

B. ALZIARY DE ROQUEFORT

**Jeux différentiels et approximation numérique de
fonctions valeur. 2e partie : étude numérique**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modéli-
sation mathématique et analyse numérique*, tome 25, n° 5 (1991),
p. 535-560

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1991__25_5_535_0

© AFCET, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



JEUX DIFFÉRENTIELS ET APPROXIMATION NUMÉRIQUE DE FONCTIONS VALEUR

2^e partie : étude numérique (*)

B. ALZIARY DE ROQUEFORT ⁽¹⁾

Communiqué par P. L. LIONS

Résumé. — *Suite à l'étude théorique d'un jeu de poursuite de la première partie, une étude numérique est présentée ici. Un résultat de convergence est démontré pour des schémas à forme différentielle, consistants et monotones. Puis ce type de schéma est testé sur des exemples de calcul de fonctions valeur et de trajectoires pour des jeux de poursuite et sur un exemple où la solution explicite est connue.*

Abstract. — *Following the theoretical results about pursuit games presented in the first part, this article describes a numerical approximation of solutions of differential games. We establish the convergence of differenced form, monotone and consistent schemes by obtaining explicit error estimates. Then we give some examples of computed optimal trajectories.*

INTRODUCTION

A la suite de l'étude théorique des fonctions valeur d'un jeu de poursuite, présentée dans l'article intitulé « Jeux différentiels et étude de fonctions valeur » [1], cet article expose l'étude numérique de ce jeu. M. G. Crandall et P.-L. Lions présentaient dans [8] des méthodes d'approximation pour les solutions d'équations de type Hamilton-Jacobi-Bellman. Le but de cet article est d'adapter ces schémas à des problèmes de jeux différentiels, de manière à approximer les fonctions valeur des jeux, ce qui permet ensuite

(*) Reçu en avril 1990.

(¹) CEREMADE, Université Paris-Dauphine, place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75016 Paris.

de récupérer les trajectoires optimales. En effet il est démontré dans [1], sur un exemple de jeu de poursuite, que même dans le cas d'un jeu avec contraintes d'état la fonction valeur est l'unique solution de viscosité d'une équation du type Hamilton-Jacobi-Bellman avec conditions aux limites.

Dans le § 1 une étude numérique complète (calcul de fonction valeur et reconstitution de trajectoires) est présentée. Cette étude est faite sur l'exemple de jeu de poursuite d'un lion par une antilope dans un domaine clos θ [1] (le lion, plus rapide que sa proie, essaie de la rattraper en minimisant le temps de capture, alors que l'antilope essaie de maximiser son temps de vie). La fonction valeur du jeu est solution, à un changement de variable près, de :

$$\begin{cases} w + L |\nabla_{x_2} w| - |\nabla_{x_1} w| - 1 = 0 & \text{sur } \theta \times \theta \setminus \Delta \\ w(x_1, x_2) = 0 & \text{sur } \Delta \\ w + L |\nabla_{x_2} w| - |\nabla_{x_1} w| - 1 \leq 0 & \text{sur } \partial\theta \times \theta \setminus \Delta \\ w + L |\nabla_{x_2} w| - |\nabla_{x_1} w| - 1 \geq 0 & \text{sur } \theta \times \partial\theta \setminus \Delta. \end{cases} \quad (\text{I})$$

La même équation avec dépendance en temps donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + w + L |\nabla_{x_2} w| - |\nabla_{x_1} w| - 1 = 0 & \text{sur } (\theta \times \theta \setminus \Delta) \times]0, +\infty[\\ w(x_1, x_2, t) = 0 & \text{sur } \Delta \times [0, +\infty[\\ \frac{\partial w}{\partial t} + w + L |\nabla_{x_2} w| - |\nabla_{x_1} w| - 1 \leq 0 & \text{sur } (\partial\theta \times \theta \setminus \Delta) \times]0, +\infty[\\ \frac{\partial w}{\partial t} + w + L |\nabla_{x_2} w| - |\nabla_{x_1} w| - 1 \geq 0 & \text{sur } (\theta \times \partial\theta \setminus \Delta) \times]0, +\infty[\\ w(x_1, x_2, 0) = w_0(x_1, x_2) & \text{sur } \bar{\theta} \times \bar{\theta}. \end{cases} \quad (\text{II})$$

De plus cette équation est du même type que (I) et possède exactement les mêmes propriétés, c.-à-d. :

PROPRIÉTÉ : Si u_0 est lipschitzienne, alors (II) a une solution unique, lipschitzienne et bornée.

En effet (II) est l'équation d'Isaacs d'un jeu de poursuite avec dépendance en temps ; la démonstration de la propriété reprend donc les étapes de [1].

En approximant la solution de (II) par un schéma à forme différentielle, consistant et monotone, on obtient un théorème de convergence analogue à celui de M. G. Crandall et P. L. Lions [8]. Ce théorème permet de plus de conclure que la solution U^n , approximation de la solution au temps $n \Delta t$ converge vers une solution U_∞ , qui est une approximation de la solution de l'équation d'Isaacs, sans la dépendance en temps (II). La démonstration de ce théorème de convergence est construite comme la

démonstration d'unicité de [1], en adaptant la méthode de M. H. Soner pour les fonctions discrètes.

Dans le § 2 la méthode est testée sur un exemple, où la solution explicite est connue. Ce jeu suggéré par J. V. Breakwell et P. Bernhard [4] conduit à des singularités particulières : il présente une surface focale. Il est donc intéressant de regarder ce que donne l'approximation de sa fonction valeur.

1. JEU DE POURSUITE

1.1. Notations

Choisissons tout d'abord une discrétisation du domaine $\bar{\theta} \times \bar{\theta} \times \mathbb{R}^+$ de la façon suivante :

$$Z_{ijkl} = (x_{1i}, y_{1j}, x_{2k}, y_{2l}) = (i \Delta x_1, j \Delta y_1, k \Delta x_2, l \Delta y_2)$$

$$Z_{ijkln} = (Z_{ijkl}, t_n) = (Z_{ijkl}, n \Delta t)$$

où $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta x_2, \Delta y_2, \Delta t > 0$ fixés sont les pas de discrétisation en espace et en temps, et $i, j, k, l, n \in \mathbb{Z}$. Les espaces discrets correspondant à θ sont :

$$\text{Dis}_1 = \{(i \Delta x_1, j \Delta y_1) \in \theta \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{Dis}_2 = \{(k \Delta x_2, l \Delta y_2) \in \theta \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{\text{Dis}}_1 = \{(i \Delta x_1, j \Delta y_1) \in \bar{\theta} \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{\text{Dis}}_2 = \{(k \Delta x_2, l \Delta y_2) \in \bar{\theta} \mid k, l \in \mathbb{Z}\}.$$

La valeur de l'approximation numérique au point Z_{ijkln} est U_{ijkl}^n . La véritable solution est notée $u(Z_{ijkln})$.

Pour chaque point du maillage considérons l'ensemble des voisins suivant :

$$\text{ind}_v(i, j) = \{(i-1, j-1), (i-1, j), (i-1, j+1), (i, j-1), (i, j), (i, j+1), (i+1, j-1), (i+1, j), (i+1, j+1)\}$$

Ainsi pour calculer $U_{i_0 j_0 k_0 l_0}^{n+1}$ à partir de $U_{i_0 j_0 k_0 l_0}^n$, l'ensemble des valeurs de l'approximation à considérer est le suivant :

$$V U_{i_0 j_0 k_0 l_0}^n = \{U_{ijkl}^n, \text{t.q. } i, j, k, l \in \text{ind}_v(i_0, j_0) \times \text{ind}_v(k_0, l_0),$$

$$\text{et } Z_{ijkl} \in \bar{\text{Dis}}_1 \times \bar{\text{Dis}}_2\}$$

et le schéma est de la forme suivante :

$$\begin{cases} U_{ijkl}^0 = u_0(Z_{ijkl}) \\ U_{ijkl}^{n+1} = G(V U_{ijkl}^n) & U^{n+1} = \vec{G}(U^n) \\ U_{ijij}^{n+1} = 0 \end{cases}$$

Si $d_0(ijkl)$ est la distance de $Z_{i_0 j_0 k_0 l_0}$ à Z_{ijkl} , c.-à-d. :

$$\sqrt{((i - i_0) \Delta x_1)^2 + ((j - j_0) \Delta y_1)^2 + ((k - k_0) \Delta x_2)^2 + ((l - l_0) \Delta y_2)^2},$$

alors $\nabla V U_{i_0 j_0 k_0 l_0}^n$ l'ensemble d'approximations du gradient de u au point $Z_{i_0 j_0 k_0 l_0}$ est :

$$\nabla V U_{i_0 j_0 k_0 l_0}^n = \left\{ \frac{U_{ijkl}^n - U_{i_0 j_0 k_0 l_0}^n}{d_0(ijkl)} \right.$$

$$\left. \text{t.q. } ijkl \in \text{ind}_v(i_0, j_0) \times \text{ind}_v(k_0, l_0), \text{ et } Z_{ijkl} \in \bar{\text{Dis}}_1 \times \bar{\text{Dis}}_2 \right\}.$$

