

CATHERINE BOLLEY

**Familles de branches de bifurcations dans les  
équations de Ginzburg-Landau**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modéli-  
sation mathématique et analyse numérique*, tome 25, n° 3 (1991),  
p. 307-335

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1991\\_\\_25\\_3\\_307\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1991__25_3_307_0)

© AFCET, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## FAMILLES DE BRANCHES DE BIFURCATIONS DANS LES ÉQUATIONS DE GINZBURG-LANDAU (\*)

Catherine BOLLEY (<sup>1</sup>)

Communique par R. TEMAM

*Résumé — Les équations de Ginzburg-Landau déterminent les différents états d'un matériau supraconducteur soumis à un champ magnétique extérieur. L'état normal du matériau, c'est-à-dire l'état non supraconducteur, est associé à une infinité de solutions triviales de ces équations, tandis que l'état supraconducteur est caractérisé par une solution non triviale de ce problème. L'étude qui suit montre qu'il existe une infinité de courbes de solutions non triviales des équations de Ginzburg-Landau, ces courbes sont issues d'une famille de solutions caractérisée par un problème de bifurcation sur  $\mathbb{R}$ .*

*Abstract — Ginzburg-Landau equations establish the different states of a superconducting material, the normal state and the superconducting state, when the sample is submitted to an external magnetic field. The normal state is associated with an infinite number of trivial solutions of these equations, while the superconducting state is given by a non trivial solution of the problem.*

*This paper shows us that there exist an infinite number of non trivial solutions curves of Ginzburg-Landau equations. These curves are branching upon a set of particular solutions. The bifurcating points are characterized by a second bifurcation problem.*

### I. MODÉLISATION DU PROBLÈME

#### 1.1. La théorie de Ginzburg-Landau

Ginzburg et Landau ont développé une théorie de la supraconductivité en se référant à celle de la transition de phase du second ordre. Leur théorie s'applique à des supraconducteurs de type I lorsque la température est inférieure, mais voisine, à la température critique de supraconductivité.

Ils ont introduit une pseudo-fonction d'onde  $\Psi$  comme paramètre d'ordre de l'état supraconducteur. La théorie repose sur les hypothèses suivantes :

---

(\*) Reçu en décembre 1989, révisé en mai 1990

(<sup>1</sup>) École Nationale Supérieure de Mécanique, 1, rue de la Noë, 44072 Nantes Cedex

—  $\Psi$ , supposée complexe, caractérise l'état supraconducteur du matériau ;  $\Psi$  est nulle à l'état normal,

— la fonction d'onde est petite et varie lentement dans l'espace ; et la différence d'énergie libre de Gibbs entre un état normal et un état supraconducteur d'un <sup>6</sup>matériau placé dans un champ magnétique extérieur statique  $\vec{H}_e$ , s'écrit :

$$(1.1) \quad \Delta G = \iiint_V \left[ \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m} |(-i\hbar \nabla - 2eA) \Psi|^2 + \frac{\mu_0}{2} |H - H_e|^2 \right] dv$$

où :

- $e$  est la charge d'un électron,
- $m$  la masse d'un électron,
- $\mu_0 H^2/2$  : l'énergie magnétique dans le supraconducteur,
- $\Psi$  est normalisée :  $|\Psi|^2$  est égale à la densité locale de superélectrons,
- $\vec{A}$  est le vecteur potentiel du champ magnétique  $\vec{H}$  intérieur au matériau ; nous avons :

$$(1.2) \quad \text{rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{H}$$

—  $\beta$  est une constante pour un matériau donné tandis que  $\alpha$  dépend de la température.

La différence d'énergie libre  $\Delta G$  est nulle à l'état normal.

Cf. : V. L. Ginzburg [8], B. Dugnoille [7], J. Blot [1], Y. Pellan [13].

Lorsque l'échantillon est un film supraconducteur d'épaisseur  $d$ , placé dans un champ magnétique  $\vec{H}_e$  parallèle à la surface, on choisit un système d'axes tel que  $\vec{Oz}$  soit parallèle au champ magnétique extérieur  $\vec{H}_e$  :

$$\vec{H}_e = (0, 0, H_e) .$$

Le champ magnétique intérieur  $\vec{H}$ , inconnue du problème, a pour direction celle de  $\vec{H}_e$  car la surface du matériau est plane et le milieu homogène. Par conséquent :

$$\vec{H} = (0, 0, H(x)) \quad -d/2 \leq x \leq d/2$$

et le vecteur  $\vec{A}$ , vecteur potentiel du champ  $\vec{H}$ , peut être choisi tel que :

$$(1.3) \quad \begin{cases} \vec{A} = (0, A, 0) \\ \text{avec } A = A(x) \text{ fonction de } x \text{ seulement} \end{cases}$$

$$-d/2 \leq x \leq d/2 .$$

Un autre choix possible aurait été :

$$\vec{A} = (A, 0, 0) \quad \text{avec} \quad A = A(y)$$

ou toute combinaison linéaire de ces deux solutions.

Nous cherchons les différents états du film en fonction de son épaisseur et du champ magnétique extérieur  $H_e$ , et en particulier les états stables, c'est-à-dire ceux qui minimisent la différence d'énergie  $\Delta G$ . Le problème mathématique semble ouvert ; comme dans B. Dugnoille [7], J. Blot [1], Y. Pellan [13], nous nous limiterons à chercher la fonction d'onde  $\Psi$  sous la forme particulière suivante :

$$(1.4) \quad \Psi(x, y, z) = \Psi_0 f(x) e^{ik_1 y} e^{ik_2 z} \quad \text{où} \quad k_1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}$$

et où  $\psi_0$  est une constante de normalisation égale à  $\psi$  lorsque  $H$  est nul.

Si  $\lambda$  est la *profondeur de pénétration de Ginzburg-Landau* et  $\xi$  la *longueur caractéristique* du supraconducteur, posons :

$$a = \frac{d}{\lambda} \quad \text{où} \quad \lambda^2 = \frac{m\beta}{4e^2|\alpha|\mu_0}$$

$$\xi^2 = + \frac{\hbar^2}{2m|\alpha|} ; \quad \kappa = \frac{\lambda}{\xi} ; \quad x_0 = \frac{c\hbar k_1}{2e} ; \quad h = \mu_0 \frac{H_e}{\sqrt{2}|\alpha|} ;$$

( $\lambda$ ,  $\xi$  et  $\kappa$  sont des grandeurs caractéristiques du matériau, fonctions seulement de la température,  $\lambda$  est choisie comme unité de longueur ;  $a$  est l'épaisseur du film dans les nouvelles unités).

En effectuant un changement de fonction de  $A$  en  $\frac{2c}{\sqrt{2m|\alpha|}} A$ ,  $\Delta G$  s'écrit :

$$(1.5) \quad \Delta G = c_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[ -f^2 + \frac{1}{2}f^4 + \frac{1}{\kappa^2}(f')^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\kappa^2}k_2^2 f^2 + (A - x_0)^2 f^2 + (A' - h)^2 \right] dx$$

où  $c_0$  est une constante positive.

La jauge  $A$  peut n'être déterminée qu'à une constante additive près. Nous pouvons donc translater  $A$  en  $A - x_0$  ; cette translation correspond à un choix de  $A$  qui fait de la fonction d'onde  $\psi$  une fonction indépendante de  $y$ , elle permet d'éliminer  $x_0$  dans le problème qui suit.

**DÉFINITION 1.1 :** Une solution du problème donné sera un triplet  $(f, A, k_2) \in H^2(-a/2, a/2) \times H^2(-a/2, a/2) \times \mathbb{R}$  qui réalise un extremum de  $\Delta G$ . Nous noterons  $(\mathcal{P}_G)$  ce problème. Ce sera une solution stable si

$(f, A, k_2)$  minimise  $\Delta G$ , une solution metastable si c'est un minimum local et non global de  $\Delta G$ , et une solution instable sinon.

Pour obtenir les extrema de  $\Delta G$ , nous sommes amenés à écrire les équations d'Euler appelées ici *équations de Ginzburg-Landau*. Ces équations s'obtiennent par dérivation de  $\Delta G$  par rapport à  $f$ ,  $A$  et  $k_2$ , soit :

$$(1.6) \quad \begin{cases} -f'' + \kappa^2(-f + f^3 + A^2 f) = 0 & \text{dans } ]-a/2, a/2[ \\ f'(\pm a/2) = 0, \quad f \in H^2(-a/2, a/2) \end{cases}$$

$$(1.7) \quad \begin{cases} -A'' + f^2 A = 0 & \text{dans } ]-a/2, a/2[ \\ A'(\pm a/2) = h, \quad A \in H^2(-a/2, a/2) \end{cases}$$

et

$$(1.8) \quad k_2 = 0.$$

La condition aux limites de (1.6) signifie qu'il n'y a pas de courant à traverser la surface séparant le supraconducteur du milieu extérieur, et celle de (1.7) signifie que, dans les nouvelles unités, le champ magnétique intérieur est égal, au bord du film, au champ magnétique extérieur appliqué.

Les paramètres  $a$  et  $h$  peuvent être introduits dans les équations en  $f$  et  $A$  et non plus dans les conditions limites, en faisant le changement de variable  $x$  en  $x/a$  puis le changement de fonction  $A$  en  $A/ah$ .

Nous avons alors immédiatement la proposition suivante :

**PROPOSITION 1.2 :** *Étant donnés  $\kappa$ ,  $a$  et  $h$ , une condition nécessaire pour que  $(f, A, k_2)$  soit une solution de  $(\mathcal{P}_G)$  est que les équations (1.8), (1.9) et (1.10) suivantes soient vérifiées :*

$$(1.8) \quad k_2 = 0$$

$$(1.9) \quad \begin{cases} -f'' + a^2 \kappa^2(-f + f^3 + a^2 h^2 A^2 f) = 0 & \text{dans } ]-1/2, 1/2[ \\ f'(\pm 1/2) = 0 \quad f \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases}$$

$$(1.10) \quad \begin{cases} -A'' + a^2 f^2 A = 0 & \text{dans } ]-1/2, 1/2[ \\ A'(\pm 1/2) = 1 \quad A \in H^2(-1/2, 1/2). \end{cases}$$

Nous appellerons  $(\mathcal{P}_{fA})$  le problème (1.9), (1.10).

