M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique

A. El Badia

Identifiabilité d'un coefficient variable en espace dans une équation parabolique

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 21, nº 4 (1987), p. 627-639

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1987__21_4_627_0>

© AFCET, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 21, n° 4, 1987, p. 627 à 639)

IDENTIFIABILITÉ D'UN COEFFICIENT VARIABLE EN ESPACE DANS UNE ÉQUATION PARABOLIQUE (*)

par A. EL BADIA [1]

Résumé. — *Dans ce papier, on discute l'identifiabilité du coefficient* α *dans l'équation parabolique* $\partial_t u - \partial_x(\alpha(x)\, \partial_x u) = f$, *à partir de la connaissance de la valeur de la solution en un seul point* $x_p \in [0, 1]$.

La fonction f et les données aux limites sont supposées connues.

Le problème de l'identifiabilité est formulé comme un problème inverse de Sturm-Liouville.

Abstract. — *In this paper we discuss identifiability of the spatially varying parameter* α *in the parabolic equation* $\partial_t u - \partial_x(\alpha(x)\, \partial_x u) = f$, *from the knowledge of the values of the state at one point* $x_p \in [0, 1]$.

The function f and the boundary data are supposed to be known.

The identifiability problem is formuled as an inverse Sturm-Liouville problem.

INTRODUCTION

L'identifiabilité du potentiel q dans l'équation parabolique $\partial_t u - \partial_{xx}^2 u + qu = f$, a fait l'objet de plusieurs travaux, notamment :

A. Pierce en 1979, avec un seul point de mesure : $x_p = 0$.

R. Murayama, T. Suzuki en 1980, dans le cas des conditions aux limites de type Neumann $\partial_n u = 0$, un second membre f nul et une donnée initiale inconnue. Les mesures sont données en deux points : $x_p = 0$ et $x_p = 1$.

T. Suzuki en 1982 a donné des résultats d'identifiabilité et de non identifiabilité, par les mêmes conditions que ci-dessus, mais toujours à partir de deux points de mesures : $x_p = 0$ et $x_p = 1$.

R. Murayama en 1980 a étudié l'identifiabilité de α dans l'équation $\partial_t u - \partial_x(\alpha(x)\, \partial_x u) = 0$, dans le cas où $\partial_n u = 0$, mais il a utilisé implicitement l'unicité de α [5].

(*) Reçu en juin 1986.

[1] Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du C.N.R.S. 7, avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse Cedex, France, et Laboratoire d'Analyse numérique de l'Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, Toulouse Cedex.

Dans cet article, on établit l'unicité d'un coefficient α symétrique par rapport à 1/2, à partir de la valeur de la solution en un seul point $x_p \in [0, 1]$.

Ce problème se ramène à un problème inverse de Sturm-Liouville.

PROBLÈME INVERSE DE STURM-LIOUVILLE

Soient q une fonction réelle continue dans l'intervalle $[0, \ell]$, h et H deux nombres réels.

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$\varphi'' + (\lambda - q)\varphi = 0 \tag{1}$$

avec les conditions aux limites :

$$\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0 \tag{2}$$

$$\varphi'(\ell) + H\varphi(\ell) = 0 . \tag{3}$$

On note le problème aux valeurs propres (1)-(3) par $E(q, h, H)$ et son spectre par $(\lambda_n)_{n \geqslant 0}$.

On pose :

$$C_s^m[0, \ell] = \{\mathcal{O} \in C^m[0, \ell] / \mathcal{O}(\ell - x) = \mathcal{O}(x) , x \in [0, \ell]\} .$$

Le théorème qui suit établit l'unicité du couple (q, h) dans le problème $E(q, h, h)$. Ce résultat a été prouvé par H. Hochstadt [2] et T. Suzuki [7] où ce dernier donne une démonstration plus courte.

THÉORÈME 1 : *Soient $(\lambda_n)_{n \geqslant 0}$, $(\mu_n)_{n \geqslant 0}$ les spectres associés respectivement aux systèmes $E(q, h, h)$, $E(p, j, j)$ où $p, q \in C_s^1[0, \ell]$.*
Si

$$\lambda_n = \mu_n \qquad \forall n \geqslant 0 ,$$

Alors

$$\begin{cases} p = q \\ j = h . \end{cases}$$

Preuve : Voir [2], [7].

