M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique

B. Alziary de Roquefort

Jeux différentiels et approximation numérique de fonctions valeur. 1re partie : étude théorique

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 25, nº 5 (1991), p. 517-533

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1991__25_5_517_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 25, n° 5, 1991, p. 517 à 533)

JEUX DIFFÉRENTIELS ET APPROXIMATION NUMÉRIQUE DE FONCTIONS VALEUR

1re partie : étude théorique (*)

B. ALZIARY DE ROQUEFORT ([1])

Communiqué par P. L. LIONS

Résumé. — *Il est intéressant pour les problèmes de jeux différentiels de faire le lien entre l'approche par la programmation dynamique et les notions de solution de viscosité. L'étude d'un exemple académique de jeu de poursuite montre que ce type d'analyse permet de résoudre des jeux avec contraintes d'état. Après avoir montré le caractère lipschitzien des fonctions valeur, la fonction valeur du jeu peut être caractérisée comme l'unique solution de viscosité d'une équation aux dérivées partielles avec conditions aux limites.*

Abstract. — *This article presents a study of a pursuit game with state constraints boundary conditions, using connections between the dynamic programming approach to two-person, zero-sum differential games and the notion of viscosity solutions. We prove that the value fonctions are Lipschitz continous and that the dynamic programming optimality condition implies that the value fonction is the unique viscosity solution of a partial differential equation with boundary conditions.*

INTRODUCTION

Les problèmes de jeux différentiels, souvent abordés par le calcul de trajectoires localement optimales [2], ou par le calcul explicite de solutions dans certains cas très particuliers [3], peuvent aussi être étudiés à partir de leurs fonctions valeur. Cet article traite un exemple de jeu de poursuite dans

(*) Reçu en avril 1990.

([1]) CEREMADE, Université de Paris-Dauphine, place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75016 Paris.

un domaine donné. Plus précisément imaginons un lion et une antilope enfermés dans un domaine clos θ, le lion, plus rapide que sa proie, essaie de la rattraper en minimisant le temps de capture, alors que l'antilope essaie de maximiser son temps de vie.

L. C. Evans et P. E. Souganidis [6] décrivent les liens entre l'approche par la programmation dynamique d'un jeu différentiel à deux joueurs, de somme nulle dans $\mathbb{R}^n$ et les notions de solution de viscosité des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman introduites par M. G. Crandall et P.-L. Lions [7, 8]. Toujours avec la formulation des jeux différentiels due à Elliott et Kalton [5], cet article reprend donc l'étude de L. C. Evans et P. E. Souganidis, mais pour un jeu avec contraintes d'état. En effet pour ce jeu de poursuite le lion et l'antilope ne peuvent pas sortir du domaine θ, et les fonctions valeur sont donc solution d'une équation d'Isaacs avec conditions aux limites.

Après une présentation du jeu au § 1, il est démontré dans le § 2 que les fonctions valeur supérieure et inférieure vérifient la programmation dynamique, sont majorées par une fonction du type d_{LA} que multiplie une constante, (d_{LA} représentant la longueur d'un chemin permettant d'aller du lion à l'antilope sans sortir du domaine $\bar{\theta}$), et sont lipschitziennes. Tout ceci est démontré en utilisant des arguments propres aux jeux de poursuite. Ensuite il reste à vérifier que les fonctions valeur sont solutions de viscosité de l'équation d'Isaacs suivante :

$$\begin{cases} L\,|\nabla_{x_2} w| - |\nabla_{x_1} w| - 1 = 0 & \text{sur } \theta \times \theta \backslash \Delta \\ w(x_1, x_2) = 0 & \text{sur } \Delta \\ L\,|\nabla_{x_2} w| - |\nabla_{x_1} w| - 1 \leqslant 0 & \text{sur } \partial\theta \times \theta \backslash \Delta \\ L\,|\nabla_{x_2} w| - |\nabla_{x_1} w| - 1 \geqslant 0 & \text{sur } \theta \times \partial\theta \backslash \Delta\,. \end{cases} \tag{I}$$

Le jeu vérifie la condition d'Isaacs (c.à.d. l'équation vérifiée par la fonction valeur supérieure est la même que celle vérifiée par la fonction valeur inférieure), les deux fonctions valeur sont donc solution de la même équation.

Dans le § 3, on remarque que si u est solution de viscosité de (I) alors $v = 1 - e^{-u}$ est solution de :

$$\begin{cases} w + L\,|\nabla_{x_2} w| - |\nabla_{x_1} w| - 1 = 0 & \text{sur } \theta \times \theta \backslash \Delta \\ w(x_1, x_2) = 0 & \text{sur } \Delta \\ w + L\,|\nabla_{x_2} w| - |\nabla_{x_1} w| - 1 \leqslant 0 & \text{sur } \partial\theta \times \theta / \Delta \\ w + L\,|\nabla_{x_2} w| - |\nabla_{x_1} w| - 1 \geqslant 0 & \text{sur } \theta \times \partial\theta \backslash \Delta\,. \end{cases} \tag{II}$$

Cette équation d'Isaacs avec conditions aux limites a une solution continue unique. La démonstration utilise la méthode introduite par M. H. Soner, et reprise par I. Capuzzo-Dolcetta et P.-L. Lions pour un problème de contrôle [4], en l'adaptant au jeu différentiel. Cette démonstration est faite dans le cas d'un domaine θ borné ; pour les domaines non bornés il faut utiliser les techniques de M. G. Crandall et P.-L. Lions [7, 8]. Ceci permet donc de caractériser la fonction valeur du jeu comme l'unique solution de viscosité d'une équation de type Hamilton-Jacobi-Bellman.

