M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

YOUCEF AMIRAT

Écoulements en milieu poreux n'obéissant pas à la loi de Darcy

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 25, n° 3 (1991), p. 273-306

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1991__25_3_273_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 25, n° 3, 1991, p. 273 à 306)

ÉCOULEMENTS EN MILIEU POREUX N'OBÉISSANT PAS A LA LOI DE DARCY (*)

Youcef AMIRAT [1]

Communiqué par R. TEMAN

Résumé. — *L'écoulement d'un gaz à travers un milieu poreux, qu'on suppose régi par une loi quadratique de perte de charge, est modélisé en régime transitoire par un problème parabolique non linéaire dégénéré. On établit des résultats d'existence, d'unicité et de régularité. On étudie ensuite le comportement limite des solutions lorsque le paramètre de résistance inertielle tend vers zéro.*

Abstract. — *This paper deals with the study of a transient gas flow through a porous medium, with a quadratic pressure drop law, governed by a nonlinear degenerate parabolic equation. Existence, uniqueness and regularity results are established. The asymptotic behaviour of the solutions when the inertial flow resistance tends to zero is also considered.*

I. INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, de frontière régulière Γ, et ν la normale unitaire sortante de Ω. On considère le problème parabolique non linéaire dégénéré :

$$(1.1) \qquad \phi \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u}{\sqrt{|u|}}\right) - \operatorname{div} F(\nabla u) = 0 \quad \text{dans} \quad Q = \Omega \times \left]0, T\right[,$$

avec
$$F(v) = K \frac{(1 + \sigma |v|)^{1/2} - 1}{\sigma |v|} v , \quad v \in \mathbb{R}^d ,$$

$$(1.2) \qquad F(\nabla u) \, . \, \nu = g \quad \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times \left]0, T\right[,$$

$$(1.3) \qquad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega ,$$

où ϕ, K, σ, u_0 sont des fonctions données dans Ω et g est une fonction donnée sur Σ. Ce problème modélise, dans certaines conditions, l'écoule-

(*) Reçu en mai 1988, révisé en avril 1990.

[1] INRIA Rocquencourt, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex France.

M²AN Modélisation mathématique et Analyse numérique 0764-583X/91/03/273/34/$ 5.40
Mathematical Modelling and Numerical Analysis

ment d'un gaz à travers un milieu poreux, en régime visco-inertiel, u représentant le carré de la pression. Les lois de base pour l'établissement du modèle sont [1] :

— la loi de conservation de la masse :

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} q = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \tag{1.4}$$

— la loi quadratique de perte de charge ou loi de Forchheimer, généralisant celle de Darcy (*cf.* [6], [10], [13], [14]) :

$$-\rho \nabla p = \alpha u q + \beta |q| q \quad \text{dans} \quad Q, \tag{1.5}$$

— la loi d'état des gaz parfaits isothermes :

$$\rho = bp, \quad b \text{ constante}. \tag{1.6}$$

Dans (1.4), (1.5), (1.6), ϕ désigne la porosité de la roche, ρ la masse spécifique du fluide, p la pression, q le débit massique unitaire, μ la viscosité dynamique du fluide, α (resp. β) le facteur de résistance visqueuse (resp. inertielle). Avec ces notations, $K = \frac{1}{\alpha\mu}$, $\sigma = 2 b\beta K^2$. La condition (1.2) exprime que le flux de masse sur Γ est imposé et (1.3) résulte de la donnée de la pression à l'instant initial. Si l'on prend une loi d'évolution thermodynamique adiabatique, $\rho = bp^{\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, on obtient que $u = p^{\gamma+1}$ est solution positive de :

$$\phi \frac{\partial}{\partial t}(|u|^{r-2} u) - \operatorname{div} F(\nabla u) = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \tag{1.7}$$

avec $$r = \frac{2\gamma+1}{\gamma+1}, \ K = \frac{1}{\alpha\mu(\gamma+1)}, \ \sigma = b(\gamma+1)\beta K^2.$$

Remarquons que si la fonction σ est nulle alors (1.7) coïncide avec l'équation classique des milieux poreux. L'équation des milieux poreux et, plus généralement, les équations paraboliques non linéaires dégénérées du type $u_t - \Delta\phi(u) = 0$, ont été étudiées par de nombreux auteurs (*cf.* par exemple [2], [4], [5] et la bibliographie de ces travaux). Nous nous intéressons ici au cas où σ est positive, cas dont l'étude présente un intérêt pratique dans l'exploitation des gisements de gaz. Les problèmes inhérents à ce type d'écoulement ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux en simulation numérique (*cf.* [8], [9], [11], [15], [17] entre autres).

L'objet de cet article est l'étude mathématique du problème (1.1), (1.2), (1.3). Moyennant des hypothèses convenables sur les données, on montre l'existence d'une solution en utilisant une technique de semi-discrétisation en temps, développée dans [7]. On établit des résultats de régularité, d'unicité et de positivité. On présente ensuite une extension de ces résultats aux cas suivants : affaiblissement des hypothèses sur les données, écoulements compressibles adiabatiques. Le dernier paragraphe concerne l'étude du comportement limite des solutions u_σ du problème (1.1), (1.2), (1.3), lorsque le paramètre σ tend vers 0. On établit un résultat de convergence de u_σ vers la solution de l'équation des milieux poreux. Le champ du gradient étant localement coercif, on obtient ce résultat à l'aide d'estimations a priori qui tiennent compte du changement de comportement de la fonction F au voisinage de 0 et de l'infini. Une partie de ces résultats est annoncée dans [1]. L'analyse numérique du problème (1.1), (1.2), (1.3) fera l'objet d'une publication ultérieure.

II. RÉSULTATS D'EXISTENCE, D'UNICITÉ ET DE RÉGULARITÉ POUR LE PROBLÈME (P)

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, de frontière régulière Γ, de vecteur normal extérieur ν, et $]0, T[$ l'intervalle de temps d'étude du phénomène.

Il s'agit de trouver u solution de :

$$(P) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\phi \dfrac{u}{\sqrt{|u|}}\right) - \operatorname{div} F(\nabla u) = 0 & \text{dans} \quad Q = \Omega \times \,]0, T[\,, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans} \quad \Omega\,, \\ F(\nabla u) \,.\, \nu = g & \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times \,]0, T[\,, \end{cases}$$

où :

$$F(v) = K \frac{(1 + \sigma|v|)^{1/2} - 1}{\sigma|v|}\, v\,, \quad v \in \mathbb{R}^d\,.$$

ϕ, K, σ sont dans des fonctions de $L^\infty(\Omega)$, vérifiant :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} 0 < \phi_- &\leq \phi(x) \leq \phi_+ && \text{p.p. dans } \Omega\,, \\ 0 < K_- &\leq K(x) \leq K_+ && \text{p.p. dans } \Omega\,, \\ 0 < \sigma_- &\leq \sigma(x) \leq \sigma_+ && \text{p.p. dans } \Omega\,. \end{aligned}$$

Nous utilisons les méthodes développées dans [7] et [12]. Posons $V = W^{1, 3/2}(\Omega)$ et notons A l'opérateur non linéaire de V dans V' défini par :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} &\forall u, v \in V \\ &(Au, v) = \int_\Omega F(\nabla u) \,.\, \nabla v \, dx\,. \end{aligned}$$

B est l'opérateur non linéaire de $L^{3/2}(\Omega)$ dans $L^3(\Omega)$ défini par :

$$Bu = \phi \frac{u}{\sqrt{|u|}} . \tag{2.3}$$

Supposons :

$$u_0 \in V , \tag{2.4}$$

$$g \in W^{1,3}(0, T ; W^{-1/3,3}(\Gamma)) , \tag{2.5}$$

où $W^{-1/3,3}(\Gamma)$ est le dual de $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$, et $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$ est l'espace parcouru par $v|_\Gamma$ lorsque v parcourt $W^{1,3/2}(\Omega)$.

On définit $f \in L^3(0, T ; V')$ par :

$$(f(t), v) = (g(t), v|_\Gamma)_{W^{-1/3,3}(\Gamma), W^{1/3,3/2}(\Gamma)} . \tag{2.6}$$

(2.5) implique $\frac{df}{dt} \in L^3(0, T ; V')$, donc $f \in C^0([0, T] ; V')$.

On considère alors le problème non linéaire suivant :

$$\frac{d}{dt}(Bu) + Au = f \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T ; V') , \tag{2.7}$$

$$u(0) = u_0 . \tag{2.8}$$

II.1. Existence d'une solution faible

Nous allons établir le résultat suivant.

THÉORÈME 2.1 : *Sous les hypothèses précédentes, il existe une fonction u telle que :*

$$u \in L^\infty(0, T ; V) , \tag{2.9}$$

$$\frac{d}{dt}(Bu) \in L^\infty(0, T ; V') , \tag{2.10}$$

et u vérifiant (2.7), (2.8).

Remarque 2.1 : La condition (2.8) a bien un sens car il résulte de (2.9) et (2.10) que $Bu \in C^0([0, T] ; V')$.

Remarque 2.2 : La démonstration que nous proposons ici est inspirée des techniques de [7]. Elle consiste en :

— une semi-discrétisation en temps de (2.7), (2.8) par un schéma implicite,

— l'obtention d'estimations a priori (*cf.* Remarque (2.3) ci-après),

— le passage à la limite.

Remarque 2.3 : Multiplions formellement (2.7) par $u\left(\text{resp. } \frac{du}{dt}\right)$; il vient (resp.) :

$$\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\int_\Omega \phi|u|^{3/2}\,dx + \int_\Omega K\frac{(1+\sigma|\nabla u|)^{1/2}-1}{\sigma}\,|\nabla u|\,dx = (f,u)\,, \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{3}\int_\Omega \phi\frac{1}{\sqrt{|u|}}\left|\frac{du}{dt}\right|^2 dx + \int_\Omega F(\nabla u)\,.\,\nabla\left(\frac{du}{dt}\right)dx = \left(f,\frac{du}{dt}\right);$$

mais, $\left(f,\frac{du}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(f,u) - \left(\frac{df}{dt},u\right)$, et

$$\int_\Omega F(\nabla u)\,.\,\nabla\left(\frac{du}{dt}\right)dx = \frac{d}{dt}\left[\frac{2}{3}\int_\Omega K\frac{(1+\sigma|\nabla u|)^{3/2}}{\sigma^2}\,dx - \int_\Omega K\frac{|\nabla u|}{\sigma}\,dx\right];$$

donc

$$\frac{1}{3}\int_\Omega \phi\frac{1}{\sqrt{|u|}}\left|\frac{du}{dt}\right|^2 dx + \frac{d}{dt}\left[\frac{2}{3}\int_\Omega K\frac{(1+\sigma|\nabla u|)^{3/2}}{\sigma^2}\,dx - \int_\Omega K\frac{|\nabla u|}{\sigma}\,dx\right] = \frac{d}{dt}(f,u) - \left(\frac{df}{dt},u\right). \tag{2.12}$$

Les estimations a priori qui suivent seront calquées sur (2.11) et (2.12).