Avec les changements de variables et de fonctions précédents et, en posant  $I = ]-1/2, 1/2[$ , la différence d'énergie libre de Gibbs s'écrit :

$$(1.11) \quad \Delta G = c_0 \int_I \left( -f^2 + \frac{1}{2} f^4 + \frac{1}{a^2 \kappa^2} (f')^2 + a^2 h^2 A^2 f^2 + h^2 (A' - 1)^2 \right) dx.$$

## 1.2. Les paramètres du problème

Nous ferons par la suite la distinction entre trois types de paramètres :

— Le paramètre  $\kappa$ , appelé paramètre de Ginzburg-Landau sera *fixé* dans toute l'étude. Il caractérise le supraconducteur.

— le paramètre  $a$  (épaisseur du film) est un *paramètre « gouvernant »* : nous étudierons l'existence de solutions non triviales de  $(\mathcal{P}_{fA})$  en fonction de  $a$ ,  $a$  variant dans l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

— Le champ magnétique extérieur  $h$  est tantôt un *paramètre*, tantôt une *inconnue*. Pour une valeur de  $a$  donnée,  $a$  supérieur à une valeur critique  $a_c$ , il existe une valeur  $H_{sc}$  de  $h$  telle que pour  $h$  inférieur à  $H_{sc}$  le matériau soit toujours à l'état supra et il existe une valeur  $H_{sh}$  de  $h$  telle que pour  $h$  supérieur à  $H_{sh}$  le matériau soit toujours à l'état normal. Pour  $h$  compris entre  $H_{sc}$  et  $H_{sh}$ , le matériau peut être à l'état normal ou à l'état supra, l'un de ces états étant stable et l'autre métastable.

$H_{sc}$  est le *champ critique de supercooling* ou *champ de retard à la condensation* ;  $H_{sh}$  est le *champ de super-heating* ou *champ de surchauffe*.

$h$  apparaît donc comme un paramètre indépendant de  $a$  dans la recherche des couples  $(f, A)$  solutions de (1.9), (1.10) mais c'est une inconnue, fonction du paramètre  $a$  dans la recherche des valeurs critiques  $H_{sc}$  et  $H_{sh}$ .

L'étude du champ critique  $H_{sc}$  est faite dans C. Bolley [3].

## II. SOLUTIONS TRIVIALES SINGULIÈRES DU PROBLÈME $(\mathcal{P}_{fA})$

### 2.1. Définitions

Rappelons le problème  $(\mathcal{P}_{fA})$  : étant donnés  $\kappa$ ,  $a > 0$  et  $h > 0$ , on cherche  $f$  et  $A$  tels que

$$(\mathcal{P}_{fA}) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2.1) \quad \begin{cases} -f'' + a^2 \kappa^2 (-1 + f^2 + a^2 h^2 A^2) \\ f = 0 \quad \text{dans} \quad ]-1/2, 1/2[ \\ f'(\pm 1/2) = 0 \quad f \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases} \\ (2.2) \quad \begin{cases} -A'' + a^2 f^2 A = 0 \quad \text{dans} \quad ]-1/2, 1/2[ \\ A'(\pm 1/2) = 1 \quad A \in H^2(-1/2, 1/2). \end{cases} \end{array} \right.$$

Nous noterons  $(f, A; a, h)$  une solution de  $(\mathcal{P}_{fA})$ .

Pour tout couple  $(a, h) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  le problème  $(\mathcal{P}_{fA})$  admet les solutions  $(0, x + c; a, h)$  où  $c \in \mathbb{R}$ . Ce sont les seules solutions telles que :  $f \equiv 0$ .

**DÉFINITION 2.1 :** Les solutions  $(0, x + c; a, h)$  sont appelées *solutions triviales du problème  $(\mathcal{P}_{fA})$* .

**DÉFINITION 2.2 :** Nous dirons qu'une solution triviale  $(0, x + c; a, h)$  est un point de bifurcation pour le problème  $(\mathcal{P}_{f_A})$  si pour tout voisinage  $V$  de  $(0, x + c; a, h)$  dans  $H^2(-1/2, 1/2)$ , il existe une solution  $(f, A; a, h + \delta h)$  de  $(\mathcal{P}_{f_A})$  dans  $V$  avec  $f$  non identiquement nulle.

La valeur de  $a$  est fixée;  $h$  est le paramètre de bifurcation.

## 2.2. Conditions nécessaires de bifurcation du problème $(\mathcal{P}_{f_A})$

La proposition suivante nous donne deux conditions nécessaires pour qu'une solution triviale  $(0, x + c; a, h)$  soit un point de bifurcation pour le problème  $(\mathcal{P}_{f_A})$  et donc une solution singulière de  $(\mathcal{P}_{f_A})$ . La première condition est une condition du type M. Krasnoselskii [11]: elle exprime que l'équation (2.1) linéarisée au point  $(0, x + c; a, h)$  doit admettre une solution non identiquement nulle. L'équation (2.2) linéarisée en  $(0, x + c; a, h)$  étant dégénérée, il nous faut écrire une autre condition plus particulière: la condition notée  $(H_c)$  détermine la constante  $c$  lorsqu'il y a rupture de la symétrie.

**PROPOSITION 2.3 :** Soit  $(a, h) \in ]0, +\infty[ \times ]0, \infty[$

i) une condition nécessaire pour que  $(0, x + c; a, h)$  soit un point de bifurcation pour le problème  $(\mathcal{P}_{f_A})$  est qu'il existe une solution  $\varphi$  non identiquement nulle du problème suivant :

$$(2.3) \quad \begin{cases} -\varphi'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x + c)^2 \varphi - a^2 \kappa^2 \varphi = 0 & \text{dans } I = ]-1/2, 1/2[ \\ \varphi'(\pm 1/2) = 0 & \varphi \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases}$$

ii) une deuxième condition nécessaire pour que  $(0, x + c; a, h)$  soit un point de bifurcation est que :

$$(H_c) \quad \int_I (x + c) \varphi^2 dx = 0$$

où  $\varphi$  est une solution non identiquement nulle de (2.3).

*Démonstration :* Supposons l'existence de suites  $(f_n)$ ,  $(A_n)$  et  $(h_n)$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} & f_n \neq 0 \\ & \begin{cases} -f_n'' + a^2 \kappa^2 (a^2 h_n^2 A_n^2 + f_n^2 - 1) f_n = 0 \\ f_n'(\pm 1/2) = 0 \quad f_n \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases} \\ & \begin{cases} -A_n'' + a^2 f_n^2 A_n = 0 \\ A_n'(\pm 1/2) = 1 \quad A_n \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases} \end{aligned}$$

et telles que, lorsque  $n \rightarrow +\infty$  :

$$f_n \text{ tend vers } 0 \quad \text{dans } L^2(-1/2, 1/2)$$

$$A_n \text{ tend vers } x + c \quad \text{dans } L^2(-1/2, 1/2)$$

et 
$$h_n \rightarrow h.$$

La suite  $(A_n)$  est bornée dans  $H^1(-1/2, 1/2)$ , puisque, en intégrant par parties l'équation (2.4) multipliée auparavant par  $A_n$ , nous avons :

$$- \left[ A_n \left( \frac{1}{2} \right) - A_n \left( -\frac{1}{2} \right) \right] + \int_I (A'_n)^2 dx + a^2 \int_I f_n^2 A_n^2 dx = 0$$

avec :

$$\left[ A_n \left( \frac{1}{2} \right) - A_n \left( -\frac{1}{2} \right) \right] = \int_I A'_n dx$$

et

$$a^2 \int_I f_n^2 A_n^2 dx \geq 0.$$

Par conséquent :

$$\int_I (A'_n)^2 dx \leq \int_I A'_n dx$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\|A'_n\| \leq 1 \quad \text{où } \|\cdot\| \text{ désigne la norme habituelle de } L^2(-1/2, 1/2).$$

On en déduit, en utilisant l'équation (2.1) vérifiée par  $f = f_n$ ,  $A = A_n$  et  $h = h_n$ , que la suite  $(g_n)$  définie, pour  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$g_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}$$

est bornée dans  $H^2(-1/2, 1/2)$ .

Il existe donc une sous-suite extraite qui converge faiblement dans  $H^2(-1/2, 1/2)$ , et donc fortement dans  $L^2(-1/2, 1/2)$ , vers une fonction  $\varphi$ . On montre par passage à la limite que  $\varphi$  est de norme 1 dans  $L^2(-1/2, 1/2)$ , et est donc non identiquement nulle, et que c'est une solution de l'équation (2.3).

Pour montrer la condition  $(H_c)$  de ii), on considère comme ci-dessus une sous-suite  $(g_{n_k})$  extraite de la suite  $(g_n)$  qui converge faiblement vers un  $g_0$  dans  $H^2(-1/2, 1/2)$ . En intégrant (2.4) entre  $-1/2$  et  $1/2$ , nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I g_n^2 A_n dx = 0$$



et donc pour la suite extraite :

$$\int_I (g_{n_k}^2 - g_0^2) A_{n_k} dx + \int_I g_0^2 (A_{n_k} - x - c) dx + \int_I g_0^2 (x + c) dx = 0.$$

A la limite lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ , nous obtenons  $(H_c)$ .

Les détails de la démonstration sont donnés dans C. Bolley [2].

Le paragraphe suivant montre que lorsque  $a > 0$  et  $c \in \mathbb{R}$  sont donnés, il existe  $h > 0$  tel que l'équation (2.3) admette une solution.

### 2.3. Le problème « de valeurs propres $(\mathcal{P}_\varphi)$ »

Le premier problème posé est :

Étant donnés  $a > 0$  et  $c \in \mathbb{R}$ , existe-t-il  $h > 0$  tel que l'équation (2.3) ait une solution  $\varphi$  non identiquement nulle.

Nous appellerons ce problème : « problème de valeurs propres  $(\mathcal{P}_\varphi)$  », par analogie avec les problèmes de valeurs propres habituels.

LEMME 2.4 : *Étant donnés  $c \in \mathbb{R}$  et  $\mu \geq 0$ , il existe une infinité dénombrable de valeurs de  $\eta$  telles que l'équation (2.5) suivante ait une solution  $\varphi$  non identiquement nulle*

$$(2.5) \quad \begin{cases} -\varphi'' + \mu(x+c)^2 \varphi = \eta \varphi & \text{dans } ]-1/2, 1/2[ \\ \varphi'(\pm 1/2) = 0 & \varphi \in H^2(-1/2, 1/2). \end{cases}$$

Soit  $(\eta_p)_{p \geq 1, p \in \mathbb{N}}$  ces valeurs classées dans l'ordre croissant, alors pour tout  $p \geq 1$  l'application :  $\mu \rightarrow \eta_p(\mu)$  est holomorphe dans un voisinage de  $]0, \infty[$  dans  $\mathbb{C}$ , sa dérivée étant strictement positive sur  $]0, \infty[$ .

