

ROLAND DURIER

**Meilleure approximation en norme vectorielle
et théorie de la localisation**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 21, n° 4 (1987), p. 605-626

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1987__21_4_605_0

© AFCET, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MEILLEURE APPROXIMATION EN NORME VECTORIELLE ET THÉORIE DE LA LOCALISATION (*)

par Roland DURIER ⁽¹⁾

Communiqué par F. ROBERT

Résumé. — *Cet article étudie, en dimension finie, la meilleure approximation stricte d'un point dans un sous-espace affine pour une norme vectorielle régulière, au sens de F. Robert. On y souligne les liens avec le problème de localisation multicritère. On obtient ainsi des caractérisations de l'ensemble des meilleurs approximaux stricts. On montre la validité en dimension 2 et 3 et la non-validité en général en dimension au moins 4 de la conjecture de F. Robert sur la convexité-compacité de ce même ensemble. Enfin on établit des conditions suffisantes pour que cet ensemble soit fermé, ou compact, ou convexe compact.*

Abstract. — *This paper is devoted to the study, in a finite dimensional space, of the strictly best approximation of a point to an affine set with respect to a regular vectorial norm, in the sense of F. Robert. Connections with multicriteria location problems are emphasized. We thus obtain characterizations of the set of strictly best approximants. We show the validity in dimension 2 and 3 and the non-validity in general in dimension at least 4 of F. Robert's conjecture on convexity-compactness of this set. Sufficient conditions are then given such that this set is closed, or compact, or convex-compact.*

INTRODUCTION

La meilleure approximation au sens d'une norme vectorielle est une généralisation naturelle du concept usuel de meilleure approximation au sens d'une norme classique ; la minimisation d'un seul critère y est remplacée par la recherche de minima de Pareto ou points efficaces.

Une première étude de ce sujet est présentée par F. Robert dans [14] : la préoccupation principale est l'examen de la convexité et de la compacité de

(*) Reçu en avril 1986

(¹) Laboratoire d'Analyse Numérique, Université de Bourgogne, B.P. 138, 21004 Dijon Cedex, France

l'ensemble, noté S , des meilleurs approximaux stricts d'un point de \mathbb{R}^n dans un sous-espace affine Z , au sens d'une norme vectorielle régulière. Outre la régularité de la norme, deux conditions sont décrites qui, prises ensemble, assurent la convexité et la compacité de S ; par ailleurs plusieurs exemples en dimension 2 ou 3 conduisent à la conjecture selon laquelle les deux conditions ci-dessus sont superflues.

Notre travail porte sur le même sujet. D'abord nous reprenons l'étude des conditions suffisantes de [14] et montrons qu'elles correspondent en fait à une situation très particulière. De plus nous prouvons la validité de la conjecture émise dans [14], relative à la compacité et la convexité de S en dimension 2 ou 3.

Par contre nous établissons ensuite qu'une telle propriété n'a pas lieu en général en dimension au moins 4. A cet effet nous donnons des exemples où, pour une norme vectorielle régulière, l'ensemble S n'est pas convexe, respectivement n'est pas fermé. L'outil essentiel pour construire des contre-exemples est fourni par un résultat nouveau : les problèmes de recherche de points efficaces en théorie de la localisation sont en fait des problèmes de meilleure approximation relativement à une norme vectorielle régulière, du moins à une bijection affine près entre espaces affines.

Enfin, utilisant des idées développées par ailleurs ([6 et 7]) dans le cadre de la théorie de la localisation, nous donnons deux nouvelles descriptions de l'ensemble S . L'une, valable en général, permet d'établir des conditions suffisantes pour que l'ensemble S étudié soit fermé. L'autre, valable lorsque la norme vectorielle est polyédrique, permet de montrer qu'alors S est toujours compact et qu'il est convexe lorsque Z est un hyperplan.

L'intérêt de ces deux descriptions dépasse sans doute l'usage qui en est fait ici. C'est pourquoi elles font l'objet des deux Théorèmes 1 et 2, alors que les divers types de conditions suffisantes permettant d'affirmer que S est convexe compact, ou compact ou fermé sont cités dans les Propositions 1 à 7.

Les méthodes employées dans ce travail se rattachent d'une part à la géométrie des espaces normés, d'autre part à l'optimisation convexe. Les résultats sont de nature théorique mais la traduction en terme de meilleure approximation en norme vectorielle de problèmes de localisation n'est peut-être pas sans intérêt pratique.

Outre [14], aucun article sur le sujet proprement dit envisagé ici n'a été publié. La structure de l'ensemble des points efficaces dans le cadre général de l'optimisation multicritère ou de l'optimisation vectorielle a été étudiée notamment dans [2, 10, 12, 20], mais avec la préoccupation essentielle de montrer sa connexité ; [21] est un ouvrage de synthèse. Pour ce qui concerne la théorie de la localisation des résultats liant l'ensemble des points efficaces à des questions de convexité se trouvent dans [9, 16 et 18].

Le présent article est divisé en 5 paragraphes essentiels, consacrés

successivement à l'examen de quelques situations où S est convexe compact (§ 2), à l'étude du lien avec des problèmes de localisation (§ 3), à une description de S valable en général (§ 4) et enfin à l'étude de S pour une norme vectorielle polyédrique (§ 5). Des notions de base sont rappelées au § 1 et une brève conclusion est donnée au § 6.

1. NOTIONS DE BASE

DÉFINITION 1 : Soient k et n deux entiers vérifiant $n \geq k \geq 2$. On donne k sous-espaces X_1, \dots, X_k de \mathbb{R}^n , tous distincts de $\{0\}$, \mathbb{R}^n étant la somme directe

$$\mathbb{R}^n = X_1 \oplus \dots \oplus X_k.$$

On donne sur chaque X_i une norme γ_i .

Pour x dans \mathbb{R}^n , qui s'écrit de manière unique $x = x_1 + \dots + x_k$, avec x_i dans X_i , on note γ l'application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^k définie par

$$\gamma(x) = (\gamma_1(x_1), \dots, \gamma_k(x_k)).$$

L'application γ ainsi associée aux k espaces X_i et aux k normes γ_i est une norme vectorielle régulière de taille k sur \mathbb{R}^n .

On notera que γ vérifie les propriétés usuelles d'une norme, l'inégalité devant être comprise avec l'ordre défini sur \mathbb{R}^k par les inégalités composante à composante.

Cette définition est équivalente, pour une norme vectorielle régulière, à celle de [13 et 14] ; le concept de norme vectorielle non régulière ne sera pas envisagé ici.

Remarque 1 : Dans cet article, comme dans la définition ci-dessus, l'indice i (ainsi que l'indice j) décrira, sauf avis contraire, l'ensemble des entiers $\{1, \dots, k\}$.

DÉFINITION 2 : Une norme vectorielle régulière associée aux normes γ_i est dite polyédrique si chaque γ_i est polyédrique, c'est-à-dire a une boule unité qui est un polytope.

Avec les données de la Définition 1, on note π_i la projection de \mathbb{R}^n sur X_i parallèlement à la somme $\bigoplus_{j \neq i} X_j$, et on a, pour x dans

$$\mathbb{R}^n, \quad x_i = \pi_i(x).$$

DÉFINITION 3 : Soit γ une norme vectorielle régulière de taille k sur \mathbb{R}^n et soit Z une partie non vide de \mathbb{R}^n , différente de \mathbb{R}^n et ne contenant pas 0.

