M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique

D. Sandri

Sur l'approximation numérique des écoulements quasi-newtoniens dont la viscosité suit la loi puissance ou la loi de Carreau

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 27, n° 2 (1993), p. 131-155

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_2_131_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE
(Vol. 27, n° 2, 1993, p. 131 à 155)

SUR L'APPROXIMATION NUMÉRIQUE DES ÉCOULEMENTS QUASI-NEWTONIENS DONT LA VISCOSITÉ SUIT LA LOI PUISSANCE OU LA LOI DE CARREAU (*)

par D. SANDRI (1)

Communiqué par P. G. CIARLET

On the numerical approximation of quasi-Newtonian flow obeying the power law or the Carreau law

Résumé. — *On étudie dans cet article l'approximation par éléments finis d'écoulements quasi-newtoniens dont la viscosité suit une loi incluant la loi puissance ou une loi de Carreau. La méthode employée n'utilise pas de fonctionnelle énergie et permet d'améliorer les majorations d'erreurs connues antérieurement.*

Abstract. — *In this paper we study the finite element approximation of quasi-Newtonian flows whose viscosity obeys a power law or the Carreau law. The method employed makes no use of an energy functional and allows to improve the previously known error estimates.*

0. INTRODUCTION

Dans cet article, on étudie la convergence de la méthode éléments finis appliquée à la résolution de problèmes de fluides incompressibles dont la loi de comportement est une loi de Carreau ou une loi de type « puissance ».

Grâce à l'utilisation de propriétés de monotonie de la forme suivante : pour $r > 2$

$$(|y| + |x|)^{r-2}|y-x|^2 \leq C\,(|x|^{r-2}x - |y|^{r-2}y, y - x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (0.1)$$

et pour $1 < r < 2$

$$\big||y|^{r-2}y - |x|^{r-2}x\big|\,|y-x| \leq C\,(|y|^{r-2}y - |x|^{r-2}x, y - x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (0.2)$$

(*) Manuscrit reçu le 9 avril 1991.
Subject classifications : AMS(MOS) : 65N30 ; CR : G1.8.
(1) Laboratoire d'Analyse numérique, Université de Lyon I, bât. 101, 43, bd du 11-Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France.
This work has been supported in part by the GDR CNRS 901 « Rhéologie des polymères fondus ».

on améliore les résultats de convergence sur la pression obtenus dans [3], tout en retrouvant (et en améliorant dans certains cas, notamment pour le modèle de Carreau avec $r > 2$) les résultats d'approximation sur les vitesses.

La méthode utilisée pour montrer ces résultats ne nécessite plus, comme dans [3], l'utilisation de fonctionnelle énergie, et peut alors dans certaines applications se révéler plus souple d'emploi.

Une partie des difficultés rencontrées dans l'approximation de l'écoulement de ce type de fluides se retrouve dans le problème non linéaire :

$$- \nabla \cdot (|\nabla u|^{r-2} \nabla u) = f \,, \quad \text{avec} \quad r > 1 \,. \tag{0.3}$$

Pour ce dernier problème des estimations d'erreur ont été données dans [8], elles sont en $h^{\frac{1}{r-1}}$ pour $r > 2$ et en $h^{\frac{1}{3-r}}$ pour $1 < r < 2$ (dans le cas où l'on utilise des éléments finis P_1). Ce résultat a été amélioré dans [12], grâce à l'utilisation de la fonctionnelle énergie

$$J(u) = \frac{1}{r} \int |\nabla u|^r - \langle f, v \rangle$$

attachée à ce problème. L'estimation d'erreur obtenue est alors en $h^{\frac{2}{r}}$ dans le cas où $r > 2$ et en $h^{\frac{r}{2}}$ dans le cas où $1 < r < 2$. C'est cette technique qui a été reprise dans [3] pour le traitement de fluides quasi-newtoniens : si, pour fixer les idées, on se restreint au cas du modèle de la loi puissance :

$$- \nabla \cdot \left(|d_{II}(u)|^{\frac{r-2}{2}} d(u) \right) + \nabla p = f \,, \quad \text{avec} \quad \nabla \cdot u = 0 \;\; (r > 1) \,, \tag{0.4}$$

l'estimation d'erreur obtenue est alors en $h^{\frac{1}{r-1}}$ pour la vitesse et en $h^{\frac{1}{r-1}}$ pour la pression dans le cas $r > 2$ et en $h^{\frac{r}{2}}$ pour la vitesse et en $h^{\frac{r}{2}(r-1)}$ pour la pression dans le cas $1 < r < 2$, ce qui améliore les résultats de [2] dans le cas $1 < r < 2$.

Dans ce travail, en utilisant la formulation variationnelle du problème (0.4), et à l'aide de résultats de monotonie supplémentaires de l'opérateur de ce problème qui se déduisent de (0.1) et (0.2) par intégration :
pour $r > 2$, $\exists C > 0$ tel que $\forall u, \, v \in (W^{1,r}(\Omega))^2$ on a

$$\int_\Omega (|d(v)| + |d(u)|)^{r-2} |d(v-u)|^2 \\ \leq C \int_\Omega (|d(v)|^{r-2} d(v) - |d(u)|^{r-2} d(u), d(v-u))$$

et pour $1 < r < 2$, $\exists C > 0$ tel que $\forall u,\ v \in (W^{1,r}(\Omega))^2$ on a

$$\int_\Omega \left| |d(v)|^{r-2}\, d(v) - |d(u)|^{r-2}\, d(u) \right| |d(v-u)|$$
$$\leq C \int_\Omega \left(|d(v)|^{r-2}\, d(v) - |d(u)|^{r-2}\, d(u),\ d(v-u) \right),$$

on donne une erreur sur la pression qui est en $h^{\frac{r}{2(r-1)}}$ dans le cas $r > 2$ et en h^{r-1} dans le cas $1 < r < 2$.

On notera que cette méthode permet de retrouver, sans utiliser de fonctionnelle énergie, les résultats de [12] dans le cas du problème (0.3).

D'autre part cette méthode peut s'appliquer à des problèmes où il est difficile de faire apparaître une fonctionnelle énergie, par exemple : problèmes en temps, fluides de Ladyzhenskaya [11].

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

On considère l'écoulement dans un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ d'un fluide incompressible quasi-newtonien dont la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma = -p\delta + 2\,\eta\,(d_{II}(u))\,d(u) \quad \text{sur } \Omega\,, \tag{1.1}$$

où u désigne le vecteur vitesse, p la pression, $d(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$ le tenseur des taux de déformation, où $(\nabla u)_{ij} = u_{i,j}$ est le tenseur des gradients de vitesse, σ le tenseur des contraintes, $\delta = \delta_{ij}$ le tenseur identité, $d_{II}(u) = \frac{1}{2} d_{ij}(u)\, d_{ij}(u)$ le deuxième invariant du tenseur des vitesses, et η la viscosité du fluide donnée pour $z \geq 0$ par :

$$\eta(z) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)(1 + \lambda z)^{\frac{r-2}{2}} \tag{1.2}$$

avec $0 \leq \eta_\infty < \eta_0$, $\lambda > 0$, $r > 1$ pour le modèle de Carreau et

$$\eta(z) = \mu + \frac{1}{2} g z^{\frac{r-2}{2}} \tag{1.3}$$

avec $\mu \geq 0$, $g > 0$ et $r > 1$, pour le modèle incluant la loi puissance (pour $\mu = 0$ on obtient la loi puissance). D'autre part l'équation de conservation donne :

$$-\nabla \cdot \sigma = -\sigma_{ij,j} = f \quad \text{sur } \Omega\,, \tag{1.4}$$

où f est une force donnée. La condition d'incompressibilité s'écrit :

$$\nabla . u = u_{i,i} = 0 \quad \text{sur } \Omega . \tag{1.5}$$

Pour simplifier on prendra des conditions aux limites homogènes pour la vitesse. On supposera la frontière Γ de Ω Lipchitzienne. Le couple (u, p) est alors solution du problème :

$$(P) \quad \begin{cases} -\partial_j(2\,\eta\,(d_{II}(u))\,d_{ij}(u)) + \partial_i p = f_i & \text{sur } \Omega,\ i = 1, \dots, N \\ u_{i,i} = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma . \end{cases}$$