De plus :

$$\begin{array}{ll} \eta_p(\mu) \text{ tend vers } +\infty & \text{lorsque } \mu \rightarrow +\infty \\ \text{et } \eta_1(\mu) \text{ tend vers } 0 & \text{lorsque } \mu \rightarrow 0. \end{array}$$

*Démonstration :* Le problème (2.5) est un problème de Sturm-Liouville sur le segment  $] -1/2, 1/2[$  avec des conditions limites de Neumann. Il est bien connu (cf. B. M. Levitan et I. S. Sargsjan [12] par exemple), que pour  $c$  et  $\mu \geq 0$  donnés, ce problème admet une suite croissante dénombrable de valeurs propres  $(\eta_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  réelles, strictement positives et telles que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \eta_p = +\infty.$$

L'espace propre associé à chaque valeur propre est de dimension un ; et pour  $p \geq 1$  l'application  $\mu \rightarrow \eta_p(\mu)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Notons que pour tout  $p \geq 1$  et tout  $\mu \geq 0$  :

$$\eta_p(\mu) \neq \eta_{p+1}(\mu)$$

car sinon la valeur propre  $\eta_p(\mu)$  serait associée à deux vecteurs propres orthogonaux ce qui est impossible : les courbes  $\mu \rightarrow \eta_p(\mu)$ , pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , n'ont donc pas de point commun.

Soit  $T(\mu)$  la famille d'opérateurs à un paramètre,  $\mu$ , définis par :

$$\begin{cases} T(\mu) \varphi \equiv -\varphi'' + \mu(x+c)^2 \varphi \\ \varphi'(\pm 1/2) = 0 \end{cases}$$

où  $\mu$  appartient à un voisinage connexe de  $[0, \infty[$  dans  $\mathbb{C}$ .

Chacun de ces opérateurs a pour domaine :

$$D(T(\mu)) = \{\varphi \in H^2(-1/2, 1/2), \varphi'(\pm 1/2) = 0\}$$

et est fermé dans  $L^2(-1/2, 1/2)$ .

La famille  $(T(\mu))_\mu$  dépendant holomorphiquement de  $\mu$ , et chacune de ses valeurs propres étant séparées, il résulte de T. Kato [9], que ces valeurs propres, notées  $\eta_p(\mu)$ , et les projecteurs  $P_p(\mu)$  sur les espaces propres associés, dépendent holomorphiquement de  $\mu$ .

En particulier, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , l'application :

$$\mu \rightarrow \eta_p(\mu) \text{ est dérivable sur } ]0, \infty[.$$

On montre alors que :

$$\eta'_p(\mu) = \int_I (x+c)^2 \varphi_\mu^2 dx$$

où  $\varphi_\mu$  est une fonction propre normée de  $T(\mu)$  associée à la valeur propre  $\eta_p(\mu)$ .

Il en résulte que la dérivée  $\eta'_p(\mu)$  est strictement positive sur  $]0, \infty[$ .

\* *Montrons que  $\eta_p(\mu) \rightarrow +\infty$  quand  $\mu \rightarrow +\infty$ .*

Soit  $(\mu_n)_n$  une suite de réels telle que :

$$\mu_n \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Supposons  $(\eta_p(\mu_n))_n$  bornée.

Soit  $\varphi_{\mu_n} \in H^2(-1/2, 1/2)$  tel que :

$$\begin{cases} -\varphi_{\mu_n}'' + \mu_n(x+c)^2 \varphi_{\mu_n} = \eta_p(\mu_n) \varphi_{\mu_n} & \text{dans } ]-1/2, 1/2[ \\ \varphi_{\mu_n}'(\pm 1/2) = 0, \quad \|\varphi_{\mu_n}\| = 1 \end{cases}$$

alors :

$$(2.6) \quad \|\varphi_{\mu_n}'\|^2 + \mu_n \int_I (x+c)^2 \varphi_{\mu_n}^2 dx = \eta_p(\mu_n).$$

Il en résulte que si la suite  $(\eta_{p(\mu_n)})_n$  est bornée, il en est de même de la suite  $(\|\varphi'_{\mu_n}\|)_n$ . Comme de plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|\varphi_{\mu_n}\| = 1$ , la suite  $(\varphi_{\mu_n})_n$  est bornée dans  $H^1(-1/2, 1/2)$ . Il existe donc une sous-suite extraite de la suite  $(\varphi_{\mu_n})_n$ , et encore notée  $(\varphi_{\mu_n})_n$ , qui converge vers un  $\bar{\varphi}$ , faiblement dans  $H^1(-1/2, 1/2)$  et donc fortement dans  $L^2(-1/2, 1/2)$ .

Les  $\varphi_{\mu_n}$  étant normés, à la limite ( $n \rightarrow \infty$ ) :  $\|\bar{\varphi}\| = 1$ .

D'autre part, il résulte de (2.6) qu'il existe une sous-suite extraite de  $(\varphi_{\mu_n})_n$  qui converge presque partout vers 0. Ceci est en contradiction avec le résultat montré ci-dessus :  $\|\bar{\varphi}\| = 1$ .

Par conséquent :  $\eta_{p(\mu)}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\mu \rightarrow \infty$ .

\* Lorsque  $\mu = 0$ , le problème (2.5) s'écrit :

$$\begin{cases} -\varphi'' = \eta\varphi \\ \varphi'(\pm 1/2) = 0 \end{cases}$$

Ce problème de Neumann bien connu a pour valeurs propres :

$$\eta_p = (p-1)^2 \pi^2 \quad p = 1, 2, \dots$$

En particulier :  $\eta_1 = 0$ .

L'application  $\mu \rightarrow \eta_1(\mu)$ , étant continue sur  $[0, \infty[$ , nous avons donc :

$$\eta_1(\mu) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \mu \rightarrow 0.$$

Il en résulte immédiatement la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.5 :** *Pour tous  $\eta > 0$  et  $c \in \mathbb{R}$  donnés, il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall p' \leq p$  : il existe un  $\mu = \mu(p')$  et un seul tel que le problème (2.5) ait pour  $p'$ -ième valeur propre  $\eta$ .*

Soit maintenant  $c \in \mathbb{R}$  et  $a > 0$ , alors d'après la proposition 2.5, il existe  $\mu > 0$  tel que le problème (13) ait pour 1<sup>re</sup> valeur propre :  $\eta_1 = a^2 \kappa^2$ .

Si  $h = \sqrt{\mu/(a^2 \kappa)}$ , alors :  $\mu = a^4 h^2 \kappa^2$ , et la solution  $\varphi$  de (2.5) associée à  $\eta_1$  est une fonction propre du problème (2.3).

Or une fonction propre  $\varphi$  du problème (2.5) associée à la première valeur propre, ne change pas de signe dans l'intervalle  $]-1/2, 1/2[$  ; ( $\varphi$  peut donc être choisie strictement positive dans  $]-1/2, 1/2[$ ) et cette propriété est caractéristique de la première valeur propre (cf. B. M. Levitan et I. S. Sargjan [12]).

Il en résulte la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.6 :** *Étant donnés  $a > 0$  et  $c \in \mathbb{R}$  :*

i) *il existe une infinité dénombrable de  $h$  tel que (2.3) ait une solution,*

ii) il existe un  $h$  positif et un seul, tel que le problème (2.3) ait une solution  $\varphi$  strictement positive et une seule (à une constante multiplicative près) dans  $] -1/2, 1/2[$ .

La solution de ii) est associée à la première valeur propre de (2.3).

Nous avons, de plus, les résultats de régularité suivants :

**PROPOSITION 2.7 :** *Les applications qui à  $a > 0$  et  $c \in \mathbb{R}$  associent  $h$  et  $\varphi$  donnés par ii) de la proposition 2.6, sont analytiques sur  $]0, \infty[ \times \mathbb{R}$ .*

*Démonstration :* Considérons la famille d'opérateurs  $T(a, h, c)$  à trois paramètres  $a$ ,  $h$  et  $c$  supposés tout d'abord indépendants :

$$T(a, h, c) \varphi \equiv -\varphi'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x + c)^2 \varphi - a^2 \kappa^2 \varphi.$$

Pour tout  $(a, h, c)$  appartenant à un voisinage connexe  $\mathcal{V}_0$  dans  $\mathbb{C}^3$  d'un point  $(a_0, h_0, c_0)$  de  $]0, \infty[^2 \times \mathbb{R}$ , l'opérateur  $T(a, h, c)$  a pour domaine :

$$D = \{ \varphi \in H^2(-1/2, 1/2), \varphi'(\pm 1/2) = 0 \}$$

et est fermé dans  $L^2(-1/2, 1/2)$ .

$T(a, h, c)$  est de plus holomorphe en  $(a, h, c)$  dans  $\mathcal{V}_0$  ; nous pouvons reprendre des démonstrations de T. Kato écrites dans le cas d'opérateurs à un seul paramètre pour montrer que les valeurs propres et les fonctions propres de  $T(a, h, c)$  sont aussi holomorphes :

La résolvante  $R(a, h, c, \xi)$ , donnée par :

$$R(a, h, c, \xi) = (T(a, h, c) - \xi)^{-1}$$

est holomorphe en  $(a, h, c, \xi)$ , et bornée dans un voisinage de  $(a_0, h_0, c_0, \xi)$ .

Le projecteur  $P(a, h, c)$  sur l'espace propre associé à la première valeur propre  $\lambda_1(a, h, c)$  de  $T(a, h, c)$ , est donné par :

$$P(a, h, c) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(a, h, c, \xi) d\xi$$

où  $\Gamma$  est un petit cercle entourant  $\lambda_1(a, h, c)$ , mais ne contenant pas la 2<sup>e</sup> valeur propre. Il en résulte que  $P(a, h, c)$  est aussi holomorphe en  $(a, h, c)$  dans un voisinage de  $(a_0, h_0, c_0)$ . L'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_1$  étant de dimension un, la fonction propre associée  $\varphi(a, h, c)$  est aussi holomorphe dans un voisinage de  $(a_0, h_0, c_0)$ .

$\lambda_1(a, h, c)$  vérifie :

$$\lambda_1(a, h, c) = \frac{(T(a, h, c) P(a, h, c) u, P(a, h, c) u)}{(P(a, h, c) u, P(a, h, c) u)}$$

pour tout  $u \in H^2(-1/2, 1/2)$  tel que  $(u, \varphi(a, h, c)) \neq 0$ .

