

MICHEL CROUZEIX

**A note on the complex and real operator  
norms of real matrices**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 20, n° 3 (1986), p. 427-428

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1986\\_\\_20\\_3\\_427\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1986__20_3_427_0)

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**A NOTE ON THE COMPLEX AND REAL  
 OPERATOR NORMS OF REAL MATRICES (\*)**

by Michel CROUZEIX (<sup>1</sup>)

*Abstract — Our purpose in this note is to show that the  $l_p$  operator norm of any real rectangular matrix is the same if we consider it as acting on complex-valued or only on real-valued vectors*

*Résumé — Cette note montre que la norme  $l_p$  d'une matrice à coefficients réels est la même, qu'on la considère comme opérant sur des vecteurs à coefficients réels ou sur des vecteurs à coefficients complexes*

We begin with a lemma.

Let us consider two vectors  $a$  and  $b$  in  $\mathbb{R}^m$  with  $a \neq 0$  and  $b \neq 0$ , and two vectors  $u$  and  $v$  in  $\mathbb{R}^n$ . For  $1 \leq p \leq +\infty$ , we use the norm :

$$\|a\|_p = \left( \sum_{i=1}^m |a_i|^p \right)^{1/p}$$

where  $a = (a_i)$ , (with the usual modification in the case  $p = +\infty$ ).

LEMMA : Let :

$$\alpha = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{\|u + zv\|_p}{\|a + zb\|_p} \quad \text{and} \quad \beta = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\|u + xv\|_p}{\|a + xb\|_p};$$

then  $\alpha = \beta$ .

*Proof* : The case when  $\alpha$  is obtained as the limit when  $|z| \rightarrow +\infty$  is obvious. In the opposite case we set, for  $p < +\infty$  :

$$f(x, y) = \|u + zv\|_p^p - \alpha^p \|a + zb\|_p^p \quad \text{where} \quad z = x + iy,$$

(\*) Received in November 1985

(<sup>1</sup>) Université de Rennes, Mathématiques, IRISA Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex

we have  $0 = \max_{x,y \in \mathbb{R}} f(x, y)$ . By an elementary computation :

$$4y \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} - ip \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = 0, \quad \text{for } y \neq 0$$

and hence :

$$y \Delta f(x, y) - p \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0, \quad \text{for } y \neq 0.$$

By the maximum principle, the maximum of  $f$  is attained for  $y = 0$ . The result in  $p = +\infty$  is obtained by using a limiting argument. ■

**COROLLARY :** For a matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  we have :

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}} \|A\xi\|_p / \|\xi\|_p = \sup_{\zeta \in \mathbb{C}^n - \{0\}} \|A\zeta\|_p / \|\zeta\|_p.$$

*Proof :* For  $\zeta \in \mathbb{C}^n$  we write  $\zeta = a + ib$  with  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ; set  $u = Aa, v = Ab$  and apply the lemma to obtain :

$$\begin{aligned} \frac{\|A\zeta\|_p}{\|\zeta\|_p} &= \frac{\|u + iv\|_p}{\|a + ib\|_p} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\|u + xv\|_p}{\|a + xb\|_p} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\|A(a + xb)\|_p}{\|a + xb\|_p} \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{\|A\xi\|_p}{\|\xi\|_p}. \end{aligned}$$