Explicitons d'abord quelques propriétés simples des opérateurs A et B.

PROPOSITION 2.1 :

i) *Les opérateurs A et B définis respectivement par* (2.2) *et* (2.3) *sont holdériens d'ordre* $1/2$ *et monotones.*

ii) *Les fonctionnelles J_A et J_B définies respectivement sur V et $L^{3/2}(\Omega)$ par :*

$$J_A(v) = \frac{2}{3}\int_\Omega K\frac{(1+\sigma|\nabla v|)^{3/2}}{\sigma^2}\,dx - \int_\Omega K\frac{|\nabla v|}{\sigma}\,dx\,, \tag{2.13}$$

$$J_B(v) = \frac{2}{3}\int_\Omega \phi|v|^{3/2}\,dx\,, \tag{2.14}$$

sont convexes, Fréchet différentiables et telles que :

$$J'_A = A,\quad J'_B = B\,.$$

De plus,

$$J_A(v) \geq C_1\int_\Omega |\nabla v|^{3/2}\,dx - C_2\quad \forall v\in V\,, \tag{2.15}$$

C_1 et C_2 constantes strictement positives,

$$J_B(v) \geqslant C_3 \int_\Omega |v|^{3/2}\,dx \quad \forall v \in L^{3/2}(\Omega)\,, \tag{2.16}$$

C_3 constante strictement positive.

La démonstration utilise le lemme suivant (*cf.* [1]).

LEMME 2.1 : *L'application F de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ définie par :*

$$F(v) = \frac{(1+|v|)^{1/2}-1}{|v|}\, v\,,$$

est holdérienne d'ordre 1/2.

Démonstration de la proposition 2.1 : Nous la donnons seulement pour A (la preuve est immédiate pour B).

Point (i) : Soient u_1, $u_2 \in V$. On écrit :

$$(Au_1 - Au_2, v) = \int_\Omega \frac{K}{\sigma}\,(F(\nabla u_1) - F(\nabla u_2)) \,.\, \nabla v\,dx\,,$$

alors, grâce au lemme 2.1 et (2.1),

$$|(Au_1 - Au_2, v)| \leqslant C \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^{1/2}\,|\nabla v|\,dx\,, \quad C \text{ constante}$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$|(Au_1 - Au_2, v)| \leqslant C\,\|u_1 - u_2\|_V^{1/2}\,\|v\|_V\,,$$

c'est-à-dire A est holdérien d'ordre 1/2. Pour prouver que A est monotone, on écrit :

$$\begin{aligned}(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) = &\int_\Omega |F(\nabla u_1)|\,|\nabla u_1|\,dx + \int_\Omega |F(\nabla u_2)|\,|\nabla u_2|\,dx \\ &- \int_\Omega F(\nabla u_1)\,.\,\nabla u_2\,dx - \int_\Omega F(\nabla u_2)\,\nabla u_1\,dx\,,\end{aligned}$$

d'où

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) \geqslant \int_\Omega (|F(\nabla u_1)| - |F(\nabla u_2)|)(|\nabla u_1| - |\nabla u_2|)\,dx\,,$$

qui est positif car $x \to (1+x)^{1/2}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Point (ii) : Un calcul facile montre que J_A est différentiable au sens de Gateaux, de différentielle $J'_A = A$; la monotonie et la continuité de A (point (i)) prouvent alors que J_A est convexe et Fréchet différentiable.

Soit maintenant $v \in V$. On a, grâce à (2.1),

$$J_A(v) \geq C_1' \int_\Omega |\nabla v|^{3/2}\, dx - C_2' \int_\Omega |\nabla v|\, dx ,$$

puis, en appliquant l'inégalité de Young :

$$\forall \eta > 0 , \quad \exists C_\eta > 0 , \quad \text{tel que} ,$$

$$\int_\Omega |\nabla v|\, dx \leq \eta \int_\Omega |\nabla v|^{3/2}\, dx + C_\eta(\text{mes } \Omega) ,$$

avec η convenablement choisi, on obtient l'inégalité (2.15).

Démonstration du Théorème 1

a) *Construction du problème approché*

Nous introduisons les notations suivantes :

N est un entier destiné à tendre vers l'infini et $h = \dfrac{T}{N}$. Si $a = (a^0, \dots, a^N) \in E^{N+1}$, où E est un espace de Banach, $\Pi_h(a)$ est la fonction étagée définie par :

$$\Pi_h(a)(t) = a^{n+1} \quad \text{si} \quad nh < t \leq (n+1)h , \quad n = 0, \dots, N-1 ,$$
$$\Pi_h(a)(0) = a_0 .$$

$\Lambda_h(a)$ est la fonction définie sur $[0, T]$, linéaire sur $[nh, (n+1)h]$ avec :

$$\Lambda_h(a)(nh) = a^n , \qquad n = 0, \dots, N ,$$

et

$$D_h \Pi_h(a) = \frac{d}{dt} \Lambda_h(a) .$$

On considère le problème discrétisé suivant :

(2.17) $\quad u_h^0 = u_0 ,$

(2.18) $\quad \dfrac{1}{h} (Bu_h^{n+1} - Bu_h^n, v) + (Au_h^{n+1}, v) = (f_h^n, v) \quad \forall v \in V ,$

avec $f_h^n = \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\, dt , \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$

Ce problème admet une solution unique $u_h = (u_h^0, \dots, u_h^N) \in V^{N+1}$. En effet, la fonction J_0 de V dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$J_0(v) = \frac{1}{h} J_B(v) + J_A(v) - (f_h^0, v) - \frac{1}{h} (Bu_h^0, v),$$

(J_A et J_B étant définies respectivement par (2.13), (2.14)) est convexe, et même strictement puisque J_B l'est, continue, tendant vers l'infini à l'infini sur V (grâce à (2.15), (2.16)), donc admet un minimum unique en u^* et $J_0'(u^*) = 0$. On obtient ainsi l'existence et l'unicité de u_h^1 dans (2.18), puis par récurrence celle de u_h^n, $n = 2, \dots, N$.

b) *Estimations a priori*

b.1) Prenons dans (2.18) $v = u_h^{n+1}$; il vient :

$$\frac{1}{h} \int_\Omega (Bu_h^{n+1} - Bu_h^n) u_h^{n+1} \, dx + (Au_h^{n+1}, u_h^{n+1}) = (f_h^n, u_h^{n+1}) .$$

Utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_\Omega |Bu_h^n u_h^{n+1}| \, dx \leqslant \int_\Omega \phi |u_h^n|^{1/2} |u_h^{n+1}| \, dx \leqslant \frac{2}{3} \int_\Omega \phi [|u_h^{n+1}|^{3/2} dx + \frac{1}{3} \int_\Omega \phi |u_h^n|^{3/2} dx \Bigg] ,$$

$$\text{(2.19)} \qquad \int_\Omega (Bu_h^{n+1} - Bu_h^n) u_h^{n+1} \, dx \geqslant C_4 \left[\int_\Omega |u_h^{n+1}|^{3/2} dx - \int_\Omega |u_h^n|^{3/2} dx \right] ,$$

avec $C_4 = \frac{1}{3} \phi_-$. D'autre part,

$$|(f_h^n, u_h^{n+1})| \leqslant \frac{1}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} \|f(t)\|_{V'} \|u_h^{n+1}\|_V \, dt ;$$

on en déduit :

$$\forall \eta > 0 , \quad \exists C_\eta > 0 , \quad \text{tel que} ,$$

$$\text{(2.20)} \qquad |(f_h^n, u_h^{n+1})| \leqslant \eta \|u_h^{n+1}\|_V^{3/2} + \frac{C_\eta}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} \|f(t)\|_{V'}^3 \, dt .$$

Les inégalités (2.19), (2.20) et l'inégalité :

$$(Au_h^{n+1}, u_h^{n+1}) \geqslant C_1' \int_\Omega |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2} dx - C_2' \quad \text{(conséquence de (2.15))}$$

impliquent :

$$\frac{C_4}{h}\left[\int_\Omega |u_h^{n+1}|^{3/2}\,dx - \int_\Omega |u_h^n|^{3/2}\,dx\right] + C_1'\int_\Omega |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \eta h\,\|u_h^{n+1}\|_V^{3/2} + \frac{C_\eta}{h}\int_{nh}^{(n+1)h}\|f(t)\|_{V'}^3\,dt + C_2',$$

d'où, en choisissant η convenablement,

$$\frac{C_4}{h}\left[\int_\Omega |u_h^{n+1}|^{3/2}\,dx - \int_\Omega |u_h^n|^{3/2}\,dx\right] + C_5\int_\Omega |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2}\,dx \leqslant \tag{2.21}$$

$$\eta\int_\Omega |u_h^{n+1}|^{3/2}\,dx + \frac{C_\eta}{h}\int_{nh}^{(n+1)h}\|f(t)\|_{V'}^3\,dt + C_2',$$

C_5 constante strictement positive, indépendante de h et n.

Multipliant maintenant (2.21) par h et sommant de 0 à $N-1$, il vient :

$$C_4\int_\Omega |u_h^N|^{3/2}\,dx + hC_5\sum_{n=0}^{N-1}\int_\Omega |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2}\,dx \leqslant$$

$$\eta h\sum_{n=0}^{N-1}\int_\Omega |u_h^{n+1}|^{3/2}\,dx + C_\eta\int_0^T\|f(t)\|_{V'}^3\,dt + TC_2' + C_4\int_\Omega |u_0|^{3/2}\,dx,$$

d'où :

$$\int_\Omega |u_h^N|^{3/2}\,dx \leqslant C_6 + hC_7\sum_{n=0}^{N-1}\int_\Omega |u_h^{n+1}|^{3/2}\,dx, \tag{2.22}$$

$$h\sum_{n=0}^{N-1}\int_\Omega |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2}\,dx \leqslant C_6 + hC_7\sum_{n=0}^{N-1}\int_\Omega |u_h^{n+1}|^{3/2}\,dx, \tag{2.23}$$

C_6 et C_7 constantes indépendantes de h et n.