Si  $u$  est fixé tel que :

$$(P(a_0, h_0, c_0) u, P(a_0, h_0, c_0) u) = 1$$

par continuité de l'application :  $(a, h, c) \rightarrow P(a, h, c)$ ,  $(P(a, h, c) u, P(a, h, c) u)$  ne s'annule pas pour  $(a, h, c)$  assez voisin de  $(a_0, h_0, c_0)$  :

$\lambda_1(a, h, c)$  est donc holomorphe en  $(a, h, c)$  dans un voisinage de  $(a_0, h_0, c_0)$ .

$a_0 \in ]0, \infty[$ , et  $c_0 \in \mathbb{R}$  étant maintenant seuls fixés :

Il résulte de la proposition 2.3 qu'il existe  $h_0 > 0$  unique tel que :

$$\lambda_1(a_0, h_0, c_0) = 0.$$

En reprenant la démonstration du lemme 2.2, on vérifie que :

$$\frac{\partial \lambda_1(a_0, h_0, c_0)}{\partial \mu} > 0.$$

Il résulte donc du théorème des fonctions implicites qu'il existe un unique  $h(a, c)$  défini dans un voisinage de  $(a_0, c_0)$  tel que :

$$\begin{cases} \lambda_1(a, h(a, c), c) = 0 \\ h(a_0, c_0) = h_0 \end{cases}$$

et  $h$  est analytique en  $(a, c)$  dans un voisinage de  $(a_0, c_0)$ . Nous en déduisons immédiatement que les applications  $h(a, c)$  et  $\varphi(a, h(a, c), c)$  sont analytiques sur  $]0, \infty[ \times \mathbb{R}$ .

*Remarque :*

Sous l'hypothèse  $c = 0$ , la condition  $(H_c)$  de la proposition 2.3 est vérifiée par toute solution de (2.3), puisque  $x\varphi^2$  est alors une fonction impaire. Il en résulte donc que, pour tout  $a > 0$ , la solution  $(0, x; a, h)$  du problème  $(\mathcal{P}_{fA})$  où  $h$  est donné par ii) de la proposition 2.6, vérifie les deux conditions nécessaires de bifurcation du problème  $(\mathcal{P}_{fA})$  données dans la proposition 2.3.

On met en évidence numériquement dans C. Bolley [3] que pour  $a$  supérieur à une valeur critique  $a_0 > 0$ , il existe des valeurs de  $c$  autres que 0 pour lesquelles ces deux conditions nécessaires de bifurcation sont satisfaites ; l'ensemble des solutions  $c$  non nulles constituant, lorsque  $a$  varie, deux courbes de solutions symétriques par rapport à 0. De plus, en utilisant une hypothèse vérifiée numériquement, on montre dans [3] que ces courbes bifurquent du point  $(c, a) = (0, a_0)$ . La figure 1 ci-dessous donne les solutions  $c$  calculées dans [3] lorsque  $\kappa = 0,062$  (valeur caractéristique de l'Indium), en fonction de  $a$ .

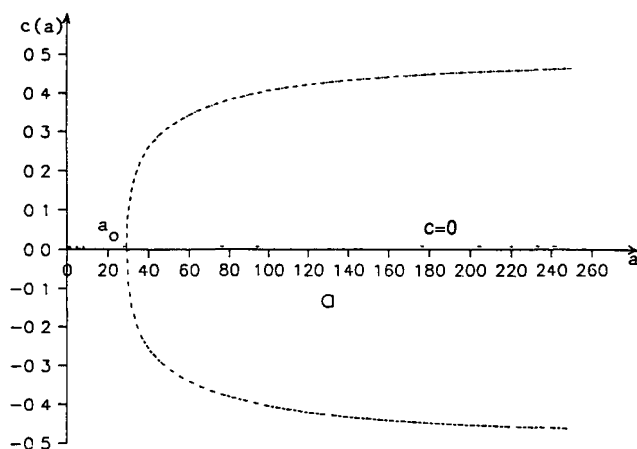


Figure 1. — Solutions  $c$  calculées en fonction de  $a$ .

Dans le paragraphe suivant, nous nous plaçons sur l'une quelconque de ces courbes de solutions, et vérifions que les conditions nécessaires de bifurcation i) et ii) données dans la proposition 2.3 sont aussi des conditions suffisantes de bifurcation pour le problème  $(\mathcal{P}_{fA})$ .

### III. EXISTENCE DE SOLUTIONS BIFURQUÉES DU PROBLÈME $(\mathcal{P}_{fA})$

Nous cherchons dans ce paragraphe des solutions non triviales du problème  $(\mathcal{P}_{fA})$  sous la forme d'une branche bifurquée issue d'une solution triviale  $(0, x + c; a, h)$ .

**THÉORÈME 3.1 :** *Étant donnés  $\kappa > 0$ ,  $a > 0$  et  $c$  tels que  $(H_c)$  soit satisfaite, on note  $(h, \varphi)$  la solution du problème (3.1) (3.2) :*

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\varphi'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x + c)^2 \varphi - a^2 \kappa^2 \varphi = 0 & \text{dans } I \\ \varphi'(\pm 1/2) = 0 & \varphi \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases}$$

$\varphi$  de norme 1 dans  $L^2(-1/2, 1/2)$

et telle que :

$$(3.2) \quad \varphi > 0.$$

Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon$  vérifiant  $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ , le problème  $(\mathcal{P}_{fA})$  admette une solution  $(f_\varepsilon, A_\varepsilon; a, h_\varepsilon)$  (où  $a$  est seul indépendant de  $\varepsilon$ ), de la forme suivante :

$$(3.3) \quad \begin{cases} f_\varepsilon = \varepsilon \varphi + \varepsilon^3 \bar{f}_\varepsilon \\ \bar{f}_\varepsilon \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases}$$

$$(3.4) \quad (\tilde{f}_\varepsilon, \varphi) = 0$$

$$(3.5) \quad \begin{cases} A_\varepsilon = x + c + \varepsilon^2 \bar{b}_\varepsilon + \varepsilon^2 \bar{B}_\varepsilon \text{ dans } ]-1/2, 1/2[ \\ \bar{B}_\varepsilon(\pm 1/2) = 0 \quad \bar{B}_\varepsilon \in H^2(-1/2, 1/2) \\ \bar{b}_\varepsilon \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec :

$$(3.6) \quad \int_I \bar{B}_\varepsilon dx = 0$$

$$(3.7) \quad h_\varepsilon^2 = h^2 + \varepsilon^2 \eta_\varepsilon$$

$\bar{f}_\varepsilon$ ,  $\bar{b}_\varepsilon$ ,  $\bar{B}_\varepsilon$ ,  $\eta_\varepsilon$  étant bornés dans  $H^2(-1/2, 1/2)$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $H^2(-1/2, 1/2)$  et  $\mathbb{R}$  respectivement (lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

*Remarque :*

Au cours de la démonstration de ce théorème, on donnera des précisions sur les quantités  $\bar{f}_\varepsilon$ ,  $\bar{b}_\varepsilon$ ,  $\bar{B}_\varepsilon$ ,  $\eta_\varepsilon$ , qui interviennent dans la représentation paramétrique de la branche bifurquée mise en évidence dans le théorème 3.1. Ces résultats sont les suivants :

1) lorsque  $c = 0$  :

$\bar{f}_\varepsilon$ ,  $\bar{b}_\varepsilon$ ,  $\bar{B}_\varepsilon$  et  $\eta_\varepsilon$  admettent des limites  $f_0$ ,  $b_0$ ,  $B_0$  et  $\eta_0$ , dans  $H^2(-1/2, 1/2)$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $H^2(-1/2, 1/2)$  et  $\mathbb{R}$  respectivement (lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), qui sont solutions des équations suivantes :

$$b_0 = 0$$

$$(3.8) \quad \begin{cases} -B_0'' = -a^2(x+c)\varphi^2 \text{ dans } ]-1/2, 1/2[ \\ B_0'(\pm 1/2) = 0 \\ \int_I B_0 dx = 0 \quad B_0 \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases}$$

$$(3.9) \quad \eta_0 = \frac{-2a^2h^2 \int_I (x+c)B_0\varphi^2 dx - \int_I \varphi^4 dx}{a^2 \int_I (x+c)^2 \varphi^2 dx}$$

$$(3.10) \quad \begin{cases} -f_0'' + a^4h^2\kappa^2(x+c)^2f_0 - a^2\kappa^2f_0 \\ = -a^2\kappa^2\varphi^3 - 2a^4h^2\kappa^2(x+c)\varphi B_0 - a^4\kappa^2\eta_0(x+c)^2\varphi \\ f_0'(\pm 1/2) = 0 \quad f_0 \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases}$$

avec :

$$(f_0, \varphi) = 0$$

2) lorsque  $c \neq 0$ , et que le problème suivant :

$$(3.11) \quad \begin{cases} -\psi'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x+c)^2 \psi - a^2 \kappa^2 \psi \\ -4 a^4 h^2 \kappa^2 (x+c) \varphi \left( \int_I (t+c) \varphi \psi dt \right) = 0 \\ \psi'(\pm 1/2) = 0 \quad \psi \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases}$$

n'admet pas de solution  $\psi$  orthogonale à  $\varphi$ , alors :

$\bar{f}_\varepsilon$ ,  $\bar{b}_\varepsilon$ ,  $\bar{B}_\varepsilon$ ,  $\eta_\varepsilon$  admettent des limites  $f_0$ ,  $b_0$ ,  $B_0$  et  $\eta_0$ , dans  $H^2(-1/2, 1/2)$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $H^2(-1/2, 1/2)$  et  $\mathbb{R}$  respectivement (quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), qui sont solutions des équations suivantes :

$B_0$  est donné par (3.8)

$\eta_0$  est donné par (3.9)

$$(3.12) \quad b_0 = - \int_I \varphi^2 B_0 dx - 2 \int_I x \varphi f_0 dx$$

$$\begin{cases} -f_0'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x+c)^2 f_0 - a^2 \kappa^2 f_0 - 4 a^4 h^2 \kappa^2 (x+c) \varphi \left( \int_I t \varphi f_0 dt \right) \\ = -a^2 \kappa^2 \varphi^3 - 2 a^4 h^2 \kappa^2 (x+c) \varphi \left( B_0 - \int_I \varphi^2 B_0 dt \right) - a^4 \kappa^2 \eta_0 (x+c)^2 \varphi \\ f_0'(\pm 1/2) = 0 \quad f_0 \in H^2(-1/2, 1/2) \end{cases}$$

avec :

$$(f_0, \varphi) = 0.$$

L'équation (3.11) est étudiée partiellement dans C. Bolley [3] lorsque  $c = 0$ . On montre que l'existence d'une solution  $\psi$  orthogonale à  $\varphi$ , de cette équation, correspond à une singularité du problème de recherche des couples  $(c, a)$  vérifiant  $(H_c)$ , et en particulier, que c'est une condition nécessaire de bifurcation pour les couples  $(c, a)$  solutions. On montre aussi qu'il existe au moins une valeur  $a_0$  de  $a$ , pour laquelle le problème (3.11) avec  $c = 0$ , admet une solution  $\psi$  orthogonale à  $\varphi$  ; cette valeur  $a_0$  est celle mise en évidence dans la figure 1 et la remarque qui précède cette figure.

