

CHRISTIAN MICHELOT

**Un algorithme pour résoudre une famille de problèmes de localisation multisources**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 20, n° 2 (1986), p. 341-353

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1986\\_\\_20\\_2\\_341\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1986__20_2_341_0)

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



## UN ALGORITHME POUR RÉSOUDRE UNE FAMILLE DE PROBLÈMES DE LOCALISATION MULTISOURCES (\*)

par Christian MICHELOT <sup>(1)</sup>

Communiqué par P J LAURENT

Résumé — *On envisage un problème de localisation non convexe et non différentiable qui est une généralisation du problème de Fermat-Weber multisources*

*On caractérise les maxima locaux de la fonction objective et cela nous permet de construire un algorithme qui a la propriété de converger de façon monotone et en nombre fini d'étapes vers un maximum local du problème*

Abstract. — *We study a non-convex and non differentiable problem which is a generalized multifacility Fermat-Weber location problem*

*We give a characterization of local maxima of the objective function and this leads to an algorithm which is monotone and converges in a finite number of steps to a local maximum of the problem*

### 1. INTRODUCTION

On envisage un problème de localisation de plusieurs installations (centres sociaux, équipements sportifs, centres de distributions, ...) en fonction de la distance qui sépare ces installations de points ou emplacements donnés (par exemple les quartiers d'une ville). Le problème s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{P} : \text{Max}_{X \in \mathbb{R}^{2n}} \Phi(X) = \sum_{i=1}^p q_i \left[ \text{Min}_{k=1,2,\dots,n} \|x_k - a_i\| \right]$$

où :

—  $p$  est le nombre d'emplacements donnés.

—  $a_i$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  qui représente les coordonnées de l'emplacement n°  $i$  et cela pour  $i = 1, 2, \dots, p$ .

(\*) Reçu en février 1984

(1) Laboratoire d'Analyse Numérique UER MIPC, Université de Dijon, 214 rue de Mirande, 21004 Dijon Cedex

—  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^{2n}$ , dont la composante  $x_k \in \mathbb{R}^2$  représente les coordonnées de la  $k$ -ième installation que l'on désire localiser, cela pour  $k = 1, 2, \dots, n$ .

—  $\| \cdot \|$  est une norme polyédrique de  $\mathbb{R}^2$ .

—  $q_i : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction strictement convexe, dérivable et strictement décroissante pour  $i = 1, 2, \dots, p$ .

L'objet de ce problème est de maximiser la fonction  $\Phi$  (par exemple  $\Phi$  peut représenter la population totale qui fréquente les diverses installations). La fonction  $q_i$  modélise l'attraction de l'installation n°  $i$ . Le choix de la norme polyédrique est fondamental et a pour but de modéliser la distance des emplacements fixés aux installations. L'hypothèse principale du modèle consiste à supposer qu'un emplacement donné  $a_i$  n'aura de liaison qu'avec l'installation la plus proche (par exemple les habitants du quartier n°  $i$  fréquenteront uniquement l'installation sportive la plus proche). Dans l'objectif  $\Phi$  la contribution de l'emplacement n°  $i$  est donc donnée par la quantité  $q_i \left[ \text{Min}_{k=1,2,\dots,n} \|x_k - a_i\| \right]$ .

Le problème  $\mathcal{P}$  est un problème de Fermat-Weber multisources généralisé. On a donné récemment [5] un algorithme fini destiné à résoudre ce problème qui est non convexe et non différentiable. Cet algorithme converge vers un maximum local strict de  $\Phi$ .

Nous donnons dans ce travail un autre algorithme qui converge en un nombre fini d'étapes vers un maximum local strict de  $\Phi$ . L'idée consiste à linéariser  $\Phi$  de façon partielle pour obtenir une famille de problèmes de Fermat-Weber multisources classiques. Une suite de ces problèmes est alors engendrée par un algorithme de type point fixe, chaque problème de la suite étant résolu par la technique proposée dans [5].