On considère maintenant l'équation différentielle du second ordre :

$$(\alpha\varphi')' + \lambda\varphi = 0 \qquad \text{sur} \qquad [0, 1] \tag{4}$$

avec les conditions aux limites

$$\varphi'(0) - h\varphi(0) = 0 \tag{5}$$

$$\varphi'(1) + H\varphi(1) = 0 \tag{6}$$

on notera le système (4)-(6) par $\phi(\alpha, h, H)$ et son spectre par $(\lambda_n)_{n \geq 0}$. On suppose que $\alpha \in A = C_s^3[0,1] \cap \{\mathcal{O}/\mathcal{O}(x) \geq \alpha_0\}$, $\alpha_0 > 0$ donné, alors on a le théorème suivant :

THÉORÈME 2 : *Soient* $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ *et* $(\mu_n)_{n \geq 0}$ *les spectres associés respectivement aux systèmes* $\phi(\alpha, h, h)$ *et* $\phi(\beta, j, j)$ *où* $\alpha, \beta \in A$.

Si

$$\lambda_n = \mu_n \qquad \forall n \geq 0$$

$$\alpha(0) = \beta(0)$$

$$j = h$$

alors

$$\alpha = \beta \quad dans \quad [0,1].$$

Preuve : Par la transformation de Liouville

$$\psi(x) = a(x)\,\varphi(x), \quad \text{avec} \quad a = \alpha^{1/4}$$

$$y = \mu_\alpha(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha(\xi)}}$$

où μ_α est bijective, de réciproque μ_α^{-1} puisque :

$$\mu_\alpha'(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}} > 0$$

μ_α est continue car α l'est.

Le système $\phi(\alpha, h, h)$ se réduit à la forme $E(q, k_1, k_2)$ où

$$q = \frac{\tilde{a}''_{yy}}{\tilde{a}}, \quad \text{avec} \quad \tilde{a} = a \circ \mu_\alpha^{-1}$$

$$k_1 = \tilde{a}'_y(0) + h\tilde{a}^2(0)$$

$$k_2 = -\tilde{a}'_y(\ell) + h\tilde{a}^2(\ell), \quad \text{avec} \quad \ell = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha(\xi)}}.$$

En effet :

$$(\alpha\varphi'_x)'_x = \left[a^4(x)\left(\frac{1}{a(x)}\psi'_x(x) - \frac{\psi(x)}{a^2(x)}a'_x(x)\right)\right]'_x$$

$$= a^3(x)\,\psi''_{xx}(x) + 3\,a^2(x)\,a'_x(x)\,\psi'_x(x) - 2\,a(x)\,\psi(x)\,(a'_x(x))^2$$

$$- a^2(x)\,\psi(x)\,a''_{xx}(x) - a^2(x)\,\psi'_x(x)\,a'_x(x)$$

$$= a^3(x)\,\psi''_{xx}(x) + \psi'_x(x)[3\,a^2(x)\,a'_x(x) - a^2(x)\,a'_x(x)]$$

$$- \psi(x)[2\,a(x)(a'_x(x))^2 + a^2(x)\,a''_{xx}(x)]$$

$$= -\lambda\varphi(x)$$

d'où

$$a^3\,\psi''_{xx} + 2\,a^2\,a'_x\,\psi'_x - (a^2\,a''_{xx} + 2\,a\,(a'_x)^2) = -\,\lambda\,\frac{\psi}{a} \quad \text{dans} \quad]0, 1[\qquad (7)$$