Tous les schémas considérés seront des schémas à forme différentielle :

$$G(V U_{ijkl}^n) = e^{-\Delta t} U_{ijkl}^n - e^{-\Delta t} \Delta t g(\nabla V U_{ijkl}^n)$$

on dira alors que le schéma est consistant avec (III) si pour :

$$\nabla abcd_{i_0 j_0 k_0 l_0} =$$

$$\left\{ \frac{(a, b, c, d) \cdot ((i - i_0) \Delta x_1, (j - j_0) \Delta y_1, (k - k_0) \Delta x_2, (l - l_0) \Delta y_2)}{d_0 ijkl} \right.$$

$$\left. \text{t.q. } ijkl \in \text{ind}_v(i_0, j_0) \times \text{ind}_v(k_0, l_0) \right\}$$

on a :

$$g(\nabla abcd_{ijkl}) = L |(c, d)| - |(a, b)| - 1$$

et si pour $\nabla V U_{ijkl} \subset \nabla abcd_{ijkl}$ on a :

$$\begin{cases} g(\nabla V U_{ijkl}) \leq g(\nabla abcd_{ijkl}) & \text{sur } \theta \times \bar{\theta} \\ g(\nabla V U_{ijkl}) \geq g(\nabla abcd_{ijkl}) & \text{sur } \bar{\theta} \times \theta. \end{cases}$$

De plus il faut choisir un schéma monotone, c.-à-d. :

$$\text{si } \forall ijkl \in \mathbb{Z} \quad U_{ijkl} \leq V_{ijkl} \quad \text{alors} \quad \vec{G}(U)_{ijkl} \leq \vec{G}(V)_{ijkl}.$$

THÉORÈME 1 (solution discrète) : *Pour un schéma à forme différentielle, consistant et monotone, et pour des fonctions discrètes U et V bornées, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (i) $\vec{G}(U + c) \leq \vec{G}(u) + e^{-\Delta t} c \quad \forall c \geq 0$
- (ii) $\|\vec{G}(U) - \vec{G}(V)\|_{\infty} \leq e^{-\Delta t} \|U - V\|_{\infty}$

(iii) $\vec{G}^n(U)$ est bornée indépendamment de n par M

$$(iv) \quad \|\vec{G}^n(U) - U\|_{\infty} \leq \frac{1 - e^{-n\Delta t}}{1 - e^{-\Delta t}} \|\vec{G}(U) - U\|_{\infty}$$

Démonstration :

(i) est une conséquence directe de la forme du schéma.

Pour (ii) en posant $c = \|U - V\|_{\infty}$ et en utilisant la croissance de \vec{G} on obtient :

$$\vec{G}(U) = \vec{G}(V + (U - V)) \leq \vec{G}(V + c) \leq \vec{G}(V) + e^{-\Delta t} c$$

d'où $\vec{G}(U) - \vec{G}(V) \leq e^{-\Delta t} \|U - V\|_{\infty}$ ce qui démontre la deuxième propriété.

Pour la propriété (iii) :

$$\begin{aligned} \|\vec{G}(U)\|_{\infty} &\leq \|\vec{G}(U) - \vec{G}(0)\|_{\infty} + \|\vec{G}(0)\|_{\infty} \\ &\leq e^{-\Delta t} \|U\|_{\infty} + \Delta t e^{-\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \|\vec{G}^n(U)\|_{\infty} &\leq e^{-n\Delta t} \|U\|_{\infty} + \Delta t \left(\frac{1 - e^{-(n+1)\Delta t}}{1 - e^{-\Delta t}} - 1 \right) \\ \|\vec{G}^n(U)\|_{\infty} &\leq \|U\|_{\infty} + e^{\Delta t} \end{aligned}$$

donc $\vec{G}^n(U)$ est bien bornée lorsque Δt tend vers 0.

Pour la dernière propriété on a :

$$\begin{aligned} \|\vec{G}^n(U) - U\|_{\infty} &\leq \sum_{l=0}^{n-1} \|\vec{G}^{l+1}(U) - \vec{G}^l(U)\|_{\infty} \\ &\leq \sum_{l=0}^{n-1} e^{-l\Delta t} \|\vec{G}(U) - U\|_{\infty} \\ &\leq \|\vec{G}(U) - U\|_{\infty} \left(\frac{1 - e^{-n\Delta t}}{1 - e^{-\Delta t}} \right). \end{aligned}$$

1.2. Théorème d'approximation des solutions de l'équation d'Isaacs avec contraintes sur le bord

THÉORÈME 2 (convergence) : *On suppose u_0 lipschitzienne (ce qui entraîne que la solution de viscosité u de (II) est lipschitzienne de constante L_u), l'hamiltonien numérique g lipschitzien de constante L_g , et on suppose de plus que pour la solution U obtenue par ce schéma différentiel, monotone et*

consistant, il existe une constante L_d telle que

$$\left| U_{ijkl}^n - U_{i_0 j_0 k_0 l_0}^n \right| \leq L_d \| Z_{ijkl} - Z_{i_0 j_0 k_0 l_0} \|.$$

Alors on a :

$$\left| u(Z_{ijkln}) - U_{ijkl}^n \right| \leq C \cdot (\sqrt{\Delta x_1 + \Delta y_1 + \Delta x_2 + \Delta y_2 + \Delta t})$$

pour tous les points du maillage et pour $n \in \mathbb{N}$ (C dépend de toutes les constantes de lipschitz, de u_0 , et de g).

Démonstration du théorème : Pour simplifier la présentation, la démonstration sera faite dans le cas θ borné (en adaptant la démonstration de M. G. Crandall et P.-L. Lions [8]).

On appelle $Q = [0, N \Delta t]$, $Qd = \{k \Delta t, k \in (0, \dots, N)\}$.

De même on appelle $I = \{i, j, k, l \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } Z_{ijkl} \in \bar{\text{Dis}}_1 \times \bar{\text{Dis}}_2\}$ l'ensemble des indices correspondant effectivement à un point du domaine.

Et on appelle

$$E = \bar{\theta} \times \bar{\theta} \times Q \times \bar{\text{Dis}}_1 \times \bar{\text{Dis}}_2 \times Qd.$$

$$\text{On pose } \sigma = \sup_{I \times (0, \dots, N)} (u(Z_{ijkln}) - U_{ijkl}^n).$$

Le domaine θ est suffisamment régulier, c.-à-d. : il existe une fonction $T: \bar{\theta} \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue sur $\bar{\theta}$ et différentiable sur θ telle que :

$$\forall x \in \bar{\theta} \quad d(x + \varepsilon T(x), \bar{\theta}) < L_T \varepsilon \Rightarrow x \in \theta$$

On définit maintenant une fonction Ψ de E dans \mathbb{R} par :

$$\begin{aligned} \Psi(\xi_1, \xi_2, t, \eta_1, \eta_2, s) &= u(\xi_1, \xi_2, t) - U_{ijkl}^n - \frac{1}{\alpha \varepsilon^2} (|\xi_2 + \varepsilon^2 T(\xi_2) - \eta_2|^2 \\ &\quad + |\xi_1 - \varepsilon^2 T(\eta_1) - \eta_1|^2 + |t - s|^2) \end{aligned}$$

avec bien sûr $\eta_1 = (i \Delta x_1, j \Delta y_1)$, $\eta_2 = (k \Delta x_2, l \Delta y_2)$, et $s = n \Delta t$. α et ε sont des réels strictement positifs. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall (\eta_1, \eta_2, s) \in \text{Dis}_1 \times \text{Dis}_2 \times Qd \\ \max_E \Psi \geq \Psi(\eta_1, \eta_2 - \varepsilon^2 T(\eta_2), s, \tilde{\eta}_1, \eta_2, s) \end{aligned}$$

avec $|\eta_1 - \varepsilon^2 T(\eta_1) - \tilde{\eta}_1| \leq \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2}$, autrement dit on prend le point du maillage le plus près possible du point désiré. D'où :

$$\begin{aligned}
\max_E \Psi &\geq u(\eta_1, \eta_2 - \varepsilon^2 T(\eta_2), s) - U_{ijkl}^n \\
&\quad - \frac{1}{\alpha \varepsilon^2} (\varepsilon^4 |T(\eta_2 - \varepsilon^2 T(\eta_2)) - T(\eta_2)|^2 + |\eta_1 - \varepsilon^2 T(\tilde{\eta}_1) - \tilde{\eta}_1|^2) \\
\max_E \Psi &\geq u(\eta_1, \eta_2, s) - U_{ijkl}^n - \varepsilon^2 L_u |T(\eta_2)| - L_d |\tilde{\eta}_1 - \eta_1| - \frac{1}{\alpha \varepsilon^2} \times \\
&\quad \times (\varepsilon^8 L_T^2 + |\eta_1 - \varepsilon^2 T(\tilde{\eta}_1) - \tilde{\eta}_1|^2).
\end{aligned}$$