Avant de donner la formulation faible du problème (P), on introduit les espaces suivants : $(W_0^{1,r}(\Omega))^N$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions de $(W^{1,r}(\Omega))^N$ dont la trace sur Γ est nulle et $(W_0^{1,r}(\Omega))^N$ est muni de la norme $\|u\|_{1,r} = \left[\int_\Omega (2\,d_{II}(u))^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1}{r}}$ qui est une norme équivalente à la norme de $(W^{1,r}(\Omega))^N$ (voir [10]). Soit r' l'exposant conjugué de $r : \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, on notera $L_0^{r'}(\Omega)$ l'espace des fonctions de $L^{r'}(\Omega)$ de moyenne nulle, que l'on munit de la norme $\|.\|_{0,r'}$. On note alors :

$$X = \begin{cases} (W_0^{1,r}(\Omega))^N & \text{si} \quad r > 2 \text{ ou si } 1 < r < 2 \text{ et } \mu = 0 \\ & \qquad\qquad \text{ou } \eta_\infty = 0 \\ (W_0^{1,2}(\Omega))^N = (H_0^1(\Omega))^N & \text{si} \quad 1 < r < 2 \text{ et } \mu > 0 \text{ ou } \eta_\infty > 0 , \end{cases}$$

et $M = L_0^{r'}(\Omega)$ si $X = (W_0^{1,r}(\Omega))^N$, $M = L_0^2(\Omega)$ si $X = (H_0^1(\Omega))^N$. On notera $\|.\|_X$ et $\|.\|_M$ les normes sur X et M et $\|.\|_{X'}$ et $\|.\|_{M'}$ les normes sur leurs duaux respectifs X' et M'. On considère alors l'opérateur A défini de X dans X' par

$$\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega 2\,\eta\,(d_{II}(u))\,(d(u), d(v)) = \int_\Omega 2\,\eta\,(d_{II}(u))\,d_{ij}(u)\,d_{ij}(v)$$

et l'opérateur B linéaire continu défini de X dans M' par

$$\langle Bu, q\rangle = -\int_\Omega \nabla . up .$$

On notera $V = \{v \in X ; \nabla . v = 0\}$. L'opérateur B vérifie alors la condition inf-sup vitesse pression suivante [3] :

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{\langle Bv, q\rangle}{\|q\|_M \, \|v\|_X} \geqslant \beta , \quad \text{avec} \quad \beta > 0 . \tag{1.6}$$

Le problème (P) se met alors sous la forme variationnelle suivante :

$$(P_V)\quad \begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \in X \times M \text{ tel que :} \\ \qquad \langle A(u), v \rangle + \langle Bv, p \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in X, \\ \qquad \langle Bu, q \rangle = 0 \quad \forall q \in M. \end{cases}$$

On a alors le théorème d'existence et d'unicité suivant [3] :

THÉORÈME 1.1 : *Pour $f \in X'$, le problème (P_V) admet une unique solution $(u, p) \in V \times M$.*

2. PROBLÈME APPROCHÉ

On associe au problème (P_V) le problème approché (P_h) suivant : soit $\{X_h \times M_h\}_{h>0} \subset X \times M$ une famille d'espaces de dimension finie, une approximation éléments finis du problème (P_V) s'écrit :

$$(P_h)\quad \begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h) \in X_h \times M_h \text{ tel que :} \\ \qquad \langle A(u_h), v_h \rangle + \langle Bv_h, p_h \rangle = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in X_h, \\ \qquad \langle Bu_h, q_h \rangle = 0 \quad \forall q_h \in M_h. \end{cases}$$

On notera $V_h = \{v \in X_h \,;\, \langle Bv, q \rangle = 0 \,;\, \forall q \in M_h\}$. Comme dans [6] pour le cas Hilbertien, on introduit alors l'hypothèse (A_h) suivante :

$$(A_h)\quad \begin{cases} \text{Il existe une application } \Pi_h : X \to X_h \text{ telle que :} \\ \langle B(v - \Pi_h v), q_h \rangle = 0 \quad \forall q_h \in M_h, \quad \forall v \in X, \\ \|\Pi_h v\|_X \leq c_h \|v\|_X \quad \forall v \in X. \end{cases}$$

On a alors le résultat d'existence et d'unicité pour le problème (P_h) [3].

THÉORÈME 2.1 : *Pour $f \in X'$ et sous l'hypothèse (A_h) le problème (P_h) admet une unique solution $(u_h, p_h) \in V_h \times M_h$.*

Remarque 2.1 : Sous l'hypothèse (A_h) on a la propriété suivante : soit $u \in V$ alors

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_X \leq (1 + c_h) \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X . \tag{2.1}$$

On peut voir ceci de la manière suivante : soit $v_h \in X_h$, on pose

$$w_h = \Pi_h(u - v_h) + v_h ,$$

alors w_h est dans V_h car pour $q_h \in M_h$ on a :

$$\begin{aligned} \langle Bw_h, q_h \rangle &= \langle B\Pi_h(u - v_h), q_h \rangle + \langle Bv_h, q_h \rangle \\ &= \langle B(u - v_h), q_h \rangle + \langle Bv_h, q_h \rangle = 0 \end{aligned}$$

et comme

$$\|u - w_h\|_X \leq \|u - v_h\|_X + \|\Pi_h(u - v_h)\|_X \leq (1 + c_h)\|u - v_h\|_X ,$$

on obtient la relation (2.1). On utilisera aussi la relation suivante qui se déduit de (A_h) (voir [3]) :

$$\inf_{q \in M_h} \sup_{v \in X_h} \frac{\langle Bv, q\rangle}{\|q\|_M \|v\|_X} \geq \beta_h \quad \text{avec} \quad \beta_h = \frac{\beta}{c_h}. \tag{2.2}$$

En fait on démontre en annexe que la relation (2.2) est équivalente à la relation A_h.

3. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE CONTINUITÉ ET DE COERCIVITÉ DE A

On met A sous la forme :

$$\langle A(u), v\rangle = 2\mu \int_\Omega (d(u), d(v)) + \int_\Omega (f_r(d(u)), d(v))$$

où f_r est la fonction définie par :

$$f_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \to \psi(\delta + \phi|x|^2)^{\frac{(r-2)}{2}} x$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, avec $n = N^2$, avec, pour le modèle de Carreau, $\delta = 1$, $\mu = \eta_\infty$, $\psi = 2(\eta_0 - \eta_\infty)$, $\phi = \frac{\lambda}{2}$ et pour le modèle du type loi puissance $\delta = 0$, $\psi = g$, $\phi = \frac{1}{2}$. Dans ce qui suit on pourra supposer sans perdre de généralité que $\psi = \phi = 1$. On supposera que δ prend les valeurs 0 ou 1. On note $(\,.\,,\,.\,)$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On rappelle que r' désigne l'exposant conjugué de r. On a alors le

LEMME 3.1 : *f_r vérifie les propriétés suivantes : soient $x, h \in \mathbb{R}^n$, alors pour $r > 2$*

$$C^1_{\delta,r,n}(\delta + |x|^{r-2} + |x+h|^{r-2})|h|^2 \leq (f_r(x+h) - f_r(x), h) \tag{3.1}$$

$$|f_r(x+h) - f_r(x)| \leq C^2_{\delta,r,n}(\delta + |x|^{r-2} + |x+h|^{r-2})|h| \tag{3.2}$$

pour $r > 1$ on a :

$$C^3_{\delta,r,n}|f_r(x+h) + f_r(x)|\,|h| \leq (f_r(x+h) - f_r(x), h) \tag{3.3}$$

et pour $1 < r < 2$ *on a :*

$$C^4_{\delta, r, n} \frac{|h|^2}{(\delta + |x|^{2-r} + |x+h|^{2-r})} \leq (f_r(x+h) - f_r(x), h) \quad (3.4)$$

$$|f_r(x+h) - f_r(x)| \leq C^5_{\delta, r, n} \frac{|h|}{(\delta + |x|^{2-r} + |x+h|^{2-r})} \quad (3.5)$$

où $C^1_{\delta, r, n}$, $C^2_{\delta, r, n}$, $C^3_{\delta, r, n}$, $C^4_{\delta, r, n}$, $C^5_{\delta, r, n}$ *désignent des constantes strictement positives indépendantes de* x *et de* h.

Remarque 3.1 : Les résultats de continuité (3.2) et de forte monotonie (voir [5]) (3.4) ont d'abord été démontrés dans [8] lorsque $\delta = 0$. Dans le cas $\delta = 1$, f_r n'est plus homogène et ces résultats ont alors été démontrés dans [3] en utilisant les techniques de [4].

Les résultats de forte monotonie (3.1) et de continuité (3.5) améliorent les résultats de [8] et [3].

Remarque 3.2 : On pourra réécrire les inégalités ci-dessus en posant $y = x + h$ et en remplaçant h par $y - x$. D'autre part toutes ces inégalités sont vérifiées de manière évidente pour le cas linéaire $r = 2$.

Preuve : Pour la commodité du lecteur on redémontrera les points (3.2) et (3.4). On considère d'abord le cas $\delta = 0$. On pose $\alpha = r - 2$ et $f_r(x) = |x|^\alpha x$. Dans ce qui suit on omettra l'indice r pour alléger l'écriture.