1. DÉFINITION DU JEU DIFFÉRENTIEL ET NOTATIONS

La dynamique des joueurs est la suivante :

Soit θ un domaine de $\mathbb{R}^2$, un réel $L > 1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = y(t) & x_1(0) = x_1 \quad x_1 \in \bar{\theta} \quad \text{pour l'antilope} \\ \dot{x}_2(t) = Lz(t) & x_2(0) = x_2 \quad x_2 \in \bar{\theta} \quad \text{pour le lion} \end{cases} \tag{1}$$

où les contrôles pour l'antilope et le lion, $y(.)$ et $z(.)$, sont des fonctions mesurables de $[0, +\infty[\to \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$.

La fonction coût est le temps de capture de l'antilope par le lion

$$P(y, z) = P_{x_1 x_2}(y(.), z(.)) = t_c(x_1, x_2, y(.), z(.)) \tag{2}$$

avec $$t_c(x_1, x_2, y(.), z(.)) = \inf\{t > 0, x_1(t) = x_2(t)\}$$

où $x_1(.)$ et $x_2(.)$ sont bien sûr solutions de (1) avec les contrôles $y(.)$ et $z(.)$.

Le but de l'antilope est donc de maximiser P en restant dans le domaine $\bar{\theta}$, alors que le lion essaye de le minimiser.

Les ensembles de contrôles admissibles (ceux pour lesquels le lion et l'antilope ne sortent pas du domaine $\bar{\theta}$) sont sont les suivants :

$$M(x_1) = \Big\{y : [0, +\infty[\to \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1), y \text{ mesurable et } \forall t > 0$$
$$x_1(t) = x_1 + \int_0^t y(s)\, ds \in \bar{\theta}\Big\}$$

$$N(x_2) = \Big\{z : [0, +\infty[\to \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1), z \text{ mesurable et } \forall t > 0$$
$$x_2(t) = x_2 + \int_0^t Lz(s)\, ds \in \bar{\theta}\Big\} .$$

Définissons maintenant ce qu'on appelle des stratégies.

$\alpha : N(x_2) \to M(x_1)$ est une stratégie de l'antilope si elle vérifie pour tout

$t \geq 0$, z et $\hat{z} \in N(x_2)$

$$\begin{cases} \text{si} & z(s) = \hat{z}(s) \quad 0 \leq s \leq t \\ \text{alors} & \alpha(z)(s) = \alpha(\hat{z})(s) \quad 0 \leq s \leq t \end{cases}$$

de même pour les stratégies du lion $\beta : M(x_1) \to N(x_2)$.

On appelle $\Gamma(x_1, x_2)$ l'ensemble des stratégies de l'antilope et $\Delta(x_1, x_2)$ l'ensemble des stratégies du lion.

On peut donc définir maintenant les deux fonctions valeur supérieure et inférieure :

$$\begin{cases} v(x_1, x_2) = \inf\limits_{\beta \in \Delta(x_1, x_2)} \sup\limits_{y \in M(x_1)} P(y, \beta(y)) \\ u(x_1, x_2) = \sup\limits_{\alpha \in \Gamma(x_1, x_2)} \inf\limits_{z \in N(x_2)} P(\alpha(z), z)\,. \end{cases} \tag{3}$$

2. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS VALEUR

2.1. Le principe de la programmation dynamique

THÉORÈME 1 : *Pour tout* $\tau \geq 0$, *et quelle que soit la condition initiale* $(x_1, x_2) \in \bar{\theta} \times \bar{\theta}$, *u et v vérifient le principe de la programmation dynamique :*

$$u(x_1, x_2) = \sup_{\alpha \in \Gamma(x_1, x_2)} \inf_{z \in N(x_2)} \left\{\tau \wedge t_c + u(x_1(\tau \wedge t_c), x_2(\tau \wedge t_c))\right\} \tag{4}$$

$$v(x_1, x_2) = \inf_{\beta \in \Delta(x_1, x_2)} \sup_{y \in M(x_1)} \left\{\tau \wedge t_c + v(x_1(\tau \wedge t_c), x_2(\tau \wedge t_c))\right\} \tag{5}$$

où $x_1(.)$, $x_2(.)$ *représentent les solutions de (1) avec les contrôles* $z(.)$ et $\alpha(z)(.)$ *pour u,* $y(.)$ *et* $\beta(z)(.)$ *pour v.*

Démonstration : (5) est démontrée, en adaptant la démonstration de L. C. Evans et P. E. Souganidis [6] (la démonstration de (4) est identique). Posons :

$$w(x_1, x_2) = \inf_{\beta \in \Delta(x_1, x_2)} \sup_{y \in M(x_1)} \left\{\tau \wedge t_c + v(x_1(\tau \wedge t_c), x_2(\tau \wedge t_c))\right\}$$

et démontrons (i) : $w(x_1, x_2) \geq v(x_1, x_2)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe une stratégie $\tilde{\beta} \in \Delta(x_1, x_2)$ telle que : si $\tilde{t} = t_c(x_1, x_2, \tilde{\beta}(y), y)$

$$w(x_1, x_2) \geqslant \sup_{y \in M(x_1)} \left\{\tau \wedge \tilde{t} + v(x_1(\tau \wedge \tilde{t}), x_2(\tau \wedge \tilde{t}))\right\} - \varepsilon \tag{6}$$

d'autre part $\forall (X_1, X_2) \in \bar{\theta} \times \bar{\theta}$

$$v(X_1, X_2) = \inf_{\beta \in \Delta(X_1, X_2)} \sup_{y \in M(X_1)} \{t_c(X_1, X_2, y, \beta(y))\}$$

donc il existe une stratégie $\bar{\beta}_{X_1, X_2} \in \Delta(X_1, X_2)$ telle que :

$$v(X_1, X_2) \geqslant \sup_{y \in M(X_1)} \{\bar{t}\} - \varepsilon \quad \text{avec} \quad \bar{t} = t_c(X_1, X_2, y, \bar{\beta}_{X_1 X_2}(y)) . \tag{7}$$

