimé par la longueur de l'intervalle maximal $]\gamma_j, \alpha_j[$ dans lequel $u_\lambda(t)$ appartient à l'intérieur de K.

Rappelons l'expression de $v_\lambda(\alpha_j + 0)$:

$$v_\lambda(\alpha_j + 0) = \lim_{t \to \alpha_j,\, t \in I_{\lambda\, j}} (\nu_\lambda, \dot{u}_\lambda)(t) = (\nu_\lambda, \dot{u}_\lambda)(\alpha_j)\,.$$

Supposons $v_\lambda(\alpha_j + 0) \neq 0$ et $\alpha_j \neq 0$. Alors, puisque $]\alpha_j, \beta_j[= I_{\lambda, j} \cap [0, T[$, $\alpha_j \notin I_{\lambda, j}$ et $u_\lambda(\alpha_j) \in \partial K$. Nous allons montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j + \varepsilon[\subset]0, T[$ et

$$\begin{cases} u_\lambda(t) \in \operatorname{Int}(K) & \text{si} \quad t \in\,]\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j[\,, \\ u_\lambda(t) \notin K & \text{si} \quad t \in\,]\alpha_j, \alpha_j + \varepsilon[\,. \end{cases}$$

Les hypothèses sur la régularité de ∂K permettent de démontrer de manière classique [BeGo] que ∂K est une variété plongée de $\mathbb{R}^n$, de classe C^2. Donc il existe un voisinage V de $u(\alpha_j)$ et une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée tels que localement ∂K soit le graphe d'une fonction F de classe C^2, c'est-à-dire

$$x \in V \cap \partial K \Leftrightarrow x_n = F(x_1, \ldots, x_{n-1})\,.$$

De plus, on peut choisir e telle que

$$\forall x \in V \cap \partial K\,, \quad \nu(x) = \frac{(-\operatorname{grad} F(x_1, \ldots, x_{n-1}), 1)}{\sqrt{|\operatorname{grad} F(x_1, \ldots, x_{n-1})|^2 + 1}}\,,$$

et on a

$$x \in V \cap K \Leftrightarrow x_n \leqslant F(x_1, \ldots, x_{n-1})\,.$$

Puisque u_λ est continue et que $\alpha_j \in]0, T[$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j + \varepsilon[\subset]0, T[$ et $u_\lambda(]\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j + \varepsilon[) \subset V$.

Considérons la fonction définie sur $]\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j + \varepsilon[$ par :

$$k_\lambda(t) = u_{\lambda, n}(t) - F(u_{\lambda, 1}(t), \dots, u_{\lambda, n-1}(t)) .$$

Elle est de classe C^1, s'annule en α_j et sa dérivée en α_j est $v_\lambda(\alpha_j + 0)$. Quitte à diminuer ε, on peut supposer que k_λ est du signe de $v_\lambda(\alpha_j + 0)$ sur $]\alpha_j, \alpha_j + \varepsilon[$ et du signe opposé sur $]\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j[$.

Si $v_\lambda(\alpha_j + 0) < 0$, on obtient donc $k_\lambda(t) < 0$ c'est-à-dire $u_\lambda(t) \in K$ pour $t \in]\alpha_j, \alpha_j + \varepsilon[$ ce qui est en contradiction avec $]\alpha_j, \beta_j[\subset U_\lambda^-$. Donc $v_\lambda(\alpha_j + 0) > 0$ et

$$\begin{cases} u_\lambda(t) \in \operatorname{Int}(K) & \text{si} \quad t \in]\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j[, \\ u_\lambda(t) \notin K & \text{si} \quad t \in]\alpha_j, \alpha_j + \varepsilon[. \end{cases}$$

Soit

$$\gamma_j = \inf \{ t \in [0, \alpha_j[\text{ t.q. } u_\lambda(]t, \alpha_j[) \subset \operatorname{Int} K \} .$$

Sur $]\gamma_j, \alpha_j[$, u_λ satisfait l'équation différentielle

$$\ddot{u}_\lambda = f(\,.\,, u_\lambda, \dot{u}_\lambda) ,$$

d'où, pour tout $t \in]\gamma_j, \alpha_j[$:

$$\dot{u}_\lambda(\alpha_j) - \dot{u}_\lambda(t) = \int_t^{\alpha_j} f(s, u_\lambda(s), \dot{u}_\lambda(s))\, ds ,$$

et

$$\dot{u}_\lambda(\alpha_j)(\alpha_j - t) - (u_\lambda(t) - u_\lambda(\alpha_j)) = \int_t^{\alpha_j} \left(\int_s^{\alpha_j} f(l, u_\lambda(l), \dot{u}_\lambda(l))\, dl \right) ds .$$

Multiplions scalairement par $\nu_\lambda(\alpha_j)$. On obtient :

$$v_\lambda(\alpha_j + 0)(\alpha_j - t) - (u_\lambda(t) - u_\lambda(\alpha_j), \nu_\lambda(\alpha_j)) =$$
$$= \int_t^{\alpha_j} \left(\int_s^{\alpha_j} (f(l, u_\lambda(l), \dot{u}_\lambda(l)), \nu_\lambda(\alpha_j))\, dl \right) ds .$$

Mais $\nu_\lambda(\alpha_j) \in N_K(u_\lambda(\alpha_j))$ et

$$(u_\lambda(t) - u_\lambda(\alpha_j), \nu_\lambda(\alpha_j)) \leqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in]\gamma_j, \alpha_j[.$$

Donc, pour tout $t \in]\gamma_j, \alpha_j[$:

$$0 < v_\lambda(\alpha_j + 0)(\alpha_j - t) \leqslant \int_t^{\alpha_j} \left(\int_s^{\alpha_j} |f(l, u_\lambda(l), \dot{u}_\lambda(l))|\, dl \right) ds .$$

D'après le lemme 8 on sait qu'il existe une constante M telle que, pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$|f(t, u_\lambda(t), \dot{u}_\lambda(t))| \leq M .$$

Alors, pour tout $t \in]\gamma_j, \alpha_j[$:

$$0 < v_\lambda(\alpha_j + 0)(\alpha_j - t) \leq M \frac{(\alpha_j - t)^2}{2},$$

ou encore

$$0 < v_\lambda(\alpha_j + 0) \leq M \frac{\alpha_j - t}{2} \leq M \frac{\alpha_j - \gamma_j}{2}.$$

Finalement on trouve :

$$\sum_{j,\, \alpha_j \neq 0} |v_\lambda(\alpha_j + 0)| \leq \frac{M}{2} \sum_{j,\, \alpha_j \neq 0} (\alpha_j - \gamma_j) \leq \frac{M}{2} T .$$

Si $\alpha_j = 0$

$$|v_\lambda(\alpha_j + 0)| = |(\dot{u}_\lambda(0), \nu(u_0))| \leq |u_1| .$$

Donc

$$\sum_j |v_\lambda(\alpha_j + 0)| \leq |u_1| + \frac{MT}{2} = C . \qquad \blacksquare$$

On est maintenant en mesure de démontrer le résultat annoncé.

LEMME 12 : *Il existe une constante C telle que, pour tout* $\lambda > 0$:

$$\int_0^T \left| \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} G(u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t)), \dot{u}_\lambda(t)) \right| dt \leq C .$$

Preuve : Avec les notations adoptées, on a :

$$\int_0^T \left| \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} G(u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t)), \dot{u}_\lambda(t)) \right| dt = \int_{U_\lambda^-} \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} |v_\lambda(t)| \, dt . \quad (38)$$

Le lemme 10 nous donne l'expression de v_λ sur les intervalles $]\alpha_j, \beta_j[$. En remplaçant, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} |v_\lambda(t)| \, dt \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} |v_\lambda(\alpha_j + 0)| \exp\left(-2\varepsilon \frac{t - \alpha_j}{\sqrt{\lambda}}\right) dt \, + \\ + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \left| \int_{\alpha_j}^t \exp\left(-2\varepsilon \frac{t - s}{\sqrt{\lambda}}\right) w_\lambda(s) \, ds \right| dt . \end{aligned} \quad (39)$$

Le premier terme du second membre de cette inégalité se calcule explicitement :

$$\frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} |v_\lambda(\alpha_j + 0)| \exp\left(-2\,\varepsilon \frac{t-\alpha_j}{\sqrt{\lambda}}\right) dt = \\ = |v_\lambda(\alpha_j + 0)| \left[-\exp\left(-2\,\varepsilon \frac{t-\alpha_j}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]_{\alpha_j}^{\beta_j} \leq |v_\lambda(\alpha_j + 0)| \,. \tag{40}$$

Le second terme peut être majoré :

$$\frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \left| \int_{\alpha_j}^{t} \exp\left(-2\,\varepsilon \frac{t-s}{\sqrt{\lambda}}\right) w_\lambda(s)\, ds \right| dt \leq \\ \leq \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \left(\int_{\alpha_j}^{t} \exp\left(-2\,\varepsilon \frac{t-s}{\sqrt{\lambda}}\right) |w_\lambda(s)|\, ds \right) dt \\ = \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} |w_\lambda(s)| \left(\int_{s}^{\beta_j} \exp\left(-2\,\varepsilon \frac{t-s}{\sqrt{\lambda}}\right) dt \right) ds \leq \int_{\alpha_j}^{\beta_j} |w_\lambda(s)|\, ds \,. \tag{41}$$