Dans la suite on choisit $\varepsilon = (\Delta x_1 + \Delta y_1 + \Delta x_2 + \Delta y_2 + \Delta t)^{1/4}$. On a donc $\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2} \leq \varepsilon^4$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\max_E \Psi &\geq \sigma - \varepsilon^2 (L_u + L_d) - \frac{\varepsilon^6 (L_T^2 + (L_T + 1)^2)}{\alpha} \\
&\geq \sigma - C \varepsilon^2 - \frac{C \varepsilon^6}{\alpha}.
\end{aligned} \tag{1}$$

D'autre part si Ψ atteint son maximum en $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{t}, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{s})$ on a aussi :

$$\begin{aligned}
\max_E \Psi &\leq \sigma + L_u (|\bar{\xi}_1 - \bar{\eta}_1| + |\bar{\xi}_2 - \bar{\eta}_2| + |\bar{t} - \bar{s}|) - \\
&\quad - \frac{1}{\alpha \varepsilon^2} (|\bar{\xi}_2 + \varepsilon^2 T(\bar{\xi}_2) - \bar{\eta}_2|^2 + |\bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\bar{\eta}_1) - \bar{\eta}_1|^2 + |\bar{t} - \bar{s}|^2) \tag{2}
\end{aligned}$$

en combinant (1) et (2) on obtient alors :

$$\begin{aligned}
|\bar{\xi}_1 + \varepsilon^2 T(\bar{\xi}_2) - \bar{\eta}_2|^2 + |\bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\bar{\eta}_1) - \bar{\eta}_1|^2 + |\bar{t} - \bar{s}|^2 &\leq \\
&\leq \alpha \varepsilon^2 \left(L_u (|\bar{\xi}_1 - \bar{\eta}_1| + |\bar{\xi}_2 - \bar{\eta}_2| + |\bar{t} - \bar{s}|) + C \varepsilon^2 + \frac{C \varepsilon^6}{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

ce qui implique,

$$|\bar{\xi}_1 - \bar{\eta}_1| \leq C \varepsilon^2 |\bar{\xi}_2 - \bar{\eta}_2| \leq C \varepsilon^2 |\bar{t} - \bar{s}| \leq C \varepsilon^2$$

et donc :

$$\begin{aligned}
|\bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\bar{\eta}_1) - \bar{\eta}_1|^2 &\leq C \alpha \varepsilon^4 + C \varepsilon^8 \\
|\bar{\xi}_2 + \varepsilon^2 T(\bar{\xi}_2) - \bar{\eta}_2|^2 &\leq C \alpha \varepsilon^4 + C \varepsilon^8.
\end{aligned}$$

Ceci indique, en prenant α assez petit et une discrétisation suffisamment fine pour que ε soit petit, que $\bar{\xi}_2$ et $\bar{\eta}_1$ ne sont pas sur le bord. Supposons

tout d'abord que $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \notin \Delta$ et $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) \notin \Delta$. Il faut encore distinguer trois cas :

1^{er} cas $\bar{t} > 0, \bar{s} > 0$. Dans ce cas u étant solution de viscosité de (III), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{2(\bar{t} - \bar{s})}{\alpha \varepsilon^2} + u(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{t}) + \frac{2L}{\alpha \varepsilon^2} \left| (I + \varepsilon^2 DT(\bar{\xi}_2))(\bar{\xi}_2 + \varepsilon^2 T(\bar{\xi}_2) - \bar{\eta}_2) \right| \\ - \frac{2}{\alpha \varepsilon^2} \left| \bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\bar{\eta}_1) - \bar{\eta}_1 \right| - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

mais on a :

$$\left| DT(\bar{\xi}_2)(\bar{\xi}_2 + \varepsilon^2 T(\bar{\xi}_2) - \bar{\eta}_2) \right| \leq C \varepsilon^2$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{2(\bar{t} - \bar{s})}{\alpha \varepsilon^2} + u(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{t}) + \frac{2L}{\alpha \varepsilon^2} \left| \bar{\xi}_2 + \varepsilon^2 T(\bar{\xi}_2) - \bar{\eta}_2 \right| \\ - \frac{2}{\alpha \varepsilon^2} \left| \bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\bar{\eta}_1) - \bar{\eta}_1 \right| - 1 \leq C \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Il faut écrire une équation équivalente pour la fonction discrète. On note que $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{l}, \bar{n})$ correspondant à $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{s})$ minimise la fonction :

$$\begin{aligned} (i, j, k, l, n) \rightarrow U_{ijkl}^n + \frac{1}{\alpha \varepsilon^2} \left(\left| \bar{\xi}_2 + \varepsilon^2 T(\bar{\xi}_2) - \eta_2 \right|^2 + \left| \bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\eta_1) - \eta_1 \right|^2 \right. \\ \left. + \left| \bar{t} - s \right|^2 \right) \end{aligned}$$

donc si on pose :

$$\begin{aligned} W_{ijkl}^n = U_{ij\bar{k}\bar{l}}^{\bar{n}} + \frac{1}{\alpha \varepsilon^2} \left(\left| \bar{\xi}_2 + \varepsilon^2 T(\bar{\xi}_2) - \bar{\eta}_2 \right|^2 + \left| \bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\bar{\eta}_1) - \bar{\eta}_1 \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \bar{t} - \bar{s} \right|^2 - \left| \bar{\xi}_2 + \varepsilon^2 T(\bar{\xi}_2) - \eta_2 \right|^2 - \left| \bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\eta_1) - \eta_1 \right|^2 - \left| \bar{t} - s \right|^2 \right) \end{aligned}$$

on a alors pour $0 \leq n \leq N$ et pour tout $i, j, k, l \in I$: $U_{ijkl}^n \geq W_{ijkl}^n$.

Maintenant en prenant $n = \bar{n} - 1$ et en utilisant la croissance de \vec{G} , on obtient :

$$U_{ij\bar{k}\bar{l}}^{\bar{n}} \geq e^{-\Delta t} U_{ij\bar{k}\bar{l}}^{\bar{n}} + \frac{1}{\alpha \varepsilon^2} \left(\left| \bar{t} - \bar{s} \right|^2 - \left| \bar{t} - \bar{s} + \Delta t \right|^2 \right) - e^{-\Delta t} \Delta t g(\nabla V W_{ij\bar{k}\bar{l}}). \quad (4)$$

Il faut remarquer que :

$$\frac{|\bar{t} - \bar{s}|^2 - |\bar{t} - \bar{s} + \Delta t|^2}{\alpha \varepsilon^2} = -\frac{2(\bar{t} - \bar{s})}{\alpha \varepsilon^2} \Delta t - \frac{\Delta t^2}{\alpha \varepsilon^2}.$$

D'autre part les éléments de $\nabla V W_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{l}}$ sont de la forme :

$$\begin{aligned} & (-|\bar{\xi}_2 + \varepsilon^2 T(\bar{\xi}_2) - \eta_2|^2 + |\bar{\xi}_2 + \varepsilon^2 T(\bar{\xi}_2) - \bar{\eta}_2|^2 - |\bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\eta_1) - \eta_1|^2 \\ & + |\bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\bar{\eta}_1) - \bar{\eta}_1|^2) \frac{1}{\alpha \varepsilon^2 d_0(ijkl)} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & -\frac{2(\xi_2 + \varepsilon^2 T(\bar{\xi}_2) - \bar{\eta}_2) \cdot (\bar{\eta}_2 - \eta_2)}{\alpha \varepsilon^2 d_0(ijkl)} - \\ & -\frac{2(\bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\bar{\eta}_1) - \bar{\eta}_1) \cdot (\bar{\eta}_1 - \eta_1)}{\alpha \varepsilon^2 d_0(ijkl)} - \text{reste} \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned} \text{reste} = & -\frac{|\bar{\eta}_2 - \eta_2|^2}{\alpha \varepsilon^2 d_0(ijkl)} - \frac{2(\bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\bar{\eta}_1) - \bar{\eta}_1) \cdot (\varepsilon^2 T(\bar{\eta}_1) - \varepsilon^2 T(\eta_1))}{\alpha \varepsilon^2 d_0(ijkl)} \\ & - \frac{|\bar{\eta}_1 - \eta_1 + \varepsilon^2 T(\bar{\eta}_1) - \varepsilon^2 T(\eta_1)|^2}{\alpha \varepsilon^2 d_0(ijkl)}. \end{aligned}$$

On peut noter, sachant que $|\bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\bar{\eta}_1) - \bar{\eta}_1| \leq C\varepsilon^2$, que :

$$|\text{reste}| \leq \frac{(2 + \varepsilon^4 L_T^2)(\Delta x_1 + \Delta y_1 + \Delta x_2 + \Delta y_2)}{\alpha \varepsilon^2} + \frac{2C \cdot L_T \varepsilon^4}{\alpha \varepsilon^2} \leq C\varepsilon^2.$$