De (2.22) on déduit :

$$\int_\Omega |u_h^N|^{3/2}\,dx \leqslant \text{constante},$$

puis, de (2.23),

$$h\sum_{n=0}^{N-1}\int_\Omega |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2}\,dx \leqslant \text{constante}.$$

Finalement :

$$\int_\Omega |u_h^N|^{3/2}\,dx \leqslant \text{constante}, \tag{2.24}$$

$$h\sum_{n=0}^{N-1}\|u_h^n\|_V^{3/2} \leqslant \text{constante}. \tag{2.25}$$

$b.2)$ Prenons dans (2.18) $v = u_h^{n+1} - u_h^n$; il vient :

$$(2.26) \quad \frac{1}{h}\left(Bu_h^{n+1} - Bu_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n\right) + \left(Au_h^{n+1}, u_h^{n+1} - u_h^n\right) = \left(f_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n\right).$$

Négligeant le premier terme qui est positif, et tenant compte de :

$$\left(Au_h^{n+1}, u_h^{n+1} - u_h^n\right) \geqslant J_A(u_h^{n+1}) - J_A(u_h^n) \quad (J_A \text{ convexe}),$$

on obtient en sommant (2.26) de 0 à $N-1$,

$$J_A(u_h^N) - J_A(u_0) \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} \left(f_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n\right) =$$

$$= \left(f_h^{N-1}, u_h^N\right) - \left(f_h^0, u_0\right) - \sum_{n=1}^{N-1} \left(f_h^n - f_h^{n-1}, u_h^n\right),$$

d'où, avec l'inégalité de Young et (2.25),

$$J_A(u_h^N) \leqslant C_8 + \eta \left\| u_h^N \right\|_V^{3/2},$$

C_8 constante indépendante de h et n.

Utilisant maintenant (2.15) et (2.24), on obtient (avec η convenablement choisi) :

$$(2.27) \qquad \left\| u_h^N \right\|_V \leqslant \text{constante},$$

et de (2.18), il résulte alors :

$$(2.28) \qquad \frac{1}{h} \left\| Bu_h^{n+1} - Bu_h^n \right\|_{V'} \leqslant \text{constante}.$$

$b.3)$ Soit ψ_h la fonction numérique définie sur $[0, T]$ par :

$$\psi_h(t) = \int_\Omega \left| \Lambda_h(u_h)(t) \right|^{3/2} dx.$$

D'après (2.24), ψ_h est uniformément bornée. De plus, (2.21) et (2.24) impliquent :

$$\frac{1}{h}\left(\psi_h(nh + h) - \psi_h(nh)\right) \leqslant \text{constante},$$

et en prenant $v = u_h^n$ dans (2.18), on obtient grâce à (2.27) :

$$\frac{1}{h} \int_\Omega \left(Bu_h^n - Bu_h^{n+1}\right) u_h^n \, dx \leqslant \text{constante},$$

d'où :

$$\frac{1}{h}\left(\psi_h(nh) - \psi_h(nh+h)\right) \leqslant \text{constante}\,.$$

Par conséquent :

$$\left|\frac{1}{h}\left(\psi_h(nh+h) - \psi_h(nh)\right)\right| \leqslant \text{constante}\,. \tag{2.29}$$

c) *Passage à la limite*

Des estimations (2.27), (2.28), (2.29) on déduit qu'on peut extraire des sous suites (encore indexées par h) telles que :

$$\begin{array}{llll}
\Pi_h(u_h) & \to u & \text{dans} & L^\infty(0, T; V) \text{ faible } *\,, \\
\Pi_h(Bu_h) & \to v & \text{dans} & L^\infty(0, T; L^3) \text{ faible } *\,, \\
D_h\,\Pi_h(Bu_h) & \to \dfrac{dv}{dt} & \text{dans} & L^\infty(0, T; V') \text{ faible } *\,, \\
\Pi_h(Au_h) & \to \chi & \text{dans} & L^\infty(0, T; V') \text{ faible } *\,, \\
\psi_h & \to \psi & \text{dans} & C^0([0, T]; \mathbb{R})\,;
\end{array}$$

(ainsi $\psi(0) = \int_\Omega |u_0|^{3/2}\,dx$, $\psi(T) = \lim\limits_{N\to\infty} \int_\Omega |u_h^N|^{3/2}\,dx$).

En reprenant la démonstration de [7], on obtient :

$$v = Bu, \ \frac{d}{dt}(Bu) + \chi = f \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T; V'),\ \chi = Au\,;$$

ce qui termine la démonstration du théorème 2.1.

II.2. Régularité de la solution faible

Une estimation a priori supplémentaire va nous permettre d'établir le résultat de régularité suivant :

PROPOSITION 2.2 : *Si u est la solution précédemment trouvée, alors :*

$$u \in C^0([0, T]; L^{3/2}(\Omega))\,, \tag{2.30}$$

$$|u|^{-1/4}\frac{du}{dt} \in L^2(Q)\,. \tag{2.31}$$

Démonstration : On considère la suite (u_h^n) définie par (2.17), (2.18). D'après (2.26) et l'estimation (2.27),

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{h}\int_\Omega (Bu_h^{n+1} - Bu_h^n)(u_h^{n+1} - u_h^n)\,dx \leqslant \text{constante}\,,$$

d'où, avec (2.1),

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{h} \int_\Omega \left(\frac{u_h^{n+1}}{\sqrt{|u_h^{n+1}|}} - \frac{u_h^n}{\sqrt{|u_h^n|}} \right) (u_h^{n+1} - u_h^n)\, dx \leqslant \text{constante} .$$

Utilisant l'inégalité dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{|x-y|^2}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \leqslant \left(\frac{x}{\sqrt{|x|}} - \frac{y}{\sqrt{|y|}} \right)(x-y) ,$$

on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N-1} h \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{|u_h^{n+1}|} + \sqrt{|u_h^n|}} \left[\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{h} \right]^2 dx \leqslant \text{constante} . \tag{2.32}$$

Soit w_h la fonction étagée de $[0, T]$ dans $L^3(\Omega)$ définie par :

$$w_h(t) = |u_h^{n+1}|^{1/2} + |u_h^n|^{1/2} \quad \text{si} \quad nh < t \leqslant (n+1)\,h, n = 0, \dots, N-1 ,$$
$$w_h(0) = |u_h^1|^{1/2} + |u_0|^{1/2} .$$

Posons :

$$s_h = \frac{1}{w_h^{1/2}} D_h\, \Pi_h(u_h) .$$

D'après (2.32) (resp. (2.27)) s_h (resp. w_h) est bornée dans $L^2(Q)$ (resp. $L^3(Q)$). On en déduit, avec l'inégalité suivante :

$$\int_0^T \left(\int_\Omega |w_h|^{3/4} |s_h|^{3/2} dx \right) dt \leqslant \left(\int_0^T \|w_h\|_{L^3(\Omega)}^3 \right)^{1/4} \left(\int_0^T \|s_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{3/4} ,$$

$D_h\, \Pi_h(u_h)$ est bornée dans $L^{3/2}(Q)$.

Appliquant le théorème d'Ascoli à la suite $\Lambda_h(u_h)$, on a pour une suite extraire :

$$\begin{array}{lll} \Lambda_h(u_h) & \text{converge vers } u & \text{dans} \quad L^{3/2}(Q) , \\ \dfrac{d}{dt} \Lambda_h(u_h) & \text{converge vers } \dfrac{du}{dt} & \text{dans} \quad L^{3/2}(Q) \text{ faible} , \end{array}$$

d'où (2.30). De la convergence de $\Pi_h(u_h)$ vers u dans $L^{3/2}(Q)$, on déduit

$$\begin{array}{lll} w_h & \text{converge vers } 2\,|u|^{1/2} & \text{dans} \quad L^3(Q) , \\ w_h^{1/2} & \text{converge vers } \sqrt{2}|u|^{1/4} & \text{dans} \quad L^6(Q) , \end{array}$$

Alors, si s est la limite (dans $L^2(Q)$ faible) d'une suite extraire de s_h, on a :

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} |u|^{-1/4} \frac{du}{dt} \in L^2(Q) .$$

Remarque 2.4 : On vient aussi de montrer que $\frac{du}{dt} \in L^{3/2}(Q)$. Notons qu'on peut déduire ce résultat de (2.31), (2.9) et de l'inégalité de Hölder :

$$\int_\Omega \left| \frac{du}{dt} \right|^{3/2} dx\, dt = \int_Q (|u|^{3/8}) \left(\frac{1}{|u|^{3/8}} \left| \frac{du}{dt} \right|^{3/2} \right) dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_Q |u|^{3/2} dx\, dt \right)^{1/4} \left(\int_Q \frac{1}{\sqrt{|u|}} \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dx\, dt \right)^{3/4}$$

II.3. Un résultat d'unicité

On a un résultat d'unicité dans une classe de fonctions régulières, donné par le théorème suivant.

THÉORÈME 2.2 : *Il n'existe, au plus, qu'une solution de* (2.7), (2.8), *possédant la régularité :*

$$\frac{d}{dt}(Bu) \in L^1(Q) . \tag{2.33}$$

Démonstration : Soient u_1 et u_2 deux fonctions vérifiant (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) et (2.33). On a :

$$\frac{d}{dt}(Bu_1) - \frac{d}{dt}(Bu_2) + Au_1 - Au_2 = 0 \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T; V') . \tag{2.34}$$

Soit pour $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon = \text{sign}_\varepsilon (u_1 - u_2)$, où sign_ε est la régularisée de la fonction sign :

$$\begin{array}{lll} \text{sign}(y) = 1 \quad \text{si} \quad y > 0 , & \text{sign}_\varepsilon(y) = 1 & \text{si} \quad y > \varepsilon , \\ \text{sign}(y) = -1 \quad \text{si} \quad y < 0 , & \text{sign}_\varepsilon(y) = y/\varepsilon & \text{si} \quad |y| \leqslant \varepsilon , \\ & \text{sign}_\varepsilon(y) = -1 & \text{si} \quad y < -\varepsilon . \end{array}$$

On a bien : $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; V \cap L^\infty(\Omega))$, et

$$(Au_1 - Au_2, u_\varepsilon) = \int_\Omega (F(\nabla u_1) - F(\nabla u_2)) \cdot \nabla (u_1 - u_2) \times$$
$$\times (\text{sign}'_\varepsilon (u_1 - u_2))\, dx \geqslant 0 ,$$

d'où, avec (2.34),

$$\int_0^{T'} \left(\frac{d}{dt}(Bu_1) - \frac{d}{dt}(Bu_2), u_\varepsilon \right) dt \leqslant 0 \quad \forall T', 0 < T' \leqslant T,$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{T'} \int_\Omega \left(\frac{d}{dt}(Bu_1) - \frac{d}{dt}(Bu_2) \right) u_\varepsilon \, dx \, dt \leqslant 0 .$$