En rassemblant les relations (38) à (41), on obtient finalement :

$$\int_0^T \left| \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} G(u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t)), \dot{u}_\lambda(t)) \right| dt \leq \\ \leq \sum_j |v_\lambda(\alpha_j + 0)| + \int_{U_\lambda^-} |w_\lambda(s)|\, ds \,.$$

Puisqu'on sait, d'après le lemme précédent, que $\sum_j |v_\lambda(\alpha_j + 0)|$ est borné par une constante indépendante de λ, tout revient à montrer que w_λ est borné dans $L^1(U_\lambda^-, \mathbb{R}^n)$. Mais, on a sur U_λ^- :

$$w_\lambda(t) = \\ = (f(t, u_\lambda(t), \dot{u}_\lambda(t)), \nu_\lambda(t)) - \frac{|u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t))|}{\lambda} + (\dot{u}_\lambda(t), \dot{\nu}_\lambda(t)) \,,$$

d'où

$$|w_\lambda(t)| \leq \\ \leq |f(\,.\,, u_\lambda, \dot{u}_\lambda)|_\infty + \left| \frac{u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t))}{\lambda} \right| + |\dot{u}_\lambda|_\infty\, |\dot{\nu}_\lambda|_{\infty, U_\lambda^-} \quad \text{p.p.}\,,$$

et le résultat découle directement des estimations effectuées aux lemmes 8 et 9. ■

En rassemblant tous les résultats des lemmes 9 à 12, on sait qu'il existe une sous-suite, encore notée μ_λ, et des mesures μ, μ_1 et μ_2 telles que μ_λ, $\mu_{\lambda,1}$ et $\mu_{\lambda,2}$ convergent respectivement vers μ, μ_1 et μ_2 au sens de la topologie vague des mesures de Radon. De plus $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Nous allons maintenant étudier les propriétés de μ.

LEMME 13 : *On a :*

$$\ddot{u} + \mu = f(\,.\,, u, \dot{u}), \tag{42}$$

et pour toute fonction $v \in C^0([0, T], K)$:

$$0 \geq \langle \mu, v - u \rangle . \tag{43}$$

Preuve : Nous savons à présent que la suite $(\ddot{u}_\lambda)_\lambda$ est bornée au sens des mesures. Grâce au théorème de Helly [HeSt], on sait qu'il existe une fonction à variation bornée h telle que $\dot{u}_\lambda$ converge vers h sauf en un nombre dénombrable de points. En identifiant les limites au sens des distributions, on a donc :

$$\begin{aligned} &\dot{u} \in BV([0, T], \mathbb{R}^n), \\ &\dot{u}_\lambda \to u \quad \text{sauf en un nombre dénombrable de points .} \end{aligned} \tag{44}$$

Puisque $[0, T]$ est un intervalle borné, (44) implique que :

$$\dot{u}_\lambda \to \dot{u} \quad \text{dans} \quad L^p([0, T], \mathbb{R}^n) \text{ fort}, \quad 1 \leq p < +\infty ,$$

ce qui achève la preuve de (4).

D'autre part, $\dot{u}$ étant mesurable et f et u étant continues, $f(\,.\,, u, \dot{u})$ est une fonction mesurable et grâce aux convergences déjà établies, on a clairement :

$$\int_0^T \left| f(t, u_\lambda(t), \dot{u}_\lambda(t)) - f(t, u(t), \dot{u}(t)) \right| dt \to 0 ,$$

c'est-à-dire

$$f(\,.\,, u_\lambda, \dot{u}_\lambda) \to f(\,.\,, u, \dot{u}) \quad \text{dans} \quad L^1([0, T], \mathbb{R}^n) \text{ fort} .$$

Soit une fonction $\psi \in C_0^\infty(]0, T[, \mathbb{R}^n)$. Multiplions scalairement l'équation approchée par ψ et intégrons de 0 à T :

$$\int_0^T (\ddot{u}_\lambda(t), \psi(t))\, dt + \langle \mu_\lambda, \psi \rangle = \int_0^T (f(t, u_\lambda(t), \dot{u}_\lambda(t)), \psi(t))\, dt .$$

Puisque $\dot{u}_\lambda$ est absolument continue, on peut intégrer par parties le premier terme :

$$- \int_0^T (\dot{u}_\lambda(t), \dot{\psi}(t))\, dt + \langle \mu_\lambda, \psi \rangle = \int_0^T (f(t, u_\lambda(t), \dot{u}_\lambda(t)), \psi(t))\, dt .$$

Passons à la limite quand $\lambda \to 0$. On obtient :

$$- \int_0^T (\dot{u}(t), \dot{\psi}(t))\, dt + \langle \mu, \psi \rangle = \int_0^T (f(t, u(t), \dot{u}(t)), \psi(t))\, dt$$

car $\psi \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$, $\psi \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^n)$, et $\dot{\psi} \in L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Donc $\ddot{u} + \mu = f(t, u, \dot{u})$ au sens des distributions et, puisque $\ddot{u}$, μ et $f(\,.\,, u, \dot{u})$ sont des mesures, on a finalement la relation (42).

Montrons maintenant (43). Soit une fonction $v \in C^0([0, T], K)$. Pour tout $t \in [0, T]$ on a, par définition de $\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t))$:

$$0 \geqslant -\varphi_\lambda(u_\lambda(t)) \geqslant \varphi_\lambda(v(t)) - \varphi_\lambda(u_\lambda(t)) \geqslant (\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t)), v(t) - u_\lambda(t)) .$$

Intégrons de 0 à T. On obtient :

$$0 \geqslant \int_0^T (\partial\varphi_\lambda(u_\lambda(t)), v(t) - u_\lambda(t))\, dt = \langle \mu_{\lambda, 2}, v - u_\lambda \rangle .$$

Passons à la limite quand $\lambda \to 0$. On sait que $u_\lambda \to u$ dans $C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$ fort et $\mu_{\lambda, 2} \to \mu_2$ dans $M^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ vague. Donc $\langle \mu_{\lambda, 2}, v - u_\lambda \rangle \to \langle \mu_2, v - u \rangle$, et finalement :

$$0 \geqslant \langle \mu_2, v - u \rangle . \tag{45}$$

Calculons $\langle \mu_{\lambda, 1}, v - u_\lambda \rangle$, en supposant dans un premier temps que $v \in C^1([0, T], K)$. On a :

$$\langle \mu_{\lambda, 1}, v - u_\lambda \rangle = \int_0^T \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} (G(u_\lambda - P_K(u_\lambda), \dot{u}_\lambda), v - u_\lambda)(t)\, dt =$$

$$= \int_{U_\lambda^-} \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} (\nu_\lambda, \dot{u}_\lambda)(t)(\nu_\lambda, v - u_\lambda)(t)\, dt$$

$$= \int_{U_\lambda^-} \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \frac{d}{dt} (|u_\lambda - P_K(u_\lambda)|)(t)(\nu_\lambda, v - u_\lambda)(t)\, dt .$$

On peut intégrer par parties sur chaque intervalle $]\alpha_j, \beta_j[$ puisque $(\nu_\lambda, v - u_\lambda)$ est absolument continue sur U_λ^-. On trouve :

$$\langle \mu_{\lambda,1}, v - u_\lambda \rangle = \sum_j \left[\frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \left| u_\lambda - P_K(u_\lambda) \right| (\nu_\lambda, v - u_\lambda) \right]_{\alpha_j}^{\beta_j} - \\ - \int_{U_\lambda^-} \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \left| u_\lambda - P_K(u_\lambda) \right| (t) \frac{d}{dt} (\nu_\lambda, v - u_\lambda)(t)\, dt .$$

Tous les termes de la somme sur j sont nuls sauf peut-être celui correspondant à l'éventualité $\beta_j = T$, mais alors

$$\left| u_\lambda - P_K(u_\lambda) \right| (T) (\nu_\lambda, v - u_\lambda)(T) = \\ = \left| u_\lambda - P_K(u_\lambda) \right| (T) (\nu_\lambda, v - P_K(u_\lambda))(T) - \left| u_\lambda - P_K(u_\lambda) \right|^2 (T) \leqslant 0 ,$$

car $\nu_\lambda(T) \in N_K(P_K(u_\lambda(T)))$ et $v(T) - P_K(u_\lambda)(T) \in T_K(P_K(u_\lambda(T)))$.

