

DENIS SERRE

Un modèle relaxé pour les câbles inextensibles

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 25, n° 4 (1991), p. 465-481

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1991__25_4_465_0

© AFCET, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN MODÈLE RELAXÉ POUR LES CÂBLES INEXTENSIBLES (*)

Denis SERRE ⁽¹⁾

Communiqué par R. TEMAM

Résumé — *Le mouvement d'une chaîne ou d'un câble inextensible a été l'un des premiers problèmes modélisés en mécanique. Nous présentons ici deux idées nouvelles.*

La première approche consiste à relaxer la contrainte d'inextensibilité car elle n'est pas « fermée » pour la topologie adaptée au problème. Cette méthode permet apparemment de déterminer le signe de la tension. Mais on remarque que, par l'application du principe du maximum, la propriété de positivité de la tension est contenue dans les équations.

La seconde idée consiste à décrire la chaîne comme la limite d'un câble élastique raide. Cette approche permet d'obtenir un critère d'admissibilité pour les angles que fait le câble, à savoir la conservation de l'énergie.

Deux exemples sont étudiés. Chacun d'eux montre un phénomène de concentration, soit de la tension dans le temps, soit de l'énergie dans l'espace.

Abstract — *The chain, that is the inextensible string, was one of the earliest problems to be modelled in mechanics. One brings here two new ideas. The first one is to relax the constraint because the usual one is not « closed » in the appropriate topology. It apparently solves the question of the sign of the tension, but one observes that non-negativity is self-contained in the equations (even the older) by means of the maximum principle.*

The second idea is to describe the chain as the limit of a stiff elastic string. This gives a criterion of relevance for kinks (namely the conservation of energy).

Two examples are investigated. Each one shows a concentration phenomena either tension in time, or energy in space.

On présente ici un modèle mathématique pour l'étude d'un câble inextensible se mouvant dans le plan ou dans l'espace. Le câble est pesant mais infiniment mince et flexible. Il est représenté par ses coordonnées Lagrangiennes $(x, t) \mapsto y$. Il apparaît que la contrainte $\|y_x\| = 1$ doit être relaxée en $\|y_x\| \leq 1$ pour tenir compte de phénomènes d'oscillations tant

(*) Reçu en février 1990

⁽¹⁾ Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

physiques que mathématiques. Le câble supporte une tension interne qui joue le rôle du multiplicateur de Lagrange de la contrainte, à l'instar des modèles de milieux continus incompressibles. A ce titre, la tension satisfait une équation purement stationnaire, i.e. dans laquelle aucune dépendance par rapport au temps n'intervient (section III). L'une des motivations de ce modèle est le cas limite pour un câble élastique lorsque la relation contrainte-déformation devient raide. Cette façon de voir semble bien adaptée quand il s'agit de déterminer parmi les discontinuités quelles sont celles qui sont admissibles physiquement (section II). On peut ainsi étudier le problème de Riemann, mais celui-ci n'est pas nécessairement bien posé, en raison de l'incompatibilité entre la contrainte et certaines données initiales d'une part, et aussi parce que le système n'est que partiellement d'évolution : on ne trouve que deux caractéristiques réelles pour $\|y_x\| = 1$.

Le deuxième partie décrit deux exemples apportant chacun un phénomène nouveau. Le premier est un câble qui reste à chaque instant circulaire. Il est remarquable que la tension, qui ici ne dépend que du temps, est une mesure égale à une somme de masses de Dirac réparties périodiquement. Le second est un fouet (de cirque par exemple) qui claqué. On explique le claquement par une concentration de l'énergie en une extrémité du fouet à un instant T .

Il va de soi que si l'analogie entre câble inextensible et fluide incompressible d'une part, entre tension et pression d'autre part avait quelque fondement mathématique, ces deux phénomènes de concentration en temps de la tension et de concentration en espace de l'énergie seraient très intéressants, voire inquiétants, au choix.

Je remercie Y. Colin de Verdière pour avoir attiré mon attention sur la question de l'inextensibilité d'un câble, et M. Schatzman qui m'a indiqué l'existence d'un travail de M. Reeken sur ce sujet [7, 8].

Selon M. Reeken, les équations du mouvement du câble inextensible (appelé aussi *chaîne*) remontent à J. D. Bernoulli et à L. Euler (années 1730 et 40). Cependant aucun de ces travaux ne remet en cause la contrainte d'égalité $\|y_x\| = 1$, bien que Reeken [8, p. 229] reconnaisse son manque de valeur pour des solutions faibles. Une autre amélioration du modèle concerne le bilan d'énergie.

Nous montrons ici qu'un angle (kink) du câble est une déformation qui ne dissipe pas d'énergie, en considérant que l'inextensibilité est la limite du cas inextensible raide. Ceci contredit une supposition de [8], mais surtout permet de lever l'ambiguïté sur la détermination du mouvement en présence d'angles. C'est ainsi que le problème du fouet (exemples 4.b de [8]) est complètement résolu, de même que celui du cercle.

L'apport essentiel de Reeken est surtout sa preuve de l'existence d'une solution classique locale au problème de Cauchy [7] *via* une variante du théorème de Nash-Moser. La complication extrême de cette démonstration,

alors que la contrainte est l'égalité $\|y_x\| = 1$, suggère que le problème de Cauchy pour notre modèle sera redoutable.

I. INTRODUCTION A L'INEXTENSIBILITÉ

1) Il y a plusieurs situations où un câble peut être considéré comme étant inextensible, au moins en première approximation. Un fouet constitué d'une lanière de cuir est un bon exemple que nous étudierons plus en détail à la Section IV. Une chaîne métallique dont les maillons sont infiniment petits convient aussi.