On considère d'abord les points (3.1) et (3.2) : un calcul montre que pour $r > 2$ on a $f_r \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et que l'on a :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = (\alpha x_i x_j + |x|^2 \delta_{ij})|x|^{\alpha - 2}.$$

La formule de Taylor-Lagrange donne alors pour $k \in \mathbb{R}^n$:

$$(f(x+h) - f(x), k) = \sum_{i=1}^{n} (f_i(x+h) - f_i(x)) k_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + th) h_j k_i \, dt .$$

On pose $x^t = x + th$ et on obtient :

$$(f(x+h) - f(x), k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 (\alpha x_i^t x_j^t + |x^t|^2 \delta_{ij})|x^t|^{\alpha-2} h_j k_i \, dt$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 |x^t|^\alpha h_i k_i \, dt + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \alpha x_i^t x_j^t |x^t|^{\alpha-2} h_j k_i \, dt$$
$$= (h, k) \int_0^1 |x^t|^\alpha \, dt + \int_0^1 \alpha |x^t|^{\alpha-2} (x^t, h)(x^t, k) \, dt . \quad (3.6)$$

On trouve alors pour $k = h$:

$$(f(x+h) - f(x), h) \geq |h|^2 \int_0^1 |x^t|^\alpha \, dt . \tag{3.7}$$

On estime ensuite le terme $\int_0^1 |x^t|^\alpha \, dt$. Soient $\beta > 0$ et $C_{1,n,\beta} > 0$, $C_{2,n,\beta} > 0$ tels que :

$$C_{1,n,\beta}\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^\beta \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^\beta \leq C_{2,n,\beta}\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^\beta ,$$

on a alors avec la convention $0 \times \infty = 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x^t|^\alpha \, dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n (x_i + th_i)^2\right)^{\alpha/2} dt &\geq C_{2,n,\frac{\alpha}{2}}^{-1} \int_0^1 \sum_{i=1}^n |x_i + th_i|^\alpha \, dt \\ &\geq C_{2,n,\frac{\alpha}{2}}^{-1} \sum_{i=1}^n |x_i|^\alpha \int_0^1 \left|1 + t\frac{h_i}{x_i}\right|^\alpha dt \\ &\geq C_{2,n,\frac{\alpha}{2}}^{-1} C_{1,n,\frac{\alpha}{2}} |x|^\alpha \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \int_0^1 |1 + t\lambda|^\alpha \, dt\end{aligned}$$

et comme la fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lambda \to \int_0^1 |1 + t\lambda|^\alpha \, dt$ est continue, strictement positive, et tend vers $+\infty$ quand $|\lambda|$ tend vers $+\infty$ on en déduit qu'elle est minorée par une constante $C_{r,n}$ strictement positive ce qui donne :

$$\int_0^1 |x^t|^\alpha \, dt \geq C_{2,n,\frac{\alpha}{2}}^{-1} C_{1,n,\frac{\alpha}{2}} C_{r,n} |x|^\alpha \geq \frac{1}{2} C_{0,r,n}^1 |x|^\alpha \tag{3.8}$$

et on obtient avec (3.7) et (3.8) la formule (3.1). D'autre part on a avec (3.6) :

$$|(f(x+h) - f(x), k)| \leq |h|\,|k|(1+\alpha) \int_0^1 |x^t|^\alpha \, dt$$

d'où

$$|f(x+h) - f(x)| \leq (1+\alpha)|h| \int_0^1 |x^t|^\alpha \, dt .$$

Comme $|x + th| \leq |x| + |h| \leq |x| + |-x + x + h| \leq 2|x| + |x+h|$ on obtient

$$|f_r(x-h) - f_r(x)| \leq 2^\alpha (1+\alpha)(|x|^{r-2} + |x+h|^{r-2})|h|$$

qui est la formule (3.2). Pour le cas $r > 2$ on obtient la formule (3.3) avec (3.1) et (3.2).

Les points (3.3) pour $1 < r < 2$, (3.4) et (3.5) s'obtiennent de la manière suivante : soient $1 < r < 2$ et $r' > 2$ son conjugué, on remarque que l'on a alors $f_r \circ f_r' = f_r' \circ f_r = Id$. Ainsi (3.3) donne pour $x,\ h \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}C^3_{0,r',n}\,|(f_{r'}(f_r(x+h))) - f_{r'}(f_r(x))|\,|f_r(x+h) - f_r(x)|&\\ \leqslant (f_{r'}(f_r(x+h)) - f_{r'}(f_r(x)),\ f_r(x+h) - f_r(x))&\\ \leqslant (h,\ f_r(x+h) - f_r(x))\,,&\end{aligned}$$

ce qui donne la relation (3.3) pour $1 < r < 2$. Ensuite (3.1) donne :

$$\begin{aligned}C^1_{0,r',n}(|f_r(x)|^{r'-2} + |f_r(x+h)|^{r'-2})|f_r(x+h) - f_r(x)|^2&\\ \leqslant (f_{r'}(f_r(x+h)) - f_{r'}(f_r(x)),\ f_r(x+h) - f_r(x))&\end{aligned}$$

et comme pour $x \in \mathbb{R}^n$ on a : $|f_r(x)|^{r'-2} = |x|^{(r-1)(r'-2)} = |x|^{2-r}$ on obtient :

$$\begin{aligned}C^1_{0,r',n}(|x|^{2-r} + |x+h|^{2-r})\,|f_r(x-h) - f_r(x)|^2&\\ \leqslant (f_{r'}(f_r(x+h)) - f_{r'}(f_r(x)),\ f_r(x+h) - f_r(x))&\\ \leqslant (h,\ f_r(x+h) - f_r(x))&\\ \leqslant |h|\,|f_r(x+h) - f_r(x)|&\end{aligned}$$

et on obtient la relation (3.5).

Ensuite de la même manière (3.2) donne

$$|h| \leqslant C^2_{0,r',n}(|f_r(x)|^{r'-2} + |f_r(x+h)|^{r'-2})|f_r(x+h) - f_r(x)|$$

et (3.4) est alors une conséquence de (3.3).

On considère maintenant le cas $\delta = 1$. Pour cela on note i l'injection canonique : $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} : x \to i(x) = (x, 0)$. On note v l'élément de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par $v_i = \delta_{i,n+1}$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on confondra $i(x)$ et x et de même on ne distinguera pas les produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

On pose : $g_r : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} : x \to |x|^\alpha x$. On a alors pour $x,\ y \in \mathbb{R}^n$

$$f_r(x) = (1 + |x|^2)^{\frac{r-2}{2}}\,x = (|i(x) + v|^2)^{\frac{r-2}{2}}\,x = |x+v|^\alpha\,x\,,$$

on obtient alors par orthogonalité de v par rapport à x et y :

$$\begin{aligned}(f_r(y) - f_r(x),\ y - x) &= (|y+v|^\alpha\,y - |x+v|^\alpha\,x,\ y - x)\\ &= (|y+v|^\alpha\,(y+v) - |x+v|^\alpha\,(x+v),\ (y+v) - (x+v))\\ &= (g_r(y+v) - g_r(x+v),\ (y+v) - (x+v))\,. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

On obtient en appliquant les relations (3.1) ou (3.4) à g_r :

$$(f_r(y) - f_r(x), y - x) = (g_r(y + v) - g_r(x + v), y - x)$$

$$\geqslant \begin{cases} C^1_{0,r,n+1}(|y+v|^\alpha + |x+v|^\alpha)|y-x|^2 & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ C^4_{0,r,n+1} \dfrac{|y-x|^2}{(|y+v|^{-\alpha} + |x+v|^{-\alpha})} & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

et ceci montre (3.1) et (3.4) pour f_r. Ensuite on a par orthogonalité de x, y et v :

$$\begin{aligned} |g_r(y+v) - g_r(x+v)|^2 &= \big| |y+v|^\alpha (y+v) - |x+v|^\alpha (x+v)\big|^2 \\ &= \big| |y+v|^\alpha y - |x+v|^\alpha x\big|^2 + |v|^2 \big| |y+v|^\alpha - |x+v|^\alpha \big|^2 \\ &\geqslant \big| |y+v|^\alpha y - |x+v|^\alpha x\big|^2 \\ &\geqslant |f_r(y) - f_r(x)|^2 . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Alors (3.10), (3.3) appliqués à g_r et la formule (3.9) donnent :

$$\begin{aligned} C^3_{0,r,n+1} & |f_r(y) - f_r(x)|\,|y-x| \\ &\leqslant C^3_{0,r,n+1} |g_r(y+v) - g_r(x+v)|\,|y+v-(x+v)| \\ &\leqslant (g_r(y+v) - g_r(x+v), (y+v) - (x+v)) \\ &\leqslant (f_r(y) - f_r(x), y-x) \end{aligned}$$

ce qui donne la formule (3.3) pour f_r. Enfin avec (3.10) et avec les formules (3.2) ou (3.5) appliquées à g_r on obtient :

$$|f_r(y) - f_r(x)| \leqslant |g_r(y+v) - g_r(x+v)|$$

$$\leqslant \begin{cases} C^2_{0,r,n+1}|y-x|(|y+v|^\alpha + |x+v|^\alpha) & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ C^5_{0,r,n+1} \dfrac{|y-x|}{|y+v|^{-\alpha} + |x+v|^{-\alpha}} & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

ce qui donne les formules (3.2) et (3.5) pour f_r.