Au moyen du changement de variable $y = \mu_\alpha(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2(x)} = \frac{1}{a^2 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}$$

$$\psi'_x(x) = (\psi \circ \mu_\alpha^{-1})'_y\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}\,(\psi \circ \mu_\alpha^{-1})'_y(y)$$

$$a'_x(x) = (a \circ \mu_\alpha^{-1})'_y\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}\,(a \circ \mu_\alpha^{-1})'_y(y)$$

$$\begin{aligned}\psi''_{xx}(x) &= \frac{1}{a^2 \circ \mu_\alpha^{-1}}\,(\psi \circ \mu_\alpha^{-1})''_{yy}\,\frac{dy}{dx} - (\psi \circ \mu_\alpha^{-1})'_y\,\frac{2}{a^3 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}\,(a \circ \mu_\alpha^{-1})'_y\,\frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{a^4 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}\,(\psi \circ \mu_\alpha^{-1})''_{yy}(y) - \frac{2}{a^5 \circ \mu_\alpha^{-1}(\mathrm{y})}\,(\psi \circ \mu_\alpha^{-1})'_y(a \circ \mu_\alpha^{-1})'_y(y)\end{aligned}$$

$$a''_{xx}(x) = \frac{1}{a^4 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}\,(a \circ \mu_\alpha^{-1})''_{yy}(y) - \frac{2}{a^5 \circ \mu_\alpha^{-1}(\mathrm{y})}\,((a \circ \mu_\alpha^{-1})'_y)^2(y)\,.$$

En reportant les expressions ci-dessus dans l'égalité (7) :

$$\begin{aligned}&a^3 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)\Bigg[\frac{1}{a^4 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}\,(\psi \circ \mu_\alpha^{-1})''_{yy} - \\ &- \frac{2}{a^5 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}\,(\psi \circ \mu_\alpha^{-1})'_y(a \circ \mu_\alpha^{-1})'_y(y)\Bigg] \\ &+ 2\,a^2 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)\,\frac{1}{a^2 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}\,(a \circ \mu_\alpha^{-1})'_y\,\frac{3}{a^2 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}\,(\psi \circ \mu_\alpha^{-1})'_y(y) \\ &- \psi \circ \mu_\alpha^{-1}(y)\Bigg[a^2 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)\Bigg(\frac{1}{a^4 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}\,(a \circ \mu_\alpha^{-1})''_{yy}(y) \\ &- \frac{2}{a^5 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}\,((a \circ \mu_\alpha^{-1})'_y)^2\Bigg) \\ &+ \frac{2\,a^2 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}{a^4 \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}\,((a \circ \mu_\alpha^{-1})'_y)^2\Bigg] = -\,\lambda\,\frac{\psi \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}{a \circ \mu_\alpha^{-1}(y)}\end{aligned}$$

d'où

$$(\psi \circ \mu_\alpha^{-1})''_{yy} - \frac{1}{a \circ \mu_\alpha^{-1}}\,(a \circ \mu_\alpha^{-1})''_{yy} = -\,\lambda\psi \circ \mu_\alpha^{-1} \quad \text{dans} \quad]0, \ell[$$

Les conditions aux limites (5) et (6) se réduisent à la forme :

$$(\psi \circ \mu_\alpha^{-1})'_y(0) - ((a \circ \mu_\alpha^{-1})'_y(0) + ha^2 \circ \mu_\alpha^{-1}(0))\, \psi \circ \mu_\alpha^{-1}(0) = 0$$
$$(\psi \circ \mu_\alpha^{-1})'_y(\ell) + (-\,(a \circ \mu_\alpha^{-1})'_y(\ell) + ha^2 \circ \mu_\alpha^{-1}(\ell))\, \psi \circ \mu_\alpha^{-1}(\ell) = 0$$

d'où le résultat en conservant la notation ψ au lieu de $\psi \circ \mu_\alpha^{-1}$.
De façon similaire, par la transformation :

$$\psi = b\varphi\,, \quad \text{où} \quad b = \beta^{1/4}$$
$$y = \mu_\beta(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\beta(\xi)}}$$

le système $\phi(\beta, j, j)$ est réduit à la forme $E(p, k_3, k_4)$ où

$$p = \frac{\tilde{b}''_{yy}}{\tilde{b}}\,, \tilde{b} = b \circ \mu_\beta^{-1}(y)$$

$$k_3 = \tilde{b}'_y(0) + j\tilde{b}^2(\ell')$$

$$k_4 = -\,\tilde{b}'_y(\ell') + j\tilde{b}^2(\ell')\,, \quad \text{avec} \quad \ell' = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\beta(\xi)}}\,.$$

La transformation de Liouville nous place dans le cadre du théorème 1, d'où l'apparition naturelle du lemme suivant :

LEMME 1 : *Dans les systèmes réduits et sous les hypothèses du théorème* 2

(i) $k_1 = k_2$, $(k_3 = k_4)$
(ii) $\ell = \ell'$
(iii) $p, q \in C_s^1[0, \ell]$.