*Démonstration du théorème 3.1 :*

Elle est du type de celle utilisée par F. Kikuchi [10] pour une équation.

Nous noterons  $\| \cdot \|$  la norme habituelle de  $L^2(-1/2, 1/2)$ .



1<sup>re</sup> étape :

Pour  $\varepsilon$  fixé, nous allons construire une application dont les points fixes seront des quadruplets  $(g_\varepsilon, B_\varepsilon, H_\varepsilon, b_\varepsilon)$  tels que  $h_\varepsilon, f_\varepsilon$  et  $A_\varepsilon$  donnés par :

$$(3.13) \quad \begin{aligned} h_\varepsilon^2 &= H_\varepsilon \\ f_\varepsilon &= \varepsilon \varphi + g_\varepsilon \\ A_\varepsilon &= x + c + b_\varepsilon + B_\varepsilon \end{aligned}$$

soient solutions du problème  $(\mathcal{P}_{fA})$ .

Considérons les espaces suivants :

$$\begin{aligned} M_1 &= \{g \in L^2(-1/2, 1/2); \quad (g, \varphi) = 0\} \\ M_2 &= \left\{B \in L^2(-1/2, 1/2); \quad \int_I B \, dx = 0\right\} \\ V_1 &= \{g \in M_1 \cap H^2(-1/2, 1/2); \quad g'(\pm 1/2) = 0\} \\ V_2 &= \{B \in M_2 \cap H^2(-1/2, 1/2), \quad B'(\pm 1/2) = 0\} \end{aligned}$$

et soit :

- $L$ , l'isomorphisme de  $V_1$  sur  $M_1$  défini par

$$\xi \in V_1 \rightarrow L\xi \equiv -\xi'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x+c)^2 \xi - a^2 \kappa^2 \xi$$

- $\Delta_N$ , l'isomorphisme de  $V_2$  sur  $M_2$  défini par :

$$\xi \in V_2 \rightarrow \Delta_N \xi \equiv -\xi''$$

•  $P_{M_i}$  ( $i = 1, 2$ ), la projection orthogonale de  $L^2(-1/2, 1/2)$  sur  $M_i$  pour le produit scalaire de  $L^2(-1/2, 1/2)$ ,

• et enfin,  $\varepsilon$  étant fixé, soit  $\Phi$ , l'opérateur défini sur  $V_1 \times V_2 \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$  par :

$$\Phi : (g, B; H, b) \in V_1 \times V_2 \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow (\Phi_i(g, B; H, b))_{i=1, \dots, 4}$$

avec :

(3.14)

$$\begin{aligned} \Phi_1(g, B; H, b) &= a^2 \kappa^2 L^{-1} P_{M_1} [-(\varepsilon \varphi + g)^3 - a^2 H(x+c+b+B)^2 \times \\ &\quad \times (\varepsilon \varphi + g) + a^2 h^2 (x+c)^2 (\varepsilon \varphi + g)] \end{aligned}$$

$$(3.15) \quad \Phi_2(g, B; H, b) = a^2 \Delta_N^{-1} P_{M_2} [(\varepsilon \varphi + g)^2 (x+c+b+B)]$$

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \Phi_3(g, B; H, b) &= H - \varepsilon a^2 H \int_I (x+c+b+B)^2 (\varepsilon \varphi + g) \varphi \, dx - \\ &\quad - \varepsilon \int_I \varphi (\varepsilon \varphi + g)^3 \, dx + \varepsilon a^2 h^2 \int_I (x+c)^2 (\varepsilon \varphi + g) \varphi \, dx \end{aligned}$$

$$(3.17) \quad \Phi_4(g, B; H, b) = b - b \int_I (\varepsilon \varphi + g)^2 dx - \\ - \int_I (2 \varepsilon \varphi + g) g (x + c + B) dx - \varepsilon^2 \int_I \varphi^2 B dx.$$

LEMME 3.2 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $(g_\varepsilon, B_\varepsilon; H_\varepsilon, b_\varepsilon) \in V_1 \times V_2 \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$  est un point fixe de  $\Phi$ ,  
 ii)  $(f_\varepsilon, A_\varepsilon; a, h_\varepsilon)$  tel que :

$$(3.18) \quad \begin{cases} h_\varepsilon > 0 & \text{tel que } h_\varepsilon^2 = H_\varepsilon \\ f_\varepsilon = \varepsilon \varphi + g_\varepsilon & \text{avec } (\varphi, g_\varepsilon) = 0 \\ A_\varepsilon = x + c + b_\varepsilon + B_\varepsilon & \text{avec } b_\varepsilon \in \mathbb{R} \text{ et } \int_I B_\varepsilon dx = 0 \end{cases}$$

est solution du problème  $(\mathcal{P}_{f_A})$ .

Démonstration :

Supposons ii) vrai, alors :

\* en substituant les expressions de  $f_\varepsilon$  et  $A_\varepsilon$  dans l'équation (1.9) et sachant que  $\varphi$  est solution de  $(\mathcal{P}_\varphi)$ , nous avons :

$$(3.19) \quad \begin{cases} -g_\varepsilon'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x + c)^2 g_\varepsilon - a^2 \kappa^2 g_\varepsilon \\ = -a^4 h_\varepsilon^2 \kappa^2 (x + c + b_\varepsilon + B_\varepsilon)^2 (\varepsilon \varphi + g_\varepsilon) \\ - a^2 \kappa^2 (\varepsilon \varphi + g_\varepsilon)^3 + a^4 h^2 \kappa^2 (x + c)^2 (\varepsilon \varphi + g_\varepsilon) \\ g_\varepsilon'(\pm 1/2) = 0 \\ (g_\varepsilon, \varphi) = 0 \end{cases}$$

$g_\varepsilon$  étant la solution de (3.19), le second membre de  $(3.19)_1$  est nécessairement orthogonal à  $\varphi$  et appartient donc à l'espace vectoriel  $M_1$ .

(3.19) s'écrit donc :

$$(3.20) \quad g_\varepsilon = \Phi_1(g_\varepsilon, B_\varepsilon; H_\varepsilon, b_\varepsilon) \quad \text{avec } H_\varepsilon = h_\varepsilon^2.$$

\* Explicitons le fait que le second membre de  $(3.19)_1$  est orthogonal à  $\varphi$ . Nous avons :

$$-a^2 h_\varepsilon^2 \int_I (x + c + b_\varepsilon + B_\varepsilon)^2 (\varepsilon \varphi + g_\varepsilon) \varphi dx + \\ + a^2 h^2 \int_I (x + c)^2 (\varepsilon \varphi + g_\varepsilon) \varphi dx - \int_I (\varepsilon \varphi + g_\varepsilon)^3 \varphi dx = 0.$$

Ceci équivaut à dire que :

$$\Phi_3(g_\varepsilon, B_\varepsilon; h_\varepsilon^2, b_\varepsilon) = H_\varepsilon$$

l'introduction du  $\varepsilon$  dans la définition de  $\Phi_3$  permettant par la suite de prendre indifféremment  $\varepsilon$  positif ou négatif.

\* En écrivant que (1.10) est vérifiée par  $f_\varepsilon$  et  $A_\varepsilon$  donnés par ii), nous obtenons l'équation suivante :

$$(3.21) \quad \begin{cases} -B_\varepsilon'' = -a^2(\varepsilon\varphi + g_\varepsilon)^2 (x + c + b_\varepsilon + B_\varepsilon) \\ B_\varepsilon'(\pm 1/2) = 0 \end{cases}$$

où  $B_\varepsilon$  appartient à  $M_2$ .

Le second membre de l'équation (3.21) appartient aussi à  $M_2$ , donc :

$$B_\varepsilon = \Phi_2(g_\varepsilon, B_\varepsilon; h_\varepsilon^2, b_\varepsilon).$$

\* Écrivons enfin que le second membre de (3.21) est d'intégrale nulle :

$$\int_I (\varepsilon\varphi + g_\varepsilon)^2 (x + c + b_\varepsilon + B_\varepsilon) dx = 0$$

d'où

$$\Phi_4(g_\varepsilon, B_\varepsilon; h_\varepsilon^2, b_\varepsilon) = b_\varepsilon$$

car la condition  $(H_c)$  est vérifiée.

$(g_\varepsilon, B_\varepsilon; h_\varepsilon^2, b_\varepsilon)$  est donc bien un point fixe de  $\Phi$ .

La réciproque est immédiate car, si  $(g_\varepsilon, B_\varepsilon; H_\varepsilon, b_\varepsilon)$  est un point fixe de  $\Phi$  :

$\Phi_3(g_\varepsilon, B_\varepsilon; H_\varepsilon, b_\varepsilon) = H_\varepsilon$  implique que le second membre de  $(3.18)_1$  est orthogonal à  $\varphi$ .

$\Phi_4(g_\varepsilon, B_\varepsilon; H_\varepsilon, b_\varepsilon) = b_\varepsilon$ , implique que le second membre de (3.21) est d'intégrale nulle.

*2<sup>e</sup> étape de la démonstration du théorème :*

Montrons que l'application  $\Phi$ , définie pour  $\varepsilon$  fixé par (3.14) à (3.17), est une contraction stricte, pour  $\varepsilon$  assez petit, sur un sous-ensemble  $\mathcal{B}$  de  $V_1 \times V_2 \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$ .

Soit  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  et  $\rho_4$  quatre réels strictement positifs.