Si on pose :

$$\begin{aligned} (a, b) &= -\frac{2(\bar{\xi}_2 + \varepsilon^2 T(\bar{\xi}_2) - \bar{\eta}_1)}{\alpha \varepsilon^2} \\ (c, d) &= -\frac{2(\bar{\xi}_1 - \varepsilon^2 T(\bar{\eta}_1) - \bar{\eta}_1)}{\alpha \varepsilon^2} \end{aligned}$$

tout élément de $\nabla V W_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{l}}$ s'écrit alors comme un élément de $\nabla abcd_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{l}}$ plus un reste. Soit ∇E l'ensemble des éléments de $\nabla V W_{ijkl}$ sans leurs restes, on a $\nabla E \subset \nabla abcd_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{l}}$. De plus g étant lipschitzienne on peut écrire :

$$|g(\nabla V W_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{l}}) - g(\nabla E)| \leq L_g C\varepsilon^2$$

et comme $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) \in \theta \times \bar{\theta}$, la consistance du schéma donne :

$$g(\nabla E) \leq g(\nabla abcd_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{l}}).$$

(4) devient alors :

$$U_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{l}}^{\bar{n}} \frac{(e^{\Delta t} - 1)}{\Delta t} + \frac{2(\bar{t} - \bar{s})}{\alpha \varepsilon^2} - |(a, b)| + L|(c, d)| - 1 \geq -C\varepsilon^2. \quad (5)$$

En faisant la différence entre (3) et (5) on obtient :

$$u(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{t}) - U_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{l}}^{\bar{n}} \leq C\varepsilon^2 + \frac{M \cdot \Delta t}{2}$$

ce qui donne avec (1) :

$$\sigma \leq C\varepsilon^2.$$

2^e cas : $\bar{t} \geq 0, \bar{s} = 0$. Alors on a au point $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{t}, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, 0)$:

$$\begin{aligned} \Psi &\leq u(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{t}) - u(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{t}) + u(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{t}) - u(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, 0) \\ &\leq L_u \left(\sqrt{(\bar{\xi}_1 - \bar{\eta}_1)^2 + (\bar{\xi}_2 - \bar{\eta}_2)^2} \right) + L_u |\bar{t} - 0| \end{aligned}$$

d'où :

$$\sigma \leq C\varepsilon^2.$$

3^e cas : $\bar{t} = 0, \bar{s} > 0$. Alors on a au point $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, 0, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{s})$:

$$\Psi \leq u(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, 0) - u(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, 0) + U_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{l}}^0 - U_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{l}}^{\bar{n}}$$

en utilisant la propriété (iv) du théorème 5 :

$$\Psi \leq L_u \left(\sqrt{(\bar{\xi}_1 - \bar{\eta}_1)^2 + (\bar{\xi}_2 - \bar{\eta}_2)^2} \right) + \frac{1 - e^{-\bar{n} \Delta t}}{1 - e^{-\Delta t}} \|\vec{G}(U^0) - U^0\|_{\infty}$$

G ayant une forme différentielle :

$$\begin{aligned} \Psi &\leq C \cdot \varepsilon^2 + \frac{(1 - e^{-\bar{n} \Delta t})}{1 - e^{-\Delta t}} \left\| \frac{(e^{-\Delta t} - 1)}{\Delta t} U^0 - e^{-\Delta t} g(\nabla V U^0) \right\|_{\infty} \\ \Psi &\leq C \cdot \varepsilon^2 + \bar{s} (\|U^0\|_{\infty} + \|g(\nabla V U^0)\|_{\infty}) \end{aligned}$$

d'où :

$$\sigma \leq C\varepsilon^2.$$

Regardons maintenant les cas $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \in \Delta$ et $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) \in \Delta$.

Si $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) \in \Delta$ on a :

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, 0, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{s}) &\leq u(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{t}) - 0 \\ &\leq L_u \left(\sqrt{(\bar{\xi}_1 - \bar{\eta}_1)^2 + (\bar{\xi}_2 - \bar{\eta}_2)^2} \right). \end{aligned}$$

De même si $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \in \Delta$ on a :

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, 0, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{s}) &\leq 0 - U_{i\bar{j}kl}^{\bar{n}} \\ &\leq L_d \left(\sqrt{(\bar{\xi}_1 - \bar{\eta}_1)^2 + (\bar{\xi}_2 - \bar{\eta}_2)^2} \right) \end{aligned}$$

où $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ est le point du maillage le plus proche appartenant à la diagonale.

Dans les deux cas on a toujours :

$$\sigma \leq C\varepsilon^2.$$

Dans tous les cas on a :

$$\sup_{I \times (0, \dots, N)} (u(Z_{ijkln}) - U_{ijkl}^n) \leq C\varepsilon^2.$$

On remarque que C ne dépend pas de N ce qui démontre le théorème.

Remarque : Il est très probable que l'hypothèse « U solution discrète lipschitzienne » découle de la forme du schéma (mais la suppression de cette hypothèse n'ajouterait que des problèmes techniques).

Remarque : De même le cas θ non borné n'est pas traité. Pour le faire il est possible d'adapter la méthode utilisée par M. G. Crandall et P. L. Lions [8, 9], ou la technique pour les solutions de viscosité non bornées.

Maintenant le problème est de relier l'approximation U de (II) à une approximation de (I).

LEMME 1 : *La solution u de (II) converge uniformément vers la solution u_∞ de (I) lorsque t tend vers l'infini :*

$$\sup_{\bar{\theta} \times \bar{\theta}} |u(\xi_1, \xi_2, t) - u_\infty(\xi_1, \xi_2)| \leq e^{-t} \sup_{\bar{\theta} \times \bar{\theta}} |u_0(\xi_1, \xi_2) - u_\infty(\xi_1, \xi_2)|.$$

LEMME 2 : *L'approximation U^n de u converge en norme infinie vers une fonction discrète U^∞ lorsque n tend vers l'infini.*

Démonstration du lemme 1 : On note que si la condition initiale de (II) est u_∞ alors u_∞ est la solution stationnaire de (II). Ce résultat est en fait un résultat classique d'unicité [9].

Démonstration du lemme 2 : D'après la propriété (ii) sur la solution discrète on peut écrire :

$$\|U^{n+p} - U^n\|_{\infty} \leq e^{-n\Delta t} \|U^p - U^0\|_{\infty}$$

et comme U^p est borné indépendamment de p on a :

$$\|U^{n+p} - U^n\|_{\infty} \leq C \cdot e^{-n\Delta t}$$

ce qui implique que U^n est une suite de Cauchy et donc qu'elle converge en norme infinie vers une fonction U^{∞} de $\bar{\text{Dis}}_1 \times \bar{\text{Dis}}_2$ dans \mathbb{R} .

COROLLAIRE 1 : Avec les mêmes hypothèses que pour le théorème de convergence on a :

$$|U_{ijkl}^{\infty} - u_{\infty}(Z_{ijkl})| \leq C \cdot (\sqrt{\Delta x_1 + \Delta y_1 + \Delta x_2 + \Delta y_2 + \Delta t})$$

pour tous les points de $\bar{\text{Dis}}_1 \times \bar{\text{Dis}}_2$.

Démonstration du corollaire : D'après les lemmes 1 et 2, $\exists n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \|U^n - U^{\infty}\|_{\infty} &\leq C \cdot \sqrt{\Delta x_1 + \Delta y_1 + \Delta x_2 + \Delta y_2 + \Delta t} \\ \sup_{\bar{\theta} \times \bar{\theta}} |u(\xi_1, \xi_2, n\Delta t) - u_{\infty}| &\leq C \cdot \sqrt{\Delta x_1 + \Delta y_1 + \Delta x_2 + \Delta y_2 + \Delta t} \end{aligned}$$

et donc :

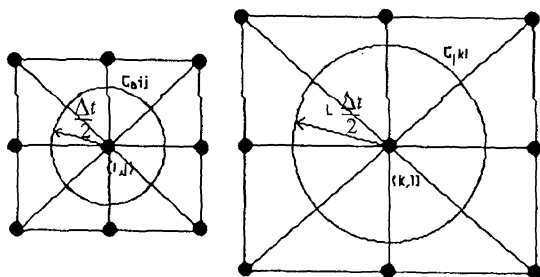
$$\begin{aligned} \sup_{\bar{\text{Dis}}_1 \times \bar{\text{Dis}}_2} |U_{ijkl}^{\infty} - u_{\infty}(Z_{ijkl})| &\leq \|U^{\infty} - U^n\|_{\infty} \\ &+ \sup_{\bar{\text{Dis}}_1 \times \bar{\text{Dis}}_2} |U_{ijkl}^n - u(Z_{ijkl})| + \sup_{\bar{\theta} \times \bar{\theta}} |u(\xi_1, \xi_2, n\Delta t) - u_{\infty}| \\ \sup_{\bar{\text{Dis}}_1 \times \bar{\text{Dis}}_2} |U_{ijkl}^{\infty} - u_{\infty}(Z_{ijkl})| &\leq 3C \cdot \sqrt{\Delta x_1 + \Delta y_1 + \Delta x_2 + \Delta y_2 + \Delta t} \end{aligned}$$

ce qui démontre le corollaire.