Preuve :

i) D'après les expressions de k_1 et k_2, il suffit de vérifier que

$$\tilde{a}(\ell) = \tilde{a}(0)$$
$$\tilde{a}'_y(\ell) = -\,\tilde{a}'_y(0)$$

Par définition

$$\tilde{a} = a \circ \mu_\alpha^{-1}\,, \quad 1 = \mu_\alpha^{-1}(\ell)\,, \quad 0 = \mu_\alpha^{-1}(0)\,.$$

et par symétrie $a(1) = a(0)$, d'où $\tilde{a}(\ell) = \tilde{a}(0)$.

D'après le théorème de dérivation de fonctions composées :

$$\tilde{a}'_y = a'_x \circ \mu_\alpha^{-1}(y) \,.\, (\mu_\alpha^{-1})'_y \,,$$

$$(\mu_\alpha^{-1})'_y = \frac{1}{\mu'_\alpha \circ \mu_\alpha^{-1}} \quad \text{et} \quad a'_x(1-x) = -\, a'_x(x)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_y(\ell) &= a'_x(1) \,.\, a^2(1) \\ &= -\, a'_x(0) \,.\, a^2(0) \\ &= -\, \tilde{a}'_y(0) \,. \end{aligned}$$

Par une démonstration analogue, on obtient $k_3 = k_4$.

ii) On sait que $\sqrt{\lambda_n}\ell = n\pi + 0(1)[11]$ et puisque $\lambda_n = \mu_n$ $\forall n \geqslant 0$, on a

$$\ell - \ell' = 0\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = 0\left(\frac{1}{n}\right) \quad \forall n \geqslant 0$$

par passage à la limite quand n tend vers l'infini

$$\ell = \ell' \,.$$

iii) On rappelle que la fonction q est donnée par :

$$q = \frac{\tilde{a}''_{yy}}{\tilde{a}} \,, \quad \text{donc il est clair que si} \quad \tilde{a} \in C_s^3[0, 1] \,, \quad \text{alors} \quad q \in C_s^1[0, \ell] \,.$$

Puisque $\alpha \in C^3[0, 1]$, alors $\tilde{a} \in C^3[0, \ell]$ d'où $q \in C^1[0, \ell]$.
Il reste à vérifier que $\tilde{a}(\ell - y) = \tilde{a}(y)$, $y \in [0, \ell]$.

Par définition

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(\mu_\alpha^{-1}(\ell) - \mu_\alpha^{-1}(y)) &= \mu_\alpha(1 - \mu_\alpha^{-1}(y)) \\ &= \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha}} + \int_1^{1-\mu_\alpha^{-1}(y)} \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha}} \end{aligned}$$

par le changement de variable $z = 1 - \xi$ et la symétrie de α

$$\int_1^{1-\mu_\alpha^{-1}(y)} \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha(\xi)}} = \int_0^{\mu_\alpha^{-1}(y)} \frac{dz}{\sqrt{\alpha(1-z)}} = \int_0^{\mu_\alpha^{-1}(y)} \frac{dz}{\sqrt{\alpha(z)}} = \mu_\alpha(\mu_\alpha^{-1}(y)) = y$$

d'où :

$$\mu_\alpha(\mu_\alpha^{-1}(\ell) - \mu_\alpha^{-1}(y)) = \ell - y \quad \text{et donc} \quad \mu_\alpha^{-1}(\ell - y) = \mu_\alpha^{-1}(\ell) - \mu_\alpha^{-1}(y) \,.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\tilde{a}(\ell - y) &= a(\mu_\alpha^{-1}(\ell - y)) \quad \text{par définition .}\\ &= a(\mu_\alpha^{-1}(\ell) - \mu_\alpha^{-1}(y))\\ &= a(1 - \mu_\alpha^{-1}(y)) \quad \text{car} \quad 1 = \mu_\alpha^{-1}(\ell)\,.\\ &= a(\mu_\alpha^{-1}(y)) \quad \text{par symétrie de } a\,.\\ &= \tilde{a}(y)\end{aligned}$$

de même on montre que $p \in C_s^1[0, \ell]$.