Application du lemme

Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, on considère l'espace $L^r(\Omega)^n$, muni de sa norme $\|\cdot\|_{0,r}$, alors sur $L^r(\Omega)^n$, f_r vérifie les propriétés suivantes :

PROPOSITION 3.1 : *Il existe des constantes strictement positives* C_1, C_2, C_3, C_4 *et* C_5 *telles que* $\forall u, v, w \in L^r(\Omega)^n$ *on a*
pour $r > 2$:

$$C_1 \int_\Omega (\delta + |u|^{r-2} + |v|^{r-2})|v-u|^2 \le \int_\Omega (f_r(v) - f_r(u), v-u) \quad (3.11)$$

$$\int_\Omega (f_r(v) - f_r(u), w) \le C_2 \left[\int_\Omega (\delta + |u|^{r-2} + |v|^{r-2})|v-u|^2\right]^{1/2} \times \left(\delta + \|u\|_{0,r}^{\frac{r-2}{2}} + \|v\|_{0,r}^{\frac{r-2}{2}}\right) \|w\|_{0,r} \quad (3.12)$$

pour $r > 1$:

$$C_3 \int_\Omega |f_r(v) - f_r(u)|\,|v-u| \le \int_\Omega (f_r(v) - f_r(u), v-u) \quad (3.13)$$

pour $1 < r < 2$:

$$C_4 \frac{\|v-u\|_{0,r}^2}{\delta + \|u\|_{0,r}^{2-r} + \|v\|_{0,r}^{2-r}} \le \int_\Omega (f_r(v) - f_r(u), v-u) \quad (3.14)$$

$$\int_\Omega (f_r(v) - f_r(u), w) \le C_5 \left\| \frac{|v-u|}{\delta + |u| + |v|} \right\|_{0,\infty}^{\frac{2-r}{r}} \times \left[\int_\Omega |f_r(v) - f_r(u)|\,|v-u|\right]^{\frac{r-1}{r}} \|w\|_{0,r} \quad (3.15)$$

avec dans (3.15) *la convention* $|v(x) - u(x)|/(\delta + |u(x)| + |v(x)|) = 0$ *si* $\delta = 0$ *et* $u(x) = v(x) = 0$.

Preuve : Dans ce qui suit C désignera une constante quelconque qui ne dépend que de r, δ, n, Ω. Les propriétés (3.11) et (3.13) se déduisent directement par intégration des formules (3.1) et (3.3) en posant $x = u$ et $h = v - u$. De la formule (3.11) on déduit aussi le résultat de forte monotonie :

$$C\|v-u\|_{0,r}^r \le \int_\Omega (f_r(v) - f_r(u), v-u), \quad (3.16)$$

démontré, ainsi que la formule (3.14), dans [8] lorsque $\delta = 0$ et dans [3] pour le cas $\delta = 1$.

Le point (3.12) se montre de la manière suivante :

Pour $u,\ v,\ w \in L^r(\Omega)^n$ on a avec (3.2) :

$$\int_\Omega (f_r(v)-f_r(u), w) \leqslant \int_\Omega |f_r(v)-f_r(u)|\,|w|$$

$$\leqslant C \int_\Omega (\delta + |v|^{r-2} + |u|^{r-2})|v-u|\,|w|$$

$$\leqslant C \int_\Omega (\delta + |v|^{r-2} + |u|^{r-2})^{1/2}\,|v-u|\,(\delta + |v|^{r-2} + |u|^{r-2})^{1/2}|w|$$

$$\leqslant C \left[\int_\Omega (\delta + |v|^{r-2} + |u|^{r-2})|v-u|^2\right]^{1/2}$$

$$\times \left[\int_\Omega (\delta + |v|^{r-2} + |u|^{r-2})|w|^2\right]^{1/2}. \quad (3.17)$$

Si on pose $\gamma' = \frac{r}{2} > 1$, de conjugué $\gamma = \frac{\gamma'}{\gamma'-1} = \frac{r}{r-2}$, on obtient avec l'inégalité de Hölder :

$$\int_\Omega (\delta + |v|^{r-2} + |u|^{r-2})|w|^2$$

$$\leqslant \left[\int_\Omega (\delta + |v|^{r-2} + |u|^{r-2})^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}} \left[\int_\Omega |w|^{2\gamma'}\right]^{\frac{1}{\gamma'}}$$

$$\leqslant C \left[\int_\Omega (\delta + |v|^{r-2} + |u|^{r-2})^{\frac{r}{r-2}}\right]^{\frac{r-2}{r}} \left[\int_\Omega |w|^r\right]^{\frac{2}{r}}$$

$$\leqslant C\,(\delta + \|v\|_{0,r}^{r-2} + \|u\|_{0,r}^{r-2})\,\|w\|_{0,r}^2, \quad (3.18)$$

et on obtient (3.12) avec (3.17) et (3.18).

On considère maintenant le point (3.15). On a pour $0 < \theta < 1$ et avec (3.5) :

$$\int_\Omega (f_r(v)-f_r(u), w) \leqslant \int_\Omega |f_r(v)-f_r(u)|\,|w|$$

$$\leqslant \int_\Omega |f_r(v)-f_r(u)|^\theta\,|f_r(v)-f_r(u)|^{1-\theta}\,|w|$$

$$\leqslant C \int_\Omega |f_r(v)-f_r(u)|^\theta \left[\frac{|v-u|}{\delta + |u|^{2-r} + |v|^{2-r}}\right]^{1-\theta} |w|$$

$$\leqslant C \int_\Omega |f_r(v)-f_r(u)|^\theta\,|v-u|^{(r-1)(1-\theta)}$$

$$\times \left[\frac{|v-u|^{2-r}}{\delta + |u|^{2-r} + |v|^{2-r}}\right]^{1-\theta} |w|. \quad (3.19)$$

On choisit θ tel que $\theta = (r-1)(1-\theta) \Leftrightarrow \theta = \frac{r-1}{r} = \frac{1}{r'} < 1$ on obtient alors

$$\int_\Omega (f_r(v) - f_r(u), w)$$

$$\leq C \int_\Omega |f_r(v) - f_r(u)|^{\frac{1}{r'}} |v-u|^{\frac{1}{r'}} \left[\frac{|v-u|}{\delta + |u| + |v|} \right]^{\frac{2-r}{r}} |w|$$

$$\leq C \left\| \frac{|v-u|}{\delta + |u| + |v|} \right\|_{0,\infty}^{\frac{2-r}{r}} \left[\int_\Omega |f_r(v) - f_r(u)| \, |v-u| \right]^{\frac{1}{r'}} \left[\int_\Omega |w|^r \right]^{\frac{1}{r}} \tag{3.20}$$

et on obtient le résultat avec la formule (3.20).

4. RÉSULTATS D'APPROXIMATION

On a le résultat d'approximation suivant pour le cas $r > 2$:

THÉORÈME 4.1 : *(Cas $r > 2$) Soit $(u, p) \in V \times M$ la solution du problème (P_V) et $(u_h, p_h) \in V_h \times M_h$ la solution de (P_h) on a alors pour tout $(v_h, q_h) \in V_h \times M_h$, pour la vitesse :*

$$\mu \|u - u_h\|_{1,2}^2 + \int_\Omega (\delta + |d(u)|^{r-2} + |d(u_h)|^{r-2}) |d(u-u_h)|^2$$

$$+ \|u - u_h\|_{1,r}^r \leq C \left\{ (\delta + \|u\|_{1,r}^{r-2} + \|u_h\|_{1,r}^{r-2}) \|u - v_h\|_{1,r}^2 + \mu \|u - v_h\|_{1,2}^2 \right.$$

$$\left. + \|u - v_h\|_{1,r} \|p - q_h\|_{0,r'} + \Phi(u, u_h, p, q_h) \right\}, \tag{4.1}$$

avec :

$$\Phi(u, u_h, p, q_h) = \begin{cases} -\langle B(u-u_h), p - q_h \rangle, & \textit{ou bien} \\ \|p - q_h\|_{0,r'}^{r'}, & \textit{ou bien} \\ \dfrac{1}{(\mu+\delta)} \|p - q_h\|_{0,2}^2, & \textit{si } p \in L^2(\Omega) \textit{ et si } \delta = 1 \\ & \textit{ou } \mu > 0 \end{cases}$$

et pour la pression :

$$\beta_h \|p - p_h\|_{0,r'} \leqslant (\beta_h + \|B\|)\|p - q_h\|_{0,r'} + 2\,\mu\,\|u - u_h\|_{1,2}$$
$$+ C\left(\delta + \|u\|_{1,r}^{\frac{r-2}{2}} + \|u_h\|_{1,r}^{\frac{r-2}{2}}\right)$$
$$\times \left[\int_\Omega (\delta + |d(u)|^{r-2} + |d(u_h)|^{r-2})|d(u-u_h)|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