On fait maintenant tendre ε vers 0 ; on obtient :

$$\int_0^{T'} \int_\Omega \left(\frac{d}{dt}(Bu_1) - \frac{d}{dt}(Bu_2) \right) \operatorname{sign}(u_1 - u_2) \, dx \, dt \leqslant 0 ,$$

ou encore, puisque B est monotone,

$$\int_0^{T'} \int_\Omega \left(\frac{d}{dt}(Bu_1 - Bu_2) \right) \operatorname{sign}(Bu_1 - Bu_2) \, dx \, dt \leqslant 0$$

or, pour $w \in L^1(0, T' ; L^1(\Omega))$ tel que $\frac{dw}{dt} \in L^1(0, T' ; L^1(\Omega))$ on montre (par régularisation et passage à la limite) :

$$\int_0^{T'} \int_\Omega \frac{dw}{dt} \operatorname{sign}(w) \, dx \, dt = \int_\Omega |w(x, T')| \, dx - \int_\Omega |w(x, 0)| \, dx .$$

Ainsi .

$$\int_0^{T'} |Bu_1(x, T') - Bu_2(x, T')| \, dx \leqslant 0 \quad \forall T', 0 < T' \leqslant T,$$

d'où $Bu_1 = Bu_2$ qui implique $u_1 = u_2$, car $\phi > 0$ et $x \to \frac{x}{\sqrt{|x|}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

II.4. Un cas d'existence et d'unicité d'une solution positive du problème (*P*)

Établissons d'abord un lemme qui permet de donner un sens à la condition aux limites du problème (P) (dans $C^0([0, T] ; W^{-1/3, 3}(\Gamma))$) lorsque la solution de (2.7), (2.8) vérifie $\frac{d}{dt}(Bu) \in L^2(Q)$. On suppose ici que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d \leqslant 6$, dont la frontière Γ est de classe C^2 par morceaux.

LEMME 2.2 : *Soit* $E = (q \in (L^3(\Omega))^d\,;\ \operatorname{div} q \in L^2(\Omega))$, *muni de la norme* $\|q\|_E = \|q\|_{(L^3(\Omega))^d} + \|\operatorname{div} q\|_{L^2(\Omega)}$, *qui en fait un espace de Banach. Pour* $q \in E$, *on peut définir de manière unique la trace normale* T_ν *de* q *sur* Γ *par :*

$$(2.35)\qquad \begin{aligned} &T_\nu q \in W^{-1/3,3}(\Gamma)\,, \\ &(T_\nu q, v|_\Gamma) = \int_\Omega q \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega v \operatorname{div} q \quad \forall v \in V\,. \end{aligned}$$

L'application T_ν *est linéaire continue de* E *dans* $W^{-1/3,3}(\Gamma)$ *et sa restriction à* $(C^1(\bar\Omega))^d$ *coïncide avec la trace normale au sens usuel.*

Démonstration : Soit $\phi \in W^{1/3,3/2}(\Gamma)$; on peut associer à ϕ un relèvement $v \in V$, vérifiant $v|_\Gamma = \phi$ et tel que l'application $\phi \to v$ soit linéaire continue de $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$ dans V. On vérifie que, pour q et ϕ fixés, la quantité : $\int_\Omega q \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega v \operatorname{div} q\, dx$ (qui a un sens compte tenu de l'injection de Sobolev $V \subset L^2(\Omega)$ lorsque $d \leqslant 6$) est indépendante du choix du relèvement ; en effet, si $v_1, v_2 \in V$ et $v_1|_\Gamma = v_2|_\Gamma = \phi$, alors $v_1 - v_2 \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$ et le résultat est immédiat par densité de $D(\Omega)$ dans $W_0^{1,3/2}(\Omega)$. Donc $\phi \to \int_\Omega q \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega v \operatorname{div} q\, dx$ est une forme linéaire continue sur $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$ et par conséquent,

$$\int_\Omega q \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega v \operatorname{div} q\, dx = (T_\nu q, \phi)\,, \quad T_\nu q \in W^{-1/3,3}(\Gamma)\,,$$

où (,) désigne le produit de dualité entre $W^{-1/3,3}(\Gamma)$ et $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$. Il est facile de voir que l'application T_ν ainsi définie est linéaire continue de E dans $W^{-1/3,3}(\Gamma)$. Soit maintenant $q \in (C^1(\bar\Omega))^d$; on a :

$$(2.36)\qquad (T_\nu q, v|_\Gamma) = \int_\Omega q \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega v \operatorname{div} q\, dx = \\ = \int_\Gamma q \cdot \nu\, v|_\Gamma\, d\sigma \quad \forall v \in C^1(\bar\Omega)\,.$$

Or les traces des fonctions de $C^1(\bar\Omega)$ forment un sous-espace dense de $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$ et l'égalité (2.36) a donc lieu pour tout $v \in V$. Il s'ensuit que $T_\nu q = q \cdot \nu$, $\forall q \in (C^1(\bar\Omega))^d$. Enfin, $(C^1(\bar\Omega))^d$ étant dense dans E (*cf.* [16]), T_ν est donc définie par (2.35) de manière unique.

Le lemme suivant montre l'existence d'une solution positive (resp. négative) de (2.7), (2.8) lorsque la donnée initiale et la donnée aux limites sont positives (resp. négatives). On dira que g est positive (resp. négative) si :

$$(g(t), v\,|_\Gamma) \geqslant 0 \text{ (resp. } \leqslant 0), \quad \forall v \in V, v \geqslant 0 \text{ p.p. dans } \Omega\,;\, \forall t \in [0, T]\,.$$

LEMME 2.3 : *Si,*

$$\inf\text{ess}\, u_0 > -\infty \quad \textit{et} \quad g \textit{ est positive}\,, \tag{2.37}$$

alors, la solution u de (2.7), (2.8) *donnée par le théorème* 2.1 *vérifie :*

$$u(y) \geqslant \inf\text{ess}\, u_0 \text{ p.p. } \textit{dans } Q\,.$$

Démonstration : Montrons que la suite (u_h^n) définie par (2.17), (2.18) vérifie :

$$u_h^n(x) \geqslant \inf\text{ess}\, u_0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

On pose $u_{oi} = \inf\text{ess}\, u_0$.
Pour $n = 1$, on prend $v_\varepsilon = \text{sign}_\varepsilon^-\ (u_h^1 - u_{oi})$ dans (2.18) avec $\varepsilon > 0$ et $\text{sign}_\varepsilon^-$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{sign}_\varepsilon^-\ (\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda \geqslant 0\,, \\ \lambda/\varepsilon & \text{si} \quad -\varepsilon \leqslant \lambda \leqslant 0\,, \\ -1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant -\varepsilon\,. \end{cases}$$

On obtient :

$$\frac{1}{h}\int_\Omega (Bu_h^1 - Bu_{oi})\, v_\varepsilon\, dx + \int_\Omega F(\nabla u_h^1)\,.\,\nabla v_\varepsilon\, dx = \\ = (f_h^0, v_\varepsilon) + \frac{1}{h}\int_\Omega (Bu_0 - Bu_{oi})\, v_\varepsilon\, dx\,.$$

On vérifie que :

$$\int_\Omega F(\nabla u_h^1)\,.\,\nabla v_\varepsilon\, dx \geqslant 0\,, \quad \forall \varepsilon > 0\,, \text{ d'où, avec (2.37)}\,,$$

$$\frac{1}{h}\int_\Omega (Bu_h^1 - Bu_{oi})\, v_\varepsilon\, dx \leqslant 0\,. \tag{2.38}$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de passer à la limite dans (2.38) quand ε tend vers 0 ; ce qui donne :

$$\frac{1}{h}\int_\Omega (Bu_h^1 - Bu_{oi})\, \text{sign}^-(u_h^1 - u_{oi})\, dx \leqslant 0\,, \quad \text{avec}$$

$$\text{sign}^-\ (\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda \geqslant 0\,, \\ -1 & \text{si} \quad \lambda < 0\,. \end{cases}$$

Comme :

$$(Bu_h^1 - Bu_{oi})\ \text{sign}^-\ (u_h^1 - u_{oi}) = (Bu_h^1 - Bu_{oi})^-\ ,$$

on déduit :

$$(u_h^1 - u_{oi})^- = 0\,,$$

c'est-à-dire,

$$u_h^1(x) \geqslant u_{oi}\ \text{p.p. dans}\ \Omega\,.$$

Par récurrence on montre que :

$$u_h^n(x) \geqslant u_{oi}\ \text{p.p. dans}\ \Omega\,.$$

Remarque 2.5 : *Si* sup ess $u_0 < +\infty$ et g négative, alors $u(y) \leqslant$ sup ess u_0 p.p. dans Q.

Des théorèmes 2.1, 2.2, et lemmes 2.1, 2.3 on déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 2.3 : *On suppose que* inf ess $u_0 > 0$ *et* g *positive. Alors, il existe une fonction* u *et une seule telle que :*

(2.39) $$u \in L^\infty(0, T; V)\,,$$

(2.40) $$\frac{d}{dt}(Bu) \in L^\infty(0, T; V') \cap L^2(Q)\,,$$

(2.41) $$u(y) \geqslant \text{inf ess}\ u_0\ \text{p.p.}\ \textit{dans}\ Q\,,$$

et u *vérifiant :*

(2.42) $$\frac{d}{dt}(Bu) - \text{div}\,(F(\nabla u)) = 0 \quad \textit{dans} \quad L^2(Q)\,,$$

(2.43) $$u(x, 0) = u_0(x) \quad \textit{dans} \quad \Omega\,,$$

(2.44) $$F(\nabla u)\,.\,\nu = g \quad \text{dans} \quad C^0([0, T]\,;\, W^{-1/3, 3}(\Gamma))\,.$$

Remarque 2.6 : Dans le cas général nous ne savons pas montrer l'existence d'une solution faible de (2.7), (2.8) possédant la régularité (2.33). Il serait intéressant d'étudier le cas u_0 positive et g négative et de voir à quelles conditions supplémentaires sur les données a-t-on existence et unicité d'une solution positive du problème (P). Dans le cas 1-D, on peut donner une réponse partielle à la question. La solution u de (2.7), (2.8), obtenue par la méthode constructive du théorème 2.1, satisfait à la propriété de continuité : $u \in C(\bar{Q})$. En effet, cette propriété se déduit de la condition $u \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1, 3/2}(Q)$, selon le raisonnement suivant. $u \in L^\infty(0, T; V)$ entraîne que, pour presque tout $t \in\ ]0, T[$, $u(t)$ est höldérienne d'ordre $\frac{1}{3}$ en x, puisque, comme $\Omega \subset \mathbb{R}$, $V \subset C^{0,1/3}(\bar{\Omega})$, où $C^{0,1/3}(\bar{\Omega})$ est l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$, holdériennes d'ordre $\frac{1}{3}$, muni de la norme :

$$\|v\| = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)| + \sup_{(x,y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^{1/3}} .$$

Il résulte alors du théorème d'Ascoli et de la continuité de u de $[0, T]$ dans $L^{3/2}(\Omega)$ que $u \in C(\bar{Q})$. Si inf ess $u_0 > 0$, alors on a existence locale (en temps) et unicité d'une solution positive, sans condition de positivité de g.