Soit  $V_i^{p_i}$  ( $i = 1, 2$ ) et  $\mathcal{B}$  les ensembles suivants :

$$(3.22) \quad V_i^{p_i} = \{v \in V_i; \|v\|_{H^2(-1/2, 1/2)} \leq \varepsilon^2 \rho_i\}$$

$$(3.23) \quad \mathcal{B} = V_1^{p_1} \times V_2^{p_2} \times [h^2 - \varepsilon^2 \rho_3, h^2 + \varepsilon^2 \rho_3] \times [-\varepsilon^2 \rho_4, \varepsilon^2 \rho_4].$$

$h^2$  étant strictement positif, il existe  $\varepsilon_1 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon$  vérifiant

$0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ ,  $\mathcal{B}$  soit une boule fermée de  $V_1 \times V_2 \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$  muni de la norme suivante :

$$(3.24) \quad \|(g, B; H, b)\| = \|g\|_{H^2(-1/2, 1/2)} + \|B\|_{H^2(-1/2, 1/2)} + |H| + |b|$$

où  $(g, B, H, b) \in V_1 \times V_2 \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$ .

Nous avons le lemme suivant :

LEMME 3.3 : *Étant donnés  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  et  $\rho_4$  quatre réels strictement positifs, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour  $\varepsilon$  vérifiant  $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ , l'application  $\Phi$  définie par (3.14) à (3.17) soit une contraction stricte sur la boule  $\mathcal{B}$  définie par (3.24).*

*Démonstration :*

Soit donc  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  et  $\rho_4$  strictement positifs et  $\varepsilon_1$  tels que :

$$[h^2 - \varepsilon_1^2 \rho_3, h^2 + \varepsilon_1^2 \rho_3] \subset ]0, \infty[.$$

Soit  $\varepsilon$  tel que  $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_1$ .

Soit  $(g_1, B_1; H_1, b_1)$  et  $(g_2, B_2; H_2, b_2) \in \mathcal{B}$ , alors :

$$\begin{aligned} & \bullet \Phi_1(g_1, B_1; H_1, b_1) - \Phi_1(g_2, B_2; H_2, b_2) = \\ &= a^2 \kappa^2 L^{-1} P_{M_1} [- (g_1^2 + g_1 g_2 + g_2^2)(g_1 - g_2) - 3 \varepsilon \varphi(g_1 + g_2)(g_1 - g_2) \\ & \quad - 3 \varepsilon^2 \varphi^2(g_1 - g_2) - a^2(H_1 - H_2)(b_1 + B_1)(2x + 2c + b_1 + B_1)(\varepsilon \varphi + g_1) \\ & \quad - a^2 H_2(b_1 - b_2 + B_1 - B_2)(2x + 2c + b_1 + B_1)(\varepsilon \varphi + g_1) \\ & \quad - a^2 H_2(b_1 - b_2 + B_1 - B_2)(b_2 + B_2)(\varepsilon \varphi + g_1) \\ & \quad - a^2 H_2(b_2 + B_2)(2x + 2c + b_2 + B_2)(g_1 - g_2) \\ & \quad + a^2(h^2 - H_1)(x + c)^2 (g_1 - g_2) + a^2(H_2 - H_1)(x + c)^2 (\varepsilon \varphi + g_2)] \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &\equiv \|\Phi_1(g_1, B_1; H_1, b_1) - \Phi_1(g_2, B_2; H_2, b_2)\|_{H^2(-1/2, 1/2)} \leq \\ &\leq a^2 \kappa^2 \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_1, V_1)} \cdot \|P_{M_1}\|_{\mathcal{L}(L^2(-1/2, 1/2), M_1)} \\ &\quad \cdot [\|g_1^2 + g_1 g_2 + g_2^2\|_{\infty} \cdot \|g_1 - g_2\| + 3 \varepsilon \|\varphi(g_1 + g_2)\|_{\infty} \|g_1 - g_2\| \\ &\quad + 3 \varepsilon^2 \|\varphi\|_{\infty}^2 \|g_1 - g_2\| \\ &\quad + a^2 \|b_1 + B_1\|_{\infty} \cdot \|2x + 2c + b_1 + B_1\|_{\infty} \cdot \|\varepsilon \varphi + g_1\|_{\infty} \cdot |H_1 - H_2| \\ &\quad + a^2 H_2 \|2x + 2c + b_1 + B_1 + b_2 + B_2\|_{\infty} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \|\varepsilon\varphi + g_1\|_\infty \cdot (|b_1 - b_2| + \|B_1 - B_2\|) \\
& + a^2 H_2 \|2x + 2c + b_2 + B_2\|_\infty \cdot \|b_2 + B_2\|_\infty \cdot \|g_1 - g_2\| \\
& + a^2 |h^2 - H_1| \cdot \|(x + c)\|_\infty^2 \cdot \|g_1 - g_2\| \\
& + a^2 \|(x + c)\|_\infty^2 \cdot \|\varepsilon\varphi + g_2\|_\infty |H_2 - H_1|
\end{aligned}$$

où les  $g_i$  et  $B_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont bornés dans  $L^\infty(-1/2, 1/2)$  car bornés dans  $H^2(-1/2, 1/2)$ .

Comme de plus  $(g_i, B_i; H_i, b_i) \in \mathcal{B}$  (pour  $i = 1, 2$ ), il existe une constante  $c_4 > 0$  telle que :

$$\|g_i\|_\infty \leq c_4 \varepsilon^2, \quad \|B_i\|_\infty \leq c_4 \varepsilon^2$$

et une constante  $c_5 > 0$  telle que :

$$(3.25) \quad \Lambda_1 \leq c_5 \varepsilon \parallel (g_1, B_1; H_1, b_1) - (g_2, B_2; H_2, b_2) \parallel$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \Phi_2(g_1, B_1; H_1, b_1) - \Phi_2(g_2, B_2; H_2, b_2) = \\
& = a^2 \Delta_N^{-1} P_{M_2}[(\varepsilon\varphi + g_1)^2 (b_1 - b_2 + B_1 - B_2) \\
& + (2\varepsilon\varphi + g_1 + g_2)(x + c + b_2 + B_2)(g_1 - g_2)]
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 & \equiv \|\Phi_2(g_1, B_1; H_1, b_1) - \Phi_2(g_2, B_2; H_2, b_2)\|_{H^2(-1/2, 1/2)} \leq \\
& \leq a^2 \|\Delta_N^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_2, V_2)} \cdot \|P_{M_2}\|_{\mathcal{L}(L^2(-1/2, 1/2), M_2)} \\
& \times [\|\varepsilon\varphi + g_1\|_\infty^2 (|b_1 - b_2| + \|B_1 - B_2\|) \\
& + (2\varepsilon\|\varphi\|_\infty + \|g_1\|_\infty + \|g_2\|_\infty)\|x + c + b_2 + B_2\|_\infty \|g_1 - g_2\|] \\
(3.26) \quad \Lambda_2 & \leq c_6 \varepsilon \parallel (g_1, B_1; H_1, b_1) - (g_2, B_2; H_2, b_2) \parallel
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \Phi_3(g_1, B_1; H_1, b_1) - \Phi_3(g_2, B_2; H_2, b_2) = \\
& = \left[ 1 - \varepsilon^2 a^2 \int_I (x + c)^2 \varphi^2 dx - \varepsilon^2 a^2 \int_I (x + c)^2 \frac{g_1}{\varepsilon} \varphi dx \right. \\
& \quad \left. - \varepsilon^2 a^2 \int_I (b_1 + B_1)(2x + 2c + b_1 + B_1) \left( \varphi + \frac{g_1}{\varepsilon} \right) \varphi dx \right] (H_1 - H_2) \\
& \quad - \varepsilon^2 H_2 a^2 \int_I (2x + 2c + b_1 + b_2 + B_1 + B_2) \times \\
& \quad \times \left( \varphi + \frac{g_2}{\varepsilon} \right) \varphi (b_1 - b_2 + B_1 - B_2) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \varepsilon H_2 a^2 \int_I (2x + 2c + b_2 + B_2)(b_2 + B_2) \varphi(g_1 - g_2) dx \\
& - \varepsilon \int_I [3 \varepsilon^2 \varphi^2 + 3 \varepsilon \varphi^2(g_1 + g_2) + \varphi(g_1^2 + g_2 g_1 + g_2^2)(g_1 - g_2) dx] \\
& + \varepsilon a^2(h^2 - \dot{H}_2) \int_I (x + c)^2 (g_1 - g_2) \varphi dx
\end{aligned}$$

or  $g_1 \in V_1^{p_1}$  donc :

$$\left\| \frac{g_1}{\varepsilon} \right\|_{\infty} \leq c_4 \varepsilon$$

et  $b_1$  et  $B_1$  sont bornés.

Il en résulte que pour  $\varepsilon$  assez petit ( $|\varepsilon| \leq \varepsilon_3$ ) le crochet, facteur de  $(H_1 - H_2)$ , est strictement positif et strictement inférieur à 1 ; par conséquent, si :

$$\Lambda_3 \equiv |\Phi_3(g_1, B_1; H_1, b_1) - \Phi_3(g_2, B_2; H_2, B_2)|$$

alors :

$$\begin{aligned}
(3.27) \quad \Lambda_3 \leq & \left[ 1 - a^2 \varepsilon^2 \int_I (x + c)^2 \varphi^2 dx + c_7 \varepsilon^3 \right] |H_1 - H_2| \\
& + c_8 \varepsilon^2 (|b_1 - b_2| + \|B_1 - B_2\| + \varepsilon \|g_1 - g_2\|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad & \Phi_4(g_1, B_1; H_1, b_1) - \Phi_4(g_2, B_2; H_2, b_2) = \\
& = [1 - \varepsilon^2 - \|g_1\|^2](b_1 - b_2) \\
& + b_2 \int_I (g_2^2 - g_1^2) dx \\
& - \int_I (2 \varepsilon \varphi + g_1 + g_2)(x + c + B_1)(g_1 - g_2) dx \\
& - \int_I (2 \varepsilon \varphi + g_2) g_2 (B_1 - B_2) dx - \varepsilon^2 \int_I \varphi^2 (B_1 - B_2) dx
\end{aligned}$$

car  $\|\varphi\| = 1$  et  $(\varphi, g_1) = 0$

donc si  $|\varepsilon| \leq 1$ , et si :

$$\Lambda_4 \equiv |\Phi_4(g_1, B_1; H_1, b_1) - \Phi_4(g_2, B_2; H_2, b_2)|$$

alors :

$$(3.28) \quad \Lambda_4 \leq (1 - \varepsilon^2) |b_1 - b_2| + c_9 \varepsilon (\|g_1 - g_2\| + \varepsilon \|B_1 - B_2\|).$$

Il résulte des majorations (3.25) à (3.28) qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour  $\varepsilon$  vérifiant  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  et pour tous  $(g_1, B_1; H_1, b_1)$  et  $(g_2, B_2; H_2, b_2)$  appartenant à  $\mathcal{B}$  :

$$\begin{aligned} \|\Phi(g_1, B_1; H_1, b_1) - \Phi(g_2, B_2; H_2, b_2)\| &\leq \\ &\leq c_{10} \|(g_1, B_1; H_1, b_1) - (g_2, B_2; H_2, b_2)\| \end{aligned}$$

où  $c_{10}$  est une constante strictement inférieure à 1.