D'autre part

$$\frac{d}{dt} (\nu_\lambda, v - u_\lambda) = (\nu_\lambda, \dot{v} - \dot{u}_\lambda) + (v - u_\lambda, \dot{\nu}_\lambda) ,$$

d'où

$$\left| \frac{d}{dt} (\nu_\lambda, v - u_\lambda) \right|_{\infty, U_\lambda^-} \leqslant (|\dot{v}|_\infty + |\dot{u}_\lambda|_\infty) + (|v|_\infty + |u_\lambda|_\infty) |\dot{\nu}_\lambda|_{\infty, U_\lambda^-} ,$$

qui peut être majoré indépendamment de λ par une constante $C(v)$ (*cf.* lemmes 8 et 9). D'où finalement :

$$\left| \int_{U_\lambda^-} \frac{2\,\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \left| u_\lambda - P_K(u_\lambda) \right| (t) \frac{d}{dt} (\nu_\lambda, v - u_\lambda)(t)\, dt \right| \leqslant \\ \leqslant 2\,\varepsilon \sqrt{\lambda}\, C(v) \int_{U_\lambda^-} \frac{\left| u_\lambda - P_K(u_\lambda) \right| (t)}{\lambda}\, dt ,$$

qui tend vers 0 quand λ tend vers 0 d'après le lemme 9.

A la limite, on a :

$$\langle \mu_1, v - u \rangle = \lim_{\lambda \to 0} \langle \mu_{\lambda,1}, v - u_\lambda \rangle \leqslant 0 \tag{46}$$

pour toute fonction $v \in C^1([0, T], K)$. Mais $C^1([0, T], K)$ est dense dans $C^0([0, T], K)$ pour la topologie de la convergence uniforme, donc la relation (46) se prolonge par continuité à l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans K. En regroupant les inégalités (45) et (46), on obtient (43), qui peut s'écrire encore

$$0 \geq \langle f(t, u, \dot{u}) - \ddot{u}, v - u \rangle \quad \text{pour tout} \quad v \in C^0([0, T], K). \tag{47}$$

C'est le point (6). ■

6. ÉTUDE DU RENVERSEMENT DE LA VITESSE

Nous allons démontrer que pour tout $t \in]0, T[$ tel que $u(t) \in \partial K$ on a :

$$\dot{u}(t+0) = \dot{u}_T(t-0) - e\dot{u}_N(t-0), \tag{48}$$

où $\dot{u}_N$ et $\dot{u}_T$ sont les projections du vecteur $\dot{u}$ respectivement sur $\mathbb{R}\nu(u(t))$ et $(\mathbb{R}\nu(u(t)))^{\perp}$ et où $e \in]0, 1]$ est un coefficient de restitution lié à ε par les relations (8) et (9).

Soit un tel instant t_0 fixé. Par hypothèse, $u(t_0) \in \partial K$ et

$$\begin{cases} \dot{u}(t_0+0) = \lim\limits_{t \to t_0,\, t > t_0} \dfrac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} \in T_K(u(t_0)), \\[2ex] \dot{u}(t_0-0) = \lim\limits_{t \to t_0,\, t < t_0} \dfrac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} \in -T_K(u(t_0)). \end{cases} \tag{49}$$

Si t_0 est un point de continuité de $\dot{u}$, $\dot{u}(t_0-0) = \dot{u}(t_0+0) = \dot{u}(t_0)$ et $\dot{u}(t_0) \in T_{\partial K}(u(t_0))$. Mais $T_{\partial K}(u(t_0)) \cap \mathbb{R}\nu(u(t_0)) = \{0\}$, donc $\dot{u}_N(t_0) = 0$ et la relation (48) est immédiatement vérifiée.

Supposons maintenant que t_0 n'est pas un point de continuité de $\dot{u}$, c'est-à-dire

$$\dot{u}(t_0+0) \neq \dot{u}(t_0-0). \tag{50}$$

Alors la mesure μ présente une masse de Dirac en t_0 et $\mu(\{t_0\}) = \dot{u}(t_0-0) - \dot{u}(t_0+0)$. En effet, considérons t_1 et t_2 deux points de continuité de $\dot{u}$. Nous avons :

$$\dot{u}(t_2) - \dot{u}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t, u(t), \dot{u}(t))\,dt - \langle \mu, 1_{]t_1, t_2[} \rangle,$$

et puisque l'ensemble des points de discontinuité de $\dot{u}$ est négligeable, nous pouvons passer à la limite quand t_1 et t_2 tendent vers t_0 respectivement par valeurs inférieures et supérieures. Il vient :

$$\lim_{t_2, t_1 \to t_0} \dot{u}(t_2) - \dot{u}(t_1) = \dot{u}(t_0+0) - \dot{u}(t_0-0) = -\mu(\{t_0\}).$$

Décomposons μ par rapport à la mesure de Lebesgue [D], [Ru]. Il existe une fonction $g \in L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ telle que $d\mu = g\, dt + d\mu_s$ où μ_s est une mesure singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Décomposons μ_s par rapport à la mesure $|\mu_s|$. D'après le théorème de Radon-Nikodym [Ru], [D], $d\mu_s = h_s\, d|\mu_s|$ avec h_s $|\mu_s|$-intégrable.

La relation (47) implique [R1], [R3] que

$$g(t) \in \partial\varphi(u(t)) \quad \text{pour presque tout } t\,, \tag{51}$$

et

$$h_s(t) \in N_K(u(t))\,|\mu_s|\text{-presque partout sur } [0, T]\,. \tag{52}$$

Grâce à cette décomposition, pour $t = t_0$, on a :

$$\dot{u}(t_0 - 0) - \dot{u}(t_0 + 0) \in N_K(u(t_0)) = \mathbb{R}^+ \ \nu(u(t_0)) \tag{53}$$

et donc

$$\dot{u}_T(t_0 - 0) = \dot{u}_T(t_0 + 0)\,, \tag{54}$$

qui signifie que la vitesse tangentielle est conservée lors de l'impact. Les relations (49) impliquent que :

$$\begin{cases} \dot{u}_N(t_0 - 0) \in \mathbb{R}^+ \ \nu(u(t_0)) \\ \dot{u}_N(t_0 + 0) \in \mathbb{R}^- \ \nu(u(t_0))\,. \end{cases} \tag{55}$$

On veut maintenant montrer que $\dot{u}_N(t_0 - 0)$ est non nul. Pour cela, on va utiliser le lemme suivant.

LEMME 14 : *Pour tout $t \in\,]0, T[$, on a :*

$$|\dot{u}(t + 0)|^2 \leqslant |\dot{u}(t - 0)|^2\,. \tag{56}$$

Preuve : Reprenons l'équation pénalisée

$$\ddot{u}_\lambda + \frac{2\,\varepsilon}{\lambda} G(u_\lambda - P_K(u_\lambda), \dot{u}_\lambda) + \frac{u_\lambda - P_K(u_\lambda)}{\lambda} = f(\,.\,, u_\lambda, \dot{u}_\lambda) \quad \text{p.p.}$$

et multiplions la scalairement par $\dot{u}_\lambda$. En remarquant que $(G(u_\lambda - P_K(u_\lambda), \dot{u}_\lambda), \dot{u}_\lambda) \geqslant 0$, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,|\dot{u}_\lambda|^2 + \varphi_\lambda(u_\lambda)\right) \leqslant (f(\,.\,, u_\lambda, \dot{u}_\lambda), \dot{u}_\lambda) \quad \text{p.p.}$$

Intégrons de t_1 à t_2 :

$$\frac{1}{2}\left|\dot{u}_\lambda(t_2)\right|^2-\frac{1}{2}\left|\dot{u}_\lambda(t_1)\right|^2+\varphi_\lambda(u_\lambda(t_2))-\varphi_\lambda(u_\lambda(t_1))\leqslant \leqslant\int_{t_1}^{t_2}(f(t,u_\lambda(t),\dot{u}_\lambda(t)),\dot{u}_\lambda(t))\,dt\,. \tag{57}$$

Avant de passer à la limite dans cette inégalité, étudions la convergence de $\varphi_\lambda(u_\lambda)$. On a :

$$2\int_0^T\left|\varphi_\lambda(u_\lambda(t))\right|=\int_0^T\left(\frac{u_\lambda(t)-P_K(u_\lambda(t))}{\lambda},u_\lambda(t)-P_K(u_\lambda(t))\right)dt$$
$$=\left\langle\mu_{\lambda,2},u_\lambda-P_K(u_\lambda)\right\rangle\,.$$

Mais $u_\lambda-P_K(u_\lambda)$ converge vers 0 dans $C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ fort, $\mu_{\lambda,2}$ converge vers μ_2 dans $M^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ vague, donc l'intégrale tend vers 0 et $\varphi_\lambda(u_\lambda)$ converge fortement vers 0 dans $L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$. En extrayant une sous-suite, encore notée $\varphi_\lambda(u_\lambda)$, on a convergence de $\varphi_\lambda(u_\lambda)$ vers 0 presque partout sur $[0,T]$.