Et pour le cas $1 < r < 2$ on a le

THÉORÈME 4.2 : *(Cas $1 < r < 2$) Soit $(u, p) \in V \times M$ la solution du problème (P_V) et $(u_h, p_h) \in V_h \times M_h$ la solution de (P_h) on a alors pour tout $(v_h, q_h) \in V_h \times M_h$, pour la vitesse :*

$$\mu\,\|u - u_h\|_X^2 + \frac{\|u - u_h\|_{1,r}^2}{\delta + \|u\|_{1,r}^{2-r} + \|u_h\|_{1,r}^{2-r}}$$
$$+ \int_\Omega |f_r(d(u)) - f_r(d(u_h))|\,|d(u - u_h)|$$
$$\leqslant C\left\{\theta(u, u_h)^r \|u - v_h\|_{1,r}^r + \mu\,\|u - v_h\|_X^2\right.$$
$$\left. + \|u - v_h\|_X\,\|p - q_h\|_M + \Phi(u, u_h, p, q_h)\right\} \quad (4.3)$$

où l'on a posé : $\theta(u, u_h) = \left\|\dfrac{|d(u-u_h)|}{\delta + |d(u)| + |d(u_h)|}\right\|_{0,\infty}^{\frac{2-r}{r}} \leqslant 1$ *et avec :*

$$\Phi(u, u_h, p, q_h) = \begin{cases} -\langle B(u-u_h), p - q_h\rangle, & \textit{ou bien} \\ (\delta + \|u\|_{1,r}^{2-r} + \|u_h\|_{1,r}^{2-r})\|p - q_h\|_{0,r'}^2, & \textit{si } \mu = 0 \textit{ ou } p \in L^{r'}(\Omega) \\ \textit{ou bien } \dfrac{1}{\mu}\,\|p - q_h\|_{0,2}^2, & \textit{si } \mu > 0 \end{cases}$$

et pour la pression :

$$\beta_h \|p - p_h\|_M \leqslant (\beta_h + \|B\|)\|p - q_h\|_M + \mu\,\|u - u_h\|_X$$
$$+ C\,\theta(u, u_h)\left[\int_\Omega |f_r(d(u)) - f_r(d(u_h))|\,|d(u-u_h)|\right]^{\frac{r-1}{r}}. \quad (4.4)$$

Toutefois pour le cas correspondant au modèle de Carreau avec $\eta_\infty > 0$ on a le résultat plus précis suivant démontré dans [3] :

THÉORÈME 4.3 : (*Cas* $1 < r < 2$) *On considère le cas* $\delta = 1$ *et* $\mu > 0$ (*Modèle de Carreau, avec* $\eta_\infty > 0$). *Soit* $(u, p) \in V \times M$ *la solution du problème* (P_V) *et* $(u_h, p_h) \in V_h \times M_h$ *la solution de* (P_h) *on a alors pour tout* $(v_h, q_h) \in V_h \times M_h$:

$$\mu \|u - u_h\|_{1,2}^2 + \frac{\|u - u_h\|_{1,r}^2}{\delta + \|u\|_{1,r}^{2-r} + \|u_h\|_{1,r}^{2-r}}$$

$$\leq C \left\{ \left(\frac{1}{\mu} + \mu \right) \|u - v_h\|_{1,2}^2 + \|u - v_h\|_{1,2} \|p - q_h\|_{0,2} + \frac{1}{\mu} \|p - q_h\|_{0,2}^2 \right\} \tag{4.5}$$

et

$$\beta_h \|p - p_h\|_M \leq (\|B\| + \beta_h) \|p - q_h\|_M + C(1 + \mu) \|u - u_h\|_X . \tag{4.6}$$

Preuve du théorème 4.1 : Dans ce qui suit on utilisera l'inégalité de Young : pour $p > 1$, p' désignant l'exposant conjugué de p, pour $\varepsilon > 0$ et a, $b \geq 0$ on a :

$$ab \leq \frac{1}{p} (\varepsilon a)^p + \frac{1}{p'} \left(\frac{b}{\varepsilon} \right)^{p'} . \tag{4.7}$$

On regarde d'abord les estimations sur la vitesse : soient $(u, p) \in V \times M$ la solution de (P_V) et $(u_h, p_h) \in V_h \times M_h$ la solution de (P_h) on a pour tout $(v_h, q_h) \in V_h \times M_h$:

$$\begin{aligned} \langle A(u) - A(u_h), u - u_h \rangle &= \langle A(u) - A(u_h), u - v_h \rangle + \langle A(u) - A(u_h), v_h - u_h \rangle \\ &= \langle A(u) - A(u_h), u - v_h \rangle - \langle B(v_h - u_h), p \rangle \\ &= \langle A(u) - A(u_h), u - v_h \rangle - \langle B(v_h - u_h), p - q_h \rangle , \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \langle A(u) - A(u_h), u - u_h \rangle = \langle A(u) - A(u_h), u - v_h \rangle \\ - \langle B(v_h - u), p - q_h \rangle - \langle B(u - u_h), p - q_h \rangle . \end{aligned} \tag{4.8}$$

On obtient alors avec (3.11), (3.12), (3.16) et (4.8) :

$$\mu \|u - u_h\|_{1,2}^2 + \int_\Omega (\delta + |d(u)|^{r-2} + |d(u_h)|^{r-2})|d(u - u_h)|^2$$

$$+ \|u - u_h\|_{1,r}^r \leqslant C \left\{ (\delta + \|u\|_{1,r}^{(r-2)/2} + \|u_h\|_{1,r}^{(r-2)/2}) \right.$$

$$\times \left[\int_\Omega (\delta + |d(u)|^{r-2} + |d(u_h)|^{r-2})|d(u - u_h)|^2 \right]^{1/2}$$

$$\times \|u - v_h\|_{1,r} + \mu \|u - u_h\|_{1,2} \|u - v_h\|_{1,2} + \|u - v_h\|_{1,r} \|p - q_h\|_{0,r'}$$

$$\left. - \langle B(u - u_h), p - q_h \rangle \right\} . \quad (4.9)$$

Soit $\varepsilon > 0$ on peut alors estimer $\langle B(u - u_h), p - q_h \rangle$ par :

$$\langle B(u - u_h), p - q_h \rangle \leqslant \|B\| \|u - u_h\|_{1,r} \|p - q_h\|_{0,r'}$$

$$\leqslant \|B\| \left(\frac{\varepsilon^r}{r} \|u - u_h\|_{1,r}^r + \frac{1}{\varepsilon^{r'} r'} \|p - q_h\|_{0,r'}^{r'} \right) ,$$

ou si la pression est dans $L^2(\Omega)$ par :

$$\langle B(u - u_h), p - q_h \rangle \leqslant \|B\|_* \|u - u_h\|_{1,2} \|p - q_h\|_{0,2}$$

$$\leqslant \|B\|_* \left(\frac{\varepsilon(\mu + \delta)}{2} \|u - u_h\|_{1,2}^2 + \frac{1}{2\,\varepsilon(\mu + \delta)} \|p - q_h\|_{0,2}^2 \right),$$

où $\|B\|$ est la norme de $B \in \mathscr{L}((H_0^1(\Omega))^N, L_0^2(\Omega)')$.

On obtient alors le résultat (4.1) en utilisant l'inégalité de Young dans (4.9) et en utilisant les estimations précédentes.

On estime maintenant les termes de pression : soit $(v_h, q_h) \in X_h \times M_h$, on a :

$$\langle Bv_h, p_h - p \rangle = \langle A(u) - A(u_h), v_h \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle Bv_h, p_h - q_h \rangle = \langle A(u) - A(u_h), v_h \rangle + \langle Bv_h, p - q_h \rangle ,$$

d'où avec l'hypothèse (A_h) et (2.2) :

$$\beta_h \|p_h - q_h\|_{0,r'} \leqslant \sup_{v_h \in X_h} \frac{\langle Bv_h, p_h - q_h \rangle}{\|v_h\|_{1,r}}$$

$$\leqslant \sup_{v_h \in X_h} \frac{1}{\|v_h\|_{1,r}} \left\{ \langle A(u) - A(u_h), v_h \rangle + \langle Bv_h, p - q_h \rangle \right\}$$

et donc :

$$\|p - p_h\|_{0,r'} \leq \|p - q_h\|_{0,r'} + \sup_{v_h \in X_h} \frac{\beta_h^{-1}}{\|v_h\|_{1,r}} \times \left\{ \langle A(u) - A(u_h), v_h \rangle + \langle Bv_h, p - q_h \rangle \right\} . \quad (4.10)$$