Ceci montre le lemme 3.3.

### 3<sup>e</sup> étape de la démonstration du théorème 1

Nous allons appliquer le théorème classique de point fixe suivant qui nous donnera l'existence d'une solution non triviale du problème  $(\mathcal{P}_{fA})$ .

**THÉORÈME 3.4 :** Soit  $X$  un espace métrique complet,  $\rho > 0$ ,  $x_0 \in X$  et  $\mathcal{B} = \{x \in X; d(x_0, x) \leq \rho\}$ .

Soit  $\Psi$  une application définie de  $\mathcal{B}$  dans  $X$  telle que :

- i) il existe  $\lambda \in ]0, 1[$  tel que :  $\forall x \text{ et } x' \in \mathcal{B} \quad d(\Psi(x), \Psi(x')) \leq \lambda d(x, x')$
- ii)  $d(\Psi(x_0), x_0) \leq (1 - \lambda) \rho$

alors, il existe un  $y_0$  et un seul dans  $\mathcal{B}$  tel que :

$$\Psi(y_0) = y_0$$

(cf. : J. Dixmier [6] par exemple).

Prenons :

$$X = V_1 \times V_2 \times \mathbb{R}^2$$

$$x_0 = (0, 0, h^2, 0)$$

$$\Psi = \Phi \quad \text{définie en (3.14) à (3.17)}$$

$$\mathcal{B} = \{x \in X, \|x_0 - x\| \leq \rho \varepsilon^2\} \quad \text{avec} \quad \rho \equiv \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4$$

alors la deuxième étape montre que la condition i) du théorème 3.4 est vérifiée.

Vérifions la condition ii) du théorème 3.4.

$$\begin{aligned} \|\Phi(x_0) - x_0\| &= \|\Phi_1(x_0)\|_{H^2(-1/2, 1/2)} + \|\Phi_2(x_0)\|_{H^2(-1/2, 1/2)} + \\ &\quad + \|\Phi_3(x_0) - h^2\| + \|\Phi_4(x_0)\| \end{aligned}$$

avec, d'après la définition de  $\Phi$  :

$$\bullet \quad \Phi_1(x_0) = a^2 \kappa^2 L^{-1}(-\varepsilon^3 \varphi^3) = -\varepsilon^3 a^2 \kappa^2 L^{-1}(\varphi^3)$$

donc :

$$\|\Phi_1(x_0)\|_2 \leq \varepsilon^3 a^2 \kappa^2 \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_1, V_1)} \|\varphi^3\|.$$

$$\bullet \Phi_2(x_0) = \varepsilon^2 a^2 \Delta_N^{-1}((x+c)\varphi^2)$$

donc :

$$\|\Phi_2(x_0)\|_2 \leq \varepsilon^2 a^2 \|\Delta_N^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_2, V_2)} \cdot \|(x+c)\varphi^2\|.$$

$$\bullet \Phi_3(x_0) - h^2 = -\varepsilon^4 \int_I \varphi^4 dx$$

donc :

$$|\Phi_3(x_0) - h^2| \leq \varepsilon^4 \|\varphi\|_\infty.$$

$$\bullet \Phi_4(x_0) = 0.$$

Par conséquent :

$$\|\Phi(x_0) - x_0\| \leq \varepsilon^2 [\varepsilon a^2 \kappa^2 \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_1, V_1)} + a^2 \|\Delta_N^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_2, V_2)} + \varepsilon^2] \|\varphi\|_\infty.$$

Il suffit donc, pour que ii) soit vérifié, que :

$$(\varepsilon a^2 \kappa^2 \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_1, V_1)} + a^2 \|\Delta_N^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_2, V_2)} + \varepsilon^2) \cdot \|\varphi\|_\infty \leq \rho$$

et donc que:

$$(3.29) \quad \sum_{i=1}^4 \rho_i = \rho \geq a^2 \|\Delta_N^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_2, V_2)} \cdot \|\varphi\|_\infty$$

avec  $|\varepsilon|$  assez petit.

Il en résulte que, sous ces hypothèses il existe un  $\varepsilon_0$  tel que pour  $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  le problème de point fixe :

$$\Phi(g_\varepsilon, B_\varepsilon; H_\varepsilon, b_\varepsilon) = (g_\varepsilon, B_\varepsilon; H_\varepsilon, b_\varepsilon)$$

admette une solution et une seule dans  $\mathcal{B}$ .

Et donc, d'après le lemme 3.2, pour  $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ , le problème  $(\mathcal{P}_{fA})$  admet une solution de la forme (3.18) avec :

$$(3.30) \quad \begin{cases} \|g_\varepsilon\|_{H^2(-1/2, 1/2)} \leq \rho_1 \varepsilon^2, & \|B_\varepsilon\|_{H^2(-1/2, 1/2)} \leq \rho_2 \varepsilon^2 \\ |h_\varepsilon^2 - h^2| \leq \rho_3 \varepsilon^2 & \text{et} \quad |b_\varepsilon| \leq \rho_4 \varepsilon^2. \end{cases}$$

Il en résulte donc l'existence d'une branche de bifurcation du problème  $(\mathcal{P}_{fA})$ , issue du point  $(0, x+c; a, h)$  et paramétrée par  $\varepsilon$ .

4<sup>e</sup> étape : estimations sur la branche bifurquée.

La branche bifurquée construite à l'étape précédente vérifie :



pour  $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ , et  $\rho_i$  ( $i = 1, 4$ ) tels que (3.29) :

$$\begin{cases} f_\varepsilon = \varepsilon \varphi + g_\varepsilon \\ A_\varepsilon = x + c + b_\varepsilon + B_\varepsilon \end{cases}$$

où  $g_\varepsilon \in V_1$ ,  $B_\varepsilon \in V_2$  et  $b_\varepsilon \in \mathbb{R}$

avec les majorations de (3.30).

Montrons qu'elle est de la forme (3.3) à (3.7).

Pour tout  $c$  tel que la condition  $(H_c)$  soit satisfaite posons :

$$g_\varepsilon = \varepsilon^2 \bar{g}_\varepsilon; \quad b_\varepsilon = \varepsilon^2 \bar{b}_\varepsilon \quad \text{et} \quad B_\varepsilon = \varepsilon^2 \bar{B}_\varepsilon$$

et substituons les expressions de  $f_\varepsilon$  et  $A_\varepsilon$  dans l'équation (1.10), il vient :

$$(3.31) \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 \bar{B}_\varepsilon'' = -a^2(\varepsilon \varphi + \varepsilon^2 \bar{g}_\varepsilon)^2 (x + c + b_\varepsilon + B_\varepsilon) \\ \bar{B}_\varepsilon'(\pm 1/2) = 0 \quad \bar{B}_\varepsilon \in V_2 \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} \bar{B}_\varepsilon + a^2 \Delta_N^{-1}((x + c) \varphi^2) &= -a^2 \Delta_N^{-1}[\varepsilon \bar{g}_\varepsilon (2 \varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon) \times \\ &\quad \times (x + c + b_\varepsilon + B_\varepsilon) + \varepsilon^2 (\bar{b}_\varepsilon + \bar{B}_\varepsilon) \varphi^2] \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} \|\bar{B}_\varepsilon + a^2 \Delta_N^{-1}((x + c) \varphi^2)\|_{H^2(-1/2, 1/2)} &\leq \\ &\leq \varepsilon a^2 \|\Delta_N^{-1}\|_{\mathcal{L}(M_2, V_2)} (\|\bar{g}_\varepsilon\| \cdot \|(2 \varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon)\|_\infty \cdot \|x + c + b_\varepsilon + B_\varepsilon\|_\infty \\ &\quad + \varepsilon (\|\bar{b}_\varepsilon\| + \|\bar{B}_\varepsilon\|_\infty) \|\varphi^2\|) \end{aligned}$$

avec  $\bar{g}_\varepsilon$ ,  $b_\varepsilon$ ,  $\bar{b}_\varepsilon$ ,  $B_\varepsilon$  et  $\bar{B}_\varepsilon$  bornés dans  $L^\infty(-1/2, 1/2)$  pour  $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ .

Le second membre tend donc vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  et :

$$\bar{B}_\varepsilon \rightarrow -a^2 \Delta_N^{-1}((x + c) \varphi^2) \text{ dans } H^2(-1/2, 1/2) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$\Delta_N$  étant un isomorphisme de  $V_2$  sur  $M_2$ , la limite de  $\bar{B}_\varepsilon$ , notée  $B_0$ , est l'unique solution du problème :

$$(3.8) \quad \begin{cases} -B_0'' = -a^2(x + c) \varphi^2 & \text{dans } ]-1/2, 1/2[ \\ B_0'(\pm 1/2) = 0 \\ \int_I B_0 dx = 0. \end{cases}$$

\* La fonction  $g_\varepsilon$  vérifiant (3.19),  $\bar{g}_\varepsilon$  vérifie les équations suivantes :

$$(3.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\bar{g}_\varepsilon'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x+c)^2 \bar{g}_\varepsilon - a^2 \kappa^2 \bar{g}_\varepsilon \\ \quad = -a^4 \kappa^2 \left( \frac{h_\varepsilon^2 - h^2}{\varepsilon} \right) (x+c)^2 (\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon) \\ -\varepsilon a^4 h_\varepsilon^2 \kappa^2 (\bar{b}_\varepsilon + \bar{B}_\varepsilon) (2x+2c+b_\varepsilon+B_\varepsilon) (\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon) \\ -\varepsilon a^2 \kappa^2 (\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon) \\ \bar{g}_\varepsilon'(\pm 1/2) = 0 \\ (\bar{g}_\varepsilon, \varphi) = 0. \end{array} \right.$$

Si  $\bar{g}_\varepsilon$  est solution de (3.32), le second membre de cette équation est orthogonal à  $\varphi$  donc :

$$(3.33) \quad a^2 \left( \frac{h_\varepsilon^2 - h^2}{\varepsilon^2} \right) \left[ \int_I (x+c)^2 \varphi (\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon) dx + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \int_I (\bar{b}_\varepsilon + \bar{B}_\varepsilon) (2x+2c+b_\varepsilon+B_\varepsilon) (\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon) \varphi dx \right] \\ = - \int_I (\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon)^3 \varphi dx - a^2 h^2 \int_I (\bar{b}_\varepsilon + \bar{B}_\varepsilon) \\ \times (2x+2c+b_\varepsilon+B_\varepsilon) (\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon) \varphi dx$$

et donc en utilisant de nouveau l'hypothèse  $(H_c)$  :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{h_\varepsilon^2 - h^2}{\varepsilon^2} \right) = \eta_0 = \frac{-2a^2 h^2 \int_I (x+c) B_0 \varphi^2 dx - \int_I \varphi^4 dx}{a^2 \int_I (x+c)^2 \varphi^2 dx}$$

ce qui montre (3.9), pour tout  $c$  vérifiant la condition  $(H_c)$ .