III. EXTENSION DES RÉSULTATS. APPLICATIONS

III.1. Données initiale et aux limites moins régulières

On suppose que les données initiale et aux limites du problème (P) vérifient seulement :

(3.1) $$u_0 \in L^{3/2}(\Omega), \quad g \in L^3(0, T; W^{-1/3,3}(\Gamma)) .$$

Dans ces conditions, $f \in L^3(0, T; V')$ étant définie par (2.6), on a le :

THÉORÈME 3.1 : *Sous l'hypothèse* (3.1), *il existe une fonction u telle que :*

(3.2) $$u \in L^{3/2}(0, T; V), \frac{d}{dt}(Bu) \in L^3(0, T; V'),$$

(3.3) $$\frac{d}{dt}(Bu) + Au = f \quad dans \quad L^3(0, T; V') .$$

(3.4) $$u(0) = u_0 .$$

Démonstration : On régularise les données, c'est-à-dire que l'on construit deux suites $u_{0\varepsilon}$, f_ε, tel que :

(3.5) $$u_{o\varepsilon} \in V, u_{0\varepsilon} \to u_0 \quad \text{dans} \quad L^{3/2}(\Omega),$$

(3.6) $$f_\varepsilon \in W^{1,3}(0, T; V'), f_\varepsilon \to f \quad \text{dans} \quad L^3(0, T; V') .$$

Par application du théorème 2.1, on a existence de $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; V)$, vérifiant :

(3.7) $$\left(\frac{d}{dt} Bu_\varepsilon, v\right) + (Au_\varepsilon, v) = (f, v) \quad \text{pour tout } v \in V ,$$

(3.8) $$u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon} .$$

Faisant $v = u_\varepsilon(t)$ dans (3.7), on obtient, compte tenu de (3.5), (3.6) : u_ε bornée dans $L^{3/2}(0, T; V)$, d'où l'on tire :

$$Bu_\varepsilon \text{ borné dans } L^3(Q),\ \frac{d}{dt} Bu_\varepsilon \text{ borné dans } L^3(0, T; V').$$

Utilisant l'injection compacte de $L^3(\Omega)$ dans V', on a, pour des suites extraites indexées par ε,

$$\begin{array}{lll} u_\varepsilon & \to u & \text{dans } L^{3/2}(0, T; V) \text{ faible}, \\ Bu_\varepsilon & \to v & \text{dans } C^0([0, T]; V') \text{ et dans } L^3(Q) \text{ faible}, \\ \dfrac{d}{dt} Bu_\varepsilon & \to \dfrac{dv}{dt} & \text{dans } L^3(0, T; V') \text{ faible}, \\ Au_\varepsilon & \to \chi & \text{dans } L^3(0, T; V') \text{ faible}. \end{array}$$

Par un raisonnement classique utilisant la monotonie et l'hémicontinuité des opérateurs B et A on montre $v = Bu$, puis, $\chi = Au$. D'où le théorème.

Remarque 2.7 : Il n'existe, au plus, qu'une solution de (3.3), (3.4), possédant la régularité : $\frac{d}{dt}(Bu) \in L^1(Q)$. La démonstration est celle du théorème 2.2. La technique de cette démonstration permet d'établir, pour des données, initiale et aux limites, positives (resp. négatives), l'existence d'une solution positive (resp. négative) de (3.3), (3.4).

III.2. Applications

III.2.1. *Conditions aux limites du type « puits »*

Dans ce paragraphe, Ω désigne un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$, $1 \leqslant d \leqslant 3$, ayant une frontière extérieure Γ_{ext} et une frontière intérieure Γ_{int} régulières. Il s'agit de trouver u solution du problème (P_0) :

$$(3.9) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi \frac{u}{\sqrt{|u|}}\right) - \operatorname{div} F(\nabla u) = 0 \quad \text{dans} \quad Q = \Omega \times]0, T[,$$

$$(3.10) \qquad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

$$(3.11) \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_{ext} = \Gamma_{ext} \times]0, T[,$$

$$(3.12) \qquad \int_{\Gamma_{int}} F(\nabla u) \cdot \nu \, d\sigma = Q_0 \quad \text{dans} \quad]0, T[,$$

$$(3.13) \qquad u|_{\Gamma_{int}} = \text{constante inconnue},$$

ϕ, K, σ vérifiant (2.1).

Pour définir une solution faible de (3.9), ..., (3.13) on introduit le sous-espace fermé de V,

$$V_0 = \left\{ v \in V \,;\, v\,|_{\Gamma_{\rm int}} \text{ est constante} \right\} ,$$

et on note A_0 l'opérateur de V_0 dans V_0' défini par :

$$(A_0\, u, v\,) = \int_\Omega F(\nabla u)\,.\,\nabla v\, dx\,, \quad \forall u, v \in V_0\,.$$

Supposons :

$$u_0 \in L^{3/2}(\Omega),\, Q_0 \in L^3(0, T)\,.$$

On définit $f_0 \in L^3(0, T\,;\, V_0')$, en posant :

$$(f_0(t), v\,) = Q_0(t)\, v\,|_{\Gamma_{\rm int}}\,, \quad \forall v \in V_0, \text{ p.p. dans }]0, T[\,.$$

Alors, comme au paragraphe précédent, on a :

PROPOSITION 3.1 : *Sous les hypothèses précédentes, il existe une fonction u telle que :*

(3.14) $$u \in L^{3/2}(0, T\,;\, V_0)\,, \quad \frac{d}{dt}(Bu) \in L^3(0, T\,;\, V_0')\,,$$

(3.15) $$\frac{d}{dt}(Bu) + A_0\, u = f_0 \quad \textit{dans} \quad L^3(0, T\,;\, V_0')\,,$$

(3.16) $$u(0) = u_0\,.$$

et il n'existe, au plus, qu'une solution de (3.15), (3.16) *possédant la régularité :* $\frac{d}{dt}(Bu) \in L^1(Q)$.

PROPOSITION 3.2 : *Si :* $\inf \operatorname{ess} u_0 > 0$ *et* Q_0 *positive, alors, le problème* (3.9), ..., (3.13) *admet une solution unique u vérifiant :*

(3.17) $$\frac{d}{dt}(Bu) \in L^2(Q)\,,$$

(3.18) $$u(y) \geq \inf \operatorname{ess} u_0 \quad \text{p.p. } \textit{dans } Q\,.$$

Remarque 3.1 : q_0 positive signifie que l'on injecte du gaz dans le gisement. En soutirage, Q_0 est négative ; se pose alors, comme au paragraphe II, la question de positivité de la solution u de (3.9), ..., (3.13) (*cf.* Remarque 2.6).

III.2.2. *Écoulements compressibles adiabatiques*

On peut généraliser les résultats précédents à l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi |u|^{r-2} u) - \operatorname{div} F(\nabla u) = 0\,, \tag{3.19}$$

pour $1 < r < r_*$, $r_* = \dfrac{3d}{2d-3}$ (d étant la dimension de l'espace, l'injection de $W^{1,3/2}(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$ est ainsi compacte).

Considérons un écoulement compressible adiabatique. La densité ρ et la pression p vérifient : $\rho = bp^{\gamma}$, avec b, γ constantes, $0 < \gamma < 1$. En posant $u = p^{\gamma+1}$, on est ramené à chercher une solution positive de l'équation (3.19), avec $r = \dfrac{2\gamma+1}{\gamma+1}$, auquel on adjoint des conditions initiale et aux limites. Comme $r = \dfrac{2\gamma+1}{\gamma+1}$, $0 < \gamma < 1$, on a $1 < r < \dfrac{3}{2}$ et par conséquent V s'injecte compactement dans $L^r(\Omega)$. Par ailleurs, bien que les formules définissant K changent, celle de F ne change pas. Les conditions assurant l'existence d'une solution faible au sens du théorème 3.1 sont alors :

$$u_0 \in L^r(\Omega),\ g \in L^3(0, T; W^{-1/3,3}(\Gamma))\,. \tag{3.20}$$

IV. LIMITE QUAND σ TEND VERS 0

Soit O l'ouvert de $L^{\infty}(\Omega)$ défini par :

$$O = \{\sigma \in L^{\infty}(\Omega)\,;\ \exists \sigma_- > 0,\ \sigma(x) \geq \sigma_- \text{ p.p. dans } \Omega\}\,,$$

et (σ_n) une suite d'éléments de O uniformément bornée dans $L^{\infty}(\Omega)$. On note F_n la fonction F associée à σ_n, A_n l'opérateur associé à F_n et u_n la solution de (2.7), (2.8), associée à σ_n par la méthode constructive du théorème 2.1 ; elle vérifie donc, (2.9), (2.10), (2.30), (2.31). Posons $W = H^1(\Omega)$ et notons A^* l'opérateur linéaire de W dans W', défini par :

$$(A^* u, v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} K \nabla u \,.\, \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in W\,. \tag{4.1}$$

Nous allons établir le résultat suivant :

THÉORÈME 4.1 : *Si* $\sigma_n \to 0$ p.p. *dans* Ω (*quand* $n + \infty$), *alors,* $u_n \to u^*$ *dans* $L^{\infty}(0, T; V)$ *faible** *et* $L^{3/2}(0, T; V)$ *fort, où* $u^* \in L^2(0, T; W)$, u^* *est la solution (unique) de :*

$$\frac{d}{dt}(Bu^*) + A^* u^* = f \quad \textit{dans} \quad L^2(0, T; W')\,, \tag{4.2}$$

$$u^*(0) = u_0\,, \tag{4.3}$$

avec :

$$\frac{d}{dt}(Bu^*) \in L^2(0, T; W'),$$

$$\text{(4.4)} \qquad \sqrt{t}\,\frac{du^*}{dt} \in L^{3/2}(Q) \quad (\textit{et donc } u^* \in C^0(]0, T]; L^{3/2}(\Omega)))\,.$$

On utilisera pour démontrer ce théorème, l'ellipticité des opérateurs A et B, au sens des lemmes suivants :

LEMME 4.1 : *Pour tout* $v, w \in V$,

(4.5)

$$(Av - Aw, v - w) \geqslant C \frac{\left[\int_\Omega |\nabla v - \nabla w|^{3/2}\,dx\right]^{4/3}}{\left[\int_\Omega \{(1+\sigma|\nabla v|)^{1/2} + (1+\sigma|\nabla w|)^{1/2} + 2\}^3\,dx\right]^{1/3}},$$

avec $C > 0$ *indépendant de* v *et* w.