A première vue, un tel câble possède une représentation Lagrangienne $[0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3 , $(x, t) \mapsto y(x, t)$, avec la contrainte $\|y_x\| \equiv 1$. Le nombre L est la longueur du câble, qui bien sûr ne varie pas dans le temps.

L'équilibre du câble dans un champ de forces mortes $f(x)$ s'obtient en minimisant l'énergie potentielle qui se réduit, en l'absence d'une résistance à la flexion, à :

$$P[y] = \int_0^L y \cdot f \, dx.$$

On ajoute en général à la contrainte d'inextensibilité des conditions aux limites, soit de Dirichlet pour un bout fixe, soit de Neumann pour un bout libre. L'ensemble dans lequel on minimise P est une partie de $W^{1,\infty}(0, L)$, l'espace des fonctions Lipschitziennes, dont on remarque qu'elle n'est pas fermée pour la topologie faible-étoile. En fait, une suite minimisante peut converger vers un état ne satisfaisant pas la contrainte, mais seulement l'inégalité $\|y_x\| \leq 1$, p.p. Plus précisément, l'adhérence faible-étoile de l'ensemble des états admissibles est constituée des applications $(x, t) \mapsto y(x, t)$ qui satisfont $\|y_x\| \leq 1$ presque partout ainsi que les éventuelles conditions aux limites de Dirichlet. Notons \mathcal{V} ce nouvel ensemble et \mathcal{U} l'ancien ; comme P est continu pour cette topologie et que \mathcal{V} est compact, on a

$$(1.1) \quad \inf \{P[y] ; y \in \mathcal{U}\} = \min \{P[y] ; y \in \mathcal{V}\}.$$

Il semble donc que la condition d'inextensibilité doive être relaxée. Cela traduit le fait qu'on peut sans effort ramener la longueur du câble à une longueur $L' < L$, macroscopiquement parlant, en approchant uniformément la fonction $y(x) = L'x/L$ par une suite de fonctions Lipschitziennes vérifiant $\|y_x\| \equiv 1$ (voir *fig. 1*).

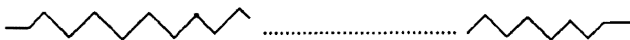


Figure 1. — Câble dont l'allongement apparent est < 1 .

Une analyse formelle montre que l'élément minimisant de P dans \mathcal{V} est associé à un multiplicateur de Lagrange (la tension du câble) satisfaisant

$$(1.2) \quad \begin{cases} -(py_x)_x = f & \text{dans }]O, L[\\ p \geq 0 & \text{p.p.} \\ p(\|y_x\| - 1) = 0 & \text{p.p.} \end{cases}$$

2) Résolution de (1.2)

La première équation s'entend au sens des distributions, mais comme c'est une équation différentielle, elle fournit $\theta = py_x$ exactement si l'une des conditions aux limites est de Neuman (on a alors $p = 0$ en cette extrémité).

Si les deux bouts sont libres, il n'y a de solution que si $\int_0^L f(x) dx = 0$; si les deux bouts sont fixes, on obtient θ à un vecteur constant près.

Prenons le cas le plus simple, avec une condition de Neumann au moins. De θ , on tire y_x là où θ n'est pas nul, par $y_x = p^{-1}\theta$, $p = \|\theta\|$. Là où $\theta = 0$, y_x est arbitraire, quoique de norme ≤ 1 . Par intégration, on en déduit y . Il y a donc une solution, dès que $\int_0^L f dx = 0$ si les deux bouts sont libres et sans condition si un seul est libre. En général celle-ci n'est pas unique, dès que θ s'annule sur une partie de mesure non nulle.

Lorsque les deux bouts sont fixes, il reste à déterminer un vecteur C pour que $\theta(x) = \theta_0(x) + C$ satisfasse

$$(1.3) \quad F(C) =: \int_0^L \frac{\theta}{\|\theta\|} dx = Y$$

où le second membre est donné par les conditions aux limites. L'intégrale est bien définie par exemple si f ne s'annule que sur un ensemble de mesure nulle. Dans ce cas, le théorème de convergence dominée montre que F est continue, et comme $\deg(F, Y, B) = 1$ pour une boule B assez grande, l'équation (1.3) possède une solution au moins dès que $\|Y\| < L$ (si $\|Y\| > L$, il n'y a pas d'état admissible). On en déduit immédiatement la solution de (1.2).

3) Le problème d'évolution

De manière analogue au problème stationnaire, il s'agit, étant donné un champ de forces $f(x, t)$, une condition initiale $y(x, 0) = a(x)$ et $y_t(x, 0) = b(x)$, et d'éventuelles conditions aux limites, de trouver un point critique dans \mathcal{V} du Lagrangien $K - P$, où K désigne l'énergie cinétique. La condition initiale doit être compatible avec la contrainte :

$$(1.4) \quad \begin{cases} \|a_x\| \leq 1 & \text{p.p.} \\ \|a_x\| = 1 \Rightarrow a_x \cdot b_x \leq 0. \end{cases}$$

En introduisant comme précédemment un multiplicateur de Lagrange $p(x, t)$, la dynamique du câble est régie par le système

$$(1.5) \quad \rho y_{tt} = (py_x)_x + f,$$

avec toujours

$$(1.6) \quad \|y_x\| \leq 1, \quad p \geq 0, \quad p(\|y_x\| - 1) = 0 \text{ p.p.}$$

On a noté ρ la densité linéique de masse; on peut se ramener à $\rho \equiv 1$ par un changement d'échelle. On se placera dans cette situation dorénavant. La nature de (1.5) reste cependant à préciser car à moins que p appartienne à L^1_{loc} , le produit py_x n'a pas de sens.