A partir de $\tilde{\beta}$ et $\bar{\beta}_{X_1, X_2}$ on définit une stratégie β_0 dépendant de τ de la façon suivante :

Pour $y \in M(x_1)$ on a

$$X_1 = x_1 + \int_0^\tau y(s)\, ds$$

$$X_2 = x_2 + \int_0^\tau L\tilde{\beta}(y)\, ds$$

ce qui permet d'associer à $y \in M(x_1)$ un $\tilde{y} \in M(X_1)$ $\forall s \geqslant 0$:

$$\tilde{y}(s) = y(\tau + s)$$

et :

$$\beta_0(y)(s) = \begin{cases} \tilde{\beta}(y)(s) , & s \leqslant \tau \\ \bar{\beta}_{X_1 X_2}(\tilde{y})(s) , & s > \tau . \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que $\beta_0 : M(x_1) \to N(x_2)$ est bien une stratégie. Alors d'après (6) et (7) :

1er cas si $t_c(x_1, x_2, y, \beta_0(y)) \leqslant \tau$

$$t_c(x_1, x_2, y, \beta_0(y)) = t_c(x_1, x_2, y, \tilde{\beta}(y)) = \tilde{t}$$

$$w(x_1, x_2) \geqslant \tilde{t} - \varepsilon \quad \text{car} \quad v(x_1(\tilde{t}), x_2(\tilde{t})) = 0 .$$

2e cas si $t_c(x_1, x_2, y, \beta_0(y)) > \tau$

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2) &\geqslant \tau + v(X_1, X_2) - \varepsilon \\ &\geqslant t_c(x_1, x_2, y, \beta_0(y)) - 2\varepsilon . \end{aligned}$$

Dans les deux cas on obtient :

$$\sup_{y \in M(x_1)} t_c(x_1, x_2, y, \beta_0(y)) \leqslant w(x_1, x_2) + 2\,\varepsilon$$

d'où
$$\inf_{\beta \in \Delta(x_1, x_2)} \sup_{y \in M(x_1)} t_c(x_1, x_2, y, \beta_0(y)) \leqslant w(x_1, x_2) + 2\,\varepsilon$$

et par conséquent $\forall \varepsilon \; v(x_1, x_2) \leqslant w(x_1, x_2) + 2\,\varepsilon$ ce qui démontre (i).

Démontrons maintenant (ii) : $w(x_1, x_2) \leqslant v(x_1, x_2)$.

Pour tout $\varepsilon \geqslant 0$ fixé, il existe une stratégie $\beta_1 \in \Delta(x_1, x_2)$ telle que :

$$v(x_1, x_2) \geqslant \sup_{y \in M(x_1)} \{t_1\} - \varepsilon \quad \text{avec} \quad t_1 = t_c(x_1, x_2, y, \beta_1(y)) \tag{8}$$

d'autre part pour cette stratégie β_1, il existe un contrôle $y_1 \in M(x_1)$ tel que :

$$w(x_1, x_2) \leqslant \tau \wedge \bar{t}_1 + v(x_1(\tau \wedge \bar{t}_1), x_2(\tau \wedge \bar{t}_1)) + \varepsilon \tag{9}$$

avec
$$\bar{t}_1 = t_c(x_1, x_2, y_1, \beta_1(y_1)) \,.$$

1^er cas si $\bar{t}_1 = t_c(x_1, x_2, y_1, \beta_1(y_1)) \leqslant \tau$ d'après (8), (9) :

$$w(x_1, x_2) \leqslant \bar{t}_1 + \varepsilon \leqslant v(x_1, x_2) + 2\,\varepsilon \,.$$

2^e cas si $\tau < t_c(x_1, x_2, y_1, \beta(y_1))$:

$$X_1 = x_1 + \int_0^\tau y_1(s)\, ds \quad X_2 = x_2 + \int_0^\tau \beta_1(y_1)(s)\, ds \,.$$

A tout contrôle $\tilde{y} \in M(X_1)$ on associe un contrôle $y \in M(x_1)$ de la façon suivante :

$$y(s) = \begin{cases} y_1(s) & s \leqslant \tau \\ \tilde{y}(s - \tau) & s > \tau \,. \end{cases}$$

A la stratégie $\beta_1 \in \Delta(x_1, x_2)$ on associe la stratégie $\tilde{\beta}_1 \in \Delta(X_1, X_2)$ définie comme suit :

$$\tilde{\beta}_1(\tilde{y})(s) = \beta_1(y)(s + \tau) \,.$$

On a donc pour tout $\tilde{y} \in M(X_1)$ et pour la stratégie $\tilde{\beta}_1 \in \Delta(X_1, X_2)$:

$$v(X_1, X_2) \leqslant \sup_{y \in M(X_1)} \left\{ t_c(X_1, X_2, \tilde{y}, \tilde{\beta}_1(\tilde{y})) \right\}$$

ainsi, il existe un contrôle $\tilde{y}_2 \in M(X_1)$ tel que :

$$v(X_1, X_2) \leq t_c(X_1, X_2, \tilde{y}_2, \tilde{\beta}_1(\tilde{y}_2)) + \varepsilon \tag{10}$$

on a alors, d'après (8) (9) (10) avec y_2 et β_1 :

$$w(x_1, x_2) \leq \tau + t_c(x_1, x_2, y_2, \beta_1(y_2)) - \tau + 2\,\varepsilon \leq v\,(x_1, x_2) + 3\,\varepsilon$$

ce qui nous donne (ii).