On appelle ensemble des meilleurs approximants stricts de 0 dans Z selon γ (terminologie de [14]) l'ensemble des minima de Pareto ou des points efficients (terminologie de l'optimisation multicritère [11, 21]), les critères étant les restrictions à Z de $\gamma_i \circ \pi_i$ pour $i = 1, \dots, k$ — c'est-à-dire l'ensemble des points x dans Z tels qu'il n'existe aucun \bar{x} dans Z vérifiant $\gamma_i(\bar{x}_i) \leq \gamma_i(x_i)$ pour tout i , avec une inégalité stricte pour un indice j au moins.

L'ensemble ainsi défini sera noté $S(\gamma, Z)$ ou plus simplement S s'il n'y a pas ambiguïté. Il est clair en outre que si γ' est définie par

$$\gamma'(x) = (w_1 \gamma_1(x_1), \dots, w_k \gamma_k(x_k))$$

avec des w_i strictement positifs, on a $S(\gamma', Z) = S(\gamma, Z)$.

Dans cet article on suppose que Z est un sous-espace affine de \mathbb{R}^n , différent de \mathbb{R}^n , non réduit à un point et ne contenant pas 0 et que γ est une norme vectorielle régulière de taille k sur \mathbb{R}^n associée aux k espaces X_i et aux k normes γ_i .

On notera que la situation envisagée dans [14] où 0 appartient à Z et où on étudie l'ensemble des meilleurs approximants stricts dans Z d'un point non situé dans Z est équivalente, à une translation près, à la situation décrite ci-dessus.

Il est bien connu [11] que si M_w désigne l'ensemble des points qui minimisent sur Z la fonction $w_1 \gamma_1 \circ \pi_1 + \dots + w_k \gamma_k \circ \pi_k$, avec $w_i > 0$ pour tout i — qu'on note $w > 0$ — alors M_w , qui est un convexe compact non vide, est inclus dans S . Il en résulte en particulier que S est non vide.

Des caractérisations de S qui ne sont que des formulations différentes de la Définition 3 mais sont utilisées par la suite, sont énoncées dans la :

PROPOSITION 0 : Soit x un élément de Z .

1. x est dans S si et seulement si, pour tout \bar{x} dans Z avec $\bar{x} \neq x$,

$$\text{pour tout } i \text{ on a } \gamma_i(x_i) \leq \gamma_i(\bar{x}_i)$$

ou

$$\text{il existe } j \text{ tel que } \gamma_j(x_j) < \gamma_j(\bar{x}_j).$$

2. On note $\Lambda_i(x)$ la tranche de la restriction à Z de $\gamma_i \circ \pi_i$:

$$\Lambda_i(x) = \{y \in Z / \gamma_i(y_i) \leq \gamma_i(x_i)\},$$

et $\Gamma_i(x)$ l'ensemble de niveau de la même fonction :

$$\Gamma_i(x) = \{y \in Z / \gamma_i(y_i) = \gamma_i(x_i)\}.$$

Alors x est dans S si et seulement si :

$$\bigcap_{1 \leq i \leq k} \Lambda_i(x) = \bigcap_{1 \leq i \leq k} \Gamma_i(x).$$

Remarque 2 : La définition et ces caractérisations de l'ensemble des points efficaces sont valables en général, les fonctions $\gamma_i \circ \pi_i$ étant remplacées par des fonctions quelconques. Cette observation sera utile à diverses reprises (2.3 et § 3).

Enfin, signalons que dans cet article la terminologie et les notations utilisées seront, sauf indication contraire, celles de [15] ; les résultats classiques de l'analyse convexe dont il sera fait usage se trouvent dans [1] ou [15].

2. DES SITUATIONS OÙ S EST CONVEXE COMPACT

2.1. Le résultat de [14]

PROPOSITION 1 : (cf. Proposition 2 de [14]) : Si

$$Z \cap X_i \text{ est non vide pour tout } i \quad (1)$$

et

$$Z \text{ est de dimension } k - 1, \quad (2)$$

alors S et $\gamma(S)$ sont des $(k - 1)$ -simplexes.

Ce résultat est énoncé dans [14] sous une forme moins précise : le fait que S est un simplexe n'y est pas signalé ; de plus les hypothèses (1) et (2) correspondent en réalité à une situation plus particulière qu'il n'y paraît. Nous établissons ce point dans le lemme suivant qui, joint à la Proposition 2, redonne la Proposition 1.

LEMME 1 : Sous les hypothèses (1) et (2) de la Proposition 1, $Z \cap X_i$ est réduit à un point $\{z_i\}$; si Y_i désigne l'espace de dimension 1 engendré par z_i , alors Y_1, \dots, Y_k sont en somme directe dans l'espace Y qu'ils engendrent et Z est un hyperplan affine de Y .

Démonstration : Comme dans [14], on observe que les $Z \cap X_i$ sont des sous-espaces affines de Z , disjoints deux à deux et non vides ; pour chaque i on choisit z_i , élément de $Z \cap X_i$, et on vérifie que le sous-espace affine engendré par $\{z_1, \dots, z_k\}$ n'est autre que Z .

Mais, remarque omise dans [14], $Z \cap X_i$ est en fait réduit à un point. En effet si z'_1 est dans $Z \cap X_1$, il s'écrit $z'_1 = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_k z_k$ avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$. Comme les X_i sont en somme directe, on a $z'_1 = \alpha_1 z_1$ et $\alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, donc $\alpha_1 = 1$ et donc $z'_1 = z_1$.

Les autres assertions du lemme sont alors immédiates. \square

Pour étudier la situation de la Proposition 1, il suffit donc de supposer que, dans l'espace Y de dimension k ,

- (i) γ est une norme vectorielle régulière de taille k ,
- (ii) Z est un hyperplan affine de Y ,
- (iii) Z rencontre chacun des k sous-espaces de dimension 1 auxquels γ est associée (nécessairement en un point seulement, sinon 0 appartiendrait à Z).

Cette étude fait l'objet du paragraphe suivant où l'on montre même (Proposition 3) qu'on peut se dispenser de l'hypothèse (iii). Pour des raisons de cohérence on se place dans \mathbb{R}^n plutôt que dans un espace de dimension k .

2.2 Norme vectorielle de taille n sur \mathbb{R}^n .

PROPOSITION 2 : *Si chaque X_i est de dimension 1 (donc $k = n$) et si $Z \cap X_i$ est réduit à un point $\{z_i\}$, alors Z est un hyperplan et S est le $(n-1)$ -simplexe de sommets z_1, \dots, z_n et $\gamma(S)$ est le $(n-1)$ -simplexe de sommets $\gamma(z_1), \dots, \gamma(z_n)$.*

Démonstration : Il est clair que l'ensemble des n points z_1, \dots, z_n est affinement indépendant et que la variété affine qu'ils engendrent est Z , donc Z est un hyperplan.

On identifie chaque X_i à \mathbb{R} . En choisissant convenablement le sens et l'unité sur chaque X_i , on peut supposer qu'on a $\gamma_i(z_i) = 1$ pour tout i . Une équation de Z est alors $x_1 + \dots + x_n = 1$. Tout point du simplexe conv $\{z_1, \dots, z_n\}$ est solution du problème Min $\{|x_1| + \dots + |x_n| / x \in Z\}$ et est donc un point de S .