Comme avec (3.12) on a :

$$\langle A(u) - A(u_h), v_h \rangle \leq 2\mu \|u - u_h\|_{1,2} \|v_h\|_{1,2} + C(\delta + \|u\|_{1,r}^{(r-2)/2} + \|u_h\|_{1,r}^{(r-2)/2}) \times \left[\int_\Omega (\delta + |d(u)|^{r-2} + |d(u_h)|^{r-2}) |d(u - u_h)|^2 \right]^{1/2} \|v_h\|_{1,r} ,$$

on obtient :

$$\|p - p_h\|_{0,r'} \leq \left(1 + \frac{\|B\|}{\beta_h}\right) \|p - q_h\|_{0,r'} + 2 \frac{\mu}{\beta_h} \|u - u_h\|_{1,2} + \frac{C}{\beta_h} (\delta + \|u\|_{1,r}^{(r-2)/2} + \|u_h\|_{1,r}^{(r-2)/2}) \times \left[\int_\Omega (\delta + |d(u)|^{r-2} + |d(u_h)|^{r-2}) |d(u - u_h)|^2 \right]^{1/2} ,$$

ce qui donne (4.2) pour l'erreur sur la pression. On remarquera que les termes :

$$\mu \|u - u_h\|_{1,2} \quad \text{et} \quad \left[\int_\Omega (\delta + |d(u)|^{r-2} + |d(u_h)|^{r-2}) |d(u - u_h)|^2 \right]^{1/2}$$

sont alors estimés par (4.1). □

Preuve du théorème 4.2 : On rappelle la formule (4.8) : pour tout $(v_h, p_h) \in V_h \times M_h$ on a :

$$\langle A(u) - A(u_h), u - u_h \rangle = \langle A(u) - A(u_h), u - v_h \rangle - \langle B(v_h - u), p - q_h \rangle - \langle B(u - u_h), p - q_h \rangle ,$$

ce qui donne avec (3.13), (3.14) et (3.15) :

$$\mu \|u - u_h\|_X^2 + \frac{\|u - u_h\|_{1,r}^2}{\delta + \|u\|_{1,r}^{2-r} + \|u_h\|_{1,r}^{2-r}} + \int_\Omega |f_r(d(u)) - f_r(d(u_h))| \, |d(u - u_h)|$$

$$\leq C \left\{ \theta(u, u_h) \left[\int_\Omega |f_r(d(u)) - f_r(d(u_h))| \, |d(u - u_h)| \right]^{(r-1)/r} \|u - v_h\|_{1,r} + \mu \|u - v_h\|_X \|u - u_h\|_X + \|u - v_h\|_X \|p - q_h\|_M - \langle B(u - u_h), p - q_h \rangle \right\} . \quad (4.11)$$

On montre alors (4.3) pour l'estimation des vitesses en utilisant l'inégalité de Young dans la formule précédente et en estimant le terme $-\langle B(u-u_h), p-q_h\rangle$, d'une manière analogue à celle du théorème 4.1.

Pour les pressions on obtient comme en (4.10) : pour tout $(v_h, q_h) \in X_h \times M_h$ on a :

$$\|p-p_h\|_M \leqslant \|p-q_h\|_M + \sup_{v_h \in X_h} \frac{\beta_h^{-1}}{\|v_h\|_X} \times \left\{\langle A(u)-A(u_h), v_h\rangle + \langle Bv_h, p-q_h\rangle\right\} \quad (4.12)$$

et comme avec (3.15) on a :

$$\langle A(u)-A(u_h), v_h\rangle \leqslant C\,\theta(u, u_h)\left[\int_\Omega |f_r(d(u))-f_r(d(u_h))|\,|d(u-u_h)|\right]^{(r-1)/r} \times \|v_h\|_{1,r} + \mu\,\|u-u_h\|_X\,\|v_h\|_X$$

et que $\|v_h\|_{1,r} \leqslant C\,\|v_h\|_X$ on trouve :

$$\|p-p_h\|_M \leqslant \left(1+\frac{\|B\|}{\beta_h}\right)\|p-q_h\|_M + \frac{\mu}{\beta_h}\|u-u_h\|_X + \frac{C}{\beta_h}\,\theta(u, u_h)\left[\int_\Omega |f_r(d(u))-f_r(d(u_h))|\,|d(u-u_h)|\right]^{(r-1)/r}$$

ce qui permet d'obtenir le résultat. □

On rappelle brièvement la preuve du théorème 4.3. On a dans ce cas $\delta = 1$ et $\mu > 0$.

Soit $v \in X$ on a alors avec (3.5) :

$$\begin{aligned}\langle A(u)-A(u_h), v\rangle &\leqslant C\int |d(u-u_h)|\,|d(v)| + 2\,\mu\,\|u-u_h\|_{1,2}\,\|v\|_{1,2}\\ &\leqslant C\,\|u-u_h\|_{1,2}\,\|v\|_{1,2} + 2\,\mu\,\|u-u_h\|_{1,2}\,\|v\|_{1,2}\,. \quad (4.13)\end{aligned}$$

On peut alors écrire à la place de (4.11) :

$$\mu\,\|u-u_h\|_X^2 + \frac{\|u-u_h\|_{1,r}^2}{\delta + \|u\|_{1,r}^{2-r} + \|u_h\|_{1,r}^{2-r}}$$

$$\leqslant C\left\{(1+\mu)\|u-u_h\|_X\,\|u-v_h\|_X\right.$$

$$\left. + \|u-v_h\|_X\,\|p-q_h\|_M - \langle B(u-u_h), p-q_h\rangle\right\}$$

et on obtient la formule (4.5) en utilisant (4.7). La formule (4.12) peut être modifiée par :

$$\|p - p_h\|_M \leq \|p - q_h\|_M + \frac{C}{\beta_h}(1 + \mu)\|u - u_h\|_X + \frac{\|B\|}{\beta_h}\|p - q_h\|_M ,$$

ce qui donne alors l'estimation (4.6) sur les pressions. □

Remarque 4.2 : On peut obtenir une estimation de $\|u\|_{1,r}$ et de $\|u_h\|_{1,r}$ en fonction de f de la manière suivante, on a :

$$\langle A(u), u\rangle = \langle f, u\rangle ,$$

d'où pour $r > 2$ et avec (3.16) :

$$\mu \|u\|_{1,2}^2 + \|u\|_{1,r}^r \leq C \|f\|_{X'} \|u\|_{1,r} ,$$

ce qui donne :

$$\|u\|_{1,r} \leq C \|f\|_{X'}^{1/(r-1)} . \tag{4.14}$$

Pour $r < 2$ on obtient avec (3.14) :

$$\mu \|u\|_X^2 + \frac{\|u\|_{1,r}^2}{(\delta + \|u\|_{1,r}^{2-r})} \leq \begin{cases} C \|f\|_{X'} \|u\|_X \\ C \|f\|_{-1,r'} \|u\|_{1,r} \quad \text{si} \quad f \in (W^{-1,r'}(\Omega))^N \end{cases} \tag{4.15}$$

où $(W^{-1,r'}(\Omega))^N$ muni de la norme $\| \cdot \|_{-1,r'}$ désigne le dual de $(W_0^{1,r}(\Omega))^N$.

Si $f \in (W^{-1,r'}(\Omega))^N$ on a :

$$\|u\|_{1,r} \leq C (\delta + \|u\|_{1,r}^{2-r})\|f\|_{-1,r'} .$$

Comme pour tout $\varepsilon > 0$, pour $\gamma = \dfrac{1}{2-r} > 1$ et $\gamma' = \dfrac{1}{r-1}$ on a :

$$\|u\|_{1,r}^{2-r} \|f\|_{-1,r'} \leq \frac{\varepsilon^\gamma}{\gamma} \|u\|_{1,r} + \frac{1}{\varepsilon^{\gamma'}\gamma'} \|f\|_{-1,r'}^{\gamma'}$$

on obtient :

$$\|u\|_{1,r} \leq C \left\{ \|f\|_{-1,r'}^{1/(r-1)} + \delta \|f\|_{-1,r'} \right\} . \tag{4.16}$$

Si $\mu > 0$ et sous la seule hypothèse $f \in X' = (H^{-1}(\Omega))^N$ on a alors avec (4.15) :

$$\mu \|u\|_{1,2} \leq \|f\|_{X'} \tag{4.17}$$

ce qui donne encore avec (4.15) :

$$\|u\|_{1,r}^{2} \leqslant C\,(\delta + \|u\|_{1,r}^{2-r})\,\frac{1}{\mu}\,\|f\|_{X'}^{2}\,.$$

Comme pour tout $\varepsilon > 0$ et $\gamma = \dfrac{2}{2-r} > 1$ et $\gamma' = \dfrac{2}{r}$ on a :

$$\frac{1}{\mu}\,\|u\|_{1,r}^{2-r}\,\|f\|_{X'}^{2} \leqslant \frac{\varepsilon^{\gamma}}{\gamma}\,\|u\|_{1,r}^{2} + \frac{1}{(\varepsilon\mu)^{\gamma'}\,\gamma'}\,\|f\|_{X'}^{2\gamma'}$$

on obtient alors une estimation dépendante de μ :

$$\|u\|_{1,r} \leqslant C\left\{\frac{\delta}{\sqrt{\mu}}\,\|f\|_{X'} + \frac{1}{\mu^{1/r}}\,\|f\|_{X'}^{2/r}\right\}. \tag{4.18}$$

Les estimations se font de la même manière pour u_h.