D'après le théorème 1 :

i) $k_1 = k_3$
ii) $p = q$ sur $[0, \ell]$

or

$$\begin{aligned}k_1 = k_3 &\Leftrightarrow \tilde{a}'_y(0) + h\tilde{a}(0) = \tilde{b}'_y(0) + j\tilde{b}(0)\\ &\Leftrightarrow \tilde{a}'_y(0) + h\sqrt{\alpha(0)} = \tilde{b}'_y(0) + j\sqrt{\beta(0)}\end{aligned}$$

par hypothèse, $j = h$ et $\alpha(0) = \beta(0)$, d'où

$$\tilde{a}'_y(0) = \tilde{b}'_y(0)\,. \tag{8}$$

$$p = q \Leftrightarrow \frac{\tilde{a}''_{yy}}{\tilde{a}} = \frac{\tilde{b}''_{yy}}{\tilde{b}} \Leftrightarrow \tilde{a}''_{yy}\,\tilde{b} = \tilde{b}''_{yy}\,\tilde{a}\,(\tilde{a} > 0,\ \tilde{b} > 0)$$

par intégration par partie :

$$\tilde{a}'_y(y)\,\tilde{b}(y) - \tilde{a}'_y(0)\,\tilde{b}(0) = \tilde{b}'_y(y)\,\tilde{a}(y) - \tilde{b}'_y(0)\,\tilde{a}(0)$$

d'où

$$\tilde{a}'_y(y)\,\tilde{b}(y) = \tilde{a}(y)\,\tilde{b}'_y(y) \quad \text{d'après} \quad (8)$$

ce qui est équivalent à :

$$\frac{\tilde{a}'_y(y)}{\tilde{a}(y)} = \frac{\tilde{b}'_y(y)}{\tilde{b}(y)}\,.$$

par intégration, $\mathrm{Log}\,(\tilde{a}) = \mathrm{Log}\,(\tilde{b})$, d'où :

$$\tilde{a}(y) = \tilde{b}(y)\,, \quad y \in [0, \ell]\,. \tag{9}$$

Pour tout $y \in [0, \ell]$, il existe un x unique dans $[0, 1]$ tel que $y = \mu_\beta(x)$ et (9) peut s'écrire différemment :

$$a \circ \mu_\alpha^{-1} \circ \mu_\beta(x) = b(x), \quad x \in [0, 1]. \tag{10}$$

L'achèvement de la démonstration du théorème 2 repose sur le lemme suivant :

LEMME 2 : *Si on pose* $\rho(x) = \mu_\alpha^{-1} \circ \mu_\beta(x)$, *alors*

$$\begin{aligned} \rho'(x) &= \frac{a^2(\rho(x))}{b^2(x)}, \quad x \in [0, 1] \\ \rho(0) &= 0 \end{aligned}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \rho(0) &= \mu_\alpha^{-1} \circ \mu_\beta(0) = \mu_\alpha^{-1}(0) = 0 \\ \rho'(x) &= (\mu_\alpha^{-1} \circ \mu_\beta)'_x(x) \\ &= (\mu_\alpha^{-1})'_y(\mu_\beta(x)) \cdot (\mu_\beta)'_x(x) \end{aligned}$$

or

$$(\mu_\alpha^{-1})'_y(y) = \frac{1}{\mu'_\alpha(\mu_\alpha^{-1}(y))} = a^2(\mu_\alpha^{-1}(y))$$

d'où

$$\rho'(x) = a^2(\mu_\alpha^{-1}(\mu_\beta(x)))\frac{1}{b^2(x)}.$$

D'après (10) et le lemme ci-dessus :

$$\begin{aligned} \rho'(x) &= 1, \qquad x \in [0, 1] \\ \rho(0) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\rho(x) = x$ et par conséquent

$$\alpha = \beta \quad \text{dans} \quad [0, 1]$$

P-IDENTIFIABILITÉ DU COEFFICIENT α.