L'ensemble des points de discontinuité de $\dot{u}$ étant négligeable, on peut trouver deux suites de points, $(t_{1,n})_n$ et $(t_{2,n})_n$ incluses dans l'ensemble des points de continuité de $\dot{u}$, tendant vers t respectivement par valeurs inférieures et supérieures et telles que, pour tout n :

$$\lim_{\lambda\to0}\varphi_\lambda(u_\lambda(t_{1,n}))=\lim_{\lambda\to0}\varphi_\lambda(u_\lambda(t_{2,n}))=0\,.$$

Pour tout n, on a :

$$\frac{1}{2}\left|\dot{u}_\lambda(t_{2,n})\right|^2-\frac{1}{2}\left|\dot{u}_\lambda(t_{1,n})\right|^2+\varphi_\lambda(u_\lambda(t_{2,n}))-\varphi_\lambda(u_\lambda(t_{1,n}))\leqslant \leqslant\int_{t_{1,n}}^{t_{2,n}}(f(t,u_\lambda(t),\dot{u}_\lambda(t)),\dot{u}_\lambda(t))\,dt\,.$$

Faisons tendre λ vers 0 dans l'inégalité précédente :

$$\frac{1}{2}\left|\dot{u}(t_{2,n})\right|^2-\frac{1}{2}\left|\dot{u}(t_{1,n})\right|^2\leqslant\int_{t_{1,n}}^{t_{2,n}}(f(t,u(t),\dot{u}(t)),\dot{u}(t))\,dt\,,$$

et quand n tend vers $+\infty$ on trouve :

$$\left|\dot{u}(t+0)\right|^2\leqslant\left|\dot{u}(t-0)\right|^2\,. \tag{56}$$

■

En regroupant les relations (50), (54) et (56), on obtient :

$$\left|\dot{u}_N(t_0+0)\right|^2 < \left|\dot{u}_N(t_0-0)\right|^2,$$

ce qui exclut en particulier l'éventualité $\dot{u}_N(t_0-0)=0$.

Pour prouver que la relation (48) a lieu en t_0, nous allons procéder à une étude locale qui se déroulera en quatre étapes. Tout d'abord nous exhibons une composante connexe, $]\alpha_\lambda, \beta_\lambda[$, de $U_\lambda^- \cap\,]0, T[$, approchant la singularité en t_0 (lemmes 15 à 17) puis nous montrons la convergence de $\dot{u}_\lambda(\alpha_\lambda)$ vers $\dot{u}(t_0-0)$ (lemme 18). Ensuite nous ferons une étude du comportement de u_λ sur l'intervalle $]\alpha_\lambda, \alpha_\lambda[$ (lemmes 19 et 20). Enfin nous établirons la relation (48).

Au préalable, nous devons introduire de nouvelles notations. Nous savons (*cf.* lemme 11) qu'il existe un voisinage V de $u(t_0)$ et une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ orthonormée tels que localement ∂K soit le graphe d'une fonction F de classe C^2, c'est-à-dire

$$x \in V \cap \partial K \Leftrightarrow x_n = F(x_1, \dots, x_{n-1}) = F(x'),$$

où on désigne par x' le $(n-1)$-uplet $(x_1, \dots, x_{n-1})$. De plus, on peut choisir e telle que pour tout $x \in V \cap \partial K$:

$$\nu(x', F(x')) = \frac{(-\operatorname{grad} F(x'), 1)}{\sqrt{|\operatorname{grad} F(x')|^2+1}} = N(x'),$$

et on a :

$$x \in V \cap K \Leftrightarrow x_n \leq F(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Nous définissons une paramétrisation de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de $u(t_0)$ de la façon suivante : la projection de $V \cap \partial K$ sur l'espace vectoriel engendré par $e_1, \dots, e_{n-1}$ est un voisinage $\mathscr{V}$ de $u(t_0)$ dans cet espace. Considérons l'application ϕ définie sur $\mathscr{V} \times \mathbb{R}$ par :

$$\phi(x', \tau) = \begin{pmatrix} x' \\ F(x') \end{pmatrix} + \tau N(x').$$

C'est un C^1-difféomorphisme local au voisinage de $u(t_0)$, c'est-à-dire qu'il existe V' voisinage de $u(t_0)$ dans ∂K, r et ρ deux réels strictement positifs tels que ϕ soit un C^1-difféomorphisme de $\mathscr{V}' \times\,]-r, +r[$ sur $B_\rho(u(t_0))$, la boule de centre $u(t_0)$ et de rayon ρ, où $\mathscr{V}'$ est la projection de V' sur l'espace vectoriel engendré par $e_1, \dots, e_{n-1}$. On sait d'autre part que :

$$\begin{aligned}|u_\lambda(t)-u(t_0)| &\leq |u_\lambda(t)-u_\lambda(t_0)| + |u_\lambda(t_0)-u(t_0)| \leq \\ &\leq |\dot{u}_\lambda|_\infty\, |t-t_0| + |u_\lambda(t_0)-u(t_0)| \leq C\,|t-t_0| + |u_\lambda(t_0)-u(t_0)|,\end{aligned}$$

d'après le lemme 8. Donc il existe $\lambda_0 > 0$ et $r_0 > 0$ tels que, pour tout $\lambda \leqslant \lambda_0$ et pour tout t tel que $|t - t_0| \leqslant r_0$, on ait :

$$u_\lambda(t) \in B_\rho(u(t_0)) .$$

Désormais on supposera toujours que $t \in]t_0 - r_0, t_0 + r_0[$ et $\lambda \leqslant \lambda_0$.

Si $u_\lambda(t) \in \operatorname{Int}(K) \cap B_\rho(u(t_0))$, il existe un unique τ et un unique x' tels que :

$$u_\lambda(t) = \begin{pmatrix} x' \\ F(x') \end{pmatrix} + \tau N(x') .$$

Posons alors :

$$\nu_\lambda(t) = N(x') .$$

C'est une extension de la définition précédemment donnée de $\nu_\lambda(t)$.

Pour tout $t \in]t_0 - r_0, t_0 + r_0[$, nous posons :

$$\dot{u}_{\lambda, N}(t) = (\dot{u}_\lambda(t), \nu_\lambda(t))\, \nu_\lambda(t) ,$$

qui est la projection de $\dot{u}_\lambda(t)$ sur $\mathbb{R}\nu_\lambda(t)$, et

$$\dot{u}_{\lambda, T}(t) = \dot{u}_\lambda(t) - \dot{u}_{\lambda, N}(t) ,$$

qui est la projection de $\dot{u}_\lambda(t)$ sur $(\mathbb{R}\nu_\lambda(t))^\perp$. D'après le théorème de Pythagore, on a immédiatement :

$$|\dot{u}_\lambda(t)|^2 = |\dot{u}_{\lambda, N}(t)|^2 + |\dot{u}_{\lambda, T}(t)|^2 . \tag{58}$$

En fait il existe une fonction ψ de classe C^1 telle que $\nu_\lambda(t) = \psi(u_\lambda(t))$. Puisque u_λ est absolument continue, ν_λ l'est également et presque partout :

$$\dot{\nu}_\lambda = \dot{\psi}(u_\lambda)\, \dot{u}_\lambda .$$

Puisque u_λ reste dans un borné, on a $|\dot{\psi}(u_\lambda)|_\infty$ borné et, en utilisant le lemme 8, on en déduit que :

$$|\dot{\nu}_\lambda|_\infty \leqslant \text{Cte} . \tag{59}$$

Existence d'un intervalle $]\alpha_\lambda, \beta_\lambda[$ *approchant la singularité.*

LEMME 15 : *Il existe une sous-suite de la suite* λ, $(\lambda_j)_j$, *telle qu'il existe* $\gamma_{\lambda_j} \in U^-_{\lambda_j}$ *convergeant vers* t_0 *quand* λ_j *tend vers* 0.

Preuve : Raisonnons par l'absurde. Supposons donc que :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda' \quad \text{t.q.} \quad \forall \lambda \leqslant \lambda' \, U_\lambda^- \cap \,]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\, = \emptyset ,$$

ce qui s'écrit encore

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda' \quad \text{t.q.} \quad \forall \lambda \leqslant \lambda' \quad \forall t \in \,]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\quad u_\lambda(t) \in K .$$

Mais alors, pour tout $\lambda \leqslant \lambda'$, pour presque tout $t \in \,]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, on a :

$$\ddot{u}_\lambda(t) = f(t, u_\lambda(t), \dot{u}_\lambda(t)) ,$$

donc $\mu_{\lambda\,]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[} = 0$. A la limite, quand λ tend vers 0, on obtient

$$\mu_{]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[} = 0 ,$$

ce qui est absurde car $\mu(\{t_0\}) \neq 0$. ■

Quitte à extraire à nouveau une sous-suite (*cf.* lemme 14), on peut supposer que pour presque tout $t \in [0, T]$, $\varphi_{\lambda_j}(u_{\lambda_j}(t))$ tend vers 0 quand λ_j tend vers 0. Pour alléger les notations, on écrira désormais λ au lieu de λ_j.