D'autre part si x , élément de Z , n'appartient pas à conv $\{z_1, \dots, z_n\}$, alors $I = \{i / x_i < 0\}$ et $J = \{i / x_i > 0\}$ sont non vides. On pose

$$\bar{x}_i = 0 \quad \text{si } x_i \leq 0 \quad \text{et} \quad \bar{x}_i = x_i / \alpha \quad \text{si } x_i > 0,$$

où $\alpha = \sum_{i \in J} x_i$ est strictement supérieur à 1. Alors $\bar{x} = \bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_n$ appartient à Z et on a $|\bar{x}_i| < |x_i|$ pour tout i , avec une inégalité stricte pour tous les i dans $I \cup J$. Donc (Proposition 0), x n'appartient pas à S .

Enfin, comme la restriction de γ à conv $\{z_1, \dots, z_n\}$ est affine injective, $\gamma(S)$ est le $(n-1)$ -simplexe de sommets $\gamma(z_1), \dots, \gamma(z_n)$. \square

Remarque 3 : On dit qu'un sous-espace X de \mathbb{R}^n est *faiblement parallèle* à Z si X est inclus dans le sous-espace vectoriel qui définit la direction de Z .

Des précisions à notre problème peuvent être apportées lorsque certains des espaces X_i sont faiblement parallèles à Z .

Dans le cas général, si $X_{\ell+1}, \dots, X_k$ sont faiblement parallèles à Z et si X_1, \dots, X_ℓ ne le sont pas ($\ell \geq 1$), l'application qui, à x dans Z où $x = x_1 + \dots + x_\ell + x_{\ell+1} + \dots + x_n$, associe $\bar{x} = x_1 + \dots + x_\ell$, est une surjection de Z sur un sous-espace affine \bar{Z} de Z . En notant $\bar{\gamma}$ la norme vectorielle de taille ℓ induite par γ sur $X_1 + \dots + X_\ell$, on a

$$S(\gamma, Z) = S(\bar{\gamma}, \bar{Z}).$$

En particulier si, en plus, X_1, \dots, X_ℓ sont de dimension 1 et si on a $Z \cap X_i = \{z_i\}$ pour $1 \leq i \leq \ell$, alors, d'après la Proposition 2, $S(\gamma, Z)$ est le $(\ell - 1)$ -simplexe de sommets z_1, \dots, z_ℓ et $\gamma(S)$ est le $(\ell - 1)$ -simplexe de sommets $\gamma(z_1), \dots, \gamma(z_\ell)$.

PROPOSITION 3 : *Si γ est une norme vectorielle régulière de taille n sur \mathbb{R}^n et si Z est un hyperplan de \mathbb{R}^n , alors S et $\gamma(S)$ sont des simplexes.*

Démonstration : Étant donné un sous-espace X de dimension 1 et un hyperplan affine Z ne contenant pas 0, X est soit faiblement parallèle à Z soit rencontre Z en un seul point.

On peut donc supposer que $(n - \ell)$ des espaces X_i sont faiblement parallèles à Z et que ℓ d'entre eux rencontrent Z . On a nécessairement $\ell \geq 1$, sinon le sous-espace $X_1 + \dots + X_n$ serait faiblement parallèle à Z . D'après la remarque précédente, S est un $(\ell - 1)$ -simplexe, ainsi que $\gamma(S)$. \square

2.3. Dans \mathbb{R}^n avec $\dim Z = 1$

L'espace affine Z est alors défini par la donnée d'un point \bar{z} et d'un vecteur u non nul déterminant la direction de Z . On peut supposer que seules les projections u_1, \dots, u_h ($1 \leq k \leq h$) sont non nulles. Alors tout x de Z s'écrit $x = x_1 + \dots + x_k$ avec

$$\begin{aligned} x_j &= \bar{z}_j + \lambda u_j & \text{si } 1 \leq j \leq h \\ x_i &= \bar{z}_i & \text{sinon} \end{aligned}$$

où λ décrit \mathbb{R} .

Pour étudier l'ensemble S il suffit de considérer les h fonctions φ_j définies sur \mathbb{R} par

$$\varphi_j(\lambda) = \gamma_j(\bar{z}_j + \lambda u_j), \quad 1 \leq j \leq h.$$

Chaque fonction φ_j est convexe et tend vers $+\infty$ quand $|\lambda|$ tend vers $+\infty$; il existe donc α_j et β_j avec $\alpha \leq \beta_j$ tels que $[\alpha_j, \beta_j]$ soit l'ensemble des minima de φ_j . Il est clair que notant $\alpha = \min (\alpha_j / 1 \leq j \leq h)$ et

$\beta = \max (\beta_j/1 \leq j \leq h)$, $[\alpha, \beta]$ est l'ensemble des points efficients relativement aux critères $\varphi_j (1 \leq j \leq h)$. L'ensemble S est alors le segment sur Z correspondant à $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, segment éventuellement réduit à un point.

2.4. Dans \mathbb{R}^3 avec $\dim Z = 2$

Pour $k = 3$, on applique la Proposition 1 ; S est alors un triangle, un segment ou un point.

Pour $k = 2$, on suppose $\dim X_1 = 2$ et $\dim X_2 = 1$. En vertu de la Remarque 3, on est ramené à un problème dans \mathbb{R}^2 si X_2 est faiblement parallèle à Z , et à un problème dans \mathbb{R} si X_1 est parallèle à Z . En toute hypothèse S est un segment ou un point.

Il reste enfin à examiner le cas où $Z \cap X_2 = \{z_2\}$ et $Z \cap X_1 = \Delta$, où Δ est une droite. Les courbes de niveau de la restriction à Z de $\gamma_2 \circ \pi_2$ sont deux droites de Z symétriques par rapport à Δ et la tranche correspondante est la bande limitée par ces deux droites. Les courbes de niveau de la restriction à Z de $\gamma_1 \circ \pi_1$ sont les courbes de niveau d'une norme ν dans l'espace des vecteurs d'origine z_2 et d'extrémité dans Z . D'après la Proposition 0, l'ensemble S est alors un segment joignant z_2 à un point de Δ ou un triangle de sommet z_2 , le côté opposé étant porté par Δ , selon que la boule unité de ν n'a pas ou a une face parallèle à Δ .

Il résulte des paragraphes 2.3 et 2.4 :

PROPOSITION 4 : *Dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3 , S est un ensemble convexe compact, plus précisément un triangle, un segment ou un point.*

Les exemples considérés dans [14], et plus généralement les seuls exemples qu'on peut visualiser directement, entrent dans le cadre de la Proposition 3.

3. LIEN AVEC DES PROBLÈMES DE LOCALISATION

3.1 Le problème classique de localisation multicritère

Le problème classique de localisation multicritère peut être formulé ainsi : on donne dans $\mathbb{R}^m (m \geq 1)$ k points distincts : a_1, \dots, a_k et k normes non nécessairement distinctes : $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ et on cherche à localiser un point rendant minimum les k fonctions : $x \rightarrow \gamma_i(x - a_i)$ ($1 \leq i \leq k$). Il s'agit d'un problème d'optimisation multicritère : la réponse consiste en général à proposer un point efficient ou minimum de Pareto relativement aux k critères ci-dessus. On notera E l'ensemble de ces points efficients, sans indiquer explicitement que E dépend des a_i et des γ_i .

Le modèle adapté aux préoccupations des économistes est celui où m vaut 2 et où a_1, \dots, a_k représentent des installations fixes (usines, points de vente,

...) et x un nouveau centre serveur (centre de stockage, de conditionnement, ...) à implanter. Les normes usuellement utilisées sont la norme euclidienne, la norme ℓ^1 ou certaines normes polyédriques (voir [3, 9, 17, 19] pour des études de type algorithmique et [9, 16, 18] pour des considérations plus théoriques).