LEMME 4.2 : *Pour tout* $v, w \in L^{3/2}(\Omega)$,

(4.6)

$$\left(\int_\Omega (|v| + |w|)^{3/2}\,dx\right)^{1/3} \int_\Omega (Bv - Bw)(v - w)\,dx \geqslant C\,\|v - w\|^2_{L^{3/2}(\Omega)}$$

avec $C > 0$ *indépendant de* v *et* w.

Démonstration du lemme 4.1 : Elle découle du lemme suivant (*cf.* [1]).

LEMME 4.3 : *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$(F(x) - F(y))\,.\,(x - y) \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{|x - y|^2}{(1 + |x|)^{1/2} + (1 + |y|)^{1/2} + 2},$$

F étant l'application définie dans le lemme 2.1.

Soient $v, w \in V$; on a alors :

$$\text{(4.7)} \quad [(1+\sigma|\nabla v|)^{1/2} + (1+\sigma|\nabla w|)^{1/2} + 2]\,\frac{k}{\sigma}\,(F(\sigma\nabla v) - F(\sigma\nabla w)) \times$$
$$\times (\nabla v - \nabla w) \geqslant \frac{K}{2}\,|\nabla v - \nabla w|^2 \quad \text{p.p. dans } \Omega\,.$$

On élève les deux membres de (4.7) à la puissance $\frac{3}{4}$, et après intégration, on obtient

$$\int_\Omega \{(1+\sigma|\nabla v|)^{1/2}+(1+\sigma|\nabla w|)^{1/2}+2\}^{3/4}\times$$
$$\times\left\{\frac{K}{\sigma}(F(\sigma\nabla v)-F(\sigma\nabla w)).(\nabla v-\nabla w)\right\}^{3/4}dx \geqslant$$
$$\int_\Omega\left(\frac{K}{2}\right)^{3/4}|\nabla v-\nabla w|^{3/2}dx,$$

on a

$$((1+\sigma|\nabla v|)^{1/2}+(1+\sigma|\nabla w|)^{1/2}+2))^{3/4}\in L^4(\Omega),$$
$$\left(\frac{K}{\sigma}(F(\sigma\nabla v)-F(\sigma\nabla w)).(\nabla v-\nabla w)\right)^{3/4}\in L^{4/3}(\Omega),$$

d'où, à l'aide de l'inégalité de Holder (puis en revenant a la defnition de A) :

$$\left(\int_\Omega((1+\sigma|\nabla v|)^{1/2}+(1+\sigma|\nabla w|)^{1/2}+2)^3 dx\right)^{1/4}(Av-Aw,v-w)^{3/4}\geqslant$$
$$\int_\Omega\left(\frac{K}{2}\right)^{3/4}|\nabla v-\nabla w|^{3/2}dx,$$

d'où (4 5)

Démonstration du lemme 4 2 Utilisant l'inégalité dans $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{2}(|x|+|y|)^{1/2}\left(\frac{x}{\sqrt{|x|}}-\frac{y}{\sqrt{|y|}}\right)(x-y)\geqslant|x-y|^2,$$

il vient

$$\text{(4 8)}\quad \sqrt{2}(|v|+|w|)^{1/2}(Bv-Bw)(v-w)\geqslant\phi|v-w|^2\quad \text{p p dans }\Omega$$

Alors, comme dans la démonstration du lemme 4 1, on élève les deux membres de (4 8) à la puissance $\frac{3}{4}$ et après intégration on obtient

$$\text{(4 9)}\quad \int_\Omega\phi^{3/4}|v-w|^{3/2}dx\leqslant 2^{3/8}\int_\Omega(|v|+|w|)^{3/8}\times$$
$$\times((Bv-Bw)(v-w))^{3/4}dx$$

On a

$$(|v|+|w|)^{3/8}\in L^4(\Omega),\quad [(Bv-Bw)(v-w)]^{3/4}\in L^{3/4}(\Omega),$$

on déduit donc de (4.9) et de l'inégalité de Hölder :

$$\int_\Omega \phi^{3/4} |v-w|^{3/2}\, dx \leqslant 2^{3/8} \left[\int_\Omega (|v|+|w|)^{3/2}\, dx \right]^{1/4} \times$$
$$\times \left[\int_\Omega (Bv - Bw)(v-w)\, dx \right]^{3/4},$$

d'où (4.6).

Démonstration du théorème 4.1 : Elle comprend quatre étapes.

i) *Convergence faible d'une suite extraite de* (u_n)

i.1) *Estimations a priori*

On a pour tout n :

(4.10)
$$\left(\frac{d}{dt} Bu_n(s), v \right) + (A_n u_n(s), v) = (f(s), v), \quad \forall v \in V, \text{p.p. dans }]0, T[\,,$$

(4.11) $$u_n(0) = u_0 .$$

Prenons $v = u_n(s)$ dans (4.10) ; il vient :

(4.12) $$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_\Omega \phi |u_n(s)|^{3/2} dx + (A_n u_n(s), u_n(s)) = (f(s), u_n(s)),$$

d'où, en intégrant de 0 à t,

(4.13) $$\frac{1}{3} \int_\Omega \phi |u_n(t)|^{3/2} dx + \int_0^t (A_n u_n(s), u_n(s))\, ds =$$
$$\frac{1}{3} \int_\Omega \phi |u_0|^{3/2} dx + \int_0^t (f(s), u_n(s))\, ds ;$$

mais, pour $\sigma_n \leqslant \sigma_*$ $(\sigma_* \in \mathbb{R}_+^*)$,

$$\frac{(1+\sigma_n(x) |\nabla u_n(x,s)|)^{1/2} - 1}{\sigma_n(x)} \geqslant \frac{(1+\sigma_* |\nabla u_n(x,s)|)^{1/2} - 1}{\sigma_*},$$

pour presque tout $(x, s) \in Q$, de sorte qu'avec (2.1),

(4.14) $$\int_0^t (A_n u_n(s), u_n(s))\, ds \geqslant$$
$$\geqslant K_- \int_0^t \int_\Omega \frac{(1+\sigma_* |\nabla u_n(x,s)|)^{1/2} - 1}{\sigma_*} |\nabla u_n(x,s)|\, dx\, ds$$
$$\geqslant \frac{C_1'}{\sqrt{\sigma_*}} \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n(x,s)|^{3/2} dx\, ds - \frac{C_2'}{\sigma_*^2},$$

où C_1' et C_2' sont des constantes strictement positives indépendantes de n.

Dans le second membre de (4.13), on a :

$$\forall \eta > 0\,, \quad \exists C_\eta > 0\,, \quad \text{tel que}\,,$$

$$(4.15) \quad \int_0^t (f(s), u_n(s))\, ds \leq \frac{2\eta}{3} \int_0^t \|u_n(s)\|_V^{3/2}\, ds + \frac{C\eta}{3} \int_0^t \|f(s)\|_{V'}^3\, ds\,;$$

choisissant convenablement η (en tenant compte de (2.1) et (4.14)), (4.13) donne alors :

$$(4.16) \quad \|u_n(t)\|_{L^{3/2}(\Omega)}^{3/2} + C_3' \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n(x, s)|^{3/2}\, dx\, ds \leq C_4' \int_0^t \|u_n(s)\|_{L^{3/2}(\Omega)}^{3/2}\, ds + C_5'\,,$$

C_3', C_4', C_5', constantes strictement positives indépendantes de n. On en déduit en utilisant le lemme de Gronwall :

$$(4.17) \quad \|u_n(t)\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leq \text{constante}, \quad \forall t \in [0, T]\,,$$

$$(4.18) \quad \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n(x, s)|^{3/2}\, dx\, ds \leq \text{constante}, \quad \forall t \in]0, T]\,.$$

De (4.12), (4.13) et (2.1) il résulte alors :

$$(4.19) \quad \|\psi_n\|_{W^{1,1}(]0, T[)} \leq \text{constante}\,,$$

où ψ_n est la fonction numérique continue, définie sur $[0, T]$ par :

$$\psi_n(t) = \frac{1}{3} \int_\Omega \phi\, |u_n(t)|^{3/2}\, dx\,,$$

et,

$$(4.20) \quad \int_0^t (A_n u_n(s), u_n(s))\, ds \leq \text{constante}\,, \quad \forall t \in]0, T]\,.$$

Les estimations a priori ci-dessus ne suffisent pas pour passer à la limite, à cause du changement de comportement de la fonction F au voisinage de 0.. Pour tenir compte de cela, on introduit les sous-ensembles de Q, mesurables :

$$Q_{1,n} = \{y = (x, t) \in Q\,;\, \sigma_n(x)\,|\nabla u_n(y)| < 3\}$$
$$Q_{2,n} = \{y = (x, t) \in Q\,;\, \sigma_n(x)\,|\nabla u_n(y)| \geq 3\}$$

et on note $\chi_{1,n}$ (resp. $\chi_{2,n}$) la fonction caractéristique dans Q de $Q_{1,n}$ (resp. $Q_{2,n}$).

Ayant,

$$(1 + \sigma_n(x)\,|\nabla u_n(y)|\,)^{1/2} - 1 \geqslant \sigma_n(x)\,\frac{|\nabla u_n(y)|}{4} \quad \text{dans} \quad Q_{1,n}\,,$$

on déduit de (4.20) que :

$$\int_{Q_{1,n}} |\nabla u_n(y)|^2 \, dy \leqslant \text{constante}\,. \tag{4.21}$$

De même, la relation :

$$(1 + \sigma_n(x)\,|\nabla u_n(y)|\,)^{1/2} - 1 \geqslant 1 \quad \text{dans} \quad Q_{2,n}\,,$$

et (4.20) entraînent :

$$\int_{Q_{2,n}} \frac{1}{\sigma_n(x)}\,|\nabla u_n(y)|\, dy \leqslant \text{constante}\,. \tag{4.22}$$

Montrons maintenant que $A_n u_n$ est borné dans $L^2(0, T; W')$. Soit $v \in W$, $\|v\|_W \leqslant 1$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^t |(A_n u_n, v)|^2 \, dt \leqslant K_+ \int_Q \left| \frac{(1 + \sigma_n(x)\,|\nabla u_n(y)|\,)^{1/2} - 1}{\sigma_n(x)} \right|^2 dy\,,$$

et comme :

$$\int_Q \left| \frac{(1 + \sigma_n(x)\,|\nabla u_n(y)|\,)^{1/2} - 1}{\sigma_n(x)} \right|^2 dy \leqslant$$
$$\int_{Q_{1,n}} \left| \frac{\nabla u_n(y)}{2} \right|^2 dy + \int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n(y)|}{\sigma_n(x)}\, dy\,,$$

il vient, en utilisant (4.16) et (4.17) :

$$\|A_n u_n\|_{L^2(0, T; W')} \leqslant \text{constante}\,. \tag{4.23}$$

i.2) *Passage à la limite*

Les suites extraites étant indexées par n, il résulte des estimations (4.17), (4.18), (4.19), (4.23) et (B borné sur les bornés de $L^{3/2}(\Omega)$) que :

(4.24)	$u_n \to u^*$	dans	$L^\infty(0, T; L^{3/2}(\Omega))$	faible*,
(4.25)	$Bu_n \to v^*$	dans	$L^\infty(0, T; L^3(\Omega))$	faible*,
(4.26)	$\nabla u_n \to \nabla u^*$	dans	$L^{3/2}(0, T; (L^{3/2}(\Omega))^d)$	faible,
(4.27)	$\psi_n \to \psi^*$	dans	$L^\infty(0, T)$	faible*,
(4.28)	$A_n u_n \to A_*$	dans	$L^2(0, T; W')$	faible.