2.2. Les fonctions valeur sont finies et lipschitziennes

Pour obtenir de la régularité sur les fonctions valeur, il faut supposer le domaine θ suffisamment régulier. Dans la suite nous considérerons toujours un domaine ayant les propriétés suivantes :

θ ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que, $\forall\,(x, \tilde{x}) \in \bar{\theta} \times \bar{\theta}$:

$$\exists C_{x\tilde{x}} : [0, +\infty[\ \to \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1) \text{ t.q. } \forall s \quad x(s) = x + \int_0^s C_{x\tilde{x}}(\tau)\,d\tau \in \bar{\theta}$$

$$\exists T_{x\tilde{x}} \text{ t.q. } x(T_{x\tilde{x}}) = x + \int_0^{T_{x\tilde{x}}} C_{x\tilde{x}}(\tau)\,d\tau = \tilde{x} \text{ et } T_{x\tilde{x}} \leq C\,\|x - \tilde{x}\|\,.$$

PROPRIÉTÉ 1 : *Le temps de capture est toujours fini et vérifie :*

$$v(x_1, x_2) \leq \frac{T_{x_1 x_2}}{L - 1} \tag{11}$$

$$u(x_1, x_2) \leq \frac{T_{x_1 x_2}}{L - 1}\,. \tag{12}$$

Démonstration : Démontrons (11) pour v, la démonstration étant la même pour u.

Pour un contrôle donné y, on définit la stratégie $\beta_S \in \Delta(x_1, x_2)$ qui consiste d'abord à rejoindre le point de départ de l'antilope puis à suivre la trajectoire qu'elle a empruntée.

$$\beta_S(y)(s) = \begin{cases} C_{x_2 x_1}(Ls) & s \leq \dfrac{T_{x_2 x_1}}{L} \\ y(Ls - T_{x_2 x_1}) & s \geq \dfrac{T_{x_2 x_1}}{L}\,. \end{cases}$$

Pour la stratégie β_S et pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe un contrôle $\tilde{y}$ tel que :

$$v(x_1, x_2) \leq tcap(x_1, x_2, \tilde{y}, \beta_S(\tilde{y})) + \varepsilon\,.$$

Pour $s \geqslant T_{x_1 x_2}$:

$$x_1(s) = x_1 + \int_0^s \tilde{y}(\tau)\, d\tau$$

$$x_2(s) = x_2 + \int_0^{\frac{T_{x_2 x_1}}{L}} L C_{x_2 x_1}(L\tau)\, d\tau + \int_{\frac{T_{x_2 x_1}}{L}}^{s} L\tilde{y}(L\tau - T_{x_2 x_1})\, d\tau$$

$$= x_1 + \int_0^{Ls - T_{x_2 x_1}} \tilde{y}(t)\, dt$$

donc l'antilope est rattrapée au temps $s = Ls - T_{x_2 x_1}$ c'est-à-dire $s = \dfrac{T_{x_1 x_2}}{L-1}$

d'où $$\forall \varepsilon \geqslant 0 \quad v(x_1, x_2) \leqslant \frac{T_{x_1 x_2}}{L-1} + \varepsilon$$

ce qui démontre la propriété.

PROPRIÉTÉ 2 : *On reprend les hypothèses de régularité sur* θ *de la propriété* 1. *Alors les fonctions valeur* u *et* v *sont lipschitziennes.*

Démonstration : La démonstration est faite pour la fonction v seulement. Soient deux positions initiales (x_1, x_2) et $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ telles que $v(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leqslant v(x_1, x_2)$.

Démontrons que :

$$v(x_1, x_2) - v(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leqslant C \,.\, \sup \left(\|\tilde{x}_1 - x_1\|, \frac{\|\tilde{x}_2 - x_2\|}{L} \right).$$

D'après la définition de v, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une stratégie $\tilde{\beta}_0 \in \Delta(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ telle que :

$$v(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \geqslant \sup_{y \in M(\tilde{x}_1)} t_c(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, y, \tilde{\beta}_0(y)) - \varepsilon \,. \tag{13}$$

A tout contrôle $y \in M(x_1)$ on associe un contrôle $\tilde{y} \in M(\tilde{x}_1)$: soit $T = \sup \left(T_{\tilde{x}_1 x_1}, \dfrac{T_{x_2 \tilde{x}_2}}{L} \right)$

$$\tilde{y}(s) = \begin{cases} C_{\tilde{x}_1 x_1} & s \leqslant T_{\tilde{x}_1 x_1} \\ 0 & T_{\tilde{x}_1 x_1} < s \leqslant T \\ y(s - T) & T < s \,. \end{cases}$$

D'autre part, on définit la stratégie $\beta_0 \in \Delta(x_1, x_2)$ à partir de $\tilde{\beta}_0$ de la façon suivante : $\tilde{t} = t_c(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}, \tilde{\beta}_0(y))$

$$\beta_0(y)(s) = \begin{cases} C_{x_2 \tilde{x}_2}(Ls) & s \leqslant \dfrac{T_{x_2 \tilde{x}_2}}{L} \\ 0 & \dfrac{T_{x_2 \tilde{x}_2}}{L} < s \leqslant T \\ \tilde{\beta}_0(\tilde{y})(s - T) & T < s \leqslant \tilde{t} + T \\ \tilde{y}(L(s - \tilde{t} - T) + \tilde{t}) & \tilde{t} + T < s . \end{cases}$$

Si le lion utilise cette stratégie β_0, il existe alors pour l'antilope un contrôle $y_0 \in M(x_1)$ tel que :

$$v(x_1, x_2) \leqslant t_c(x_1, x_2, y_0, \beta_0(y_0)) + \varepsilon \tag{14}$$

avec (13) et (14) on a donc :

$$v(x_1, x_2) - v(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leqslant t_c(x_1, x_2, y_0, \beta_0(y_0)) - \\ - t_c(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_0, \tilde{\beta}_0(\tilde{y}_0)) + 2\,\varepsilon . \tag{15}$$

Calculons maintenant ces deux temps de capture :