LEMME 16 : *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\left| \frac{d}{dt} (\dot{u}_{\lambda, T}) \right|_\infty \leqslant C .$$

Preuve : Rappelons que $\dot{u}_{\lambda, T} = \dot{u}_\lambda - (\dot{u}_\lambda, \nu_\lambda) \nu_\lambda$ et, puisque toutes les fonctions considérées sont absolument continues, on a presque partout :

$$\frac{d}{dt} (\dot{u}_{\lambda, T}) = \ddot{u}_\lambda - (\ddot{u}_\lambda, \nu_\lambda) \nu_\lambda - (\dot{u}_\lambda, \dot{\nu}_\lambda) \nu_\lambda - (\dot{u}_\lambda, \nu_\lambda) \dot{\nu}_\lambda . \qquad (60)$$

En remarquant que, pour tout t tel que $u_\lambda \notin K$,

$$\nu_\lambda(t) = \frac{u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t))}{|u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t))|} ,$$

et que, pour tout t tel que $u_\lambda(t) \in K$, $u_\lambda(t) = P_K(u_\lambda(t))$, l'équation pénalisée conduit à :

$$\ddot{u}_\lambda - (\ddot{u}_\lambda, \nu_\lambda) \nu_\lambda = f(\,.\,, u_\lambda, \dot{u}_\lambda) - (f(\,.\,, u_\lambda, \dot{u}_\lambda), \nu_\lambda) \nu_\lambda ,$$

presque partout. On reconnaît la projection du vecteur $f(t, u_\lambda(t), \dot{u}_\lambda(t))$ sur l'hyperplan $(\mathbb{R}\nu_\lambda(t))^\perp$, qu'on reporte dans (60). D'où

$$\left| \frac{d}{dt} (\dot{u}_{\lambda, T}) \right|_\infty \leqslant |f(\,.\,, u_\lambda, \dot{u}_\lambda)|_\infty + 2 |\dot{u}_\lambda|_\infty \, |\dot{\nu}_\lambda|_\infty ,$$

qui est borné par une constante indépendante de λ d'après le lemme 8 et la majoration (59). ■

Soit $]t_1, t_2[$ un voisinage de t_0 dans $]0, T[$ tel que t_1 et t_2 soient des points de continuité de $\dot{u}$ et $\lim_{\lambda \to 0} \varphi_\lambda(u_\lambda(t_1)) = \lim_{\lambda \to 0} \varphi_\lambda(u_\lambda(t_2)) = 0$. L'ensemble des points vérifiant les conditions imposées à t_1 et t_2 étant dense dans $[0, T]$, il est clair qu'on peut construire un tel intervalle. De plus, pour tout $l > 0$, on peut choisir t_1, t_2 de sorte que $|t_2 - t_1| \leq l$. Dans la suite de la preuve, nous ne considérerons que des voisinages de ce type, inclus dans $]t_0 - r_0, t_0 + r_0[$.

D'après le lemme 15, pour tout voisinage $]t_1, t_2[$ de t_0, on a $]t_1, t_2[\cap U_\lambda^- \neq \emptyset$ pour λ assez petit. On convient de noter :

$$]t_1, t_2[\cap U_\lambda^- = \cup_j]\alpha_\lambda^j, \beta_\lambda^j[. \tag{61}$$

LEMME 17 : *Il existe $l > 0$ et $\eta > 0$ tels que pour tout voisinage $]t_1, t_2[$ de t_0, construit comme indiqué ci-dessus et de longueur inférieure à l, on ait :*

$$\forall \lambda' > 0 \quad \exists \lambda \leq \lambda' \quad \exists j \quad \text{t.q.} \quad |\dot{u}_{\lambda, N}(\alpha_\lambda^j)| > \eta .$$

Preuve : Soit $]t_1, t_2[$ un voisinage de t_0. Il existe λ_0' tel que pour tout $\lambda \leq \lambda_0'$

$$]t_1, t_2[\cap U_\lambda^- = U_j]\alpha_\lambda^j, \beta_\lambda^j[\neq \emptyset .$$

Nous supposerons désormais que $\lambda \leq \lambda_0'$. Posons $\eta_\lambda = \sup_j |\dot{u}_{\lambda, N}(\alpha_\lambda^j)| \in [0, +\infty[$, et supposons que $\lim_{\lambda \to 0} \eta_\lambda = 0$.

Soit $t \geq \alpha_\lambda^j$, $t \in]t_1, t_2[$. D'après l'inégalité d'énergie (57), on a :

$$\frac{1}{2} |\dot{u}_\lambda(t)|^2 - \frac{1}{2} |\dot{u}_\lambda(\alpha_\lambda^j)|^2 + \varphi_\lambda(u_\lambda(t)) - \varphi_\lambda(u_\lambda(\alpha_\lambda^j)) \leq$$
$$\leq \int_{\alpha_\lambda^j}^t (f(s, u_\lambda(s), \dot{u}_\lambda(s)), \dot{u}_\lambda(s))\, ds .$$

Mais $\varphi_\lambda(u_\lambda(t)) \geq 0$ et $\varphi_\lambda(u_\lambda(\alpha_\lambda^j)) \leq \varphi(u_\lambda(t_1))$. En effet, si $\alpha_\lambda^j \neq t_1$ alors $\alpha_\lambda^j \notin U_\lambda^-$ et $\varphi_\lambda(u_\lambda(\alpha_\lambda^j)) = 0$. Donc

$$|\dot{u}_\lambda(t)|^2 \leq |\dot{u}_\lambda(\alpha_\lambda^j)|^2 + 2\, \varphi_\lambda(u_\lambda(t_1)) +$$
$$+ 2 \int_{\alpha_\lambda^j}^t (f(s, u_\lambda(s), \dot{u}_\lambda(s)), \dot{u}_\lambda(s))\, ds .$$

En utilisant encore les résultats du lemme 8, on a :

$$\left|(f(s, u_\lambda(s), \dot u_\lambda(s)), \dot u_\lambda(s))\right| \leqslant C ,$$

d'où

$$\left|\dot u_\lambda(t)\right|^2 \leqslant \left|\dot u_\lambda(\alpha_\lambda^j)\right|^2 + 2\,\varphi_\lambda(u_\lambda(t_1)) + 2\,C\,|t_2 - t_1| . \tag{62}$$

Mais,

$$\dot u_{\lambda,T}(t) - \dot u_{\lambda,T}(\alpha_\lambda^j) = \int_{\alpha_\lambda^j}^t \frac{d}{ds}(\dot u_{\lambda,T})(s)\,ds .$$

En utilisant le lemme 16, on obtient :

$$\left|\dot u_{\lambda,T}(t) - \dot u_{\lambda,T}(\alpha_\lambda^j)\right| \leqslant C'(t - \alpha_\lambda^j) ,$$

et donc

$$\begin{aligned}\left|\dot u_{\lambda,T}(t)\right|^2 &\leqslant \left|\dot u_{\lambda,T}(\alpha_\lambda^j)\right|^2 + 2\left|\dot u_\lambda\right|_\infty \left|\dot u_{\lambda,T}(t) - \dot u_{\lambda,T}(\alpha_\lambda^j)\right| \\ &\leqslant \left|\dot u_{\lambda,T}(\alpha_\lambda^j)\right|^2 + C''(t - \alpha_\lambda^j) .\end{aligned}$$

Reportons ces résultats dans l'inégalité (62). En utilisant (58), pour tout $t \geqslant \alpha_\lambda^j$, il vient :

$$\begin{aligned}\left|\dot u_{\lambda,N}(t)\right|^2 &\leqslant \eta_\lambda^2 + 2\,\varphi_\lambda(u_\lambda(t_1)) + (2\,C + C'')|t_2 - t_1| \\ &\leqslant \eta_\lambda^2 + 2\,\varphi_\lambda(u_\lambda(t_1)) + C_1|t_2 - t_1| .\end{aligned} \tag{63}$$

Cette majoration est uniforme par rapport à j donc finalement :

$$\forall t \in \,]t_\lambda, t_2[\quad \left|\dot u_{\lambda,N}(t)\right|^2 \leqslant \eta_\lambda^2 + 2\,\varphi_\lambda(u_\lambda(t_1)) + C_1|t_2 - t_1| ,$$

où $t_\lambda = \inf_j \alpha_\lambda^j \geqslant t_1$.

Supposons $t_\lambda > t_1$. Pour tout $t \in \,]t_1, t_\lambda[$, $u_\lambda(t) \in K$ et par conséquent $\ddot u_\lambda = f(\,.\,, u_\lambda, \dot u_\lambda)$ presque partout sur $]t_1, t_\lambda[$. Donc

$$\left|\dot u_{\lambda,N}(t) - \dot u_{\lambda,N}(t_\lambda)\right| \leqslant \left|\dot u_\lambda(t) - \dot u_\lambda(t_\lambda)\right| + \left|\dot u_{\lambda,T}(t) - \dot u_{\lambda,T}(t_\lambda)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^{t_\lambda} \left|f(s, u_\lambda(s), \dot u_\lambda(s))\right|\,ds + C'(t_\lambda - t) \leqslant C'''(t_\lambda - t) ,$$

et

$$\begin{aligned}\left|\dot u_{\lambda,N}(t)\right|^2 &\leqslant \left|\dot u_{\lambda,N}(t_\lambda)\right|^2 + 2\left|\dot u_\lambda\right|_\infty \left|\dot u_{\lambda,N}(t) - \dot u_{\lambda,N}(t_\lambda)\right| \\ &\leqslant \eta_\lambda^2 + 2\,\varphi_\lambda(u_\lambda(t_1)) + C_2|t_2 - t_1| .\end{aligned}$$

Soit $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$. On a :

$$|\dot{u}_{\lambda,N}(t)|^2 \leqslant \eta_\lambda^2 + 2\,\varphi_\lambda(u_\lambda(t_1)) + C_3(t_2 - t_1) \quad \forall t \in]t_1, t_2[\,.$$