Revenons maintenant au problème initial d'identifiabilité. On considère l'équation parabolique :

$$\partial_t u - \partial_x(\alpha(x)\, \partial_x u) = f \quad \text{sur} \quad]0, 1[\times]0, T[\tag{10}$$

avec les conditions aux limites

$$\partial_x u - hu|_{x=0} = g_0(t) \quad \text{sur} \quad]0, T[\tag{11}$$

$$\partial_x u + hu|_{x=1} = g_1(t) \quad \text{sur} \quad]0, T[\tag{12}$$

et la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{sur} \quad]0, 1[\,. \tag{13}$$

on suppose que :

$$\begin{aligned} f \in L^2(0, T, H^{-1}(0, 1)) &\quad \text{connue} \\ g_0, g_1 \in L^2(0, T) &\quad \text{connues} \\ u_0(x) \in H^1(0, 1) &\quad \text{connue} \end{aligned}$$

$$\alpha \in A = \{\mathcal{O} \in C^3[0, 1]/\mathcal{O}(x) \geqslant \alpha_0, \mathcal{O}(1-x) = \mathcal{O}(x)\}\ , \quad \alpha_0 > 0 \quad \text{donnée}\,.$$

α est inconnue sauf en 0.

On note le système (10)-(13) par $I(\alpha, h, u_0)$ et sa solution $u(x, t)$, avec

$$u(x, t) = \sum_{n \geqslant 0} < u_0, \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} > e^{-\lambda_n t} \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|} + \\ + \int_0^t \sum_{n \geqslant 0} e^{-\lambda_n(t-s)} \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|} Q_n(s)\, ds$$

où

$$Q_n(s) = \left(- \left\langle f, \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} \right\rangle + \alpha(0) \frac{\varphi_n(0)}{\|\varphi\|} g_0(s) + \alpha(1) \frac{\varphi_n(1)}{\|\varphi_n\|} g_1(s) \right)$$

et $(\varphi_n, \lambda_n)_{n \geqslant 0}$ est solution du système $\phi(\alpha, h, h)$

De façon similaire on considère $I(\beta, j, v_0)$ et $v(x, t)$, où $\beta \in A$.

DÉFINITION : *Soient x_i, $i = 1, \dots, P$, P points de l'intervalle $[0, 1]$ tels que $\varphi_n(x_i) \neq 0$ $\forall n \geqslant 0$ où $(\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ est la suite de fonctions propres associées à $\phi(\alpha, h, h)$. On dit que α est P-identifiable dans $[0, 1]$ si l'application :*

$$\alpha \to (u, (x_i, t)) \quad i = 1, \dots, P \quad \text{est injective}\,.$$

On rappelle deux résultats sous forme de lemmes, le premier sur les séries de Dirichlet et le second sur une équation de convolution. Ces deux résultats nous permettent de transformer l'hypothèse de la P-identifiabilité en une égalité de valeurs propres λ_n et μ_n. On sera donc placé dans le cadre du théorème 2.

LEMME 3 [9] : *Soient* $(\lambda_n)_{n \geqslant 0}$ *et* $(\eta_n)_{n \geqslant 0}$ *deux suites réelles strictement croissantes telles que* $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = \lim_{n \to +\infty} \eta_n = +\infty$.

Soient $(C_n)_{n \geqslant 0}$, $(d_n)_{n \geqslant 0}$ *deux suites bornées.*
On suppose que :

$$\sum_{n \geqslant 0} C_n e^{-\lambda_n t} = \sum_{n \geqslant 0} d_n e^{-\eta_n t}, \quad t \geqslant 0$$

si

$$C_n \neq 0 \,, d_n \neq 0 \; \forall n \geqslant 0 \,, \quad alors \quad \lambda_n = \eta_n \quad et \quad C_n = d_n, \forall n \geqslant 0 \,,$$