4) Câble élastique raide

Une autre façon d'introduire le système (1.5)-(1.6) est de passer à la limite dans les équations d'un câble très raide. En négligeant toujours la résistance à la flexion, sa dynamique est régie par l'équation

$$(1.7) \quad y_{tt} = (r^{-1} T_\varepsilon(r) y_x)_x + f,$$

où $r = \|y_x\|$ et où $T_\varepsilon(r) = \varepsilon^{-1} S(r)$ est une loi de comportement satisfaisant $S(1) = 0$ (état de repos) et $S' > 0$ pour $r > 1$.

Des raisons mathématiques (pour que (1.7) soit bien posé, au moins linéairement), physiques (pour que les états en contraction soient stables) et numériques (pour que le schéma de Godunov soit consistant) conduisent à admettre que S est nul pour $r \leq 1$ (Gilquin-Serre [3]).

L'estimation d'énergie conduit à

$$(1.8) \quad \int_0^L \left(\frac{1}{2} y_t^2 + \varepsilon^{-1} E(\|y_x\|) \right) dx \leq \int_0^T \int_0^L f \cdot y_t dx + \mathcal{E}_0,$$

où \mathcal{E}_0 est l'énergie initiale et $E(r)$ est une primitive de S , nulle sur $[0, 1]$. Une estimation de Gronwall fournit une majoration de l'énergie potentielle, indépendante de ε dès que la condition initiale satisfait $\|a_x\| \leq 1$. Faisant tendre ε vers 0, on tire à la limite que $\|y_x\| \leq 1$, en utilisant la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle convexe $\int_0^L E(\|y_x\|) dx$ pour la topologie faible-étoile.

Si la tension relative $r_\varepsilon(x, t)^{-1} T_\varepsilon(r_\varepsilon(x, t))$ possède une limite quand ε tend vers zéro, celle-ci est nécessairement ≥ 0 ; ce sera notre tension p . Et si le passage à la limite dans le produit est possible, le couple (p, y) satisfera (1.5)-(1.6), puisqu'on a déjà $p_\varepsilon(\|y_x^\varepsilon\| - 1) \geq 0$.

Cette approche semble importante car aucun câble n'est jamais parfaitement inextensible. Chaque fois que nous serons en présence d'une

indétermination concernant l'évolution du câble, nous la lèverons en cherchant la solution qui est la limite du cas élastique raide. La première application de ce principe est relative au problème de Riemann et à l'étude des discontinuités admissibles. Le problème de Riemann est d'une importance capitale à cause des nombreux schémas numériques qui utilisent sa résolution : Lax, Godunov, Glimm, etc.

II. LE PROBLÈME DE RIEMANN

1) *Rappels du cas élastique*

Le problème élastique, pour lequel la tension T est donnée comme fonction de l'allongement $r = \|y_x\|$, est hyperbolique lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- i) $r \leq 1 \Rightarrow T(r) = 0$,
- ii) $r > 1 \Rightarrow T'(r) > 0$.

En général, T n'est pas dérivable en $r = 1$, ou plutôt $T'(1+0) > 0$. Pour simplifier, on supposera aussi que $T'''(r) > 0$ pour $r > 1$.

Il est utile, pour écrire le problème sous la forme d'un système de lois de conservation du 1^{er} ordre, d'introduire les variables $u = y_x$, $v = y_t$ et $q = r^{-1}u$, qui est un vecteur unitaire. On a alors

$$(2.1) \quad u_t = v_x, \quad v_t = (T(r)q)_x.$$

Les solutions autosimilaires sont celles qui ne dépendent que de x/t . A un vecteur constant près, y est alors positivement homogène de degré 1 en (x, t) . Le problème de Riemann consiste à trouver la solution autosimilaire satisfaisant à une donnée de Cauchy elle-même autosimilaire :

$$(u, v)(x, 0) = \begin{cases} (u_g, v_g) & \text{pour } x < 0, \\ (u_d, v_d) & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

La solution est obtenue par juxtaposition d'ondes simples : détentes, chocs ou contacts.

Les détentes sont les solutions régulières. Elles ont lieu à q constant. Nous n'en aurons pas l'utilité pour la suite.

Les chocs sont des discontinuités ayant lieu à q constant également. Ce sont des solutions de la forme

$$(u, v)(x, t) = \begin{cases} (u_-, v_-) & \text{si } x < st, \\ (u_+, v_+) & \text{si } x > st, \end{cases}$$

satisfaisant les relations suivantes :

- i) $q_+ = q_-, (r_+ - r_-) \operatorname{sgn} s \leq 0$
- ii) $s^2 = [T]/[r]$
- iii) $[v] = -s[u]$.

On a noté $[w]$ le saut $w^+ - w^-$ d'une quantité générale $w(u, v)$. L'inégalité dans i) indique que les chocs sont mécaniquement irréversibles.

Il en va différemment des contacts, qui sont des discontinuités réversibles ayant lieu à r constant.

Ils satisfont

- i) $r_+ = r_-$
- ii) $s^2 = T(r)/r, r = r_{\pm}$
- iii) $[v] = -s[u]$.

On peut montrer qu'étant donné les états initiaux $(u, v)_{g,d}$, il existe une et une seule solution autosimilaire constituée d'ondes simples. L'existence et l'unicité sont montrées dans [1] pour $r_g, r_d \geq 1$; voir aussi [4] pour l'unicité et l'existence « locale ». L'existence est constatée dans le cas général par Gilquin et l'auteur [3]; l'unicité est laissée en vérification au lecteur. La situation est plus compliquée lorsque T'' s'annule pour une valeur $r^* > 1$, voir [6].