Le problème de localisation ainsi défini se traduit en un problème de meilleure approximation en norme vectorielle. On considère dans

$$\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^m)^k = \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m$$

les k sous-espaces suivants dont \mathbb{R}^n est la somme directe :

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathbb{R}^m \times \{0\} \times \dots \times \{0\} \\ \hline X_k &= \{0\} \times \dots \times \{0\} \times \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

De manière naturelle la norme γ_i induit sur X_i une norme qu'on note encore γ_i ; on définit ainsi une norme vectorielle régulière γ , de taille k sur \mathbb{R}^n . Soit Z l'espace affine des éléments z de $(\mathbb{R}^m)^k$ de la forme

$$z = z(x) = (x, \dots, x) - (a_1, \dots, a_k)$$

où x décrit \mathbb{R}^m ; l'application $x \rightarrow z(x)$ est un isomorphisme d'espace affines entre \mathbb{R}^m et Z .

Le problème de localisation et le problème de meilleure approximation de 0 dans Z relativement à γ portent l'un et l'autre sur les critères : $x \rightarrow \gamma_i(x - a_i)$. L'ensemble E des points efficients pour le premier et l'ensemble S pour le second se correspondent dans l'isomorphisme $x \rightarrow z(x)$; en particulier E et S sont en même temps convexes, respectivement fermés.

Cette observation va permettre de donner des contre-exemples à la conjecture de [14]. Dans 3.2 et 3.3, la détermination de E reposera sur la caractérisation suivante, adaptée de la Proposition 0.

Pour x dans \mathbb{R}^m , on note $B_{a_i}(x)$ et $S_{a_i}(x)$ respectivement la boule et la sphère relatives à la norme γ_i , de centre a_i et de rayon $\gamma_i(x - a_i)$. Alors x est dans E si et seulement si

$$\bigcap_{1 \leq i \leq k} B_{a_i}(x) = \bigcap_{1 \leq i \leq k} S_{a_i}(x).$$

3.2. Exemples où S n'est pas convexe

1^{er} exemple : On considère le problème de localisation avec deux points distincts a et b dans \mathbb{R}^2 . Selon la traduction décrite en 3.1, le problème de

meilleure approximation associé est posé dans \mathbb{R}^4 , pour un sous-espace affine de dimension 2 et relativement à une norme vectorielle (à préciser) de taille 2. Notons que l'hypothèse (2) de la Proposition 1 n'est pas satisfaite, alors que l'hypothèse (1) l'est : dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $(b - a, 0)$ appartient à $Z \cap X_1$ et $(0, a - b)$ appartient à $Z \cap X_2$.

En prenant $a = (0, 0)$, $b = (2, 1)$, la norme ℓ^∞ pour γ_a (norme associée à a) et n'importe quelle norme ℓ^p pour γ_b (associée à b), E est l'ensemble non convexe, réunion des segments $[a, x_0]$ et $[x_0, b]$ où $x_0 = (1, 1)$.

2^e exemple : On considère le problème de localisation avec trois points distincts a , b et c dans \mathbb{R}^2 . Le problème de meilleure approximation associé est posé dans \mathbb{R}^6 , pour un sous-espace affine de dimension 2 relativement à une norme vectorielle de taille 3. Notons que l'hypothèse (2) de la Proposition 1 est satisfaite alors que l'hypothèse (1) ne l'est pas.

On prend $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$ et $c = (-1, 0)$. Si les trois normes sont la norme ℓ^1 , E est la réunion des segments $[a, c]$ et $[0, b]$; si les trois normes sont la norme ℓ^∞ , E est la réunion des segments $[a, b]$ et $[b, c]$ (voir [4] pour ces exemples et d'autres).

3.3 Exemples où S n'est pas fermé

1^{er} exemple : On considère le problème de localisation avec trois points distincts dans \mathbb{R}^3 ; le problème de meilleure approximation associé est posé dans \mathbb{R}^9 pour un sous-espace affine de dimension 3 relativement à une norme vectorielle de taille 3. Notons que ni l'hypothèse (1) ni l'hypothèse (2) de la Proposition 1 ne sont satisfaites.

On prend $a = (0, 0, 0)$, $b = (3, 0, 0)$ et $c = (1, -1, -1)$. Les normes, associées à ces trois points, γ_a , γ_b , γ_c sont définies par les boules $B_a(x_0)$, $B_b(x_0)$ et $B_c(x_0)$ décrites ci-dessous, où $x_0 = (1, -1, 0)$.

On note e_1, e_2, e_3 les trois vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soient, dans le plan des vecteurs e_1 et e_2 , K le carré de centre O dont un des sommets est x_0 , C le cercle de centre O circonscrit à K , P le parallélogramme dont le centre est b , un sommet le point x_0 dont deux côtés sont parallèles à e_1 et dont les deux autres côtés sont parallèles à la tangente à C en x_0 et enfin D le cercle de centre x_0 et de rayon 3.

- $B_a(x_0)$ est l'enveloppe convexe de C et des deux carrés : $e_3 + K$ et $-e_3 + K$.
- $B_b(x_0)$ est le parallélépipède, enveloppe convexe des deux parallélogrammes : $e_3 + P$ et $-e_3 + P$.
- $B_c(x_0)$ est le cylindre, enveloppe convexe des deux cercles : D et $-2e_3 + D$.

La boule $B_a(x_0)$ a été choisie de telle sorte que, pour $x \neq a$ dans le plan des vecteurs e_1 et e_2 , $B_a(x)$ contienne une génératrice parallèle à

e_3 si et seulement si x appartient à l'une des bissectrices des axes. Sinon la parallèle à e_3 par x ne rencontre $B_a(x)$ qu'en x . Il est clair que pour tout point x du segment semi-ouvert $[b, x_0[$ la condition

$$B_a(x) \cap B_b(x) \cap B_c(x) = S_a(x) \cap S_b(x) \cap S_c(x)$$

est satisfaite, tandis qu'elle ne l'est pas si $x = x_0$. En effet, $B_a(x_0) \cap B_b(x_0) \cap B_c(x_0)$ contient le segment $[x_0, c]$ qui n'est pas inclus dans la sphère $S_c(x_0)$.

Ainsi $[b, x_0[$ est inclus dans E , alors que x_0 n'appartient pas à E . L'ensemble E n'est donc pas fermé.

2^e exemple : On prend les mêmes données qu'au 1^{er} exemple auxquelles on ajoute $d = (0, 0, -1)$. Si C' est le cercle de centre O et de rayon 6, on choisit pour $B_d(x_0)$ l'enveloppe convexe de C' et $-2e_3 + C'$. Comme ci-dessus $[b, x_0[$ est inclus dans l'ensemble E des points efficients, alors que x_0 ne l'est pas. Dans ce cas le problème de meilleure approximation associé est posé dans \mathbb{R}^{12} pour un sous-espace affine de dimension 3 relativement à une norme vectorielle de taille 4. L'hypothèse (2) de la Proposition 1 est satisfaite, alors que l'hypothèse (1) ne l'est pas.

Remarque 4 : Nous n'avons pas pu obtenir un exemple où E n'est pas fermé et où l'hypothèse (1) de la Proposition 1 est satisfaite.

Par ailleurs pour le problème classique de localisation multicritère, l'ensemble E est toujours borné. En effet, si on a $r \geq \gamma_i(a_i)$ pour tout i , on a $\Gamma(x) \leq 2r$ pour tout x dans E , où Γ est la norme : $\max(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$.