LEMME 4 [8] : *Soit* $\psi, Q \in L^1(0, T)$, *on suppose* $\nexists\, \varepsilon > 0$ *tel que* $Q(t) = 0$ *sur* $]0, \varepsilon[$.
Si

$$\int_0^t \psi(t-s)\, Q(s)\, ds = 0 \quad \forall t \in \,]0, T[$$

alors

$$\psi = 0 \quad \text{sur} \quad]0, T[\,.$$

Soit $\alpha \in A$; si $(\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ est la suite de fonctions propres associées à $\phi(\alpha, h, h)$ on désignera par $B(\alpha)$ le sous-espace de $L^2(0, 1)$ de fonctions non orthogonales à φ_n $\forall n \geqslant 0$.

THÉORÈME 3 : α *est* 1-*identifiable dans l'intervalle* $[0, 1]$ *dans les cas suivants* :

i) $u_0 \in B(\alpha)$

$$f = 0 \,, \quad g_0 = g_1 = 0$$

ii) $f = f_1(t)\, f_2(x)$

$$u_0 = 0 \,, \quad g_1 = 0$$

iii) $f = \delta(x)\, h(t)$

$$u_0 = 0$$
$$g_0 = 0 \quad \text{ou} \quad g_1 = 0 \,.$$

Preuve : Soient $\alpha, \beta \in A$ et $u(x, t)$, $v(x, t)$ les solutions des problèmes $I(\alpha, h, u_0)$, $I(\beta, j, v_0)$ respectivement :
Par hypothèse $h = j$ et $\alpha(0) = \beta(0)$, il suffit donc d'après le théorème 2 que $\lambda_n = \mu_n$ pour que $\alpha = \beta$ dans $[0, 1]$.

i) $u(x_1, t) = v(x_1, t) \Leftrightarrow$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\varphi_n(x_1)}{\|\varphi_n\|^2} \langle u_0, \varphi_n \rangle \, e^{-\lambda_n t} = \sum_{n \geq 0} \frac{\psi_n(x_1)}{\|\psi_n\|^2} \langle v_0, \psi_n \rangle \, e^{-\mu_n t}.$$

Par hypothèse $\langle u_0, \varphi_n \rangle \neq 0$, $\langle v_0, \psi_n \rangle \neq 0$ $\forall n \geq 0$ et puis d'après le lemme 3 : $\lambda_n = \mu_n$ $\forall n \geq 0$.

ii) $u(x_1, t) = v(x_1, t) \Leftrightarrow$

$$\int_0^t \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\varphi_n(x_1)}{\|\varphi_n\|^2} \langle f_1, \varphi_n \rangle \, e^{-\lambda_n(t-s)} - \frac{\psi_n(x_1)}{\|\psi_n\|^2} \times \right.$$
$$\left. \times \langle f_1, \psi_n \rangle \, e^{-\mu_n(t-s)} \right) f_2(s) \, ds = 0$$

on suppose $\nexists\, \varepsilon > 0 / f_2 = 0$ sur $]0, \varepsilon[$ et que $f_1 \in B$, alors d'après le lemme 4 puis le lemme 3 : $\lambda_n = \mu_n$ $\forall n \geq 0$

iii) $u(x_1, t) = v(x_1, t) \Leftrightarrow$

$$\int_0^t \sum_{n \geq 0} \frac{\varphi_n(x_1)}{\|\varphi_n\|} e^{-\lambda_n(t-s)} \left(- \frac{\varphi_n(i)}{\|\varphi_n\|} h(s) + \alpha(i) \frac{\varphi_n(i)}{\|\varphi_n\|} g_i(s) \right) ds =$$
$$= \int_0^t \sum_{n \geq 0} \frac{\psi_n(x_1)}{\|\psi_n\|} - e^{-\mu_n(t-s)} \left(- \frac{\psi_n(i)}{\|\psi_n\|} h(s) + \beta(i) \frac{\psi_n(i)}{\|\psi_n\|} g_i(s) \right) ds$$

avec $i = 1$ ou 0.
Par hypothèse $\alpha(0) = \beta(0)$, mais on a aussi $\alpha(1) = \beta(1)$ par symétrie. On suppose $\nexists\, \varepsilon > 0 / \alpha(i)\, g_i - h = 0$ sur $]0, \varepsilon[$, alors d'après le lemme 4 puis le lemme 3 : $\lambda_n = \mu_n$ $\forall n \geq 0$.