Lorsque r_g et r_d sont ≤ 1 , la solution utilise en général deux chocs et deux contacts. Un choc est de vitesse $s < 0$, l'autre est de vitesse positive. De même pour les contacts. Une (ou plusieurs) de ces ondes peut ne pas apparaître, ce qui revient à dire qu'elle se produit avec une amplitude nulle.

Les vitesses des ondes S_- (choc), C_- (contact), C_+ et S_+ sont respectivement

$$-(T_0/(r_0 - r_g))^{1/2}, \quad -(T_0/r_0)^{1/2}, \quad (T_0/r_0)^{1/2}, \quad (T_0/(r_0 - r_d))^{1/2},$$

où on a noté $T_0 = T(r_0)$. On a toujours $r_0 \geq 1$ et les relations de saut iii) sont, en notant $c_0 = (T_0/r_0)^{1/2}$.

$$\begin{aligned} v_- - v_g &= ((r_0 - r_g) T_0)^{1/2} q_g, \\ v_0 - v_- &= r_0 c_0 (q_0 - q_g), \\ v_+ - v_0 &= r_0 c_0 (q_0 - q_d), \\ v_d - v_+ &= ((r_0 - r_d) T_0)^{1/2} q_d, \end{aligned} \quad (2.2)$$

En éliminant les valeurs intermédiaires de v , on obtient l'équation

$$(2.3) \quad v_d - v_g = r_0 c_0 \left\{ 2 q_0 + (\sqrt{1 - r_g/r_0} - 1) q_g + (\sqrt{1 - r_d/r_0} - 1) q_d \right\}.$$

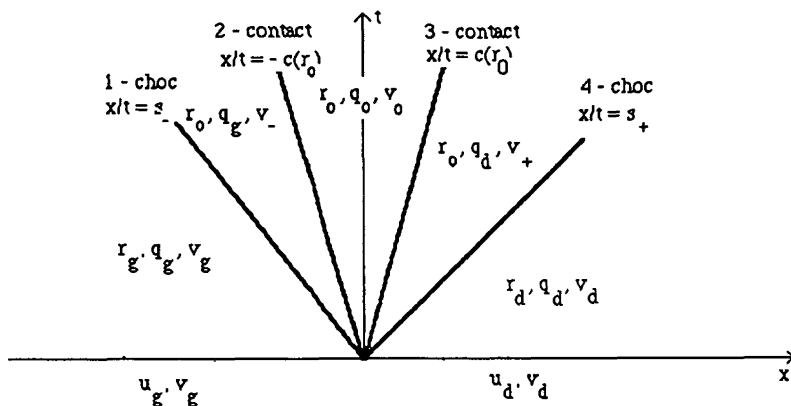


Figure 2. — Le problème de Riemann élastique avec $r_g, r_d \leq 1$.

Et en écrivant que q_0 est unitaire, on obtient une équation en r_0 seul :

(2.4)

$$\|v_d - v_g + r_0 c_0(1 - \sqrt{1 - r_g/r_0}) q_g + r_0 c_0(1 - \sqrt{1 - r_d/r_0}) q_d\| = 2 r_0 c_0.$$

Cette équation possède une et une seule solution $r_0 \geq 1$. La connaissant, q_0 est obtenu par (2.3). Enfin v_{\pm} et v_0 sont fournis par (2.2).

Notons que le problème de Riemann est bien posé, au sens où les vitesses et les états intermédiaires dépendent de manière continue des données $(u, v)_{g,d}$.

2) Passage à la limite

On suppose maintenant que $T = \varepsilon^{-1} S$, où S est une loi qui ne dépend pas de ε . On étudie la limite de la solution $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ du problème de Riemann, la condition initiale étant fixée.

La vitesse c_0 dans (2.4) doit alors être remplacée par $\varepsilon^{-1/2} c_0$, où cette fois $c(r) = (S(r)/r)^{1/2}$. Ainsi, avec $[v] = v_d - v_g$,

(2.5)

$$\|\varepsilon^{1/2}[v] + r_0 c_0(1 - \sqrt{1 - r_g/r_0}) q_g + r_0 c_0(1 - \sqrt{1 - r_d/r_0}) q_d\| = 2 r_0 c_0.$$

Parce que l'application $r \mapsto rc(r)$ est propre, $r_{0\varepsilon}$ reste borné quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Une valeur d'adhérence vérifie alors $c_0 = 0$ ou bien

$$(2.6) \quad \|(1 - \sqrt{1 - r_g/r_0}) q_g + (1 - \sqrt{1 - r_d/r_0}) q_d\| = 2.$$

Le premier cas signifie $r_0 = 1$, et le second n'a lieu que si $q_g = q_d$ et $r_g = r_d = r_0$, c'est-à-dire $r_0 = 1$ car $r_0 \geq 1 \geq r_g, r_d$. Vu l'unicité de la valeur d'adhérence, on a donc $\lim r_{0\varepsilon} = 1$.

Considérons maintenant les vitesses $\pm \varepsilon^{-1/2} c_{0\varepsilon}$ des contacts. Un raisonnement analogue montre qu'elles restent bornées dès que $Q \equiv (1 - \sqrt{1 - r_g}) q_g + (1 - \sqrt{1 - r_d}) q_d$ est de norme < 2 , c'est-à-dire dès que $r_d < 1$ ou $r_g < 1$ ou $q_g \neq q_d$. Alors $\varepsilon^{-1/2} c_{0\varepsilon}$ converge vers une valeur $s \geq 0$, unique solution positive de l'équation du second degré

$$(2.7) \quad \|[v] + sQ\| = 2s.$$

Les vitesses des chocs convergent alors respectivement vers $-s/\sqrt{1 - r_g}$ et $s/\sqrt{1 - r_d}$ qui sont éventuellement infinies. Cette infinitude est sans conséquence parce que dans ce cas l'amplitude du choc tend vers zéro. Par exemple si $s \neq 0$ et $r_d = 1$, alors $r_0 - 1 \sim C\varepsilon$ et (2.2) montre que $v_+ - v_d$ tend vers zéro avec ε ; comme par ailleurs $q_+ = q_d$, l'état $(u_+, v_+)^{\varepsilon}$ tend bien vers (u_d, v_d) .