4. UNE AUTRE DESCRIPTION DE S

4.1. Cônes Q_δ dans un espace normé

Dans [7], nous avons étudié le problème classique de localisation multicritère dans un espace réel normé N , muni de la norme ν , pour un ensemble non nécessairement fini de points a de N , les normes associées aux différents points a étant toutes égales à ν . Le point de vue géométrique adopté nous a conduit à introduire des ensembles notés Q_δ dans la publication citée.

Nous rappelons ici la définition et deux propriétés de ces ensembles Q_δ .

DÉFINITION 4 : Soit N un espace vectoriel réel muni d'une norme ν . Pour δ dans N , l'ensemble Q_δ est ainsi défini :

$$Q_\delta = \{x \in N / \forall \lambda > 0, \quad \nu(x - \lambda\delta) > \nu(x)\}.$$

Il est clair que Q_δ est vide pour $\delta = 0$; par contre pour $\delta \neq 0$, Q_δ est un cône de sommet O engendré par les points y de la sphère unité tels que la demi-droite d'origine y et de direction $-\delta$ rencontre la boule unité en y seulement.

Dans le cas où v est une norme euclidienne sur N , associée au produit scalaire (\cdot, \cdot) , Q_δ est, pour $\delta \neq 0$, le demi-espace fermé des vecteurs x tels que $(x, \delta) \leq 0$.

PROPRIÉTÉ 1 (cf. Proposition 1.5 de [7]) : Pour $\delta \neq 0$, $\text{int } Q_{-\delta}$ est l'ensemble des x pour lesquels il existe $\lambda > 0$ vérifiant $v(x - \lambda\delta) < v(x)$.

PROPRIÉTÉ 2 (cf. Proposition 1.7 et Théorème 1.1 de [7]) : Si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- (a) N est de dimension 2
- (b) N est un espace normé strictement convexe
- (c) v est une norme polyédrique,

alors tout cône Q_δ est fermé.

On observera que, reprenant l'exemple de 3.3, pour la norme définie sur \mathbb{R}^3 par la boule $B_a(x_0)$ et pour $\delta = (0, 0, -1)$, Q_δ n'est pas fermé : en effet Q_δ est le demi-espace $\xi_3 \geq 0$ privé des portions de plan définies dans les deux plans $|\xi_1| = |\xi_2|$ par $0 \leq \xi_3 \leq |\xi_1|$, où le point courant de \mathbb{R}^3 est (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

4.2 Description de S à l'aide des cônes Q_δ

On revient au cadre général de cet article.

DÉFINITION 5 : Pour δ dans \mathbb{R}^n , qui s'écrit $\delta_1 + \dots + \delta_k$ avec δ_i élément de X_i et pour $1 \leq j \leq k$, on note Q_{δ_j} le cône de X_j associé à δ_j pour la norme γ_j selon la Définition 4, c'est-à-dire :

$$Q_{\delta_j} = \{x_j \in X_j / \forall \lambda > 0, \gamma_j(x_j - \lambda\delta_j) > \gamma_j(x_j)\}$$

et on note Q_δ^j la somme des espaces X_i pour $i \neq j$ et de Q_{δ_j} , c'est-à-dire :

$$Q_\delta^j = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall \lambda > 0, \gamma_j(x_j - \lambda\delta_j) > \gamma_j(x_j)\}.$$

De la Propriété 1, il résulte que le complémentaire de $(\text{int } Q_{-\delta}^j)^c$, noté $(\text{int } Q_{-\delta}^j)$, est l'ensemble des x tels qu'on ait, pour tout $\mu > 0$, $\gamma_j(x_j - \mu\delta_j) \geq \gamma_j(x_j)$.

Les notations et l'observation ci-dessus permettent de donner l'expression suivante de S , où le symbole $\delta // Z$ signifie que l'espace engendré par δ est faiblement parallèle à Z .

THÉOREME 1 : On a

$$S = \bigcap_{\substack{\delta \neq 0 \\ \delta // Z}} \left[\left(\bigcup_i Q_\delta^i \right) \cup \left(\bigcap_j (\text{int} Q_\delta^j)^c \right) \right] \cap Z.$$

Démonstration : Soit x dans Z . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $x \notin S$

(ii) $\exists \delta \neq 0, \delta // Z,$

$$\exists \lambda, \forall i, \gamma_i(x_i - \lambda \delta_i) \leq \gamma_i(x_i) \quad \text{et} \quad \exists \mu, \exists j, \gamma_j(x_j - \mu \delta_j) < \gamma_j(x_j).$$

En effet, si x n'appartient pas à S , il existe \bar{x} dans Z , $\bar{x} \neq x$, qu'on peut écrire $\bar{x} = x - \lambda \delta$ avec $\lambda > 0$, $\delta \neq 0$ et $\delta // Z$ tel qu'on ait :

$$\forall i, \gamma_i(x_i - \lambda \delta_i) \leq \gamma_i(x_i) \quad \text{et} \quad \exists j, \gamma_j(x_j - \lambda \delta_j) < \gamma_j(x_j).$$

Donc (i) entraîne (ii) avec $\lambda = \mu$.

Réciproquement, si (ii) est satisfaite, on prend $\rho = \min(\lambda, \mu)$ et $\bar{x} = x - \rho \delta$ vérifie, grâce à la convexité des γ_i : $\gamma_i(\bar{x}_i) \leq \gamma_i(x_i)$ pour tout i , avec une inégalité stricte pour un j , donc x n'appartient pas à S .

Par ailleurs, pour x et $\delta \neq 0$ fixés, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$$(\alpha) \exists \lambda > 0, \forall i, \gamma_i(x_i - \lambda \delta_i) \leq \gamma_i(x_i)$$

$$(\beta) \forall i, \exists \lambda > 0, \gamma_i(x_i - \lambda \delta_i) \leq \gamma_i(x_i).$$

En effet (α) entraîne (β) et (β) signifie qu'à chaque i , on associe au moins un $\lambda_i > 0$; on prend $\lambda = \min_i(\lambda_i)$ et, grâce à la convexité de

γ_i , on conclut.

Donc, (i) est équivalent à

$$(iii) \exists \delta \neq 0, \delta // Z,$$

$$\forall i, \exists \lambda, \gamma_i(x_i - \lambda \delta_i) \leq \gamma_i(x_i) \quad \text{et} \quad \exists j, \exists \mu, \gamma_j(x_j - \mu \delta_j) < \gamma_j(x_j).$$

En prenant les négations on obtient : x élément de Z appartient à S si et seulement si pour tout $\delta \neq 0, \delta // Z$,

- il existe i tel qu'on ait, pour tout $\lambda < 0$,

$$\gamma_i(x_i - \lambda \delta_i) > \gamma_i(x_i), \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \text{ appartient à } \bigcup_i Q_\delta^i.$$

- ou pour tout j et pour tout $\mu > 0$ on a

$$\gamma_j(x_j - \mu\delta_j) \geq \gamma_j(x_j) \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \text{ appartient à } \bigcap_j (\text{int } Q_{-\delta}^j)^c.$$

On a là exactement l'énoncé proposé. \square

Exemple 1 : Si chaque γ_i est une norme euclidienne sur X_i , on a : $(\text{int } Q_{-\delta}^i)^c = Q_{\delta}^i$ pour tout $\delta \neq 0$ et donc

$$S = \bigcap_{\substack{\delta \neq 0 \\ \delta \in Z}} \left(\bigcup_i Q_{\delta}^i \right).$$

Ce résultat peut se formuler ainsi, en notant (\cdot, \cdot) le produit scalaire sur X_i associé à $\gamma_i : x$, élément de Z , appartient à S si et seulement s'il n'existe aucun $\delta \neq 0$, $\delta // Z$ tel que, pour tout i pour lequel $\delta_i \neq 0$, on ait $(x_i, \delta_i) > 0$.