COROLLAIRE : *Pour $h = 0$, α est 1-identifiable dans l'intervalle $[0, 1]$ dans les cas suivants* :

i) $f = f_1(x)\, f_2(t)$

$$u_0 = \text{Cte} \qquad g_0 = g_1 = 0$$

ii) $f = \delta(x)\, h(t)$

$$u_0 = \text{Cte} \qquad g_0 = 0 \quad \text{ou} \quad g_1 = 0 .$$

Preuve : Pour $h = 0$, $\lambda = 0$ est solution du problème aux valeurs propres $\phi(\alpha, 0, 0)$ de fonction propre associée $\varphi = 1$.

En effet :

$$(\alpha\varphi')' = 0 , \quad \text{d'où} \quad \alpha\varphi'(x) = \alpha\varphi'(0) = 0 ,$$

puisque

$$\alpha \geqslant \alpha_0 > 0 \; \varphi(x) = \varphi(0) = 1 \,.$$

d'où :

$$\sum_{n \geqslant 0} \langle u_0, \varphi_n \rangle \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|^2} e^{-\lambda_n t} = u_0 \sum_{n \geqslant 0} \langle 1, \varphi_n \rangle \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|^2} e^{-\mu_n t}$$
$$= u_0 \quad \text{car} \quad u_0 = \text{Cte} \,.$$

le reste de la démonstration est rigoureusement le même que pour le théorème 3.

CONCLUSION

Nous avons établi dans cet article des conditions d'identifiabilité d'un coefficient α symétrique par rapport à $x = 1/2$, dans l'équation parabolique $\partial_t u - \partial_x(\alpha(x)\, \partial_x u) = f$, pour certaines conditions vérifiées par f, par la donnée initiale et les conditions aux limites. Ces résultats reposent sur la connaissance de la mesure en un seul point x_p quelconque dans l'intervalle $[0, 1]$. Le cas où α est quelconque est traité dans [10].

REFERENCES

[1] I. M. GEL'FAND and B. LEVITAN (1955), *On the determination of a differential equation from its spectral fonction.* Amer. Math. Soc. Translations, Serie 2, vol. 1, pp. 253-304.

[2] H. HOCHSTADT (1973), *The inverse Sturm-Liouville problem.* Communication on Pure and Applied Mathematiques, vol. XXVI, pp. 716-729.

[3] H. HOCHSTADT (1976), *On the determination of the density of a vibrating string from spectral data.* J. of Math. Analysis and Applications 55, pp. 673-685.

[4] A. MIZUTANI (1984), *On the inverse Sturm-Liouville problem.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A, Math., 31, pp. 319-350.

[5] R. MURAYAMA (1981), *The Gel'fand and Levitan theory and certain inverse problem.* J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. 1A, Math, 28, pp. 317-330.

[6] A. PIERCE (1979), *Unique identification of eigenvalues and coefficients in a parabolic problem.* SIAM J. Control and Optimization, vol. 17, n° 4, July.

[7] T. SUZUKI (1985), *On the inverse Sturm-Liouville problem for spatialy symmetric operators,* I. J. of Differential Equations, 56, pp. 165-194.

[8] E. C. TITCHMARSH (1938), *Introduction to the theory of Fourier integrals,* Oxford University Press, London.

[9] M. COURDESSES, M. POLIS, M. AMOUROUX (1981), *On the identifiability of parameters in a class of parabolic distributed systems.* IEEE Trans. Automat. Control, vol. 26, avril, n° 2.

[10] A. EL BADIA, *Thèse Université Paul Sabatier*, Toulouse (décembre 1985).

[11] R. COURANT and D. HILBERT (1953), *Methods of Math. Phys.*, vol. I, Interscience, New York.

[12] T. SUZUKI (1983), *Uniqueness and nonuniqueness in an inverse problem for the parabolic equation.* J. of Differential Equations, 47, pp. 296-316.