Le plan de l'article sera le suivant :

2. Notations et résultats préliminaires.
3. Étude des points critiques de  $\Phi$ .
4. Algorithme.
5. Conclusion.

## 2. NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Dans toute la suite nous noterons  $\Phi$  sous la forme :

$$\Phi(X) = \sum_{i \in I} q_i \cdot h_i(X)$$

avec

$$I = \{ 1, 2, \dots, p \}$$

$$h_i(X) = \text{Min}_{k=1,2,\dots,n} \|x_k - a_i\|.$$

La méthode de résolution du problème  $\mathcal{P}$ , proposée dans [5], fait appel à la notion de partition  $X$ -admissible de l'ensemble  $I$  en  $n$  sous-ensembles  $Q_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . On montre dans cet article que  $\mathcal{P}$  se ramène en un certain sens à la résolution de  $n$  problèmes de localisation, chacun consistant à localiser une seule installation relativement aux  $a_i, i \in Q_k$ .

Pour la compréhension des chapitres suivants rappelons ce qu'est une partition  $X$ -admissible de  $I$ , de quelle façon on peut paramétrer l'ensemble des partitions et rappelons également les principaux résultats obtenus dans [5].

**DÉFINITION 1 :** Soit  $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$  une famille de  $n$  sous-ensembles de  $I$ . On dit que  $Q$  est une partition de  $I$  si :

$$a) I = \bigcup_{k=1}^n Q_k$$

$$b) Q_k \cap Q_l = \emptyset \text{ pour tout } (k, l) \text{ tel que } k \neq l.$$

On note  $\mathcal{Q}$  l'ensemble des partitions de  $I$ .

*Remarque 1 :* Contrairement au sens habituel les ensembles  $Q_k$  ne sont pas supposés non vides.

**DÉFINITION 2 :**  $X \in \mathbb{R}^{2n}$  étant donné, une partition  $Q \in \mathcal{Q}$  est appelée partition  $X$ -admissible si et seulement si pour tout  $k$  on a  $Q_k \subset J(k)$  où :

$$J(k) = \{ i \in I \text{ tel que } h_i(X) = \| a_i - x_k \| \}.$$

On note  $\mathcal{Q}(X)$  l'ensemble des partitions  $X$ -admissibles.

*Remarque 2 :* Une disposition  $X$  des diverses installations étant donnée, choisir une partition  $X$ -admissible revient à partitionner les emplacements  $a_i$  donnés de sorte qu'un emplacement soit en relation uniquement avec l'installation la plus proche au sens de la distance associée à la norme polyédrique. Le nombre de partitions  $X$ -admissibles dépend du nombre d'emplacements qui sont équidistants de plusieurs installations.

$$\text{Posons } E = \left\{ \varepsilon \in \mathbb{R}^{np} \text{ tel que pour tout } i : \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ik} = 1 \text{ avec } \varepsilon_{ik} \in \{ 0, 1 \} \right\}.$$

Cet ensemble  $E$  va nous permettre de paramétrer  $\mathcal{Q}$ . En effet on établit facilement une bijection entre  $E$  et  $\mathcal{Q}$  de la façon suivante :

$$- \text{ à } \varepsilon \in E \text{ on associe la partition } P(\varepsilon) = (P_1^\varepsilon, P_2^\varepsilon, \dots, P_n^\varepsilon)$$

$$\text{où } P_k^\varepsilon = \{ i \in I, \text{ tel que } \varepsilon_{ik} = 1 \}$$

$$- \text{ à } Q \in \mathcal{Q} \text{ on associe } \varepsilon(Q) \in E \text{ en posant :}$$

$$\varepsilon(Q)_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in Q_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Introduisons alors les fonctions suivantes :

—  $\tilde{\Phi}_{\bar{X}} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(X) = \sum_{i=1}^p q_i[h_i(\bar{X})] \cdot h_i(X)$$

—  $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi(X, \varepsilon) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ik} q_i[\|x_k - a_i\|]$$

—  $\varphi_k : \mathbb{R}^2 \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi_k(x, \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{i \in P_k^\varepsilon} q_i[\|x - a_i\|] & \text{si } P_k^\varepsilon \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $P_k^\varepsilon$  est le  $k$ -ième sous-ensemble de la partition  $P(\varepsilon)$  associée à  $\varepsilon$ .