En reprenant les données et les notations de la Proposition 2, où les normes γ_i sont définies sur des espaces de dimension 1, donc sont euclidiennes, on vérifie aisément que si x n'appartient pas à $\text{conv} \{z_1, \dots, z_n\}$, alors x n'appartient pas à S . En effet, on peut alors choisir $\delta_i > 0$ si $x_i > 0$ et $\delta_i < 0$ si $x_i < 0$ de telle sorte que δ soit faiblement parallèle à Z ; d'où le résultat.

Exemple 2 : On donne dans \mathbb{R}^m une norme γ et on note, pour δ dans \mathbb{R}^m , Q_{δ} le cône associé à δ pour cet espace normé selon la Définition 4.

On reprend le cadre du problème de localisation de 3.1 dans \mathbb{R}^m avec k points distincts a_1, \dots, a_k et $\gamma_1 = \dots = \gamma_k = \gamma$ ainsi que les notations introduites alors.

Un vecteur de $(\mathbb{R}^m)^k$ est faiblement parallèle à l'espace Z correspondant si et seulement s'il s'écrit, en tant qu'élément de l'espace produit $(\mathbb{R}^m)^k : (\delta, \dots, \delta)$ avec δ dans \mathbb{R}^m . En notant abusivement cet élément par δ , $Q_{\delta}^i \cap Z$ dans $(\mathbb{R}^m)^k$ est l'image par l'isomorphisme affine $x \rightarrow z(x)$ de $a_j + Q_{\delta}$.

La traduction du Théorème 1 fournit alors le résultat suivant, donné dans [7] sous une forme différente mais équivalente :

$$E = \bigcap_{\substack{\delta \in \mathbb{R}^m \\ \delta \neq 0}} \left(\bigcup_i (a_i + Q_{\delta}) \right) \cup \left(\bigcap_j (a_j + (\text{int } Q_{-\delta})^c) \right).$$

Il est intéressant d'examiner la signification de cette formule d'apparence complexe dans le cas où γ est une norme euclidienne sur \mathbb{R}^m . Elle devient alors

$$E = \bigcap_{\substack{\delta \in \mathbb{R}^m \\ \delta \neq 0}} \left(\bigcup_i (a_i + Q_{\delta}) \right),$$

formule qu'on peut traduire ainsi : x appartient à E si et seulement si, pour tout $\delta \neq 0$, il existe i_1 et i_2 tels que x appartienne à $a_{i_1} + Q_\delta$ et à $a_{i_2} + Q_{-\delta}$. Dans le cas considéré $(a_{i_1} + Q_\delta) \cap (a_{i_2} + Q_{-\delta})$ est la bande d'espace limitée par les deux hyperplans orthogonaux à δ passant par a_{i_1} et a_{i_2} (éventuellement confondus). La propriété énoncée signifie donc que E est l'enveloppe convexe de $\{a_1, \dots, a_k\}$.

4.3. Conditions pour que S soit fermé

PROPOSITION 5 : Si chaque X_i vérifie l'une des conditions suivantes :

- (i) X_i est de dimension 2
- (ii) X_i est un espace normé strictement convexe
- (iii) la norme γ_i de X_i est polyédrique,

alors S est fermé.

Démonstration : Avec les notations de 4.2, chaque cône Q_δ^i est fermé d'après la Propriété 2 des cônes Q_δ ; et d'après le Théorème 1, S est une intersection d'ensembles fermés. \square

La forme (i) de la condition suffisante ci-dessus pour chaque X_i explique pourquoi en 3.3 on a dû se placer dans \mathbb{R}^3 — et non dans \mathbb{R}^2 — pour décrire une situation où l'ensemble E n'est pas fermé.

5. NORME VECTORIELLE POLYÉDRIQUE

Afin d'étudier S pour une norme polyédrique (5.4 et 5.5), on donne d'abord une description de M_w pour une norme vectorielle générale (5.3). A cette fin un résultat préliminaire est nécessaire (5.2), précédé de quelques notations propres à ce paragraphe (5.1).

5.1 Notations

Dans X_i muni de la norme γ_i , on note B_i la boule unité. Pour le produit scalaire induit sur X_i par le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n et qu'on notera (\cdot, \cdot) sans référence à l'indice i , on identifie le dual de X_i à X_i lui-même ; on note B_i^0 la boule unité pour la norme γ_i^0 , duale de γ_i .

Pour $p_i \in B_i^0$, on note $N_i(p_i)$ le cône normal à B_i^0 en p_i ; on sait que, si $\gamma_i^0(p_i) < 1$, $N_i(p_i)$ est réduit à $\{0\}$ et, si $\gamma_i^0(p_i) = 1$, $N_i(p_i)$ est le cône fermé engendré par la face exposée de B_i :

$$\{x_i \in B_i / (p_i, x_i) = \gamma_i(x_i) \gamma_i^0(p_i)\}.$$

En outre on donne à \mathbb{R}^n une structure d'espace euclidien dans laquelle les sous-espaces X_1, \dots, X_k sont orthogonaux deux à deux et la projection π_i est la projection orthogonale sur X_i : chaque X_i est muni de son produit scalaire et pour $x = x_1 + \dots + x_k$ et $y = y_1 + \dots + y_k$ (x_i et y_i dans X_i) on pose

$$(x, y) = (x_1, y_1) + \dots + (x_k, y_k).$$

La notation ne doit pas faire oublier que ce produit scalaire ne coïncide pas en général avec le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

Enfin Z^\perp désignera le sous-espace vectoriel orthogonal à Z .

5.2. Un résultat préliminaire

On se donne sur chaque X_i une fonction convexe f_i à valeurs réelles et on note ψ_Z la fonction indicatrice de Z . On étudie le problème $\min (F(x)/x \in \mathbb{R}^n)$, où

$$F = f_1 \circ \pi_1 + \dots + f_k \circ \pi_k + \psi_Z,$$

et on note Σ l'ensemble des solutions de ce problème.

On utilise les notations usuelles de l'analyse convexe : ∂g désigne le sous-différentiel de g et g^* la fonction conjuguée de g .

LEMME 2 : *On suppose Σ non vide. Alors*

1. *il existe q_1, \dots, q_k (q_i dans X_i) tels que*

$$q_1 + \dots + q_k \in Z^\perp \quad \text{et} \quad \Sigma = \left(\bigoplus_i \partial f_i^*(q_i) \right) \cap Z.$$

2. *pour toute famille q_1, \dots, q_k (q_i dans X_i) telle que*

$$q_1 + \dots + q_k \in Z^\perp \quad \text{et} \quad \left(\bigoplus_i \partial f_i^*(q_i) \right) \cap Z \neq \emptyset,$$

on a

$$\Sigma = \left(\bigoplus_i \partial f_i^*(q_i) \right) \cap Z.$$

Démonstration : Si on note π_i^* le plongement de X_i dans X , les règles du calcul sous-différentiel donnent, pour x dans Z ,

$$\partial F(x) = \sum_i \pi_i^*(\partial f_i(\pi_i(x))) + Z^\perp.$$

On en déduit l'assertion suivante :

(*) pour x dans Z , x appartient à Σ si et seulement si 0 appartient à $\partial F(x)$, c'est-à-dire s'il existe q_1, \dots, q_k , dépendant a priori de x , avec

$$q_1 + \dots + q_k \in Z^\perp \quad \text{et} \quad q_i \in \partial f_i(x_i) \quad \text{c.à.d.} \quad x_i \in \partial f_i^*(q_i).$$

L'objet essentiel du lemme est de préciser que les q_i peuvent être choisis indépendamment de x .