Remarque 4.3 : On notera, dans le cas où l'on prend $\Phi(u, u_h, p, q_h) = \dfrac{1}{\mu}\,\|p - q_h\|_{0,2}^{2}$ dans les théorèmes 4.1 ($\delta = 0$) et 4.2, la dépendance en μ de l'estimation d'erreur. On peut toutefois obtenir des estimations uniformes en μ, lorsque μ tend vers 0, si l'on prend pour u_h, la solution du problème $P_{h,\alpha}$ suivant :

$(P_{h,\alpha})$

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h) \in X_h \times M_h \text{ tel que :} \\ \langle A(u_h), v_h\rangle + \langle Bv_h, p_h\rangle + \alpha \displaystyle\int_{\Omega} \nabla\cdot u_h\,\nabla\cdot v_h = \langle f, v_h\rangle \quad \forall v_h \in X_h, \\ \langle Bu_h, q_h\rangle = 0 \qquad \forall q_h \in M_h. \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$.

En effet d'une part, comme $\nabla\cdot u = 0$, u est solution de $P_{h,\alpha}$; d'autre part, si l'on cherche une estimation d'erreur pour la solution de $P_{h,\alpha}$ il apparaît un terme de coercivité en $\alpha\,\|\nabla\cdot u_h\|_{0,2}^{2}$ qui permet de contrôler le terme :

$$-\langle B(u - u_h), p - q_h\rangle \leqslant C\,\frac{\alpha}{4}\,\|\nabla\cdot u_h\|_{0,2}^{2} + \frac{C}{\alpha}\,\|p - q_h\|_{0,2}^{2}\,,$$

et on peut alors prendre pour Φ :

$$\Phi(u, u_h, p, q_h) = C\,\|p - q_h\|_{0,2}^{2}\,,$$

l'estimation étant valable dans le cas $\mu = 0$.

Remarque 4.4 : Les techniques utilisées aux paragraphes 3 et 4 permettent d'améliorer, dans le cas $r < 2$, les résultats obtenus dans [1], sur les estimateurs a posteriori d'erreur développés dans le cadre de fluides quasi-newtoniens.

Application aux estimations d'erreur

On donne une application des théorèmes 4.1 et 4.2 à l'estimation d'erreur. On suppose que les espaces X_h et M_h vérifient les hypothèses d'approximation suivantes :

Pour $u \in (W^{m+1,q}(\Omega))^N \cap (W_0^{1,q}(\Omega))^N$; avec $m \geqslant 0$ et $q = r$ et 2 :

$$\text{(H1)} \qquad \inf_{u_h \in X_h} \|u - u_h\|_{1,q} \leqslant C h^m \|u\|_{m+1,q},$$

Pour $p \in W^{m,q'}(\Omega) \cap L_0^{q'}(\Omega)$; avec $m \geqslant 0$ et $q' = r'$ et 2 :

$$\text{(H2)} \qquad \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{1,q'} \leqslant C h^m \|p\|_{m,q'} .$$

On suppose d'autre part que la constante β_h ne dépend pas de h, et dans ce qui suit C désignera une constante qui dépend de $\|u\|_{m+1,q}$, $\|p\|_{m,q'}$ et de f comme dans la remarque 4.2, mais qui ne dépend pas, sauf précision contraire, de μ lorsque μ tend vers 0. On obtient les résultats d'approximation suivants :

— Cas $r > 2$: si $u \in (W^{m+1,r}(\Omega))^N$ et $p \in W^{m,r'}(\Omega)$ alors on a avec le théorème 4.1 :

$$(\sqrt{\mu} + \delta)\|u - u_h\|_{1,2} + \left[\int_\Omega (|d(u)|^{r-2} + |d(u_h)|^{r-2})|d(u - u_h)|^2\right]^{1/2} \leqslant C h^{mr/2(r-1)} \tag{4.19}$$

$$\|u - u_h\|_{1,r} \leqslant C h^{m/(r-1)} \tag{4.20}$$

$$\|p - p_h\|_{0,r'} \leqslant C h^{mr/2(r-1)} . \tag{4.21}$$

D'autre part si $p \in W^{m,2}(\Omega)$ et si $\mu + \delta > 0$ on obtient :

$$(\sqrt{\mu} + \delta)\|u - u_h\|_{1,2} + \left[\int_\Omega (|d(u)|^{r-2} + |d(u_h)|^{r-2})|d(u - u_h)|^2\right]^{1/2} \leqslant \frac{C h^m}{\sqrt{\mu} + \delta} \tag{4.22}$$

$$\|u - u_h\|_{1,r} \leqslant \frac{C h^{2m/r}}{\mu^{1/r} + \delta} \tag{4.23}$$

$$\|p - p_h\|_{0,r'} \leqslant \frac{C h^m}{\sqrt{\mu} + \delta} . \tag{4.24}$$

— Cas $1 < r < 2$: si $\mu = 0$ et si $u \in (W^{m+1, r}(\Omega))^N$ et $p \in W^{m, r'}(\Omega)$ on a avec le théorème 4.2 :

$$\|u - u_h\|_{1, r} \leq C h^{mr/2} \tag{4.25}$$

$$\|p - p_h\|_{0, r'} \leq C h^{m(r-1)} \tag{4.26}$$

et si $\mu > 0$ et si $u \in (W^{m+1, 2}(\Omega))^N$ et $p \in W^{m, 2}(\Omega)$ on a avec le théorème 4.2 :

$$\sqrt{\mu}\, \|u - u_h\|_{1, 2} + \|u - u_h\|_{1, r} \leq C h^{mr/2} \tag{4.27}$$

$$\|p - p_h\|_{0, 2} \leq C h^{m(r-1)}, \tag{4.28}$$

avec C indépendante de μ quand μ tend vers 0 si $f \in (W^{-1, r'}(\Omega))^N$ et si $p \in W^{m, r'}(\Omega)$. Sinon, dans le cas général, C dépend de μ à travers l'expression de Φ dans (4.3) et des estimations (4.17) et (4.18). Enfin le théorème 4.3 donne les résultats de convergence optimale énoncés dans [3] :

Pour $\mu > 0$, $\delta = 1$, $1 < r < 2$ et $u \in (W^{m+1, 2}(\Omega))^N$ et $p \in W^{m, 2}(\Omega)$ on a avec C dépendant de μ :

$$\|u - u_h\|_{1, 2} \leq C h^m \tag{4.29}$$

$$\|p - p_h\|_{0, 2} \leq C h^m . \tag{4.30}$$

Avec (4.20), (4.25) et (4.27) on retrouve les estimations de [3]. L'erreur sur la pression dans (4.21) (resp. dans (4.26) et (4.28)) étant améliorée : elle est en $h^{mr/2(r-1)}$ au lieu de $h^{m/(r-1)}$ (resp. en $h^{m(r-1)}$ au lieu de $h^{mr(r-1)/2}$).

D'autre part il apparaît dans (4.19) une estimation supplémentaire du terme $\|u - u_h\|_{1, 2}$ en $h^{mr/2(r-1)}$, qui, dans le cas du modèle de Carreau, est uniforme en μ lorsque μ tend vers 0.

Dans le cas où l'on suppose plus de régularité sur la pression, on retrouve avec (4.23) l'ordre des estimations pour le laplacien non linéaire : en $h^{2m/r}$ pour l'erreur sur la vitesse et d'autre part il apparaît dans (4.22) et (4.24) une estimation à caractère optimal pour l'erreur en norme H^1 sur la vitesse et pour la pression.

ANNEXE

On considère deux espaces de Banach X et M, munis de leur norme respective $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_M$. On supposera que M est réflexif. Soit B une application linéaire continue de X dans M', M' désignant le dual topologique de M. On considère aussi $B' \in \mathscr{L}(M'', X')$, l'opérateur transposé de B, défini par $B'(q) = q \circ B$, pour tout $q \in M''$.