Soit $\xi > 0$. Choisissons $]t_1, t_2[$ voisinage de t_0 tel que $2\,C_3|t_2 - t_1| \leqslant \xi^2$. Pour tout choix de t_1 vérifiant cette condition, il existe $\lambda(t_1) > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \leqslant \lambda(t_1) \quad \eta_\lambda^2 + 2\,\varphi_\lambda(u_\lambda(t_1)) \leqslant \frac{\xi^2}{2},$$

et dans ce cas,

$$|\dot{u}_{\lambda,N}(t)| \leqslant \xi \quad \forall t \in]t_1, t_2[\,. \tag{64}$$

D'autre part, pour tout $\zeta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0[$

$$|\dot{u}(t) - \dot{u}(t_0 - 0)| \leqslant \frac{\zeta}{2}.$$

Fixons t, un point de continuité de $\dot{u}$ appartenant à $]t_0 - \varepsilon, t_0[$. On a :

$$\exists \lambda(t) > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall \lambda < \lambda(t) \quad |\dot{u}_\lambda(t) - \dot{u}(t)| \leqslant \frac{\zeta}{2},$$

puisque $\lim_{\lambda \to 0} \dot{u}_\lambda(t) = \dot{u}(t)$, d'où

$$|\dot{u}_\lambda(t) - \dot{u}(t_0 - 0)| \leqslant \zeta,$$

et donc il existe $\lambda(t) > 0$ tel que

$$\forall \lambda < \lambda(t) \quad |(\dot{u}_\lambda(t), \nu(u(t_0)))| \geqslant |\dot{u}_N(t_0 - 0)| - \zeta.$$

Mais

$$|\nu(u(t_0)) - \nu_\lambda(t)| = |\psi(u(t_0)) - \psi(u_\lambda(t))| \leqslant C_4|u(t_0) - u_\lambda(t)| \leqslant C_4\,\zeta,$$

où C_4 est la norme dans L^∞ de $\dot{\psi}$ sur $B_\rho(u(t_0))$. Donc

$$\big|\,|\dot{u}_{\lambda,N}(t)| - |(\dot{u}_\lambda(t), \nu(u(t_0)))|\,\big| \leqslant |\dot{u}_\lambda|_\infty\, C_4\,\zeta \leqslant C_5\,\zeta.$$

Par conséquent, il existe $\lambda(t) > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \leqslant \lambda(t) \quad |\dot{u}_{\lambda,N}(t)| \geqslant |\dot{u}_N(t_0 - 0)| - (C_5 + 1)\,\zeta.$$

Pour $\zeta = (2\,C_5 + 2)^{-1}\,|\dot{u}_N(t_0 - 0)|$, on a :

$$\exists \lambda(t) > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall \lambda \leqslant \lambda(t) \quad |\dot{u}_{\lambda,N}(t)| \geqslant \frac{|\dot{u}_N(t_0 - 0)|}{2}. \tag{65}$$

Nous allons maintenant choisir une valeur particulière de ξ pour mettre en évidence une contradiction.

Prenons $\xi = |\dot{u}_N(t_0 - 0)|/4$ et choisissons t_1 tel que $|t_2 - t_1| \leqslant l = (2\, C_3)^{-1}\, \xi^2$. Alors d'après (64), on sait qu'il existe $\lambda\,(t_1)$ tel que :

$$\forall \lambda \leqslant \lambda\,(t_1) \quad \forall t \in\,]t_1, t_2[\quad |\dot{u}_{\lambda, N}(t)| \leqslant \frac{|\dot{u}_N(t_0 - 0)|}{4}\,.$$

Choisissons $t \in\,]t_1, t_2[\, \cap\,]t_0 - \varepsilon, t_0[$, t point de continuité de $\dot{u}$. D'après (65), on sait qu'il existe $\lambda\,(t)$ tel que :

$$\forall \lambda \leqslant \lambda\,(t) \quad |\dot{u}_{\lambda, N}(t)| \geqslant \frac{|\dot{u}_N(t_0 - 0)|}{2}\,,$$

ce qui est absurde.

Par conséquent, pour tout voisinage de t_0 de longueur inférieure à l, l'hypothèse $\lim\limits_{\lambda \to 0} \eta_\lambda = 0$ est fausse : il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall \lambda' > 0 \quad \exists \lambda \leqslant \lambda' \quad \exists j \quad \text{t.q.} \quad |\dot{u}_{\lambda, N}(\alpha_\lambda^j)| \geqslant \eta\,.$$

Puisque $\lim\limits_{\lambda \to 0} |\dot{u}_{\lambda, N}(\alpha_\lambda^j)| \geqslant \eta$, on peut remarquer que $\alpha_\lambda^j \neq t_1$, c'est-à-dire, $u_\lambda(\alpha_\lambda^j) \in \partial K$, pour λ assez petit. ■

Grâce à ce dernier résultat, on peut constuire une sous-suite encore notée λ et des points α_λ, β_λ tels que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to 0} \alpha_\lambda = t_0\,, \\ ]\alpha_\lambda, \beta_\lambda[\quad \text{est une composante connexe de } U_\lambda^-\,, \\ u_\lambda(\alpha_\lambda) \in \partial K\,, \quad |\dot{u}_{\lambda, N}(\alpha_\lambda)| \geqslant \eta > 0\,. \end{cases}$$

Étude de la convergence de $(\dot{u}_\lambda(\alpha_\lambda))_\lambda$.

On s'intéresse à la fonction k_λ définie sur un voisinage de t_0 par :

$$k_\lambda(t) = u_{\lambda, n}(t) - F\,(u_{\lambda, 1}(t), \ldots, u_{\lambda, n-1}(t))\,.$$

C'est une fonction dérivable, sa dérivée est absolument continue. Elle s'annule en α_λ et sa dérivée en α_λ est $(\dot{u}_\lambda(\alpha_\lambda), \nu_\lambda(\alpha_\lambda)) > 0$ (*cf.* lemme 11). On sait aussi qu'il existe $\gamma_\lambda < \alpha_\lambda$ tel que $k_\lambda(t) < 0$ pour tout $t \in\,]\gamma_\lambda, \alpha_\lambda[$, c'est-à-dire, $u_\lambda(t) \in \text{Int}\,(K)$ pour tout $t \in\,]\gamma_\lambda, \alpha_\lambda[$.

Étudions la dérivée seconde de k_λ. On a :

$$\frac{d^2 k_\lambda}{dt^2} = \ddot{u}_{\lambda, n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 F\,(u_{\lambda, 1}, \ldots, u_{\lambda, n-1})}{\partial x_i^2}\, \dot{u}_{\lambda, i}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F\,(u_{\lambda, 1}, \ldots, u_{\lambda, n-1})}{\partial x_i}\, \ddot{u}_{\lambda, i}\,,$$

presque partout. Les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de F sont continues, donc sont bornées sur tout compact. En utilisant le lemme 8, on obtient :

$$\left| \frac{d^2 k_\lambda}{dt^2} \right| \leqslant C \left| f(\,.\,, u_\lambda, \dot{u}_\lambda) \right| + C' \quad \text{presque partout sur }]\gamma_\lambda, \alpha_\lambda[\,,$$

et finalement

$$\left| \frac{d^2 k_\lambda}{dt^2} \right| \leqslant \mathrm{Cte} = M \quad \text{presque partout sur }]\gamma_\lambda, \alpha_\lambda[\,.$$

Alors, pour tout $t \in]\gamma_\lambda, \alpha_\lambda[$:

$$k_\lambda(t) = k_\lambda(\alpha_\lambda) + \frac{dk_\lambda}{dt}(\alpha_\lambda)(t - \alpha_\lambda) + \int_{\alpha_\lambda}^{t} \left(\int_{\alpha_\lambda}^{s} \frac{d^2 k_\lambda}{dl^2}(l)\, dl \right) ds\,,$$

et

$$k_\lambda(t) \leqslant \eta\,(t - \alpha_\lambda) + \frac{M}{2}(t - \alpha_\lambda)^2\,.$$

Donc, $\gamma_\lambda \leqslant \max\ \{0, \alpha_\lambda - 2\,\eta/M\}$, ce qui signifie qu'il existe un intervalle à gauche de α_λ, de longueur minorée, sur lequel $u_\lambda \in \mathrm{Int}\,(K)$.

Posons $2\,m = \min\ \{2\,\eta/M, t_0, T - t_0\}$. Il existe $\lambda' > 0$ tel que pour tout $\lambda \leqslant \lambda'$, $\alpha_\lambda \in]t_0 - m/2, t_0 + m/2[$ puisque α_λ converge vers t_0.

Soit $t \in]t_0 - m, \alpha_\lambda[$. On a $|t - \alpha_\lambda| < |\alpha_\lambda - t_0| + 3\,m/2 < 2\,m$, donc $t \in]\alpha_\lambda - 2\,\eta/M, \alpha_\lambda[$ et $u_\lambda(t) \in \mathrm{Int}\,(K)$.

Ainsi, pour tout $\lambda \leqslant \lambda'$, $u_\lambda(]t_0 - m, \alpha_\lambda[) \subset \mathrm{Int}\,(K)$.

Dans la suite de la démonstration nous supposerons $\lambda \leqslant \lambda'$.