On montre d'abord l'assertion 2. du Lemme 2. Soit \bar{x} appartenant à $\left(\bigoplus_i \partial f_i^*(q_i) \right) \cap Z$ avec $q = q_1 + \dots + q_k \in Z^\perp$; d'après (*), \bar{x} appartient à Σ . Inversement on considère x , élément de Σ . On a alors

$$(q_i, \bar{x}_i) = (q, \bar{x}_i) = (q, x_i) = (q_i, x_i)$$

en utilisant : pour $i \neq j$

$$(q_j, x_i) = (q_j, \bar{x}_i) \quad (X_i \text{ et } X_j \text{ orthogonaux})$$

et

$$(q, \bar{x}_i - x_i) = 0 \quad (q \in Z^\perp).$$

Enfin, comme q_i appartient à $\partial f_i(\bar{x}_i)$ on a, pour $1 \leq i \leq k$,

$$f_i(\bar{x}_i) + f_i^*(q_i) = (q_i, \bar{x}_i) = (q_i, x_i).$$

additionnant les k égalités ci-dessus et en remplaçant $F(\bar{x})$ par $F(x)$, on obtient

$$\sum_i [f_i(x_i) + f_i^*(q_i) - (q_i, x_i)] = 0,$$

par définition de la conjugaison convexe, chacun des termes de la somme est positif, donc nécessairement nul. On a donc :
pour tout i ,

$$x_i \in \partial f_i^*(q_i)$$

c.à.d.

$$x \in \bigoplus_i \partial f_i^*(q_i).$$

Pour établir l'assertion 1. du Lemme 2, il suffit de se donner x dans Σ , de lui associer des p_i selon (*) et d'utiliser l'assertion 2. déjà prouvée. \square

Ce résultat se rattache au « principe de décentralisation par les prix » [1].

5.3. Une description de M_w

On rappelle que M_w est l'ensemble Σ de 5.2 lorsque f_i est remplacée par $w_i \gamma_i$ selon les notations générales et que M_w est convexe compact non vide. Le Lemme 2 se traduit par :

LEMME 3 : Soit $w > 0$.

1. Il existe p_1, \dots, p_k (p_i dans X_i et $\gamma_i^0(p_i) \leq 1$) tels que

$$w_1 p_1 + \dots + w_k p_k \in Z^\perp \quad \text{et} \quad M_w = \left(\bigoplus_i N_i(p_i) \right) \cap Z.$$

2. Pour toute famille p_1, \dots, p_k (p_i dans X_i et $\gamma_i^0(p_i) \leq 1$) telle que

$$w_1 p_1 + \dots + w_k p_k \in Z^\perp \quad \text{et} \quad \left(\bigoplus_i N_i(p_i) \right) \cap Z \neq \emptyset,$$

on a

$$M_w = \left(\bigoplus_i N_i(p_i) \right) \cap Z.$$

Démonstration : Si $f_i = w_i \gamma_i$, on a, pour $q_i \in X_i$, $f_i^*(q_i) = w_i \gamma_i^*(q_i/w_i)$ et $\partial f_i^*(q_i) = N_i(p_i)$ avec $p_i = q_i/w_i$. Il suffit donc d'appliquer le Lemme 2. \square

Remarque 5 : Comme Z ne contient pas 0, la condition $\left(\bigoplus_i N_i(p_i) \right) \cap Z \neq \emptyset$ entraîne notamment qu'il existe au moins un indice i pour lequel $\gamma_i^0(p_i) = 1$; et si on pose $I = \{i / \gamma_i^0(p_i) = 1\}$, on a : $\bigoplus_i N_i(p_i) \subset \bigoplus_{i \in I} X_i$.

5.4 Description de S pour une norme vectorielle polyédrique

Dans le cas général l'ensemble $U(M_w/w > 0)$ — qui est l'ensemble des points dit *proprement efficients* [8] — est inclus dans S . Il résulte de [5] que si γ est *polyédrique*, alors

$$S = U(M_w/w > 0).$$

Le théorème suivant est ainsi une conséquence immédiate du Lemme 3.

THÉOREME 2 : *Pour une norme vectorielle polyédrique, S est la réunion des ensembles de la forme $\left(\bigoplus_i N_i(p_i)\right) \cap Z$, où les p_i sont tels qu'il existe des $w_i > 0$ vérifiant $w_1 p_1 + \dots + w_k p_k \in Z^\perp$.*

Exemple : On reprend le cadre du problème de localisation de 3.1 dans \mathbb{R}^m avec k points distincts a_1, \dots, a_k et des normes polyédriques $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, ainsi que les notations introduites alors.

On désigne par $N(p_i)$ le cône normal dans \mathbb{R}^m à la boule unité pour la norme duale de γ_i en p_i , élément de \mathbb{R}^m .

On identifie naturellement, par exemple, p_1 élément de \mathbb{R}^m et $(p_1, 0, \dots, 0)$ élément de X_1 dans $(\mathbb{R}^m)^k$. Compte tenu de ce qu'est Z , la condition $w_1 p_1 + \dots + w_k p_k \in Z^\perp$ se traduit par $w_1 p_1 + \dots + w_k p_k = 0$ (dans \mathbb{R}^m) et $\left(\bigoplus_i N_i(p_i)\right) \cap Z$ est l'image par l'isomorphisme affine $x \rightarrow z(x)$ de $\bigcap_i (a_i + N(p_i))$.

La traduction du Théorème 1 fournit alors le résultat suivant, obtenu dans [4], grâce à [6] :

E est la réunion de tous les ensembles de la forme $\bigcap_i (a_i + N(p_i))$, où les p_i sont tels qu'il existe des $w_i > 0$ vérifiant $w_1 p_1 + \dots + w_k p_k = 0$.

5.5 Propriétés de S pour une norme vectorielle polyédrique

PROPOSITION 6 : *Pour une norme vectorielle polyédrique, S est compact.*

Démonstration : Avec les hypothèses faites il y a un nombre fini de cônes $N_i(p_i)$ pour chaque i , puisque la boule B_i a un nombre fini de faces, toutes exposées d'ailleurs. S est donc une union finie d'ensembles non vides du type $\left(\bigoplus_i N_i(p_i)\right) \cap Z$ avec $w_1 p_1 + \dots + w_k p_k \in Z^\perp$. Tout tel ensemble est

un M_w , d'après le Lemme 3, donc est compact. Il en résulte que S est compact. \square

Un dernier résultat de compacité-convexité de S peut enfin être donné.

PROPOSITION 7 : *Pour une norme vectorielle polyédrique et si Z est un hyperplan, alors S est convexe compact.*

Démonstration : Il suffit de prouver, en vertu de ce qui précède, que l'ensemble $U(M_w, w > 0)$ des points proprement efficients est convexe sous l'hypothèse que Z^\perp est de dimension 1. On utilise pour cela le Lemme 3.