Lorsque $\|Q\| \leq 2$, le problème de Riemann pour le câble inextensible $u_t = v_x$, $v_t = (pu)_x$, $\|u\| \leq 1$, $p \geq 0$, $p(\|u\| - 1) = 0$, possède donc une solution qui utilise en général quatre ondes; la situation est analogue à celle de la figure 2, mais avec $r_0 = 1$. Par ailleurs, la tension p est la limite de $\varepsilon^{-1} S(r_\varepsilon)$. On a $p_g = p_d = 0$ si les chocs ont lieu, et $p_- = p_0 = p_+ = s^2$.

3) Le cas $\|Q\| = 2$

Si $u_d = u_g$, ces vecteurs étant unitaires, et si $[v] \neq 0$ (pour éviter le problème de Cauchy trivial), alors (2.7) est une équation linéaire en s :

$$2sQ \cdot [v] = -[v]^2.$$

Il n'y a de solution $s \geq 0$ que si $Q \cdot [v] < 0$, et dans ce cas elle fournit comme précédemment la solution du problème de Riemann.

Par contre, si $Q \cdot [v] \geq 0$, la vitesse $\varepsilon^{1/2} c_0$ tend vers l'infini quand ε tend vers zéro et la limite du cas élastique ne fournit pas de solution car de plus $\|v_0\|$ tend aussi vers l'infini. La raison de cette explosion lorsque ε tend vers zéro est que la contrainte $\|u\| \leq 1$ ne peut pas être satisfaite pour $t > 0$ au voisinage de $x = 0$ si $u_d = u_g$ est unitaire et $u_{d,g} \cdot (v_d - v_g) \geq 0$ avec $v_d \neq v_g$.

4) Ondes simples

En conclusion, les deux types d'ondes simples que nous reconnaissons comme physiquement admissibles, parce que stables par rapport à une perturbation élastique, sont les chocs et les contacts.

Les chocs ont lieu à q constant. Il y en a de deux sortes, selon le signe de leur vitesse. Dans un 1-choc, $r_g < 1 = r_d$ et la vitesse du choc vaut

$s = -\sqrt{p_d/(1-r_g)}$. On a $p_g = 0$ et $v_d - v_g = s(u_g - u_d)$. Dans un 4 - choc, $r_d < 1 = r_g$, $s = \sqrt{p_g/(1-r_d)}$, $p_d = 0$. Les chocs sont irréversibles : ils dissipent de l'énergie, c'est-à-dire

$$(\|v\|^2/2)_t \leq (pv \cdot u)_x,$$

ou encore

$$(2.8) \quad [pv \cdot u] + s[\|v\|^2/2] > 0.$$

Les contacts ont lieu à $r = 1$ et p constant. Il y en a de deux sortes, selon le signe de leur vitesse. Dans un 2-contact, $s = -\sqrt{p}$, tandis que dans un 3-contact on a $s = \sqrt{p}$. Les contacts sont réversibles, c'est-à-dire satisfont

$$(2.9) \quad [pv \cdot u] + s[\|v\|^2/2] = 0.$$

La situation est un peu différente de celle qui prévaut pour les systèmes hyperboliques. Pour ceux-ci, l'ensemble des états U_d qui peuvent être liés à U_g par une onde simple est localement la réunion de n courbes passant par U_g , n étant le nombre d'équations du système. Pour qu'un résultat semblable ait lieu ici, il faut se donner l'état de base sous la forme (u_g, v_g) si $r_g < 1$, ou bien (u_g, v_g, p_g) si $r_g = 1$.

Notons aussi qu'il existe des discontinuités satisfaisant les conditions de Rankine-Hugoniot ainsi que l'inégalité d'énergie (2.8), ou bien (2.9), et qui pourtant ne sont pas admissibles. Il en est ainsi du cas

$$r_g = r_d = 1, \quad q_g = -q_d, \quad 2s^2 = p_g + p_d, \\ \operatorname{sgn}(s) = \operatorname{sgn}(p_g - p_d), \quad [v] = -s[u].$$

En fait, si q est unitaire et si $v_d, v_g, u_d = q, u_g = -q$ sont donnés comme dans cet exemple, le problème de Riemann est résolu à l'aide de deux contacts de vitesses opposées $s = \|v_d - v_g\|/2$; la pression, constante, vaut s^2 et l'état intermédiaire est

$$r_0 = 1, \quad q_0 = (v_d - v_g)/2s, \quad v_0 = sq + (v_d + v_g)/2.$$

III. LE TYPE DU SYSTÈME

1) Frontière libre

Manifestement, le système (1.5)-(1.6) qui décrit le mouvement d'un câble inextensible est un problème à frontière libre. Deux zones peuvent exister : dans ω_0 , on a $\|y_x\| < 1$ et $p = 0$, tandis que dans ω_+ , on a $\|y_x\| = 1$ et $p \geq 0$. La frontière libre peut être le lieu d'un choc, avec une discontinuité de r et p , mais un raccordement continu est également possible.

Dans ω_0 , le problème est réduit à l'équation différentielle ordinaire $y_{tt} = 0$, où x joue un rôle de paramètre. On ne peut pas considérer cela comme un système hyperbolique car la matrice Jacobienne du système,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a une valeur propre de multiplicité algébrique différente de sa multiplicité géométrique. En d'autres termes, une perturbation par des termes d'ordre inférieurs strictement à deux peut donner lieu à un problème de Cauchy mal posé.