1er cas : si $T < \tilde{t}_0 = t_c(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_0, \tilde{\beta}_0(\tilde{y}_0))$

$$\tilde{x}_2(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_2 + \int_0^{\tilde{t}_0} L\tilde{\beta}_0(\tilde{y}_0)(\tau)\, d\tau$$

$$\tilde{x}_1(\tilde{t}_0) = x_1 + \int_T^{\tilde{t}_0} y_0(\tau - T)\, d\tau$$

$\forall s > \tilde{t}_0 + T$

$$x_1(s) = x_1 + \int_0^s y_0(\tau)\, d\tau$$

$$x_2(s) = \tilde{x}_2 + \int_T^{\tilde{t}_0 + T} L\tilde{\beta}_0(\tilde{y}_0)(\tau - T)\, d\tau + \int_{\tilde{t}_0 + T}^s L\beta_0(y_0)\,(\tau)\, d\tau$$

$$= \tilde{x}_2(\tilde{t}_0) + \int_{\tilde{t}_0 + T}^s L\tilde{y}_0(L(\tau - \tilde{t}_0 - T) + \tilde{t}_0)\, d\tau$$

$$= \tilde{x}_1(\tilde{t}_0) + \int_0^{L(s - \tilde{t}_0 - T)} \tilde{y}_0(\tau + \tilde{t}_0)\, d\tau$$

$$= x_1 + \int_0^{\tilde{t}_0 - T} y_0(\tau)\, d\tau + \int_0^{L(s - \tilde{t}_0 - T)} y_0(\tau + \tilde{t}_0 - T)\, d\tau$$

$$= x_1 + \int_0^{L(s - \tilde{t}_0 - T) + \tilde{t}_0 - T} y_0(\tau)\, d\tau\,.$$

D'où $t_0 = t_c(x_1, x_2, y_0, \beta_0)$ vérifie : $t_0 = L(t_0 - \tilde{t}_0 - T) + \tilde{t}_0 - T$.

2^e cas : si $\tilde{t}_0 < T$

$$\tilde{x}_1(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_1 + \int_0^{\tilde{t}_0} Cx_1\, \tilde{x}_1(\tau)\, d\tau$$

$$\tilde{x}_2(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_2 + \int_0^{\tilde{t}_0} L\tilde{\beta}_0(\tilde{y}_0)(\tau)\, d\tau$$

$\forall s > \tilde{t}_0 + T$

$$x_1(s) = x_1 + \int_0^s y_0(\tau)\, d\tau$$

$$x_2(s) = \tilde{x}_2(\tilde{t}_0) + \int_{\tilde{t}_0 + T}^{s} L\tilde{y}_0(L(\tau - \tilde{t}_0 - T) + \tilde{t}_0)\, d\tau$$

$$= \tilde{x}_2(\tilde{t}_0) + \int_{\tilde{t}_0}^{L(s - \tilde{t}_0 - T) + \tilde{t}_0} \tilde{y}_0(\tau)\, d\tau$$

$$= \tilde{x}_1(\tilde{t}_0) + \int_{\tilde{t}_0}^{T} C_{\tilde{x}_1 x_1}\, d\tau + \int_T^{L(s - \tilde{t}_0 - T) + \tilde{t}_0} \tilde{y}_0(\tau)\, d\tau$$

$$= x_1 + \int_0^{L(s - \tilde{t}_0 - T) + \tilde{t}_0 - T} y_0(\tau)\, d\tau\,.$$

d'où on déduit le même temps de capture que dans le premier cas.

Donc $t_0 - \tilde{t}_0 = \dfrac{(L+1)}{(L-1)}\, T$ et avec (15) on a :

$$v(x_1, x_2) - v(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leqslant \frac{(L+1)}{(L-1)} \sup \left(T_{\tilde{x}_1 x_1}, \frac{T_{x_2 \tilde{x}_2}}{L} \right) + 2\,\varepsilon$$

ce qui démontre la propriété.

2.3. Les solutions de viscosité de l'équation d'Isaacs

On remarque facilement que l'hamiltonien de ce jeu vérifie la condition d'Isaacs. C'est-à-dire que u et v sont solutions de la même équation.

THÉORÈME 2 : *Les fonctions valeur u et v sont solutions de viscosité de l'équation* (I).

La démonstration de ce théorème est encore une adaptation de celle de L. C. Evans et P. E. Souganidis [6]. Avant de démontrer ce théorème, démontrons tout d'abord un lemme préliminaire.

LEMME 1 : *Supposons que* ϕ *soit* C^1 :

(i) *si pour* $(x_{01}, x_{02}) \in \bar{\theta} \times \bar{\theta}$ *et* $\varepsilon > 0$ *on a :*

$$L\,|\nabla_{x_2}\phi| - |\nabla_{x_1}\phi| - 1 \geqslant \varepsilon \tag{16}$$

alors pour σ *positif assez petit, il existe* $z \in N(x_{02})$ *tel que, pour tout* $\alpha \in \Gamma(x_{01}, x_{02})$ *on ait :*

$$\int_0^\sigma \{-1 - \alpha(z)(s) \,.\, \nabla_{x_1}\phi(s) - Lz(s) \,.\, \nabla_{x_2}\phi(s)\}\, ds \geqslant \frac{\sigma\varepsilon}{2}\,.$$

(ii) *si pour* $(x_{01}, x_{02}) \in \bar{\theta} \times \bar{\theta}$ *et* $\varepsilon > 0$ *on a :*

$$L\,|\nabla_{x_2}\phi| - |\nabla_{x_1}\phi| - 1 \leqslant \varepsilon \tag{17}$$

alors pour σ *assez petit, il existe* $\alpha \in \Gamma(x_{01}, x_{02})$ *telle que pour tout* $z \in N(x_{02})$ *on ait :*

$$\int_0^\sigma \{-1 - \alpha(z)(s) \,.\, \nabla_{x_1}\phi(s) - Lz(s) \,.\, \nabla_{x_2}\phi(s)\}\, ds \leqslant -\frac{\sigma\varepsilon}{2}\,.$$