L'injection de V dans $L^{3/2}(\Omega)$ étant compacte, celle de W dans $L^{3/2}(\Omega)$ l'est donc, ainsi que sa transposée (de $L^3(\Omega)$ dans W'). Appliquant le théorème 5.1 de [12] à la suite Bu_n qui vérifie (4.25) et :

$$\left\| \frac{d}{dt} Bu_n \right\|_{L^2(0,\,T\,;\,W')} \leqslant \text{constante}\,,$$

on peut supposer que :

$$Bu_n \to v^* \quad \text{dans} \quad C^0([0, T]\,;\,V')\,. \tag{4.29}$$

De (4.24) et (4.29) on déduit (en utilisant la monotonie et la continuité de B) que :

$$v^* = Bu^*\,. \tag{4.30}$$

Appliquant l'inégalité de Young on peut écrire :

$$\int_\Omega (Bu_n(t) - Bu^*(t))\, u^*(t)\, dx \leqslant \frac{1}{3} \times$$

$$\times \left\{ \int_\Omega \phi\, |u_n(t)|^{3/2}\, dx - \int_\Omega \phi\, |u^*(t)|^{3/2}\, dx \right\} \leqslant$$

$$\int_\Omega (Bu_n(t) - Bu^*(t))\, u_n^*(t)\, dx\,, \quad \text{p.p. dans} \quad]0, T[\,, \tag{4.31}$$

d'où il résulte, en utilisant (4.29) et (4.30) :

$$\psi^*(t) = \frac{1}{3} \int_\Omega \phi\, |u^*(t)|^{3/2}\, dx \quad \text{p.p. dans} \quad]0, T[\,. \tag{4.32}$$

Montrons que $u^* \in L^2(0, T\,;\, W)$. D'après (4.21) :

$$\chi_{1,n}\, \nabla u_n \text{ est borné} \quad \text{dans} \quad L^2(0, T\,;\, (L^2(\Omega))^d)\,;$$

donc, pour une suite extraite (indexée par n),

$$\chi_{1,n}\, \nabla u_n \to s \quad \text{dans} \quad L^2(0, T\,;\, (L^2(\Omega))^d) \text{ faible}\,.$$

Mais

$$\chi_{1,n} \quad \to 1 \quad \text{dans} \quad L^2(Q)\,, \text{ puisque :}$$

$$\int_Q |\chi_{1,n} - 1|^2\, dy = \int_{Q_{2,n}} dy \leqslant \frac{1}{3} \int_{Q_{2,n}} \sigma_n\, |\nabla u_n|\, dy \leqslant C_6'\, \|\sigma_n\|_{L^3(\Omega)}\,,$$

(C_6' constante indépendante de n) qui tend vers 0 grâce au théorème de Lebesgue ; d'où on déduit avec (4.26) :

$$\chi_{1,n} \nabla u_n \to \nabla u^* \quad \text{dans} \quad L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d) \text{ faible},$$

et par conséquent $\nabla u^* \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d)$, ce qui, joint à $u^* \in L^2(0, T, L^{3/2}(\Omega))$, entraîne : $u^* \in L^2(0, T; W)$.

Montrons que $A_* = A^* u^*$. Posons :

$$\varepsilon_n = \int_0^T \gamma(t)(A_n u_n - A_n v, u_n - v)\, dt\,, \quad v \in L^2(0, T; W), \quad \text{et}$$

$$\gamma \in C^1([0, T]; \mathbb{R})\,, \quad \gamma(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]\,, \quad \gamma(0) = \gamma(T) = 0\,.$$

Grâce à la monotonie de A_n, $\varepsilon_n \geq 0$. Grâce à (4.28) :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T \gamma(t)(A_n u_n, v)\, dt = \int_0^T \gamma(t)(A_*, v)\, dt\,.$$

Appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T \gamma(t)(A_n v, v)\, dt = \int_0^T \gamma(t)(A^* v, v)\, dt\,.$$

D'autre part :

$$\text{(4.33)} \qquad \int_0^T \gamma(t)(A_n v, u_n)\, dt = \int_Q \gamma(t)\, F_n(\nabla v)\,.\,(\chi_{1,n} \nabla u_n)\, dy + \int_{Q_{2,n}} \gamma(t)\, F_n(\nabla v)\,.\,\nabla u_n\, dy\,.$$

La première intégrale du second membre de (4.33) a pour limite :

$$\int_Q \gamma(t) \frac{K}{2} \nabla u^* \nabla v\, dy = \int_0^T \gamma(t)(A^* v, u^*)\, dt\,, \quad \text{puisque :}$$

$$\chi_{1,n} \nabla u_n \to \nabla u^* \quad \text{dans} \quad L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d) \quad \text{faible},$$

et

$$\gamma F_n(\nabla v) \to \gamma \frac{K}{2} \nabla v \quad \text{dans} \quad L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d)$$

(grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue).

La deuxième intégrale du second membre de (4.33) tend vers 0 ; en effet :

$$\int_{Q_{2,n}} \gamma(t)\,|F_n(\nabla v)|\,|\nabla u_n|\,dy \leq \int_{Q_{2,n}} \gamma(t)\,K\,\frac{|\nabla v|^{1/2}}{\sqrt{\sigma_n}}\,|\nabla u_n|\,dy \leq$$

$$K_+\left[\int_{Q_{2,n}} |\gamma(t)|^3\,\frac{|\nabla v|^{3/2}}{\sqrt{\sigma_n}}\,dy\right]^{1/3}\left[\int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n|^{3/2}}{\sqrt{\sigma_n}}\,dy\right]^{2/3} \leq$$

$$K_+\left[\int_{Q_{2,n}} |\gamma(t)|^4\,|\nabla v|^2\,dy\right]^{1/4}\left[\int_{Q_{2,n}} \frac{1}{\sigma_n^2}\,dy\right]^{1/12}\left[\int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n|^{3/2}}{\sqrt{\sigma_n}}\,dy\right]^{2/3},$$

et on a :

$$\int_{Q_{2,n}} \frac{1}{\sigma_n^2}\,dy \leq \frac{1}{3}\int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n|}{\sigma_n}\,dy \leq \text{constante, (grâce à 4.17),}$$

$$\int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n|^{3/2}}{\sqrt{\sigma_n}}\,dy \leq \text{constante, qui résulte de (4.20) et de la relation :}$$

$$(1+\sigma_n(x)\,|\nabla u_n(y)|)^{1/2}-1 \geq \frac{(\sigma_n(x)\,|\nabla u_n(y)|)^{1/2}}{2} \quad \text{dans} \quad Q_{2,n}\,;$$

donc la deuxième intégrale du second membre de (4.33) est majorée par :

$$C_7'\left[\int_{Q_{2,n}} |\gamma(t)|^4\,|\nabla v|^2\,dy\right]^{1/2},$$

C_7' indépendante de n, qui tend vers 0 car $\operatorname{mes}(Q_{2,n})$ tend vers 0.

On va maintenant passer à la limite dans l'équation :

$$\int_0^T \gamma(t)(A_n u_n, u_n)\,dt = \int_0^T \gamma(t)(f, u_n)\,dt - \int_0^T \gamma(t)\left(\frac{d}{dt}Bu_n, u_n\right)dt\,.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_0^T \gamma(t)\left(\frac{d}{dt}Bu_n, u_n\right)dt = -\int_0^T \gamma'(t)\,\psi_n(t)\,dt\,;$$

il vient alors (grâce à (4.24) et (4.27)) :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \gamma(t)(A_n u_n, u_n)\,dt = \int_0^T \gamma(t)(f, u^*)\,dt + \int_0^T \gamma'(t)\,\psi^*(t)\,dt\,.$$

Comme : $u^* \in L^2(0, T ; W)$, $\frac{d}{dt}(Bu^*) \in L^2(0, T ; W')$ et $\psi^* \in L^1(0, T)$, on peut intégrer par parties de nouveau (*cf.* lemme 2 de [3]), d'où :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T \gamma(t)(A_n u_n, u_n)\, dt = \int_0^T \gamma(t)(f, u^*)\, dt -$$

$$\int_0^T \gamma(t)\left(\frac{d}{dt} Bu^*, u^*\right) dt = \int_0^T \gamma(t)(A_*, u^*)\, dt .$$

Finalement :

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = \int_0^T \gamma(t)(A_* - A^* v, u^* - v)\, dt \geqslant 0 \quad \forall v \in L^2(0, T ; W),$$

d'où il résulte, A^* étant continu, $A_* = A^* u^*$.