On pose $V = \ker(B)$ le noyau de B et on notera $V^0 \subset X'$ le polaire de V : $V^0 = \{x' \in X', \langle x', v \rangle = 0, \forall v \in V\}$. V étant fermé, on considère alors l'opérateur continu injectif $\dot{B} \in \mathscr{L}((X/V), M')$ défini sur l'espace (de Banach) quotient (X/V) par : soit $\dot{v} \in (X/V)$ et $v \in X$ un représentant de $\dot{v}$ alors $\dot{B}\dot{v}$ est défini par : $\dot{B}\dot{v} = Bv$. On a alors le

LEMME A.1 : *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\exists \beta > 0$, *tel que :*

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{\langle Bv, q \rangle}{\|q\|_M \, \|v\|_X} \geq \beta \,, \tag{A.1}$$

(ii) B' *est un isomorphisme de* M'' *sur* V^0 *et :*

$$\|B' q\|_{X'} \geq \beta \, \|q\|_{M''} \qquad \forall q \in M'' \,, \tag{A.2}$$

(iii) $\dot{B}$ *est un isomorphisme de* (X/V) *sur* M' *et :*

$$\|\dot{B}\dot{v}\|_{M'} \geq \beta \, \|\dot{v}\|_{(X/V)} \qquad \forall \dot{v} \in (X/V) \,. \tag{A.3}$$

Preuve : Tout d'abord on a :

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{\langle Bv, q \rangle}{\|q\|_M \, \|v\|_X} = \inf_{q \in M''} \sup_{v \in X} \frac{\langle Bv, q \rangle}{\|q\|_{M''} \, \|v\|_X} = \inf_{q \in M''} \frac{\|B' q\|_{X'}}{\|q\|_{M''}} \,,$$

ce qui montre que les formules (A.1) et (A.2) sont équivalentes et que (ii) entraîne (i).

Ensuite supposons (i) vérifiée. D'après (A.2) B' est injective et donc $\gamma(B') = \inf_{q \in M''} \|B' q\|_{X'} / \|q\|_{M''} \geq \beta$, où $\gamma(B')$ est le module minimum réduit de B' (voir [9], p. 231). On en déduit ([9], théorèmes 5.2 et 5.13) que B' est d'image fermée et vérifie $\mathrm{Im}(B') = V^0$ ce qui donne l'équivalence de (i) et (ii).

L'équivalence de (ii) et (iii) se montre de la manière suivante : on a par définition de $\gamma(B)$, $\gamma(B) = 1/\|\dot{B}^{-1}\|$ (avec la convention $\gamma(B) = 0$ si $\dot{B}^{-1}$ est non borné et $\gamma(B) = +\infty$ si $\dot{B}^{-1} = 0$). On obtient alors encore avec ([9], théorèmes 5.2 et 5.13) les équivalences suivantes : dire que $\gamma(B') \geq \beta$ et B' est injective est équivalent à dire que $\gamma(B) \geq \beta$ et B est surjective ce qui est équivalent à dire que $1/\|\dot{B}^{-1}\| \geq \beta$ et $\dot{B}$ est surjective. □

On considère deux sous-espaces vectoriels de dimension finie $\tilde{X} \subset X$ et $\tilde{M} \subset M$ ainsi que $\tilde{B} \in \mathscr{L}(\tilde{X}, \tilde{M}')$ l'application linéaire continue définie par : soit $\tilde{v} \in \tilde{X}$, alors $\tilde{B}\tilde{v}$ est l'élément de $\tilde{M}'$ défini par : $\langle \tilde{B}\tilde{v}, \tilde{q} \rangle = \langle B\tilde{v}, \tilde{q} \rangle$ $\forall \tilde{q} \in \tilde{M}$. On note alors $\tilde{V} = \ker(\tilde{B})$. On a alors la :

PROPOSITION A.1 : *On supposera que X est strictement convexe et que B vérifie l'hypothèse (i) du lemme* A.1, *alors les deux hypothèses suivantes sont équivalentes :*

$$\begin{cases} \textit{Il existe une application } \tilde{\Pi} : X \to \tilde{X} \textit{ telle que :} \\ \langle B(v - \tilde{\Pi} v), \tilde{q} \rangle = 0 \quad \forall \tilde{q} \in \tilde{M}, \quad \forall v \in X, \\ \| \tilde{\Pi} v \|_X \leqslant \tilde{c} \| v \|_X \quad \forall v \in X. \end{cases} \tag{H1}$$

$$\exists \tilde{\beta} > 0 \textit{ tel que } \inf_{q \in \tilde{M}} \sup_{v \in \tilde{X}} \frac{\langle Bv, q \rangle}{\| q \|_M \| v \|_X} \geqslant \tilde{\beta}. \tag{H2}$$

Preuve : La preuve s'inspire de [7] pour le cas d'espaces de Hilbert. Pour le point (H1) $\Rightarrow$ (H2) on pourra consulter [3] : on trouve alors à partir de (H1) que (H2) est vérifiée avec $\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\tilde{c}}$. On considère le point (H2) $\Rightarrow$ (H1). On construit $\tilde{\Pi}$ de la manière suivante : soit $v \in X$, on a $Bv \in M' \subset \tilde{M}'$ et donc en appliquant le lemme A.1 aux espaces $\tilde{X}$, $\tilde{M}$, et à $\tilde{B}$ on a :

$$\exists ! \dot{v} \in (\tilde{X}/\tilde{M}) \quad \text{tel que} \quad \dot{\tilde{B}} \dot{v} = Bv \quad \text{dans} \quad \tilde{M}' \quad \text{et} \quad \| \dot{\tilde{B}} \dot{v} \|_{\tilde{M}'} \geqslant \tilde{\beta} \| \dot{v} \|_{(\tilde{X}/\tilde{V})}$$

et donc :

$$\| \dot{v} \|_{(\tilde{X}/\tilde{V})} \leqslant \frac{1}{\tilde{\beta}} \| \dot{\tilde{\beta}} \dot{v} \|_{\tilde{M}'} \leqslant \frac{1}{\tilde{\beta}} \| Bv \|_{\tilde{M}'} \leqslant \frac{1}{\tilde{\beta}} \| Bv \|_{M'} .$$

X étant strictement convexe et $\tilde{X}$ étant de dimension finie ; il existe un unique $\tilde{v} \in \dot{v}$ tel que $\| \tilde{v} \|_{\tilde{X}} = \| \dot{v} \|_{(\tilde{X}/\tilde{V})}$. On pose alors $\tilde{\Pi} v = \tilde{v}$ et on a alors pour tout $\tilde{q} \in \tilde{M}$:

$$\langle \tilde{B} \tilde{v}, \tilde{q} \rangle = \langle \dot{\tilde{B}} \dot{v}, \tilde{q} \rangle = \langle Bv, \tilde{q} \rangle$$

et

$$\| \tilde{v} \|_{\tilde{X}} = \| \tilde{v} \|_X = \| \dot{v} \|_{(\tilde{X}/\tilde{V})} \leqslant \frac{1}{\tilde{\beta}} \| Bv \|_{M'} \leqslant \frac{\| B \|}{\tilde{\beta}} \| v \|_X$$

et donc (H1) est vérifiée avec $\tilde{c} = \frac{\| B \|}{\tilde{\beta}}$. □

REFERENCES

[1] J. BARANGER, H. EL AMRI, 1991, Estimateurs a posteriori d'erreur pour le calcul adaptatif d'écoulements quasi-newtoniens, *M²AN*, 25, (1), 31-48.

[2] J. BARANGER, P. GEORGET, K. NAJIB, 1987, Error estimates for a mixed finite element method for a non Newtonian flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 23, 415-421.

[3] J. BARANGER, K. NAJIB, 1990, Analyse numérique des écoulements quasi-newtoniens dont la viscosité obéit à la loi puissance ou la loi de Carreau, *Numer. Math.*, 58, 35-49.

[4] S.-S. CHOW, 1989, Finite element estimates for non linear elliptic equations of monotone type, *Numer. Math.*, 54, 373-393.

[5] P. G. CIARLET, 1978, *The finite element method for elliptic problems*, Amsterdam : North-Holland.

[6] M. FORTIN, 1977, An analysis of the convergence of mixed finite element methods, *RAIRO, Analyse numérique*, 11, (4), 341-354.

[7] V. GIRAULT, P. A. RAVIART, 1986, *Finite element method for Navier-Stokes equations, Theory and Algorithms*, Berlin Heidelberg New York : Springer.

[8] R. GLOWINSKI, A. MARROCO, 1975, Sur l'approximation par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires, *RAIRO, R-2*, 9e année, 41-76.

[9] T. KATO, 1976, *Perturbation theory for linear operators*, Berlin Heidelberg New York : Springer.

[10] V. P. MJASNIKOV, P. P. MOSOLOV, 1971, A proof of Korn Inequality, *Sov. Math.*, 12, (6), 1618-1622.

[11] D. QIANG, M. D. GUNZBURGER, 1990, Finite-element approximation of a Ladyzhenskaya model for stationary incompressible viscous flow, *SIAM J. Numer. Anal.*, 27, (1), 1-19.

[12] V. B. TYUKHTIN, 1983, Sur la vitesse de convergence des méthodes d'approximation de la solution des problèmes variationnels unilatéraux (en russe), *Vestn. Leningr. Univ., Math. Mec. Astronom.*, 3, 36-43.