Il résulte de cette limite et parce que  $\bar{b}_\varepsilon$ ,  $\bar{g}_\varepsilon$  et  $\bar{B}_\varepsilon$  sont bornés lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , que le second membre de (3.32) tend vers 0 dans  $L^2(-1/2, 1/2)$ ;  $\bar{g}_\varepsilon$  tend donc vers 0 dans  $H^2(-1/2, 1/2)$  et donc dans  $L^2(-1/2, 1/2)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

\* Écrivons d'autre part que le second membre de (3.31) est d'intégrale nulle :

$$b_\varepsilon \int_I (\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon)^2 dx + \int_I (\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon)^2 (x+c+B_\varepsilon) dx = 0$$

donc, puisque  $(\bar{g}_\varepsilon, \varphi) = 0$  et que  $(H_c)$  est vérifiée :

$$\varepsilon^2 \bar{b}_\varepsilon [1 + \varepsilon^2 \|\bar{g}_\varepsilon\|^2] + \varepsilon^2 \int_I \varphi^2 \bar{B}_\varepsilon dx + \varepsilon \int_I (x+c)(2\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon) \bar{g}_\varepsilon dx + \\ + \varepsilon^3 \int_I \bar{B}_\varepsilon (2\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon) \bar{g}_\varepsilon dx = 0$$

donc :

$$(3.34) \quad \bar{b}_\varepsilon + \int_I \varphi^2 \bar{B}_\varepsilon dx + \frac{2}{\varepsilon} \int_I x\varphi \bar{g}_\varepsilon dx = \\ = -\varepsilon^2 \bar{b}_\varepsilon \|\bar{g}_\varepsilon\|^2 - \varepsilon \int_I \bar{B}_\varepsilon (2\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon) \bar{g}_\varepsilon dx - \int_I (x+c) \bar{g}_\varepsilon^2 dx$$

$\bar{b}_\varepsilon$ ,  $\bar{g}_\varepsilon$  et  $\bar{B}_\varepsilon$  étant bornés quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $\bar{g}_\varepsilon$  tendant vers 0 dans  $L^2(-1/2, 1/2)$ , il en résulte que :

$$(3.35) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \bar{b}_\varepsilon + 2 \int_I x\varphi \frac{\bar{g}_\varepsilon}{\varepsilon} dx \right) = - \int_I \varphi^2 \bar{B}_0 dx .$$

Posons :

$$\bar{f}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \bar{g}_\varepsilon$$

alors, en substituant cette relation dans (3.32), on vérifie que  $\bar{f}_\varepsilon$  est solution de :

$$(3.36) \quad \begin{cases} -\bar{f}_\varepsilon'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x+c)^2 \bar{f}_\varepsilon - a^2 \kappa^2 \bar{f}_\varepsilon \\ \quad = -a^4 h_\varepsilon^2 \kappa^2 \bar{b}_\varepsilon (2x+2c + \varepsilon^2 \bar{b}_\varepsilon + \varepsilon^2 \bar{B}_\varepsilon) (\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon) \\ \quad - a^4 \kappa^2 \eta_\varepsilon (x+c)^2 (\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon) \\ \quad - a^4 h_\varepsilon^2 \kappa^2 \bar{B}_\varepsilon (2x+2c + b_\varepsilon + B_\varepsilon) (\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon) - a^2 \kappa^2 (\varphi + \varepsilon \bar{g}_\varepsilon)^3 \\ \bar{f}_\varepsilon'(\pm 1/2) = 0 \\ (\bar{f}_\varepsilon, \varphi) = 0 . \end{cases}$$

Le second membre de cette équation étant borné dans  $L^2(-1/2, 1/2)$ ,  $\bar{f}_\varepsilon$  est borné dans  $H^2(-1/2, 1/2)$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 ; il en résulte qu'il existe une sous-suite, encore notée  $(\bar{f}_\varepsilon)$  et extraite de la famille  $(\bar{f}_\varepsilon)$ , qui converge faiblement dans  $H^2(-1/2, 1/2)$ , vers un élément  $f_0 \in H^2(-1/2, 1/2)$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

Grâce à l'existence des limites (3.35), (3.8) et (3.9), nous pouvons passer à la limite au sens des distributions,  $\varepsilon$  tendant vers 0, dans l'équation (3.36),

pour la sous-suite convergente  $(\bar{f}_\varepsilon)$  et les sous-suites  $(\bar{b}_\varepsilon)$ ,  $(\bar{B}_\varepsilon)$  et  $(h_\varepsilon)$  associées ; on vérifie alors que  $f_0$  est solution du problème suivant :

$$(3.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} -f_0'' + a^4 h^2 \kappa^2 (x+c)^2 f_0 - a^2 \kappa^2 f_0 - \\ \quad - 4 a^4 h^2 \kappa^2 (x+c) \varphi \left( \int_I (t+c) \varphi f_0 dt \right) \\ = -a^2 \kappa^2 \varphi^3 - 2 a^4 h^2 \kappa^2 (x+c) \varphi \left( B_0 - \int_I \varphi^2 B_0 dt \right) - \\ \quad - a^4 \kappa^2 \eta_0 (x+c)^2 \varphi \\ f_0'(\pm 1/2) = 0 \quad f_0 \in H^2(-1/2, 1/2) \end{array} \right.$$

avec :  $(f_0, \varphi) = 0$ .

La fonction  $\varphi$  est solution de l'équation homogène associée (équation (3.11)), car le terme intégral de cette équation est alors nul. Lorsque (3.11) n'admet pas de solution orthogonale à  $\varphi$ , la limite  $f_0$  est unique, et toute la famille  $(f_\varepsilon)$  converge alors vers  $f_0$ .

On vérifie alors, grâce à (3.35) que la famille  $(\bar{b}_\varepsilon)$  admet aussi une limite, et que cette limite est donnée par (3.12).

Notons que lorsqu'il existe une solution de (3.11) orthogonale à  $\varphi$ , il n'y a plus unicité de la solution de (3.37) ; nous avons alors seulement convergence d'une sous-suite  $(\bar{f}_\varepsilon)$  vers une solution de (3.37).

\* Lorsque  $c = 0$ , la parité des solutions permet de nous affranchir de l'hypothèse d'unicité de la solution de l'équation (3.11) ; nous avons, pour tout  $\varepsilon$ ,  $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$  :

$$\bar{b}_\varepsilon = 0$$

$$\bar{g}_\varepsilon \text{ est paire et } \bar{B}_\varepsilon \text{ impaire}$$

car, sinon  $(\bar{g}_\varepsilon(-x), -\bar{B}_\varepsilon(-x), h_\varepsilon^2, 0)$  serait un autre point fixe de  $\Phi$ , ce qui est contraire au résultat d'unicité montré. Il en résulte que :

d'une part :  $b_0 = 0$

d'autre part :

$$\forall \varepsilon, \quad 0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0 : \quad \int_I x \varphi \bar{g}_\varepsilon dx = 0$$

et donc que  $\bar{f}_\varepsilon$  admet une limite donnée par (3.10) par passage à la limite direct dans l'équation (3.36).

## CONCLUSION

Il résulte donc du théorème 3.1, l'existence de branches de solutions non triviales des équations de Ginzburg-Landau ; plus précisément, à toute solution triviale  $(0, x + c ; a, h)$  telle que la condition  $(H_c)$  soit satisfaite, est associée une courbe de solutions bifurquées. Les solutions obtenues ne sont physiquement acceptables que si ce sont des solutions stables ou métastables. Dans C. Bolley [3], on précise pour quelles valeurs de  $h$ , une solution triviale du problème  $(\mathcal{P}_{fA})$  est stable ou instable ; une étude analogue reste à faire pour les solutions bifurquées.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier J. P. Puel pour les conseils et les encouragements qu'il m'a apportés tout le long de ce travail.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BLOT, *Relation entre les grandeurs supraconductrices caractéristiques de l'aluminium massif et les champs de transition de films divisés, en fonction de leur épaisseur*. Thèse soutenue à Rennes 1, 1987.
- [2] C. BOLLEY, *Bifurcations dans les équations de Ginzburg-Landau des matériaux supraconducteurs soumis à un champ magnétique extérieur*. Publications de l'E.N.S.M., 1988.
- [3] C. BOLLEY, *Modélisation du champ de retard à la condensation d'un supraconducteur par un problème de bifurcation*, à paraître.
- [4] M. G. CRANDALL and P. H. RABINOWITZ, *Bifurcation from Simple Eigenvalues*, 1970.
- [5] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse*. Tome 1. Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [6] J. DIXMIER, *Topologie générale*. PUF, Paris, 1981.
- [7] B. DUGNOILLE, *Étude théorique et expérimentale des propriétés magnétiques des couches minces supraconductrices de type I et de kappa faibles*. Thèse soutenue à Mons, 1978.
- [8] V. L. GINZBURG, *Soviet Physics JETP* 7, 78, 1958.
- [9] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, n° 132, 1976.
- [10] F. KIKUCHI, *An iterative Finite Element Scheme for Bifurcation Analysis of Semi-linear Elliptic Equation*. Institute of Space Aeronautic Science. University of Tokyo. Report n° 542, juin 1976.
- [11] M. KRASNOSEL'SKII, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Eq.* Pergamon Press, 1964.

- [12] B. M. LEVITAN and I. S. SARGSIAN, *Introduction to Spectral Theory : Selfadjoint Ordinary Diff. Equations*. American Math Soc.
- [13] Y. PELLAN, *Étude de la métastabilité de la transition supraconductrice de films divisés d'Indium sous champ magnétique parallèle et perpendiculaire*. Thèse soutenue à Rennes I, 1987.
- [14] P. H. RABINOWITZ, *Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems*. J. of Funct. Anal., n° 7, pp. 487-513, 1971.