Démonstration du lemme : Démontrons tout d'abord (i). D'après (16) on a :

$$\max_{z \in \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0,1)} \; \min_{y \in \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0,1)} \{-1 - y \,.\, \nabla_{x_1}\phi - Lz \,.\, \nabla_{x_2}\phi\} \geqslant \varepsilon\,.$$

Donc il existe $\tilde{z} \in \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$ tel que :

$$\min_{y \in \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0,1)} \{-1 - y \,.\, \nabla_{x_1}\phi - L\tilde{z} \,.\, \nabla_{x_2}\phi\} \geqslant \varepsilon\,.$$

Définissons le contrôle $\tilde{z}(.)$ par $\forall s \geqslant 0$, $\tilde{z}(s) = \tilde{z}$, et choisissons un contrôle quelconque $y(.) \in M(x_{01})$. Alors pour un σ assez petit $x_2(s) = x_{02} + \int_0^\sigma L\tilde{z}(\tau)\, d\tau$ reste dans θ car $x_{02} \in \theta$ et pour tout $0 \leqslant s \leqslant \sigma$:

$$\min_{y \in \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0,1)} \{-1 - y \,.\, \nabla_{x_1}\phi(x_1(s), x_2(s)) - L\tilde{z} \,.\, \nabla_{x_2}\phi(x_1(s), x_2(s))\} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

D'où pour tout $\alpha \in \Gamma(x_{01}, x_{02})$:

$$-1-\alpha(\tilde{z})(s) \cdot \nabla_{x_1}\phi(x_1(s), x_2(s)) - L\tilde{z} \cdot \nabla_{x_2}\phi(x_1(s), x_2(s)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc en intégrant on obtient le résultat.

Maintenant démontrons (ii). D'après (17) on a :

$$\max_{z \in \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0,1)} \min_{y \in \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0,1)} \left\{-1 - y \cdot \nabla_{x_1}\phi - Lz \cdot \nabla_{x_2}\phi\right\} \leqslant -\varepsilon .$$

Donc pour chaque $z \in \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$ il existe un $y(z) \in \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$ tel que :

$$-1 - y(z) \cdot \nabla_{x_1}\phi - Lz \cdot \nabla_{x_2}\phi \leqslant -\varepsilon .$$

Pour tout $z \in \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$, il existe $r(z)$ tel que :

$$\forall \xi \in B(z, r(z)) \cap \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0,1) \quad -1 - y(z) \cdot \nabla_{x_1}\phi - L\xi \cdot \nabla_{x_2}\phi \leqslant -\frac{3\,\varepsilon}{4} .$$

Comme la boule $\bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$ est un ensemble compact, il existe n points distincts $z_1, \dots, z_n \in \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$ et $r_1, \dots, r_n > 0$ tels que :

$$\bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i, r_i)$$

et $$-1 - y(z_i) \cdot \nabla_{x_1}\phi - L\xi \cdot \nabla_{x_2}\phi \leqslant -\frac{3\,\varepsilon}{4} \quad \text{pour} \quad \xi \in B(z_i, r_i) .$$

Définissons à partir de cela la fonction $\eta : \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1) \to \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$ par :

$$\eta(z) = y(z_k) \quad \text{si} \quad z \in B(z_k, r_k) \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B(z_i, r_i) \quad (k = 1, \dots, n)$$

on a donc :

$$-1 - \eta(z) \cdot \nabla_{x_1}\phi - Lz \cdot \nabla_{x_2}\phi \leqslant -\frac{3\,\varepsilon}{4} \quad \forall z \in \bar{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1) .$$

Maintenant, pour tout contrôle $z(.) \in N(x_{02})$, on peut construire la stratégie $\alpha \in \Gamma(x_{01}, x_{02})$ de la façon suivante :

$$\alpha(z)(s) = \eta(z(s)) \quad \forall s \geqslant 0$$

alors pour $0 \leqslant s \leqslant \sigma$, et σ assez petit, $x_1(s) = x_{01} + \int_0^s \alpha(z)(\tau)\, d\tau$ reste dans

θ, car $x_{01} \in \theta$ et :

$$-1-\alpha(z)(s) \cdot \nabla_{x_1}\phi(x_1(s), x_2(s)) - Lz(s) \cdot \nabla_{x_2}\phi(x_1(s), x_2(s)) \geqslant -\frac{\varepsilon}{2}$$

en intégrant on trouve le résultat.

Démonstration du théorème : Soit $\phi \in C^1$, on suppose que $u-\phi$ atteint un maximum local en $(x_{01}, x_{02}) \in \bar{\theta} \times \theta \backslash \Delta$. Il faut montrer que :

$$L\left|\nabla_{x_2}\phi\right| - \left|\nabla_{x_1}\phi\right| - 1 \leqslant 0 . \tag{18}$$

Si cette inégalité n'est pas vérifiée, il existe alors $\varepsilon \geqslant 0$ tel que :

$$L\left|\nabla_{x_2}\phi\right| - \left|\nabla_{x_1}\phi\right| - 1 \geqslant \varepsilon .$$

D'après le lemme, il existe un contrôle $z \in N(x_{02})$ et un réel $\sigma > 0$ tels que : $\forall \alpha \in \Gamma(x_{01}, x_{02})$

$$\int_0^\sigma -1-\alpha(z)(s) \cdot \nabla_{x_1}\phi(x_1(s), x_2(s)) - \\ - Lz(s) \cdot \nabla_{x2}\phi(x_1(s), x_2(s))\, ds \geqslant \frac{\sigma\varepsilon}{2}$$

d'où :

$$\sup_{\alpha \in \Gamma(x_{01}, x_{02})} \inf_{z \in N(x_{02})} \int_0^\sigma 1+\alpha(z)(s) \cdot \nabla_{x_1}\phi(x_1(s), x_2(s)) \\ + Lz(s) \cdot \nabla_{x_2}\phi(x_1(s), x_2(s))\, ds \leqslant -\frac{\sigma\varepsilon}{2} . \tag{19}$$