LEMME 18 : *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$\lim_{\lambda \to 0} \dot{u}_\lambda(\alpha_\lambda) = \dot{u}(t_0 - 0)\,.$$

Preuve : Pour tout λ assez petit, l'intervalle $]t_0 - m, \alpha_\lambda[$ n'est pas vide et pour tout $t \in]t_0 - m, \alpha_\lambda[$, $u_\lambda(t) \in \mathrm{Int}\,(K)$. Donc

$$\ddot{u}_\lambda = f(\,.\,, u_\lambda, \dot{u}_\lambda) \quad \text{p.p. sur} \quad]t_0 - m, \alpha_\lambda[\,,$$

et, grâce aux majorations du lemme 8 :

$$\left| \dot{u}_\lambda(t) - \dot{u}_\lambda(t') \right| \leqslant C\,|t - t'| \quad \forall\,(t, t') \in]t_0 - m, \alpha_\lambda[^2\,.$$

Fixons $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{t \to t_0,\, t < t_0} \dot{u}(t) = \dot{u}(t_0 - 0)$, il existe $\zeta > 0$ tel que :

$$\forall t \in \,]t_0 - \zeta, t_0[\quad |\dot{u}(t) - \dot{u}(t_0 - 0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, puisque $\lim_{\lambda \to 0} \alpha_\lambda = t_0$, il existe λ'_0 tel que :

$$\forall \lambda \leqslant \lambda'_0 \quad \alpha_\lambda > t_0 - \zeta \quad \text{et} \quad |\alpha_\lambda - t_0| < \frac{\varepsilon}{6C}.$$

Fixons t un point de continuité de $\dot{u}$ appartenant à $]t_0 - \zeta, t_0[\,\cap\,]t_0 - m, \alpha_\lambda[\,\cap\,]t_0 - \varepsilon/6C, t_0 + \varepsilon/6C[$. Alors $\lim_{\lambda \to 0} \dot{u}_\lambda(t) = \dot{u}(t)$ et, par conséquent, il existe $\lambda(t)$ tel que :

$$\forall \lambda \leqslant \lambda(t) \quad |\dot{u}_\lambda(t) - \dot{u}(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $\lambda \leqslant \min \{\lambda'_0, \lambda(t)\}$. On a :

$$\begin{aligned} |\dot{u}_\lambda(\alpha_\lambda) - \dot{u}(t_0 - 0)| \leqslant \\ &\leqslant |\dot{u}_\lambda(\alpha_\lambda) - \dot{u}_\lambda(t)| + |\dot{u}_\lambda(t) - \dot{u}(t)| + |\dot{u}(t) - \dot{u}(t_0 - 0)| \\ &< C\,|\alpha_\lambda - t| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < C\left(\frac{\varepsilon}{6C} + \frac{\varepsilon}{6C}\right) + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Étude de u_λ sur l'intervalle $]\alpha_\lambda, \beta_\lambda[$

Introduisons de nouvelles notations. Pour tout $t \in U_\lambda^-$, on pose :

$$r_\lambda(t) = |u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t))| = (u_\lambda(t) - P_K(u_\lambda(t)), \nu_\lambda(t)).$$

Cette fonction est absolument continue et (*cf.* lemme 9) on a :

$$\dot{r}_\lambda = \frac{d}{dt}(|u_\lambda - P_K(u_\lambda)|) = (\dot{u}_\lambda, \nu_\lambda), \quad \text{p.p. sur} \quad U_\lambda^-.$$

Il est clair que $\dot{r}_\lambda$ est le produit scalaire de deux fonctions absolument continues, donc est elle aussi absolument continue, sa dérivée étant donnée par :

$$\ddot{r}_\lambda = (\ddot{u}_\lambda, \nu_\lambda) + (\dot{u}_\lambda, \dot{\nu}_\lambda).$$

L'équation pénalisée permet de déterminer une équation différentielle satisfaite par r_λ sur U_λ^- :

$$\ddot{r}_\lambda + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} \dot{r}_\lambda + \frac{r_\lambda}{\lambda} = (f(\,.\,, u_\lambda, \dot{u}_\lambda), \nu_\lambda) - (\dot{u}_\lambda, \dot{\nu}_\lambda) = q_\lambda.$$

Toutes les estimations déjà faites permettent d'affirmer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|q_\lambda|_{\infty, U_\lambda^-} \leq C .$$

Nous allons faire un changement de variable. Définissons τ par :

$$t = \alpha_\lambda + \sqrt{\lambda}\, \tau ,$$

et posons

$$R_\lambda(\tau) = r_\lambda(t) , \quad Q_\lambda(\tau) = q_\lambda(t) \quad \forall t \in]\alpha_\lambda, \beta_\lambda[.$$

On note $\gamma_\lambda = (\beta_\lambda - \alpha_\lambda)/\sqrt{\lambda}$. Alors R_λ satisfait l'équation différentielle suivante sur $]0, \gamma_\lambda[$:

$$\ddot{R}_\lambda + 2\,\varepsilon\,\dot{R}_\lambda + R_\lambda = \lambda Q_\lambda . \tag{66}$$

Les conditions initiales sont :

$$R_\lambda(0) = r_\lambda(\alpha_\lambda) = 0 , \quad \dot{R}_\lambda(0) = \sqrt{\lambda}\, \dot{r}_\lambda(\alpha_\lambda) > \sqrt{\lambda}\, \eta .$$

Considérons p_λ la solution de l'équation :

$$\ddot{p}_\lambda + 2\,\varepsilon \dot{p}_\lambda + p_\lambda = 0 ,$$

avec les mêmes conditions initiales que R_λ. On a :

$$p_\lambda(\tau) = \frac{\dot{p}_\lambda(0)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} e^{-\varepsilon\tau} \sin\left(\sqrt{1 - \varepsilon^2}\, \tau\right) , \tag{67}$$

et

$$\begin{aligned} &\left|\dot{R}_\lambda(\tau) - \dot{p}_\lambda(\tau)\right| + \left|R_\lambda(\tau) - p_\lambda(\tau)\right| \leq \\ &\qquad \leq \frac{\lambda\, |q_\lambda|_{\infty, U_\lambda^-}}{a} (\exp(a\tau) - 1) \leq C\lambda\, (\exp(a\tau) - 1) , \end{aligned} \tag{68}$$

pour $\tau \in]0, \gamma_\lambda[$, où a est une constante strictement positive.

LEMME 19 : *Avec les notations précédentes*

$$\lim_{\lambda \to 0} \gamma_\lambda = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\beta_\lambda - \alpha_\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} .$$

Preuve : Pour tout $\tau \in]0, \gamma_\lambda[$

$$R_\lambda(\tau) = \left|u_\lambda - P_K(u_\lambda)\right| (\alpha_\lambda + \sqrt{\lambda}\,\tau) > 0 ,$$

donc

$$p_\lambda(\tau) \geqslant -C\lambda\,(\exp(a\tau)-1)\,.$$

D'où

$$\dot{p}_\lambda(0)\,e^{-\varepsilon\tau}\sin\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tau\right) \geqslant -C\lambda\,\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(\exp(a\tau)-1)\,. \quad (69)$$

Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall\lambda' > 0 \quad \exists\lambda \leqslant \lambda' \quad \text{t.q.} \quad \gamma_\lambda > \frac{\pi+\delta}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,.$$

Fixons $\tau \in \left]\pi/\sqrt{1-\varepsilon^2},\, 2\,\pi/\sqrt{1-\varepsilon^2}\right[\cap \left]0,\, (\pi+\delta)/\sqrt{1-\varepsilon^2}\right[$. Alors en utilisant (69), il vient :

$$\forall\lambda' > 0 \quad \exists\lambda \leqslant \lambda'$$
$$\text{t.q.} \quad 0 > \eta e^{-\varepsilon\tau}\sin\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tau\right) \geqslant -C\,\sqrt{\lambda}\,\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(\exp(a\tau)-1)\,,$$

ce qui est absurde. Donc

$$\limsup \gamma_\lambda \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,.$$

Alors utilisons l'inégalité (68) à la limite en $\tau = \gamma_\lambda$. Pour λ assez petit, $\beta_\lambda < T$, donc $u_\lambda(\beta_\lambda) \in \partial K$ et on trouve :

$$\left|\frac{\dot{p}_\lambda(0)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,e^{-\varepsilon\gamma_\lambda}\sin\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\gamma_\lambda\right)\right| \leqslant C\lambda\,(\exp(a\gamma_\lambda)-1)\,.$$

Puisque β_λ est strictement positif et majoré, il existe une constante C telle que :

$$\eta\,\sqrt{\lambda}\left|\frac{\sin\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\gamma_\lambda\right)}{\gamma_\lambda}\right| \leqslant \left|\dot{p}_\lambda(0)\right|\left|\frac{\sin\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\gamma_\lambda\right)}{\gamma_\lambda}\right| \leqslant C\lambda\,,$$

d'où :

$$\left|\frac{\sin\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\gamma_\lambda\right)}{\gamma_\lambda}\right| = O(\sqrt{\lambda})\,.$$