On a ainsi la convergence d'une suite extraite de u_n vers $u^* \in L^2(0, T ; W)$, vérifiant (4.2), (4.3) et telle que

$$\frac{d}{dt}(Bu^*) \in L^2(0, T ; W').$$

ii) *Régularité de u^**

Par souci de simplification de la démonstration nous raisonnons formellement. Les estimations a priori qui suivent peuvent être établies rigoureusement à partir du schéma de semi-discrétisation (2.17), (2.18) (de façon analogue au point *b*.2 de la démonstration du théorème 2.1 ; *cf.* aussi la démonstration de la proposition 2.2). On a :

$$\int_\Omega \phi \frac{s}{\sqrt{|u_n|}} \left|\frac{du_n}{ds}\right|^2 dx + s \int_\Omega F_n(\nabla u_n) \cdot \nabla\left(\frac{du_n}{ds}\right) = \left(f, s\frac{du_n}{ds}\right).$$

Mais,

$$\int_\Omega F_n(\nabla u_n) \cdot \nabla\left(\frac{du_n}{ds}\right) dx = \frac{d}{ds} J_{A_n}(u_n),$$

où J_{A_n} est la fonctionnelle associée à A_n par (2.13), et,

$$\left[f, s\frac{du_n}{ds}\right] = \frac{d}{ds}[f, su_n] - \left[\frac{df}{ds}, su_n\right] - [f, u_n],$$

d'où, en intégrant de 0 à t,

$$(4.29)\qquad \int_0^t \int_\Omega \phi \frac{s}{\sqrt{|u_n|}} \left| \frac{du_n}{ds} \right|^2 dx\, ds + tJ_{A_n}(u_n(t)) = \int_0^t J_{A_n}(u_n)\, ds + $$
$$+ t(f(t), u_n(t)) - \int_0^t s\left(\frac{df}{ds}, u_n \right) ds - \int_0^t (f, u_n)\, ds .$$

Le premier membre de (4.34) est alors majoré par :

$$\int_0^t J_{A_n}(u_n)\, ds + t\, \|f(t)\|_{V'}\, \|u_n(t)\|_V +$$
$$+ \left[\int_0^t \|u_n\|_V^{3/2}\, ds \right]^{2/3} \left\{ \left[\int_0^t \|f\|_{V'}^3\, ds \right]^{1/3} + t \left[\int_0^t \left\| \frac{df}{ds} \right\|_{V'}^3 ds \right]^{1/3} \right\} .$$

Par ailleurs,

$$J_{A_n}(u_n) \leq (A_n u_n, u_n) ,$$

et donc, grâce à (4.20),

$$\int_0^t J_{A_n}(u_n)\, ds \leq \text{constante} ,$$

ce qui, joint à (4.17), (4.18), implique que le premier membre de (4.34) est majoré par :

$$\text{constante} + t\, \|f(t)\|_{V'}\, \|u_n(t)\|_V .$$

On a donc :

$$(4.35)\qquad tJ_{A_n}(u_n(t)) \leq \text{constante} + t\, \|f(t)\|_{V'}\, \|u_n(t)\|_V .$$

De plus, la fonction $\phi_y(y \in \mathbb{R}_+)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\phi_y(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1+xy}{x^2} \right)^{3/2} - \frac{y}{x}$$

étant décroissante, on a pour $\sigma_n \leq \sigma_*$ $(\sigma_* \in \mathbb{R}_+^*)$,

$$J_{A_n}(u_n(t)) \geq \frac{2}{3} \int_\Omega K \frac{(1 + \sigma_* |\nabla u_n|)^{3/2}}{\sigma_*^2}\, dx - \int_\Omega K \frac{|\nabla u_n|}{\sigma_*}\, dx ,$$

et par suite, en utilisant (2.15),

$$(4.36)\qquad J_{A_n}(u_n(t)) \geq C_1^* \int_\Omega |\nabla u_n|^{3/2}\, dx - C_2^* ,$$

C_1^* et C_2^* étant strictement positives et indépendantes de n. Appliquant maintenant l'inégalité de Young au deuxième terme du second membre de (4.35), on tire alors de (4.35), (4.36) et (4.17) que :

$$u_n \text{ est borné dans } L^\infty(0, T ; V) . \tag{4.37}$$

Le second membre de (4.34) est finalement borné, d'où il résulte :

$$\int_0^T \int_\Omega \phi \frac{t}{\sqrt{|u_n|}} \left| \frac{du_n}{dt} \right|^2 dx\, dt \leqslant \text{constante} , \tag{4.38}$$

et a fortiori :

$$\sqrt{t} \frac{du_n}{dt} \quad \text{est borné dans } L^{3/2}(Q) . \tag{4.39}$$

De (4.37) on déduit qu'une suite extraite de u_n converge vers u^* dans $L^\infty(0, T ; V)$ faible *. Procédant ensuite comme en i) on démontre que :

$$u^* \in L^\infty(0, T ; W) , \tag{4.40}$$

$$\frac{d}{dt}(Bu^*) \in L^\infty(0, T ; W') . \tag{4.41}$$

Par ailleurs, on déduit de (4.39) que :

$$\sqrt{t} \frac{du^*}{dt} \in L^{3/2}(Q) , \tag{4.42}$$

puis de (4.38),

$$\sqrt{t} |u^*|^{-1/4} \frac{du^*}{dt} \in L^2(Q) . \tag{4.43}$$

(4.42) implique que $\dfrac{du^*}{dt} \in L^{3/2}(\delta, T ; L^{3/2}(\Omega)) \ \ \forall \delta > 0$,
et par suite, compte tenu de (4.17),

$$u^* \in C^0([\delta, T] ; L^{3/2}(\Omega)) , \quad \forall \delta > 0 . \tag{4.44}$$

iii) *Unicité de la solution du problème* (4.2), (4.3)

Soient u_1^* et u_2^* deux solutions de (4.2), (4.3), vérifiant (4.40), (4.41) et (4.42). On a

$$\frac{d}{dt}(Bu_1^*) - \frac{d}{dt}(Bu_2^*) + A^*(u_1 - u_2) = 0 \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T ; W') . \tag{4.45}$$

Considérons pour $s \in]0, T[$ la fonction :

$$v_s(t) = \begin{cases} -\int_t^s (u_1^*(\tau) - u_2^*(\tau))\, d\tau\,, & \text{si} \quad t < s\,, \\ 0 \quad \text{sinon}\,. \end{cases}$$

En multipliant (4.45) par $v_s(t)$ (s fixé), il vient :

$$\int_0^s \left(\frac{d}{dt}(Bu_1^* - Bu_2^*), v_s(t) \right) dt + \int_0^s (A^* v_s'(t), v_s(t))\, dt = 0\,,$$

soit, par intégration par parties :

$$-\int_0^s (Bu_1^* - Bu_2^*, u_1^* - u_2^*)\, dt - \frac{1}{2}\int_\Omega K |\nabla v_s(0)|^2\, dx = 0\,,$$

puisque : $\qquad Bu_1^*(0) = Bu_2^*(0) \quad \text{et} \quad v_s(s) = 0\,.$

On a donc :

$$\int_0^s (Bu_1^* - Bu_2^*, u_1^* - u_2^*)\, dt = 0\,.$$

Or (*cf.* Lemme 4.2),

$$\int_0^s (Bu_1^* - Bu_2^*, u_1^* - u_2^*)\, dt \geq C \int_0^s \|u_1^* - u_2^*\|_{L^{3/2}(\Omega)}^2\, dt\,,$$

où C est une constante strictement positive, donc :

$$u_1^* = u_2^* \quad \text{p.p. dans } [0, s]\,,$$

s étant quelconque, d'où le résultat.

Le problème (4.2), (4.3) admettant une *solution unique* alors la *suite initiale* u_n converge vers u^* dans $L^\infty(0, T; V)$ faible*.

iii) *Convergence dans* $L^{3/2}(0, T; V)$ *fort*

Des considérations de i) et ii) il résulte que :

$$\begin{aligned} (A_n u_n - A_n u^*, u_n - u^*) &\to 0 \quad \text{dans} \quad L^1(0, T)\,, \\ (Bu_n - Bu^*, u_n - u^*) &\to 0 \quad \text{dans} \quad L^1(0, T)\,, \end{aligned}$$

or (*cf.* Lemmes 4.1 et 4.2)

$$\begin{aligned} (Bu_n - Bu^*, u_n - u^*) &\geq C' \int_\Omega |u_n - u^*|^{3/2}\, dx\,, \\ (A_n u_n - A_n u^*, u_n - u^*) &\geq C' \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u^*|^{3/2}\, dx\,, \end{aligned}$$

où C' est une constante strictement positive indépendante de n, donc :

$$u_n \to u^* \quad \text{dans} \quad L^{3/2}(0, T ; V) \quad \text{fort} ;$$

ce qui termine la démonstration du théorème 4.1.

REFERENCES

[1] Y. Amirat, *Analyse et Approximation d'Écoulements en Milieu Poreux n'Obéissant pas à la loi de Darcy,* Rapport INRIA n° 435, juillet 1985.

[2] D. G. Aronson, *Regularity Properties of Flows Through Porous Media,* SIAM J. Appl. Math., 1969, 461-467.

[3] A. Bamberger, *Étude d'une Équation Doublement Non Linéaire,* J. Func. Anal., 24, 2, 1977, 148-155.

[4] H. Brezis, G. Crandall, *Uniqueness of Solution of the Initial-Value Problem for* $u_t - \Delta\phi(u) = 0$, J. Math. Pures et Appl., 58, 1979, 153-163.

[5] L. A. Cafarelli, A. Friedman, *Continuity of the Density of a Gas in a Porous Medium,* Trans. Amer. Math. Soc., 252, 1979, 99-113.

[6] Energy Ressources Conservation Board, *Theory and Practice of the Testing of Gas Wells,* Third Edition, Alberta, 1975.

[7] O. Grange, F. Mignot, *Sur la Résolution d'une Équation et d'une Inéquation Parabolique Non Linéaires,* J. Func. Anal., Vol. 11, 1, 1972, 77-92.

[8] K. H. Guppy, H. Cinco-Ley, H. J. Ramey Jr, F. Samaniego-V, *Non Darcy-Flow in Wells with Finite-Conductivity Vertical Fractures,* Soc. Pet. Eng. J., October 1982, 681-698.

[9] S. A. Holditch, P. A. Morse, *The Effects of Non-Darcy Flow on the Behaviour of Hydraulically Fractured Gas Well,* J. Pet. Tech., October 1976, 1169-1178.

[10] D. D. Joseph, D. A. Nield, G. Papanicolaou, *Nonlinear Equation Governing Flow in a Saturated Porous Medium,* Water Resources Research, 1982, Vol. 18, 14, 1049-1052.

[11] K. S. Kadi, *Non-Darcy Flow in Dissolved Gas-Drive Reservoirs,* SPE 9301, 1980.

[12] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution de Problèmes aux Limites Non Linéaires,* Dunod, Paris, 1969.

[13] C. S. Matthews, D. G. Russell, *Pressure Buildup and Flow Tests in Wells, Monograph Series,* Soc. Pet. Eng. of AIME, Dallas, 1967.

[14] A. E. Scheidegger, *The Physics of Flow Through Porous Media,* Third Edition, University of Toronto Press, 1974.

[15] G. W. Swift, O. K. Kiel, *The Prediction of Gas-Well Performance Including the Effect of Non-Darcy Flow,* J. Pet. Tech., July 1962, 791-798.

[16] R. Temam, *Problèmes Mathématiques en Plasticité,* Gauthier-Villars, Paris, 1983.

[17] R. A. Wattenbarger, H. J. Ramey Jr, *Gas Well Testing with Turbulence, Damage and Wellbore Storage,* Soc. Pet. Eng., 1968, 99-109.