1.3. Exemple et résultats

Exemple de schéma

On donne maintenant un exemple de schéma vérifiant ces conditions (pour simplifier la présentation nous donnerons l'exemple dans un maillage rectangulaire).



Chaque point du maillage (i, j) ou (k, l) est entouré de 8 points voisins, et donc de 8 triangles voisins. On procède par demi-itération. Un des deux joueurs est fixe (par exemple le lion) ; on calcule l'approximation linéaire $al U^n$ sur le cercle $C_a ij$, à partir des valeurs de $U^n_{i', j', kl}$ des 8 voisins. Puis on déduit $U^{n+1/2}_{ijkl}$ en maximisant sur la partie du cercle restant dans $\bar{\theta}$. On fait la même chose pour l'autre demi-itération. Ce qui donne le schéma :

$$U^{n+1/2}_{ijkl} = \max_{z \in C_a ij \cap \bar{\theta}} (al U^n(z, (k \Delta x_2, l \Delta y_2)), U^n_{ijkl}) + \frac{\Delta t}{2}$$

$$U^{n+1}_{ijkl} = \min_{z \in C_l kl \cap \bar{\theta}} (al U^{n+1/2}((i \Delta x_1, j \Delta y_1), z), U^{n+1/2}_{ijkl}) + \frac{\Delta t}{2}$$

$$U^{n+1}_{ijij} = 0.$$

Sous cette forme il est clair que ce schéma est monotone, il faut aussi vérifier la consistance en le mettant sous forme différentielle (sans la transformation en exponentielle). Au point (i_0, j_0, k_0, l_0) appartenant à $\theta \times \theta$ on a :

$$\nabla V U^n_{i_0 j_0 k_0 l_0} = \nabla abcd_{i_0 j_0 k_0 l_0}$$

alors pour tout $z \in C_a i_0 j_0$ on a :

$$al U^n(z, (k \Delta x_2, l \Delta y_2)) - U^n_{i_0 j_0 kl} = (a, b) \cdot (z - (i_0 \Delta x_1, j_0 \Delta y_1))$$

d'où :

$$\begin{aligned} U^{n+1/2}_{i_0 j_0 kl} &= U^n_{i_0 j_0 kl} + \max_{z \in C_a i_0 j_0 \cap \bar{\theta}} (a, b) \cdot (z - (i_0 \Delta x_1, j_0 \Delta y_1)) + \frac{\Delta t}{2} \\ &= U^n_{i_0 j_0 kl} + \Delta t \left(|(a, b)| + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne pour la demi-itération suivante :

$$al U^{n+1/2}((i_0 \Delta x_1, j_0 \Delta y_1), z) - U^n_{i_0 j_0 k_0 l_0} = (a, b) \cdot (z - (i_0 \Delta x_1, j_0 \Delta y_1))$$

d'où :

$$U_{i_0 j_0 k_0 l_0}^{n+1} = U_{i_0 j_0 k_0 l_0}^n + \Delta t \left(|(a, b)| + \frac{1}{2} \right) + \Delta t \left(-L |(c, d)| + \frac{1}{2} \right)$$

on voit donc que le schéma est consistant et il est clair que les conditions aux limites sont satisfaites.

Programmation et résultats

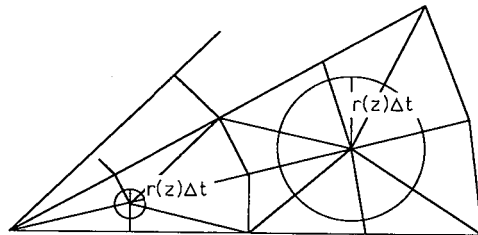
Les codes fortran ont été mis au point sur Sun 4/110 (avec 16 M-octets de mémoire centrale).

a) Le carré

Sur le carré, le maillage est bien sûr rectangulaire. Le fichier de la fonction valeur discrète est donc une matrice $n \times n \times n \times n$, où $1/n$ est le pas de discrétisation. La discrétisation la plus fine obtenue est $1/20$, et pour cette discrétisation le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la fonction valeur est environ 50. La limitation à vingt points de discrétisation vient bien sûr de la taille de la mémoire centrale. Dans les exemples présentés figure 1 le rapport des vitesses est $L = 2$.

b) Le cercle

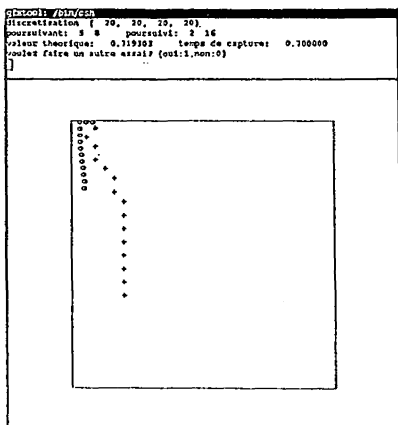
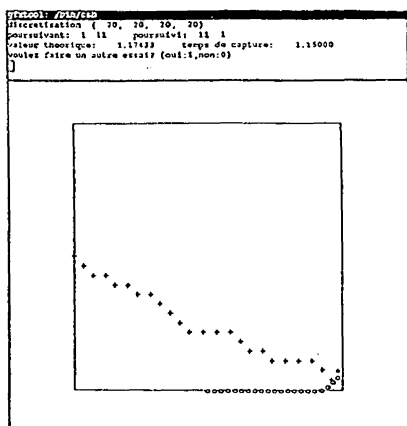
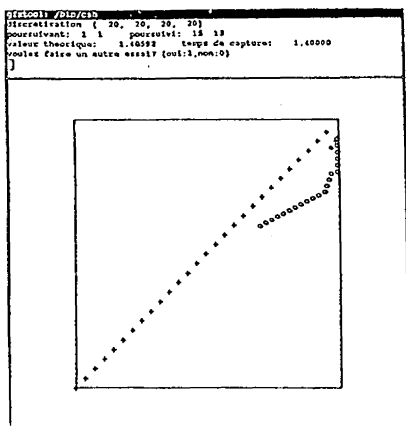
En tenant compte de la symétrie sphérique, le problème dans le cercle se ramène à un problème en dimension trois. En choisissant un maillage circulaire, le fichier de la fonction valeur discrète est donc une matrice $n \times p \times n$, où $1/n$ est le pas de discrétisation du rayon, et $1/p$ le pas de discrétisation en angle.



L'inconvénient de ce maillage est la taille irrégulière des mailles (en effet les mailles sont beaucoup plus fines au centre que sur les bords). Et pour que le schéma soit monotone, il faut que :

$$\Delta t \leq \inf_{(z_i, z_j) \in \text{Dis} \times \text{Dis}} \|z_i - z_j\|$$

Dis étant l'ensemble des points du maillage. Ceci impose Δt très petit, et par conséquent une convergence très lente.



+ le lion
o l'antelope

Figure 1. — Le carré.

Une solution est de choisir Δt dépendant du point du maillage :

$$\Delta t(z) = r(z) \Delta t$$

avec $r(z)$ adapté de sorte que le schéma soit monotone. Cette modification revient à approximer :

$$r(z) H(\nabla u) = 0$$

au lieu de :

$$H(\nabla u) = 0$$

ce qui ne modifie pas la solution. Mais malgré cela pour une discrétisation

de $1/30$ en rayon et $1/60$ en angle, il faut environ mille itérations. Les figures 2 sont toujours obtenues pour un rapport de vitesse $L = 2$. L'allure des trajectoires est assez satisfaisante, même si au centre on observe parfois quelques invraisemblances.