2) Équation (stationnaire) de la pression

Dans le domaine ω_+ , on a bien sûr pour une solution régulière $u \cdot u_x = 0$, $0 = u \cdot u_t = u \cdot v_x$; il s'ensuit que

$$0 = u_t \cdot v_x + u \cdot v_{xt} = \|v_x\|^2 + u \cdot (p_{xx}u + 2p_x u_x + pu_{xx}),$$

c'est-à-dire

$$(3.1) \quad -p_{xx} + p \|u_x\|^2 = \|v_x\|^2.$$

Cette équation, au contraire du régime précédent, est différentielle ordinaire mais par rapport à x et non t ! Notons qu'elle peut être considérée comme un problème au limite en p . Si $]a, b[$ est l'intervalle maximal sur lequel $r \equiv 1$ à un instant donné, plusieurs situations sont possibles.

Si $x = a$ est déjà une extrémité du domaine physique, on aura $p = 0$ (bout libre) ou bien $p_x = u \cdot (pu)_x = u \cdot v_t = 0$ (bout fixe). Si $x = a$ est intérieur au domaine physique, alors $p = 0$ s'il n'y a pas de choc et $p = s^2(1 - r(a - 0))$ s'il y a un choc. On a donc ou bien $p(a) \geq 0$, ou bien $p_x(a) = 0$.

D'après le principe du maximum, on constate donc que l'inégalité physique $p \geq 0$ est une conséquence mathématique des autres équations

$$u_t = v_x, \quad v_t = (pu)_x,$$

$$\|u_x\| \leq 1, \quad p(\|u_x\| - 1) = 0.$$

Notons que le principe du maximum est bien applicable si la solution est régulière par morceaux car p est constant au travers des contacts.

En fait, l'équation elliptique (3.1) peut être écrite sans faire appel à u , en remarquant que si $u = (\cos \theta, \sin \theta)^t$, alors $\operatorname{tg} \theta = \partial_x v_1 / \partial_x v_2$. Il vient donc

$$(3.2) \quad -p_{xx} + (pK(v)^2 - 1) \|v_x\|^2 = 0,$$

où $K(v)$ est la courbure de l'arc paramétré $x \mapsto v(x)$. On peut donc complètement éliminer u en adjoignant à (3.2) les équations

$$(3.3) \quad \partial_t v_i = \partial_x((p \partial_x v_{3-i})/\|v_x\|), \quad i = 1, 2.$$

A p constant, (3.3) ressemble à une équation des milieux poreux, à ceci près qu'il s'agit d'un système, et qu'il y a une singularité lorsque v_x s'annule. Notons encore l'analogie de (3.1) avec l'équation de la pression pour un fluide incompressible, où la contrainte $\operatorname{div} w = 0$ permet d'éliminer les dérivées en temps par

$$(3.4) \quad -\Delta P = \sum_{i,j} \partial_i w_j \partial_j w_i.$$

Cependant l'absence de condition aux limites simples rend impossible l'obtention de l'inégalité naturelle $p \geq 0$ en utilisant seulement (3.4).

3) Linéarisation

Linéarisons le système en (u, v, p) au voisinage d'un état constant satisfaisant $p > 0$ et donc $\|u\| = 1$. L'invariance par rotation nous permet de supposer que $u = (0, 1)^t$. Notant les variations par $Z = (z, y)$, w et q , on a $y = 0$ et

$$(3.5) \quad z_t = (w_1)_x, \quad (w_1)_t = pz_x$$

et

$$(3.6) \quad (w_2)_x = 0, \quad q_x = (w_2)_t.$$

La ligne (3.5) est d'un système d'évolution hyperbolique, de vitesses $\pm \sqrt{p}$. A contrario, (3.6) n'est pas un système d'évolution et n'a ni le type hyperbolique, ni le type elliptique ou parabolique.

De tels systèmes non linéaires où intervient un couplage entre une partie hyperbolique d'évolution et une équation stationnaire elliptique par rapport à la variable d'espace seule ont déjà été rencontrés dans la modélisation de la récupération pétrolière. Il ne semble pas qu'une théorie d'existence convenable soit connue pour le problème de Cauchy, avec ou sans conditions aux limites.

IV. EXEMPLES DE MOUVEMENTS

1) Cercle pulsant

Le cas où les conditions initiales ont une invariance de rotation qui permette au câble de rester circulaire à chaque instant est particulièrement intéressant car le mouvement peut être calculé explicitement pour

$t > 0$. Cet exemple peut donc servir à valider des schémas numériques, ou à les rejeter (voir [2], [3] et [5]).

On a ici en assimilant \mathbb{R}^2 au plan complexe :

$$(4.1) \quad y(x, t) = \rho(t) \exp i(\omega x - \varphi(t)).$$

La vitesse angulaire est $\varphi'(t)$ tandis que l'allongement est $r = \omega\rho$. Enfin, $q = i \exp i(\omega x - \varphi)$ et $v = -(\rho\varphi' + i\rho')q$. Pour $\rho < \omega^{-1}$, on a $v_t = 0$, c'est-à-dire

$$(4.2) \quad \rho'' - \rho\varphi'^2 - 2i\rho'\varphi' - i\rho\varphi'' = 0.$$

On en tire d'une part la conservation du moment angulaire, $\varphi' = \Omega\rho^{-2}$ où Ω est déterminé par la condition initiale, et d'autre part une équation autonome

$$(4.3) \quad \rho'' - \Omega^2 \rho^{-3} = 0.$$

Les solutions de (4.3) sont données implicitement par

$$(4.4) \quad \rho^2 = C^2 + D^2(t - t_0)^2, \quad CD = \Omega.$$

La longueur du câble au repos est $2\pi/\omega$, son énergie vaut $\pi D/\omega$. Dès que le moment angulaire n'est pas nul, D ne l'est pas non plus et $\rho(t)$ atteint en un temps t^* la valeur critique ω^{-1} . Quel est le mouvement au-delà de t^* ? L'intuition indique qu'il sera encore invariant par rotation, c'est-à-dire que la formule (4.1) continue d'être valide. Par contre $\rho'(t)$ est discontinu en t^* car $\rho'(t^* - 0) > 0$ alors que la contrainte $\rho \leq \omega^{-1}$ implique $\rho'(t^* + 0) \leq 0$. Le moment angulaire sera conservé et bien sûr ρ doit quand même être continu.