Une étude élémentaire de la fonction $x \mapsto x^{-1}\sin(x)$ conduit à :

$$\gamma_\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + O(\sqrt{\lambda})\,. \qquad \blacksquare$$

LEMME 20 : *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\lim_{\lambda \to 0} \dot{u}_{\lambda, N}(\beta_\lambda) = - e\dot{u}_N(t_0 - 0).$$

Preuve : Considérons la fonction h définie par :

$$h(\tau) = e^{-\varepsilon\tau} \frac{\sin(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tau)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $p_\lambda = \dot{p}_\lambda(0)\,h$. Pour λ assez petit, $\gamma_\lambda \leqslant (2\,\pi/\sqrt{1-\varepsilon^2})$ et par conséquent :

$$\left|\dot{p}_\lambda(\gamma_\lambda) - \dot{p}_\lambda\left(\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\dot{p}_\lambda(0)| \left|\gamma_\lambda - \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right| |\ddot{h}|_{\infty,\,[0,\,2\,\pi/\sqrt{1-\varepsilon^2}]},$$

c'est-à-dire :

$$\left|\dot{p}_\lambda(\gamma_\lambda) - \dot{p}_\lambda\left(\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)\right| \leqslant \sqrt{\lambda}\, C \left|\gamma_\lambda - \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right|.$$

Un rapide calcul donne :

$$\dot{p}_\lambda\left(\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) = - e\dot{p}_\lambda(0),$$

où e est le coefficient de restitution défini par les relations (8) et (9).

On obtient finalement :

$$\dot{p}_\lambda(\gamma_\lambda) = - e\dot{p}_\lambda(0) + O(\lambda).$$

D'autre part, la relation (68) donne :

$$\dot{R}_\lambda(\gamma_\lambda) = \dot{p}_\lambda(\gamma_\lambda) + O(\lambda),$$

et donc

$$\dot{R}_\lambda(\gamma_\lambda) = - e\dot{p}_\lambda(0) + O(\lambda).$$

Remplaçons les différents termes de cette égalité par leur valeur en fonction de $\dot{u}_\lambda$. On trouve :

$$(\dot{u}_\lambda(\beta_\lambda),\ \nu_\lambda(\beta_\lambda)) = - e(\dot{u}_\lambda(\alpha_\lambda),\ \nu_\lambda(\alpha_\lambda)) + O(\sqrt{\lambda}),$$

et puisque $\lim_{\lambda \to 0} \nu_\lambda(\beta_\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \nu_\lambda(\alpha_\lambda) = \nu(u(t_0))$, en combinant ce résultat avec celui du lemme 18, on a :

$$\lim_{\lambda \to 0} \dot{u}_{\lambda, N}(\beta_\lambda) = -e\dot{u}_N(t_0 - 0) . \qquad \blacksquare$$

Conclusion : la relation (48)

On tire immédiatement du lemme 20 qu'il existe λ' tel que, pour tout $\lambda \leqslant \lambda'$:

$$\left|\dot{u}_{\lambda, N}(\beta_\lambda)\right| \geqslant e\eta/2 > 0 .$$

On reprend alors tous les raisonnements faits pour α_λ. On démontre qu'il existe $\lambda'' > 0$ et $m' > 0$ tels que :

$$\forall \lambda \leqslant \lambda'' \quad \beta_\lambda < t_0 + m' \quad \text{et} \quad u_\lambda(]\beta_\lambda, t_0 + m'[) \subset \operatorname{Int}(K) .$$

Alors on a aussi :

$$\lim_{\lambda \to 0} \dot{u}_{\lambda, N}(\beta_\lambda) = \dot{u}_N(t_0 + 0) ,$$

et avec le lemme 20 :

$$\dot{u}_N(t_0 + 0) = -e\dot{u}_N(t_0 - 0) ,$$

ce qui nous permet de conclure.

Réalisation des conditions initiales

Pour tout $\lambda > 0$, $u_\lambda(0) = u_0$, donc, par passage à la limite dans $C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$ fort, on a $u(0) = u_0$.

Comme $\dot{u}$ est une fonction à variation bornée, elle admet des limites à droite et à gauche en tout point. Donc

$$\dot{u}(t - 0) = u_1 + \int_0^t f(s, u(s), \dot{u}(s))\, ds - \mu([0, t[) \text{ pour tout } t \in]0, T] ,$$

$$\dot{u}(t + 0) = u_1 + \int_0^t f(s, u(s), \dot{u}(s))\, ds - \mu([0, t]) \text{ pour tout } t \in [0, T[.$$

En reprenant la décomposition de la mesure μ par rapport à la mesure de Lebesgue, on a pour $t = 0$:

$$\dot{u}(0 + 0) = u_1 - \mu_s(\{0\}) .$$

Si $\mu_s(\{0\}) = 0$, on obtient $\dot{u}(0+0) = u_1$ et puisque

$$\dot{u}(0+0) = \lim_{\lambda \to 0,\, t > 0} \frac{u(t) - u_0}{t} \in T_K(u_0)\,,$$

on a $u_1 \in T_K(u_0)$. Si $\mu_s(\{0\}) \neq 0$, la mesure μ_s a un atome en 0 et il résulte de l'interprétation (52) que :

$$u_1 - \dot{u}(0+0) \in N_K(u_0)\,. \tag{70}$$

Si $u_1 \in T_K(u_0)$, alors puisque $u_1 - \dot{u}(0+0) \in N_K(u_0)$, pour tout $z \in T_K(u_0)$, $(u_1 - \dot{u}(0+0),\ z) \leq 0$. En choisissant successivement $z = u_1$ et $z = \dot{u}(0+0)$ on obtient les inégalités :

$$|u_1|^2 \leq (u_1, \dot{u}(0+0)) \leq |\dot{u}(0+0)|^2\,. \tag{71}$$

L'inégalité d'énergie (57) donne, en prenant $t_1 = 0$:

$$|\dot{u}_\lambda(t)|^2 \leq |u_1|^2 + 2\int_0^t (f(s, u_\lambda(s), \dot{u}_\lambda(s)), \dot{u}_\lambda(s))\, ds\,,$$

pour tout $t \in [0, T]$ car $\varphi_\lambda(u_\lambda(t)) \geq 0$. En passant à la limite, on obtient :

$$|\dot{u}(t)|^2 \leq |u_1|^2\,,$$

presque partout sur $[0, T]$, et donc

$$|\dot{u}(0+0)|^2 \leq |u_1|^2\,. \tag{72}$$

En combinant cette dernière inégalité avec (71) on trouve finalement $\dot{u}(0+0) = u_1$.

Supposons que $u_1 \in -T_K(u_0)$ et $u_1 \notin T_K(u_0)$. Alors nécessairement $u_0 \in \partial K$ et $(u_1, \nu(u_0)) > 0$, donc il existe $\beta_\lambda > 0$ tel que, pour tout $t \in \left]0, \beta_\lambda\right[$, $u_\lambda(t) \notin K$.

On peut alors reprendre la démonstration faite précédemment pour $t_0 \in \left]0, T\right[$, tel que $u(t_0) \in \partial K$, à partir de l'étude de u_λ sur $\left]\alpha_\lambda, \beta_\lambda\right[$. Tout reste vrai avec $\alpha_\lambda = 0$ et $\dot{u}_\lambda(\alpha_\lambda) = u_1$ pour tout λ. La conclusion du lemme 20 est alors :

$$\lim \dot{u}_{\lambda, N}(\beta_\lambda) = -e u_{N,1}\,,$$

et on obtient finalement :

$$\dot{u}_N(0+0) = -e u_{N,1}\,.$$

La relation (70)

$$u_1 - \dot{u}(0+0) \in N_K(u_0) = \mathbb{R}^+ \ \nu(u_0),$$

donne immédiatement

$$\dot{u}_T(0+0) = u_{T,1},$$

ce qui achève la preuve. ■

RÉFÉRENCES

[BeGo] M. BERGER, B. GOSTIAUX, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces,* PUF, Paris, 1987.

[Br1] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications,* Masson, Paris, 1987.

[Br2] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert,* North Holland, Amsterdam, Londres, New York, 1973.

[CoLe] E. A. CODDINGTON, N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations,* McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1955.

[D] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse,* Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[HeSt] E. HEWITT, K. STROMBERG, *Real and abstract analysis,* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.

[Hö] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators I,* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

[Pa] L. PAOLI, *Mouvement à un nombre fini de degrés de liberté avec contraintes unilatérales et sans perte d'énergie,* Rapport interne de l'équipe d'analyse numérique Lyon-Saint-Étienne, 1991.

[R1] R. T. ROCKAFELLAR, Integrals which are convex functionnals, *Pacific J. of Math.,* 1968, *24,* pp. 525-539.

[R2] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex analysis,* Princeton University Press, Princeton, 1970.

[R3] R. T. ROCKAFELLAR, Integrals which are convex functionnals II, *Pacific J. Math.,* 1971, *39,* pp. 439-469.

[Ru] W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe,* Masson, Paris, 1987.

[Sc] M. SCHATZMAN, A class of nonlinear differential equations of second order in time, *Nonlinear Anal., Theory, Methods and Applications,* 1978, *2,* pp. 355-373.