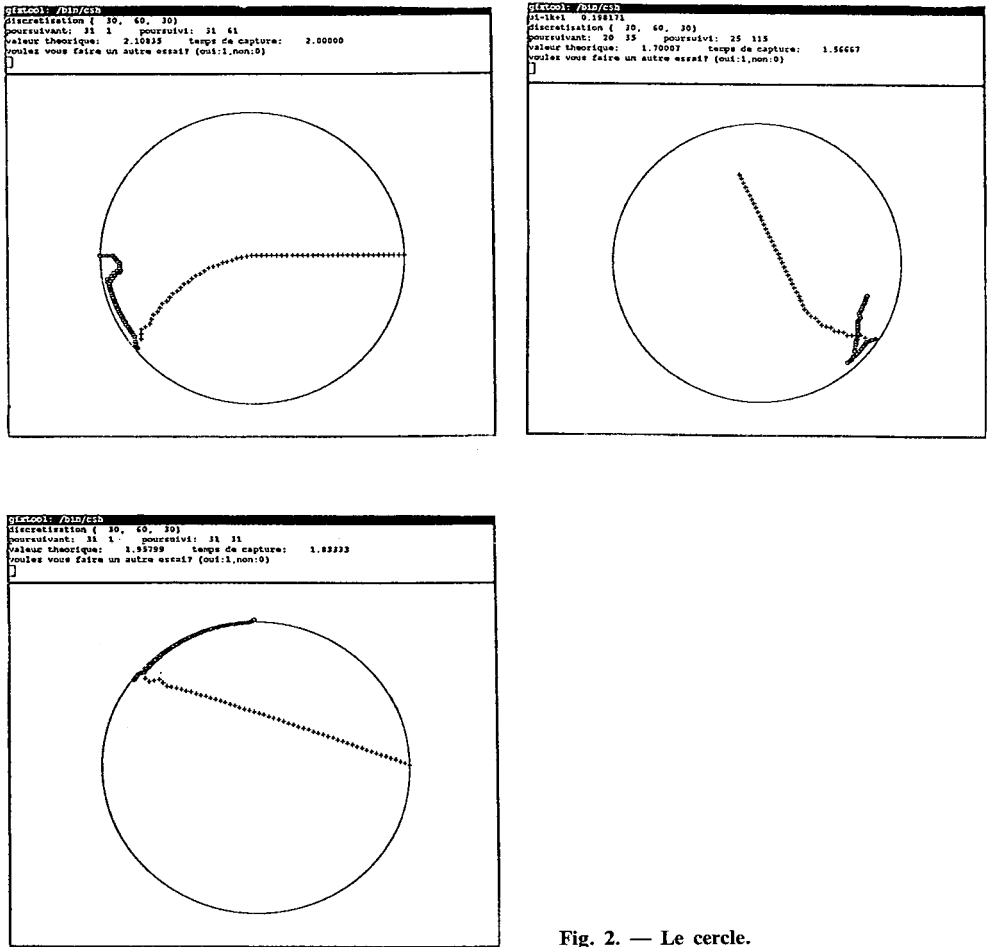


Fig. 2. — Le cercle.

c) L'anneau

La méthode est la même que pour le cercle, mais la convergence est beaucoup plus rapide car il n'y a pas les mailles très fines du centre (fig. 3).

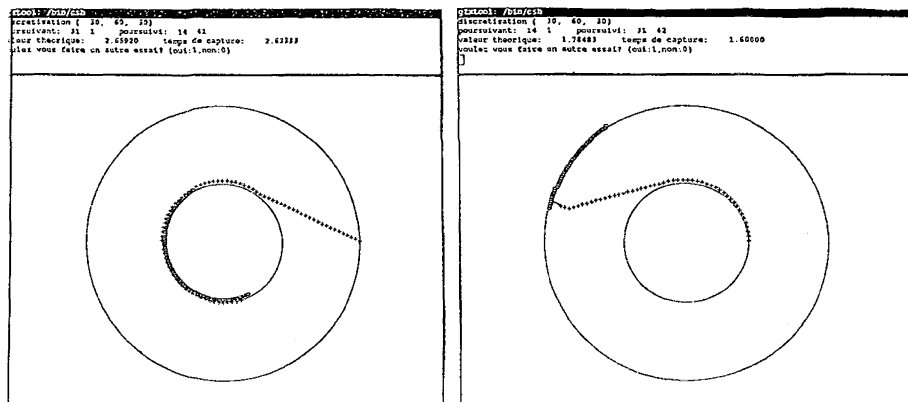


Fig. 3. — L'anneau.

2. UN AUTRE JEU DIFFÉRENTIEL AVEC SINGULARITÉS

2.1. Description du jeu

Ce jeu est présenté par P. Bernhard et J. V. Breakwell dans [4]. La dynamique est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 + 2e^{-y}\Psi(t) + \Phi(t) & x(0) = x \\ \dot{y}(t) = -1 + 0 + |\Phi(t)| - 1 & y(0) = y \end{cases} \quad (6)$$

où $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et les deux contrôles $\Psi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ sont des fonctions mesurables de $[0, +\infty[\rightarrow [-1, 1]$.

Le coût associé est :

$$P(\Psi, \Phi) = P_{xy}(\Psi(\cdot), \Phi(\cdot)) = t_f(x, y, \Psi, \Phi) + k|x(t_f)| \quad (7)$$

où t_f est le temps correspondant à $y(t_f) = 0$ et k une constante appartenant à $]1/2, 1[$.

Les ensembles de contrôles admissibles seront notés :

$$\begin{aligned} M(t) &= \{\Psi : [t, +\infty[\rightarrow [-1, 1], \Psi \text{ mesurable} \} \\ N(t) &= \{\Phi : [t, +\infty[\rightarrow [-1, 1], \Phi \text{ mesurable} \} \end{aligned}$$

et les ensembles de stratégies :

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \{\alpha : N(t) \rightarrow M(t)\} \\ \Delta(t) &= \{\beta : M(t) \rightarrow N(t)\} . \end{aligned}$$

Les fonctions valeur supérieure et inférieure s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \inf_{\beta \in \Delta(0)} \sup_{\Psi \in M(0)} P_{xy}(\Psi(\cdot), \beta(\Psi)(\cdot)) \\ u(x, y) &= \sup_{\alpha \in \Gamma(0)} \inf_{\Phi \in N(0)} P_{xy}(\alpha(\Phi)(\cdot), \Phi(\cdot)). \end{aligned} \quad (8)$$

Avec les mêmes techniques que pour les jeux de poursuite, on démontre aisément que ces fonctions valeur vérifient la programmation dynamique.

PROGRAMMATION DYNAMIQUE. — *Pour tout $\tau \geq 0$ et quelle que soit la condition initiale $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, u et v vérifient :*

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \inf_{\beta \in \Delta(0)} \sup_{\Psi \in M(0)} \{ \tau \wedge t_f + v(x(\tau \wedge t_f), y(\tau \wedge t_f)) \} \\ u(x, y) &= \sup_{\alpha \in \Gamma(0)} \inf_{\Phi \in N(0)} \{ \tau \wedge t_f + u(x(\tau \wedge t_f), y(\tau \wedge t_f)) \}. \end{aligned} \quad (9)$$

Regardons maintenant la régularité de ces fonctions valeur.

PROPRIÉTÉ 2 :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{y}{2} &\leq u(x, y) \leq (3k + 1)y + k|x| \\ \frac{y}{2} &\leq v(x, y) \leq (3k + 1)y + k|x| \end{aligned}$$

et les fonctions valeur u et v sont localement lipschitziennes.

Démonstration : Quels que soient les contrôles Ψ et Φ on a :

$$-2 \leq \dot{y}(t) \leq -1 \quad \text{et} \quad -3 \leq \dot{x}(t) \leq 3$$

en intégrant de 0 à t_f , on a :

$$\frac{y}{2} \leq t_f \leq y \quad \text{et} \quad -3t_f + x \leq x(t_f) \leq 3t_f + x$$

d'où :

$$\forall (\Phi(\cdot), \Psi(\cdot)) \quad \frac{y}{2} \leq P_{xy}(\Psi(\cdot), \Phi(\cdot)) \leq y + k(3y + |x|)$$

on obtient donc la majoration des fonctions valeur.

Pour démontrer que les fonctions valeur sont localement lipschitziennes, notons d'abord qu'elles sont symétriques par rapport à l'axe $x = 0$; il suffit donc de les étudier sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une stratégie $\bar{\alpha} \in \Gamma(0)$ et un contrôle

$\Phi \in N(0)$ tels que :

$$u(x_1, y_1) \leq \inf_{\Phi \in N(0)} P_{x_1 y_1}(\bar{\alpha}(\Phi), \Phi) + \varepsilon \leq P_{x_1 y_1}(\bar{\alpha}(\Phi), \Phi) + \varepsilon$$

$$u(x_2, y_2) \geq \inf_{\Phi \in N(0)} P_{x_2 y_2}(\bar{\alpha}(\Phi), \Phi) \geq P_{x_2 y_2}(\bar{\alpha}(\bar{\Phi}), \bar{\Phi}) - \varepsilon$$

d'où, si on pose

$$t_{f_1} = t_f(x_1, y_1, \bar{\alpha}(\Phi), \Phi) \quad \text{et} \quad t_{f_2} = t_f(x_2, y_2, \bar{\alpha}(\Phi), \Phi)$$

$$u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2) \leq t_{f_1} - t_{f_2} + 2\varepsilon. \quad (10)$$

Supposons que $t_{f_1} > t_{f_2}$, alors :

$$y_2 = \int_0^{t_{f_2}} 2 - |\bar{\Phi}(s)| \, ds$$

$$y_1 = y_2 + \int_{t_{f_2}}^{t_{f_1}} -|\bar{\Phi}(s)| + 2 \, ds.$$

Comme $0 \leq |\bar{\Phi}(s)| \leq 1$ on a :

$$t_{f_1} - t_{f_2} \leq y_1 - y_2 \leq 2(t_{f_1} - t_{f_2}). \quad (11)$$

D'autre part :

$$x(t_{f_2}) = x_2 + \int_0^{t_{f_2}} 2 e^{-y_2(s)} \bar{\alpha}(\bar{\Phi})(s) + \bar{\Phi}(s) \, ds$$

$$x(t_{f_1}) = x_1 + \int_0^{t_{f_2}} 2 e^{-y_1(s)} \bar{\alpha}(\bar{\Phi})(s) + \bar{\Phi}(s) \, ds$$

$$+ \int_{t_{f_2}}^{t_{f_1}} 2 e^{-y_1(s)} \bar{\alpha}(\bar{\Phi})(s) + \bar{\Phi}(s) \, ds.$$