Dès que ρ est à nouveau $< \omega^{-1}$, le mouvement est à nouveau décrit par une formule (4.4) avec des constantes D_1 et t_1 adéquates avec $C_1 D_1 = \Omega$. Il y a donc essentiellement deux possibilités. Ou bien ρ devient immédiatement $< \omega^{-1}$ ($\rho'(t^* + 0) < 0$), ou bien ρ reste égal à ω^{-1} pour tout $t > t^*$, la tension étant alors constante. Dans le premier cas, le mouvement ultérieur ne dépend que de la valeur de $\rho'(t^* + 0)$, qui doit donc être déterminée.

On peut être surpris par la possibilité pour la vitesse v de sauter à l'instant t^* partout à la fois, mais cela est plausible parce que le problème n'est pas complètement hyperbolique. Avec le mouvement proposé ci-dessus, l'équation $u_t = v_x$ est triviale. Mais $v_t = (pu)_x$ montre que p , qui ne dépend que de t , est une masse de Dirac en $t = t^*$, dont le poids vaut

$$\omega^{-2}(\rho'(t^* - 0) - \rho'(t^* + 0)),$$

qui est bien positif.

Puisque les conditions de Rankine-Hugoniot ne fournissent pas la valeur de $\rho'(t^* + 0)$, on peut être tenté de la déterminer en utilisant la décroissance de l'énergie au cours du temps ; mais cela se réduit ici à l'inégalité (compte tenu de l'inextensibilité)

$$(4.5) \quad -\rho'(t^* - 0) \leq \rho'(t^* + 0) \leq 0.$$

Les équations d'équilibre et de contrainte, même augmentées de l'inégalité

$$(\|v\|^2/2)_t \leq (pv \cdot u)_x,$$

ne permettent donc pas de décrire l'évolution du câble. Celle-ci reste sous-déterminée.

Pour pouvoir conclure, nous allons en fait demander que le mouvement soit celui qu'on obtient en passant à la limite dans le cas élastique raide. Dans ce cas, on a encore (4.4) pour $t \leq t^*$ car $T_\varepsilon(r) = 0$ pour $r \leq 1$. Pour $t^* < t < t^* + 2t_\varepsilon$, on a $\rho > \omega^{-1}$, avec $\rho(t^* + 2t_\varepsilon) = \omega^{-1}$. Dans cet intervalle de temps, φ' est toujours égal à $\Omega\rho^{-2}$; en revanche

$$\rho'' - \Omega^2 \rho^{-3} + \frac{\omega}{\varepsilon} T(\omega\rho) = 0.$$

En intégrant une fois, il vient

$$(4.6) \quad \frac{1}{2} (\rho'^2 + \Omega^2 \rho^{-2}) + \frac{1}{\varepsilon} E(\omega\rho) = \frac{1}{2} D,$$

où $E' = T$ et $E(1) = 0$.

Puisque l'équation différentielle (4.6) est autonome, on a $\rho'(t^* + t_\varepsilon) = 0$ par parité. Entre t^* et $t^* + t_\varepsilon$, ρ' est positif et vaut

$$\rho' = \{D - \Omega^2 \rho^{-2} - 2\varepsilon^{-1} E(\omega\rho)\}^{1/2} = F_\varepsilon(\rho).$$

On en déduit

$$t_\varepsilon = \int_{\omega^{-1}}^{l_\varepsilon} \frac{d\rho}{F_\varepsilon(\rho)},$$

où $F_\varepsilon(l_\varepsilon) = 0$, $l_\varepsilon > \omega^{-1}$. On a $l_\varepsilon - \omega^{-1} \sim C_2 \sqrt{\varepsilon}$. Puis, sur $[\omega^{-1}, l_\varepsilon]$, $F_\varepsilon(\rho) \sim C_\varepsilon \varepsilon^{-1/4} \sqrt{l_\varepsilon - \rho}$, uniformément. Il s'ensuit que

$$t_\varepsilon \sim C_4 \varepsilon^{1/4} \sqrt{l_\varepsilon - \omega^{-1}} \sim C_5 \sqrt{\varepsilon}.$$

Donc le temps passé avec $\rho \geq 1$ tend vers zéro avec ε , ce qui montre qu'à la limite on a $\rho'(t^* - 0) < 0$, avec en fait $\rho'(t^* - 0) = -\rho'(t^* + 0)$ car dans le cas raide, la parité nous donne $\rho'(t^* + 2t_\varepsilon) = -\rho'(t^*)$.

La solution correcte dans le cas inextensible est donc celle qui conserve l'énergie. Tout se passe comme si le câble rebondissait contre une paroi dans un choc parfaitement élastique.

2) Le fouet qui claque

On étudie maintenant le cas particulier où le câble satisfait à une condition de Dirichlet (bout fixe) $y(0, t) = 0$ et une condition de Neumann $p(L, t) = 0$ (bout libre). La condition initiale est $y(x, 0) = -(x, 0)^t$, $y_t(x, 0) = (a, 0)^t$, a Cte > 0 . Par symétrie, la solution attendue reste portée par la droite $y_2 = 0$. Cette solution représente d'une manière quelque peu idéalisée un fouet, lanière de cuir infiniment mince et flexible en première approximation ; le bout fixe est le manche retenu par le dresseur.