D'autre part pour $(x_{01}, x_{02}) \notin \Delta$ et σ assez petit, la programmation dynamique donne :

$$u(x_{01}, x_{02}) = \sup_{\alpha\in\Gamma(x_{01}, x_{02})} \inf_{z \in N(x_{02})} \{\sigma + u(x_1(\sigma), x_2(\sigma))\} . \tag{20}$$

Comme $u-\phi$ a un maximum local en (x_{01}, x_{02}) on a aussi :

$$u(x_{01}, x_{02}) - \phi(x_{01}, x_{02}) \geqslant u(x_1(\sigma), x_2(\sigma)) - \phi(x_1(\sigma), x_2(\sigma)) \tag{21}$$

et maintenant avec (20) (21) :

$$\sup_{\alpha\in\Gamma(x_{01}, x_{02})} \inf_{z \in N(x_{02})} \{\sigma + \phi(x_1(\sigma), x_2(\sigma)) - \phi(x_{01}, x_{02})\} \geqslant 0 \tag{22}$$

mais,

$$\phi(x_1(\sigma), x_2(\sigma)) - \phi(x_{01}, x_{02}) = \int_0^\sigma \alpha(z)(s) \cdot \nabla_{x_1}\phi(x_1(s), x_2(s)) + Lz(s) \cdot \nabla_{x_2}\phi(x_1(s), x_2(s))\, ds$$

ce qui avec (22) contredit (19).

La même démonstration est valable si $u - \phi$ atteint un minimum local en $(x_{01}, x_{02}) \in \theta \times \bar{\theta} \backslash \Delta$ en utilisant cette fois le lemme (i).

3. UNICITÉ DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION D'ISAACS AVEC CONTRAINTES SUR LE BORD

Les fonctions valeur sont lipschitziennes et solutions de viscosité de l'équation d'Isaacs (I). En faisant un changement de variable $\tilde{u} = 1 - e^{-u}$ les fonctions $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont solutions de viscosité de (II). Il suffit donc de montrer l'unicité des solutions de viscosité de (II). Pour cela supposons le domaine θ borné et suffisamment régulier, c'est-à-dire : il existe une fonction $T: \bar{\theta} \to \mathbb{R}^2$ continue sur $\bar{\theta}$ et différentiable sur θ telle que :

$$\forall x \in \bar{\theta} \quad d(x + \varepsilon T(x), \bar{\theta}) < C_T \varepsilon \Rightarrow x \in \theta .$$

THÉORÈME 3 : *Supposons que θ soit borné. Soient deux fonctions v et $u \in C(\bar{\theta} \times \bar{\theta})$, respectivement sur-solution sur $\theta \times \bar{\theta}$ et sous-solution sur $\bar{\theta} \times \theta$ de (II). Alors :*

$$\max_{\bar{\theta} \times \bar{\theta}} (u(x_1, x_2) - v(x_1, x_2)) \leq 0 .$$

Démonstration : Cette démonstration reprend les idées de M. H. Soner [9]. Considérons la fonction :

$$W_\varepsilon(x_1, x_2, y_1, y_2) = u(x_1, x_2) - v(y_1, y_2) - \frac{1}{2\varepsilon^2}\left(|x_2 + \varepsilon T(x_2) - y_2|^2 + |x_1 - \varepsilon T(y_1) - y_1|^2\right).$$

On a alors : $\forall (x_1, x_2) \in \bar{\theta} \times \bar{\theta}$

$$\max_{\bar{\theta} \times \bar{\theta} \times \bar{\theta} \times \bar{\theta}} W_\varepsilon \geq W_\varepsilon(x_1, x_2 - \varepsilon T(x_2), x_1 - \varepsilon T(x_1), x_2)$$

$$\geq \max_{\bar{\theta} \times \bar{\theta}} \{u(x_1, x_2 - \varepsilon T(x_2)) - v(x_1 - \varepsilon T(x_1), x_2)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\left|T(x_2-\varepsilon T(x_2))-T(x_2)\right|^2+\left|T(x_1)-T(x_1-\varepsilon T(x_1))\right|^2\right)\Big\} \tag{23}$$

$$\geqslant \max_{\bar\theta\times\bar\theta}\{(u-v)(x_1,x_2)\}-\omega_u(\varepsilon)-\omega_v(\varepsilon)-\omega(\varepsilon)$$

$$\geqslant \max_{\bar\theta\times\bar\theta}\{(u-v)(x_1,x_2)\}-k(\varepsilon)$$

où ω_u, ω_v sont les modules de continuité de u et v, et ω un module de continuité dépendant de celui de T. D'autre part si w_ε atteint son maximum en $(\bar x_1, \bar x_2, \bar y_1, \bar y_2)$ on a aussi :

$$\begin{aligned}\max_{\bar\theta\times\bar\theta\times\bar\theta\times\bar\theta} W_\varepsilon &\leqslant u(\bar x_1,\bar x_2)-v(\bar y_1,\bar y_2)\\
&\quad-\frac{1}{2\,\varepsilon^2}\left(\left|\bar x_2+\varepsilon T(\bar x_2)-\bar y_2\right|^2+\left|\bar x_1-\varepsilon T(\bar y_1)-\bar y_1\right|^2\right)\\
&\leqslant \max_{\bar\theta\times\bar\theta}\{(u-v)(x_1,x_2)\}+\omega_u(\left|\bar x_1-\bar y_1\right|)+\omega_v(\left|\bar x_2-\bar y_2\right|)\\
&\quad-\frac{1}{2\,\varepsilon^2}\left(\left|\bar x_2+\varepsilon T(\bar x_2)-\bar y_2\right|^2+\left|\bar x_1-\varepsilon T(\bar y_1)-\bar y_1\right|^2\right)\end{aligned} \tag{24}$$