Notons que $\forall s < t_{f_2}$:

$$y_1(s) - y_2(s) = y_1 - y_2$$

$$|e^{-y_1(s)} - e^{-y_2(s)}| \leq |y_1 - y_2|$$

et comme $|\bar{\alpha}(\bar{\Phi})(s)| \leq 1$ et $|\bar{\Phi}(s)| \leq 1$:

$$|x(t_{f_1}) - x(t_{f_2})| \leq |x_1 - x_2| + 2 t_{f_2} |y_1 - y_2| + 3(t_{f_1} - t_{f_2})$$

$$|x(t_{f_1}) - x(t_{f_2})| \leq |x_1 - x_2| + (2 t_{f_2} + 3) |y_1 - y_2|$$

et si de plus $t_{f_2} \geq t_{f_1}$ on obtient :

$$|x(t_{f_1}) - x(t_{f_2})| \leq |x_1 - x_2| + (2 t_{f_2} + 3) |y_1 - y_2| ,$$

ce qui peut se résumer par la majoration suivante $\forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} |u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2)| &\leq \\ &\leq k |x_1 - x_2| + (k(t_{f_2} + t_{f_1}) + 3k + 1) |y_1 - y_2| + 2\varepsilon \end{aligned}$$

ce qui donne bien u localement lipschitzienne.

Regardons maintenant l'équation d'Isaacs associée à ce jeu, donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 3 : *Le jeu vérifie la condition d'Isaacs, les deux fonctions valeurs sont donc solutions de la même équation :*

$$\begin{aligned} H^+(y, \nabla w) &= H^-(y, \nabla w) = \\ &= \max_{|\Phi| \leq 1} \min_{|\Psi| \leq 1} \left\{ 2 \frac{\partial w}{\partial y} - 2 \Psi e^{-y} \frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{|\Phi|}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \Phi \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 1 \right\} \\ &\begin{cases} 2 \frac{\partial w}{\partial y} - 2 e^{-y} \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| + \max \left(0, \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - 1 = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \\ w(x, 0) = k |x| & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (12) \end{aligned}$$

ou, avec le changement de variable $W = 1 - e^{-w}$, de l'équation :

$$\begin{cases} W + 2 \frac{\partial W}{\partial y} - 2 e^{-y} \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right| + \max \left(0, \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right| - \frac{\partial W}{\partial y} \right) - 1 = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \\ W(x, 0) = 1 - e^{-k|x|} & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (13)$$

La technique de démonstration est exactement la même que pour les jeux de poursuite.

2.2. Solution continue de l'équation d'Isaacs

THÉORÈME 4 : *Soit u, v continues de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ dans \mathbb{R} , bornées, et telles que*

$$\lim_{|x| + |y| \rightarrow +\infty} u(x, y) = \lim_{|x| + |y| \rightarrow +\infty} v(x, y) = 1.$$
On suppose que u et v sont respectivement sur-solution et sous-solution de viscosité de (12), alors :

$$\sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (u - v)(x, y) \leq 0 .$$

Démonstration : Supposons bien sûr que :

$$\gamma = \sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (u(x, y) - v(x, y)) > 0.$$

On pose :

$$W_\varepsilon(x_1, y_1, x_2, y_2) = u(x_1, y_1) - v(x_2, y_2) - \frac{1}{2\varepsilon^2} (|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2),$$

et donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$:

$$u(x, y) - v(x, y) \leq W_\varepsilon(x, y, x, y) \leq \sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (W_\varepsilon(x_1, y_1, x_2, y_2)),$$

c'est-à-dire :

$$\gamma \leq \sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (W_\varepsilon(x_1, y_1, x_2, y_2))$$

et comme $\lim_{|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \rightarrow +\infty} W_\varepsilon(x_1, y_1, x_2, y_2) \leq 0$ le maximum est

atteint en un point $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$ où :

$$\gamma \leq u(\bar{x}_1, \bar{y}_1) - v(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$$

$$+ v(\bar{x}_1, \bar{y}_1) - v(\bar{x}_2, \bar{y}_2) - \frac{1}{2\varepsilon^2} (|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|^2 + |\bar{y}_1 - \bar{y}_2|^2)$$

$$\leq \gamma + \omega(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|, |\bar{y}_1 - \bar{y}_2|) - \frac{1}{2\varepsilon^2} (|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|^2 + |\bar{y}_1 - \bar{y}_2|^2)$$

ω étant le module de continuité de v . On en déduit donc que :

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \leq C\varepsilon\omega(\varepsilon) \quad \text{et} \quad |\bar{y}_1 - \bar{y}_2| \leq C\varepsilon\omega(\varepsilon).$$

Utilisons maintenant les hypothèses u sur-solution et v sous-solution au point $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$, on obtient les deux inégalités suivantes :

si $\bar{y}_1 \neq 0$ et $\bar{y}_2 \neq 0$

$$u + 2 \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\varepsilon^2} - 2e^{-\bar{y}_1} \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\varepsilon^2} + \max \left(0, \left(\frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\varepsilon^2} - \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\varepsilon^2} \right) \right) \leq 1$$

$$v + 2 \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\varepsilon^2} - 2 e^{-\bar{y}_2} \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\varepsilon^2} + \max \left(0, \left(\frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\varepsilon^2} - \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\varepsilon^2} \right) \right) \geq 1$$

d'où :

$$u(\bar{x}_1, \bar{y}_1) - v(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \leq 4 \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\varepsilon^2} (e^{-\bar{y}_1} - e^{-\bar{y}_2}) \leq C \omega(\varepsilon)^2$$

si $\bar{y}_1 = 0$, $u(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = v(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ et :

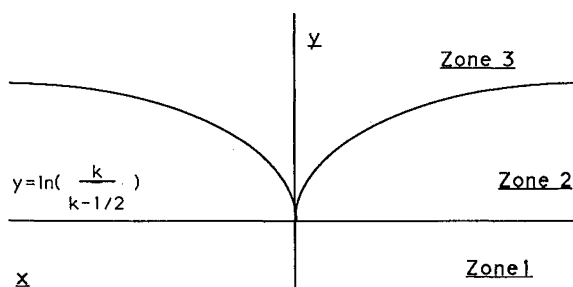
$$u(\bar{x}_1, \bar{y}_1) - v(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \leq \omega_v(\varepsilon)$$

et c'est la même chose bien sûr si $\bar{y}_2 = 0$. On obtient finalement pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\gamma \leq u(\bar{x}_1, \bar{y}_1) - v(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \leq Ck(\varepsilon),$$

ce qui contredit $\gamma > 0$.

Ce jeu est intéressant parce qu'il est possible de trouver une solution explicite, ce qui permet par la suite de vérifier les schémas numériques. Dans le calcul de la solution explicite il apparaît trois zones :



La zone 1 correspond à un contrôle optimal $\Phi = 0$, c'est-à-dire la zone où la condition $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq \frac{\partial u}{\partial y}$ est vérifiée. En intégrant l'équation (12) avec cette condition on obtient :

$$u(x, y) = \frac{y}{2} - k e^{-y} + k|x| + k$$

sur le domaine $\mathbb{R} \times \left[0, \ln \left(\frac{k}{k - 1/2} \right) \right]$.

En dehors de cette zone, les contrôles optimaux s'écrivent :

$$\Phi = -\operatorname{sign} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = -\operatorname{sign}(x), \quad \text{et} \quad \Psi = \operatorname{sign} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = \operatorname{sign}(x).$$

Les contrôles ne peuvent changer qu'en $x = 0$, le problème est donc de savoir en quel point la trajectoire optimale va atteindre l'axe des y . Pour une trajectoire partie de (x, y) l'axe des abscisses est atteint en $(0, y_0)$ tel que :

$$|x| = y - y_0 - 2e^{-y_0} + 2e^{-y}.$$

La zone 2 correspond à $y_0 \leq \ln \left(\frac{k}{k-1/2} \right)$. En utilisant la programmation dynamique on trouve alors :

$$u(x, y) = y(1-k) - 2e^{-y} + k|x| + \left(k - \frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{k}{k-1/2} \right) + 2k - \frac{1}{2}.$$

La zone 3 correspond à $y_0 > \ln \left(\frac{k}{k-1/2} \right)$, à partir de $(0, y_0)$ la trajectoire ne peut plus quitter l'axe des y . On a donc :

$$u(x, y) = y - y_0 + \frac{1}{2} (1 + \ln(2k(e^{y_0} - 1))).$$

On vérifie aisément que cette fonction est C^1 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^+$. Pour $x = 0$ et $y \in \left[0, \ln \left(\frac{k}{k-1/2} \right)\right]$, le sous-différentiel est : $[-k, +k] \times \{1/2 + ke^{-y}\}$ et la condition de viscosité est bien vérifiée :

$$\forall c \in [-k, k] \quad 2e^{-y}(k-c) + \max \left(0, c - \left(\frac{1}{2} + ke^{-y} \right) \right) \geq 0.$$

En tout point $x = 0$ et $y \in]\ln \left(\frac{k}{k-1/2} \right), +\infty[$, on obtient le sous-différentiel

$$\left[-\frac{1}{2(1-e^{-y})}, \frac{1}{2(1-e^{-y})} \right] \times \left\{ \frac{1}{2(1-e^{-y})} \right\}$$

et la condition de viscosité est vérifiée :

$$\forall c \in \left[-\frac{1}{2(1-e^{-y})}, \frac{1}{2(1-e^{-y})} \right] \\ \frac{1}{(1-e^{-y})} - 2e^{-y}c + \max \left(0, c - \frac{1}{2(1-e^{-y})} \right) - 1 \leq 0$$

u est donc bien solution de viscosité, c'est la fonction valeur du jeu différentiel.