On va construire une solution explicite à ce problème, de la forme

$$\begin{aligned} x < X(t) &\Rightarrow y(x, t) = (x, 0)^t, \\ x > X(t) &\Rightarrow y(x, t) = (2X(t) - x, 0)^t. \end{aligned}$$

Le fouet est donc replié sur lui-même, le pli se trouvant au point d'abscisse $X(t)$. Il est partout en extension maximale : $\|u\| \equiv 1$. Les inconnues du problème sont $X(t)$ et la tension. On a immédiatement $p_x = 0$ pour $x < X(t)$ et $p_x = -2X''(t)$ pour $x > X(t)$. Ainsi $p = p_0(t)$ pour $x < X(t)$, et compte tenu de $p(L, t) = 0$, on a $p(x, t) = 2X''(t)(L - x)$ pour $x > X(t)$.

Il reste à écrire la condition de Rankine-Hugoniot $[py_x] + X'(t)[y_t] = 0$, c'est-à-dire

$$(4.7) \quad p_0(t) = \frac{d^2}{dt^2} (X - L)^2.$$

Malheureusement on reste à ce stade avec une indétermination. La pression p_0 en amont du pli permet de décrire la totalité du mouvement, mais on ne peut pas la déterminer à l'aide des seules équations aux dérivées partielles. Dans ce cas, on doit revenir à l'étude de la Section II pour savoir lesquelles parmi les discontinuités sont des limites de solutions autosimilaires du cas élastique raide. En II. 4) il est indiqué qu'une discontinuité à r constant, ce qui est le cas, est un contact, avec p continu et $p = X'^2$. On obtient donc l'équation différentielle

$$(4.8) \quad 2X''(L - X) = X'^2.$$

La pression en amont p_0 est égale à la valeur commune des deux membres de (4.8). Cette équation s'intègre une première fois en

$$(4.9) \quad X'^2(L - X) = \alpha^2 L/4, \quad X'(0) = \alpha/2.$$

Cela traduit la conservation de l'énergie totale, qui n'est que cinétique pour le câble inextensible.

La solution de (4.9) n'est définie que pour $0 \leq t \leq T$, et vaut

$$(4.10) \quad \begin{cases} T = 4 L/3 \alpha, \\ X(t) = L - \left(\frac{9 \alpha^2 L}{16} \right)^{1/3} (T - t)^{2/3}. \end{cases}$$

Bien que l'énergie cinétique soit conservée, elle se trouve concentrée dans une région dont la masse tend vers zéro quand t tend vers T , de sorte que la vitesse devient arbitrairement grande, dépassant par exemple largement la vitesse du son dans l'air. Dès ce moment l'interaction entre le fouet et l'air n'est plus négligeable. Le pli possède en fait une certaine épaisseur $0 < h \ll 1$, et l'énergie mise en jeu lors de la pénétration du fouet dans l'air, qui est de l'ordre de hX'^2 , devient grande pour $t \sim T$, après avoir été petite auparavant. La totalité (ou une grande partie dans la réalité) de l'énergie du fouet est transmise à l'air sous forme d'onde acoustique pendant un court laps de temps, de l'ordre de $\Delta t = \alpha^2 L/6 c^3$, c étant la vitesse du son dans l'air. Pour $\alpha = 3 \text{ m s}^{-1}$, $L = 5 \text{ m}$ et $c = 300 \text{ m s}^{-1}$, il vient $\Delta t = 0,025 \text{ s}$, ce qui explique que le claquement du fouet semble instantané à l'oreille humaine.

Si l'analyse qui précède est correcte, la puissance ne doit pas être transportée de manière isotrope par l'air, mais principalement dans la direction privilégiée $(1, 0)^t$. Nous ne savons pas si ce phénomène a été observé.

Signalons que l'absence de solution au problème pour $t > T$ n'est qu'un avatar de la modélisation qui néglige l'interaction avec l'air et l'élasticité. Dans la réalité, la solution ultérieure est proche de l'état de repos.

REFERENCES

- [1] C. CARASSO, M. RASCLE, D. SERRE, *Étude d'un modèle hyperbolique en dynamique des câbles*, RAIRO Model. Math. Anal. Numer., 19, n° 4 (1985), pp. 573-599.
- [2] H. GILQUIN, *Glimm's scheme and conservation laws of mixed type*. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 10, n° 1 (1989), pp. 133-153.
- [3] H. GILQUIN, D. SERRE, *Well-posedness of the Riemann problem ; consistency of the Godunov's scheme*. Contemporary Mathematics 100, W. B. Lindquist ed., AMS, Providence.
- [4] B. L. KEYFITZ, H. C. KRANZER, *A system of non-strictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity theory*, Arch. Rat. Mech. Anal., 72 (1980), pp. 219-241.

- [5] R. L. PEGO, D. SERRE, *Instabilities in Glimm's scheme for two systems of mixed type*, SIAM J. of Num. Anal., 25, n° 5 (1988), pp. 965-988.
- [6] M. SHEARER, *The Riemann problem for the planar motion of an elastic string*, J. Diff. Equ., 61, n° 2 (1986), pp. 149-163.
- [7] M. REEKEN, *Classical solutions of the chain equation*, I. Maths Z., 165 (1979), pp. 143-169 ; idem II. Maths Z., 166 (1979), pp. 67-82.
- [8] M. REEKEN, *The equation of motion of a chain*, Maths Z., 155 (1977), pp. 219-237.