Soit x dans M_w et x' dans $M_{w'}$. Alors il existe des p_i et des p'_i avec

$$x \in \left(\bigoplus_i N_i(p_i) \right) \cap Z \quad \text{et} \quad w_1 p_1 + \dots + w_k p_k \in Z^\perp$$

$$x' \in \left(\bigoplus_i N_i(p'_i) \right) \cap Z \quad \text{et} \quad w'_1 p'_1 + \dots + w'_k p'_k \in Z^\perp.$$

Les vecteurs $w_1 p_1 + \dots + w_k p_k$ et $w'_1 p'_1 + \dots + w'_k p'_k$ sont non nuls et colinéaires, donc il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout i , $w_i p_i = \lambda w'_i p'_i$. Quitte à multiplier tous les w_i par une même constante strictement positive, on peut supposer $\lambda = 1$, donc $w_i p_i = w'_i p'_i$ pour tout i .

Soit $0 < \theta < 1$ et $\bar{x} = \theta x + (1 - \theta) x'$; on construit des \bar{p}_i dans X_i et des $\bar{w}_i > 0$ tels que

$$\bar{x} \in \bigoplus_i N_i(\bar{p}_i) \quad \text{c.à.d.} \quad (\bar{p}_i, \bar{x}_i) = \gamma_i(\bar{x}_i)$$

et

$$\bar{w}_1 \bar{p}_1 + \dots + \bar{w}_k \bar{p}_k \in Z^\perp.$$

On considère les sous-ensembles suivants de $\{1, \dots, k\}$:

$$\begin{aligned} I &= \{i / \gamma_i^0(p_i) = 1\} \quad \text{et} \quad J = \{i / \gamma_i^0(p_i) < 1\} \\ I' &= \{i / \gamma_i^0(p'_i) = 1\} \quad \text{et} \quad J' = \{i / \gamma_i^0(p'_i) < 1\}. \end{aligned}$$

• Si i appartient à $I \cap I'$, on a nécessairement $p_i = p'_i$ et $w_i = w'_i$; on pose $\bar{p}_i = p_i$ et $\bar{w}_i = w_i$. Alors x_i et x'_i appartenant au même cône convexe $N_i(\bar{p}_i)$, on a $\bar{x}_i \in N_i(\bar{p}_i)$.

• Si i appartient à $I \cap J'$, on a $x'_i = 0$ et $\bar{x}_i = \theta x_i$; on pose $\bar{p}_i = p_i$ et $\bar{w}_i = w_i$; on a $(\bar{p}_i, \bar{x}_i) = \gamma_i(\bar{x}_i)$.

• Si i appartient à $I' \cap J$, on a $x_i = 0$ et $\bar{x}_i = (1 - \theta) x'_i$; on pose $\bar{p}_i = p'_i$ et $\bar{w}_i = w'_i$; on a $(\bar{p}_i, \bar{x}_i) = \gamma_i(\bar{x}_i)$.

• Si i appartient à $I' \cap J'$, on a $x_i = x'_i = \bar{x}_i = 0$; on pose $\bar{w}_i = w_i$ et $\bar{p}_i = p_i$.

On a alors, pour tout i , $\bar{x}_i \in N_i(\bar{p}_i)$ et, en utilisant l'égalité $w_i p_i = w'_i p'_i$ pour $i \in I' \cap J$, on a

$$\bar{w}_1 \bar{p}_1 + \dots + \bar{w}_k \bar{p}_k = w_1 p_1 + \dots + w_k p_k \in Z^\perp.$$

Comme de plus \bar{x} est dans Z , on a bien $\bar{x} \in M_{\bar{w}}$. \square

Remarque 6 : Si les sous-espaces X_i sont tous de dimension 1 (γ norme vectorielle de taille n), alors γ est nécessairement polyédrique. On retrouve ainsi la convexité-compacité de S dans le cadre de la Proposition 3.

6. CONCLUSION

Ainsi que le souligne F. Robert dans sa thèse [13], les normes vectorielles régulières sont un outil particulièrement bien adapté au maniement des matrices décomposées en blocs. Ce concept a permis notamment d'obtenir des conditions suffisantes numériquement exploitables pour assurer la convergence des méthodes itératives classiques par blocs.

L'étude de la meilleure approximation au sens d'une norme vectorielle régulière se situe dans un champ tout différent. Nous avons examiné dans ce travail trois types de problèmes concernant l'ensemble S des meilleurs approximaux stricts d'un point dans un sous-espace affine : caractérisation de S en général et pour une norme polyédrique, conditions suffisantes pour que S soit convexe compact, ou seulement compact, ou seulement fermé, lien avec le problème classique de localisation multicritère.

Parmi les questions méritant sans doute d'être approfondies et de difficulté apparemment inégale, on peut citer : algorithmes de détermination de S , conditions nécessaires et suffisantes pour que S soit convexe compact, prise en compte de problèmes de localisation autres que le problème classique étudié ici.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. P. AUBIN, *L'analyse non linéaire et ses motivations économiques*, Masson (1984).
- [2] G. R. BITRAN, L. MAGNANTI, *The structure of admissible points with respect to cone dominance*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 29 (1979) 573-614.
- [3] L. G. CHALMET, R. L. FRANCIS and A. KOLEN, *Finding efficient solutions for rectilinear distance location problem efficiently*, *European Journal of Operational Research*, 6 (1981), 117-124.
- [4] R. DURIER, *On efficient points and Fermat-Weber problem*, Working Paper, University of Dijon (1984).
- [5] R. DURIER, *Weighting factor results in vector optimization*, Working Paper, University of Dijon (1985).
- [6] R. DURIER, C. MICHELOT, *Geometrical properties of the Fermat-Weber problem*, *European Journal of Operational Research*, 20 (1985), 332-343.

- [7] R. DURIER, C. MICHELOT, *Sets of efficient points in a normed space*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, à paraître.
- [8] A. M. GEOFFRION, *Proper efficiency and the theory of vector maximization*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 22 (1968), 618-630.
- [9] P. HANSEN, J. PERREUR, J. F. THISSE, *Location theory, dominance and convexity : some further results*, Operations Research, 28 (1980), 1241-1250.
- [10] D. T. LUC, *Structure of the efficient point set*, Proceedings of the American Mathematical Society, 95 (1985), 433-440.
- [11] H. MOULIN, F. FOGELMAN-SOULIE, *La convexité dans les mathématiques de la décision*, Hermann (1979).
- [12] P. H. NACCACHE, *Connectedness of the set of nondominated outcomes in multicriteria optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications, 25 (1978), 459-467.
- [13] F. ROBERT, *Étude et utilisation de normes vectorielles en analyse numérique linéaire*, Thèse de Doctorat es Sciences, Grenoble (1968).
- [14] F. ROBERT, *Meilleure approximation en norme vectorielle et minima de Pareto*, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, 19 (1985), 89-110.
- [15] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).
- [16] J. F. THISSE, J. E. WARD, R. E. WENDELL, *Some properties of location problems with block and round norms*, Operations Research, 32 (1984), 1309-1327.
- [17] J. E. WARD, R. E. WENDELL, *Characterizing efficient points in location problem under the one-infinity norm*, Locational analysis of public facilities, ed. J. F. Thisse et H. G. Zoller, North Holland, Studies in mathematical and managed economics, 31, (1983), 413-429.
- [18] R. E. WENDELL, A. P. HURTER, *Location theory, dominance and convexity*, Operations research, 21 (1973), 314-321.
- [19] R. E. WENDELL, A. P. HURTER, T. J. LOWE, *Efficient points in location problems*, AIEE Transactions, 9 (1973), 238-246.
- [20] R. WERNSDORFF, *On the connectedness of the set of efficient points in convex optimization problems with multiple or random objectives*, Mathematische Operationsforschung und Statistik, ser. Optimization, 15 (1984), 379-387.
- [21] D. J. WHITE, *Optimality and efficiency*, John Wiley and Sons (1982).