en combinant (23) et (24) on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\bar x_2+\varepsilon T(\bar x_2)-\bar y_2\right|^2+\left|\bar x_1-\varepsilon T(\bar y_1)-\bar y_1\right|^2 &\leqslant 2\,\varepsilon^2(\omega_u(\left|\bar x_1-\bar y_1\right|)\\
&\quad+\omega_v(\left|\bar x_2-\bar y_2\right|)+k(\varepsilon))\end{aligned}$$

ce qui implique,

$$\left|\bar x_1-\bar y_1\right|\leqslant C\varepsilon \quad \left|\bar x_2-\bar y_2\right|\leqslant C\varepsilon$$

et donc :

$$\begin{aligned}\left|\bar x_2+\varepsilon T(\bar x_2)-\bar y_2\right| &\leqslant \varepsilon\delta(\varepsilon)\\
\left|\bar x_1-\varepsilon T(\bar y_1)-\bar y_1\right| &\leqslant \varepsilon\delta(\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Ceci indique, d'après la construction de T et pour ε assez petit, que $\bar x_2\in\theta$ et $\bar y_1\in\theta$.

En appliquant maintenant les définitions de sur-solution sur $\theta\times\bar\theta$ et sous-solution sur $\bar\theta\times\theta$, on peut écrire si $(\bar x_1,\bar x_2)\notin\Delta$ et $(\bar y_1,\bar y_2)\notin\Delta$:

$$u+\frac{L}{\varepsilon^2}\left|(I+\varepsilon DT(\bar x_2))(\bar x_2+\varepsilon T(\bar x_2)-\bar y_2)\right|-\frac{1}{\varepsilon^2}\left|\bar x_1-\bar y_1-\varepsilon T(\bar y_1)\right|\leqslant 1$$

$$v+\frac{L}{\varepsilon^2}\left|\bar x_2+\varepsilon T(\bar x_2)-\bar y_2\right|-\frac{1}{\varepsilon^2}\left|(I+\varepsilon DT(\bar y_1))(\bar x_1-\bar y_1-\varepsilon T(\bar y_1))\right|\geqslant 1\,.$$

Mais on a :

$$\begin{aligned} \left|DT(\bar{x}_2)(\bar{x}_2 + \varepsilon T(\bar{x}_2) - \bar{y}_2)\right| &\leq C\varepsilon\delta(\varepsilon) \\ \left|DT(\bar{y}_1)(\bar{x}_1 - \varepsilon T(\bar{y}_1) - \bar{y}_1)\right| &\leq C\varepsilon\delta(\varepsilon) \end{aligned}$$

et on obtient en faisant la différence entre la condition de viscosité pour u et celle pour v :

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - v(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \leq C\delta(\varepsilon) .$$

Pour $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Delta$ on a :

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - v(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = v(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - v(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \leq \omega_v(\varepsilon)$$

et pour $(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \Delta$ on a :

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - v(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - u(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \leq \omega_u(\varepsilon) .$$

Donc dans tous les cas on peut écrire :

$$W_\varepsilon(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) \leq K(\varepsilon)$$

et (23) donne pour tout ε suffisamment petit :

$$\max_{\bar{\theta} \times \bar{\theta}} (u(x_1, x_2) - v(x_1, x_2)) \leq h(\varepsilon)$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque 1 : Si θ n'est pas borné, il est possible d'utiliser la méthode de M. G. Crandall et P.-L. Lions [8], ou bien une méthode pour solutions de viscosité non bornées [7], et de l'adapter avec la méthode de M. H. Soner.

De ce théorème il découle bien sûr le corollaire suivant :

COROLLAIRE : *Les fonctions valeur supérieure et inférieure sont égales.*

Remarque 2 : L'existence d'une solution de viscosité pour (I) ou (II) est donnée par le théorème 2, puisque la fonction valeur est elle-même solution de viscosité de (I).

CONCLUSION

Bien évidemment ce travail peut s'étendre à d'autres jeux vérifiant le principe de la programmation dynamique. Le jeu est ainsi caractérisé par son équation d'Isaacs, équation du type Hamilton-Jacobi-Bellman dont l'unique solution de viscosité est la fonction valeur du jeu.

D'autre part il est envisageable de construire des schémas numériques pour des équations de ce type, ce qui permettrait de calculer une approximation de la fonction valeur et par suite des trajectoires optimales. Cette étude numérique fera l'objet d'une deuxième partie.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier P.-L. Lions qui m'a guidée au cours de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BARDI & P. SORAVIA, *A P.D.E. framework for games of pursuit evasion type,* to appear in differential games and application pp. 62-71.

[2] P. BERNHARD, *Differential Games : Isaacs' equation,* Encyclopedia of Systems and control, Editor : Madan Singh, Pergamon Press, 1987.

[3] J. V. BREAKWELL, *Computed complete solutions to the game : lion and man,* in Differential Games and Application, T. S. Bazar and P. Bernhard, Lecture Notes in Control and Inform. Sci. 119, Springer Verlag, 1989.

[4] I. CAPUZZO-DOLCETTA & P.-L. LIONS, *Hamilton-Jacobi equation and state constraints problem,* IMA Preprint Ser. 342, Minneapolis, September 1987.

[5] R. J. ELLIOTT & N. J. KALTON, *Cauchy problems for certain Isaacs-Bellman equations and games of survival,* Amer. Math. Soc. 198, 1974.

[6] L. C. EVANS & P. E. SOUGANIDIS, *Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations,* Indiana, 33, n° 5, 1984.

[7] M. G. CRANDALL & P.-L. LIONS, *Remarks on the existence and uniqueness of unbounded viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations,* Illinois J. Math. 31, n° 4, winter 1987.

[8] M. G. CRANDALL, L. C. EVANS & P.-L. LIONS, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations,* Trans. Amer. Math. Soc. 282, April 1984.

[9] M. H. SONER, *Optimal control with state-space constraint,* I. SIAM J. Control Optim. 24, n° 3, 1986.