2.3. Solution discrète et résultat du schéma

Décrivons d'abord le schéma numérique. La discrétisation de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ est la suivante :

$$\begin{aligned} Z_{ij} &= (i \Delta x, j \Delta y) = (x_i, y_j) \\ \text{et} \quad Z_{ijn} &= (i \Delta x, j \Delta y, n \Delta t) = (x_i, y_j, t_n) \end{aligned}$$

où $\Delta x, \Delta y, \Delta t > 0$ fixés sont les pas de discrétisation. On choisit ici $\Delta x = \Delta y = \Delta t$. On considère le domaine $\theta = \mathbb{R} \times [0, M]$ sur lequel la fonction valeur est lipschitzienne, et l'espace discret correspondant :

$$\text{Dis} = \{ (i \Delta x, j \Delta y), i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}, \text{ et } j \Delta y \leq M \} .$$

L'ensemble des voisins de (i, j) , nécessaire à chaque itération est :

$$\text{ind}_v(i, j) =$$

$$\begin{aligned} &\{ (i-3, j-1); (i-2, j-1); (i-1, j-1); (i, j-1); (i+1, j-1); \\ &(i+2, j-1); (i+3, j-1); (i-2, j-2); (i-1, j-2); (i, j-2); \\ &(i+1, j-2); (i+2, j-2) \} \end{aligned}$$

et l'ensemble des valeurs de la fonction discrète en chacun de ces voisins est :

$$VU_{i_0 j_0}^n = \{ U_{ij}^n, (i, j) \in \text{ind}_v(i_0, j_0) \text{ et } (i \Delta x, j \Delta y) \in \text{Dis} \}$$

alors, le schéma est :

$$\begin{cases} U_{ij}^n = k |i \Delta x| \\ U_{ij}^{n+1} = G(VU_{ij}^n) \quad j \geq 2 \\ U_{i1}^{n+1} = G_1(VU_{i1}^n) \\ U_{i0}^{n+1} = k |i \Delta x| \end{cases}$$

avec,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} A_{-1} = U_{i-1, j-1}^n + \Delta t \\ A_0 = U_{i, j-2}^n + \Delta t \\ A_{+1} = U_{i+1, j-1}^n + \Delta t \end{cases} \\ &A = \min(A_{-1}, A_0, A_{+1}) \\ &\begin{cases} B_{-1} = (1 - e^{-y}) U_{i-1, j-1}^n + e^{-y} U_{i-3, j-1}^n + \Delta t \\ B_0 = (1 - e^{-y}) U_{i, j-2}^n + e^{-y} U_{i-2, j-2}^n + \Delta t \\ B_{+1} = (1 - e^{-y}) U_{i+1, j-1}^n + e^{-y} U_{i-1, j-1}^n + \Delta t \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \min (B_{-1}, B_0, B_{+1}) \\
\begin{cases} C_{-1} = (1 - e^{-y}) U_{i-1,j-1}^n + e^{-y} U_{i+1,j-1}^n + \Delta t \\ C_0 = (1 - e^{-y}) U_{i,j-2}^n + e^{-y} U_{i+2,j-2}^n + \Delta t \\ C_{+1} = (1 - e^{-y}) U_{i+1,j-1}^n + e^{-y} U_{i+3,j-1}^n + \Delta t \end{cases} \\
C &= \min (C_{-1}, C_0, C_{+1}) \\
G(VU_{ij}^n) &= \max (A, B, C) \\
\begin{cases} A_{-1} = U_{i-1,j-1}^n + \Delta t \\ A_0 = U_{i,j-1}^n + \frac{\Delta t}{2} \\ A_{+1} = U_{i+1,j-1}^n + \Delta t \end{cases} \\
A &= \min (A_{-1}, A_0, A_{+1}) \\
\begin{cases} B_{-1} = (1 - e^{-y}) U_{i-1,j-1}^n + e^{-y} U_{i-3,j-1}^n + \Delta t \\ B_0 = (1 - e^{-y}) U_{i,j-1}^n + e^{-y} U_{i-2,j-1}^n + \frac{\Delta t}{2} \\ B_{+1} = (1 - e^{-y}) U_{i+1,j-1}^n + e^{-y} U_{i-1,j-1}^n + \Delta t \end{cases} \\
B &= \min (B_{-1}, B_0, B_{+1}) \\
\begin{cases} C_{-1} = (1 - e^{-y}) U_{i-1,j-1}^n + e^{-y} U_{i+1,j-1}^n + \Delta t \\ C_0 = (1 - e^{-y}) U_{i,j-1}^n + e^{-y} U_{i+2,j-1}^n + \frac{\Delta t}{2} \\ C_{+1} = (1 - e^{-y}) U_{i+1,j-1}^n + e^{-y} U_{i+3,j-1}^n + \Delta t \end{cases} \\
C &= \min (C_{-1}, C_0, C_{+1}) \\
G_1(VU_{ij}^n) &= \max (A, B, C) .
\end{aligned}$$

On peut vérifier que ce schéma peut se mettre sous forme différentielle, et qu'il est consistant et monotone.

La programmation de ce schéma donne une précision sur la fonction valeur d'environ 5.10^{-2} pour un $\Delta t = 1/25$ (c'est-à-dire pour 150 points en x et 50 points en y).

CONCLUSION

La caractérisation de la fonction valeur d'un jeu différentiel comme unique solution de viscosité d'une équation aux dérivées partielles, permet donc de construire des schémas numériques, et d'obtenir une estimation d'erreur pour ces schémas.

De plus, à partir de cette compilation numérique de la fonction valeur, il est possible d'obtenir les trajectoires optimales pour n'importe quelle condition initiale. Et elle donne aussi la stratégie optimale d'un joueur face à un autre joueur qui ne choisit pas le contrôle optimal.

Les deux problèmes académiques simulés par ces méthodes, donnent des résultats satisfaisants, compte tenu de la puissance de la machine sur laquelle ils ont été simulés. Mais comment ce type d'approche peut-il être mis en œuvre pour des problèmes concrets ? Le danger étant d'avoir à travailler dans des espaces de grande dimension, par exemple d'avoir à approximer une fonction valeur de \mathbb{R}^6 dans \mathbb{R} ou même plus ; ce qui probablement pose de sérieux problèmes même sur de très gros calculateurs.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier P.-L. Lions qui m'a guidée au cours de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. ALZIARY de ROQUEFORT, *Jeux différentiels et approximation de fonctions valeur*, première partie, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., 25, XX-XX.
- [2] M. BARDI & P. SORAVIA, *A. P.D.E. framework for games of pursuit evasion type*, to appear in differential games and application, pp. 62-71.
- [3] P. BERNHARD, *Differential Games : Isaacs' equation*, Encyclopedia of Systems and control, Editor : Madan Singh, Pergamon Press, 1987.
- [4] P. BERNHARD & J. V. BREAKWELL, *Simple game with a singular focal line*, J.O.T.A., to appear 1990.
- [5] J. V. BREAKWELL, *Computed complete solutions to the game : lion and man*, in Differential Games and Application, T.S. Bazar and P. Bernhard, Lectures Notes in Control and Inform. Sci. 119, Springer Verlag, 1989.
- [6] I. CAPUZZO-DOLCETTA & P. L. LIONS, *Hamilton-Jacobi equation and state constraints problem*, IMA Preprint Ser. 342, Mineapolis, September 1987.
- [7] L. C. EVANS & P. E. SOUGANIDIS, *Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations*, Indiana, vol. 33, n° 5, 1984.
- [8] M. G. CRANDALL & P. L. LIONS, *Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Math. Comp. 43, July 1984, 1-19.
- [9] M. G. CRANDALL & P. L. LIONS, *Remarks on the existence and uniqueness of unbounded viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Illinois J. Math. 31, winter 1987.
- [10] M. G. CRANDALL, L. C. EVANS & P. L. LIONS, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 282, April 1984.
- [11] M. H. SONER, *Optimal control with state-space constraint*, I. Siam J. Control Optim. 24, n° 3, 1986.