—  $\tilde{\varphi}_{\bar{X}} : \mathbb{R}^{2n} \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\tilde{\varphi}_{\bar{X}}(X, \varepsilon) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ik} q_i[h_i(\bar{X})] \cdot \|x_k - a_i\|.$$

—  $\tilde{\varphi}_{\bar{X},k} : \mathbb{R}^2 \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\tilde{\varphi}_{\bar{X},k}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{i \in P_k^\varepsilon} q_i[h_i(\bar{X})] \cdot \|x - a_i\| & \text{si } P_k^\varepsilon \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction  $\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\cdot)$  est une linéarisation partielle de  $\Phi$  au point  $X = \bar{X}$ , de même  $\tilde{\varphi}_{\bar{X}}(\cdot, \varepsilon)$  est une linéarisation partielle de  $\varphi(\cdot, \varepsilon)$  au point  $X = \bar{X}$ .

Nous avons alors les résultats suivants qui sont démontrés dans [5] :

**PROPOSITION 1 :**  $\Phi(\cdot)$  est Lipschitz.

**PROPOSITION 2 :**  $\varepsilon \in E$  étant donné, la fonction  $\varphi(\cdot, \varepsilon)$  est séparable, admet en tout point  $X$  et pour toute direction  $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  une dérivée directionnelle, ce qui s'explique sous la forme :

$$a) \varphi(X, \varepsilon) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x_k, \varepsilon)$$

$$b) \varphi'(X, \varepsilon, \Delta) = \sum_{k=1}^n \varphi'_k(x_k, \varepsilon, \delta_k).$$

**THÉORÈME 1 :** Pour tout  $X \in \mathbb{R}^{2n}$  on a  $\Phi(X) = \underset{\varepsilon \in E}{\text{Max}} \varphi(X, \varepsilon)$ .

De plus l'ensemble  $S(X) = \{ \varepsilon \in E \text{ tel que } \Phi(X) = \varphi(X, \varepsilon) \}$  coïncide avec l'ensemble des  $\varepsilon$  associés aux partitions  $X$ -admissibles c'est-à-dire

$$S(X) = \{ \varepsilon(Q), Q \in \mathcal{Q}(X) \}.$$

**COROLLAIRE 1 :** *En tout point  $X$  et pour toute direction  $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$   $\Phi$  admet une dérivée directionnelle qui s'explique sous la forme :*

$$\Phi'(X, \Delta) = \text{Max}_{Q \in \mathcal{Q}(X)} \varphi'(X, \varepsilon(Q), \Delta).$$

Ces résultats peuvent s'appliquer (comme on le vérifiera facilement) à la fonction  $\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\cdot)$  qui est de la même forme que la fonction  $\Phi(\cdot)$ . Simplement  $\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\cdot)$  se déduit de  $\Phi(\cdot)$  en prenant pour fonctions  $\tilde{q}_i$  les fonctions particulières, linéaires et strictement décroissantes données par  $t \rightarrow q'_i[h_i(\bar{X})].t$ .

Nous avons alors :

**PROPOSITION 1bis :**  *$\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\cdot)$  est Lipschitz.*

**PROPOSITION 2bis :**  *$\varepsilon \in E$  étant donné la fonction  $\tilde{\varphi}_{\bar{X}}(\cdot, \varepsilon)$  est séparable, admet en tout point  $X$  et pour toute direction  $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  une dérivée directionnelle, ce qui s'explique sous la forme :*

$$a) \tilde{\varphi}_{\bar{X}}(X, \varepsilon) = \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}_{\bar{X},k}(x_k, \varepsilon)$$

$$b) \tilde{\varphi}'_{\bar{X}}(X, \varepsilon, \Delta) = \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}'_{\bar{X},k}(x_k, \varepsilon, \delta_k).$$

**THÉORÈME 1bis :** *Pour tout  $X \in \mathbb{R}^{2n}$  on a  $\tilde{\Phi}_X(X) = \text{Max}_{\varepsilon \in E} \tilde{\varphi}_X(X, \varepsilon)$ . De plus si*

$S_{\bar{X}}(X) = \{ \varepsilon \in E \text{ tel que } \tilde{\Phi}_{\bar{X}}(X) = \tilde{\varphi}_{\bar{X}}(X, \varepsilon) \}$  on a

$$S_{\bar{X}}(X) = \{ \varepsilon(Q), Q \in \mathcal{Q}(X) \}.$$

**COROLLAIRE 1bis :** *En tout point  $X$  et pour toute direction  $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$   $\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\cdot)$  admet une dérivée directionnelle qui s'explique sous la forme :*

$$\tilde{\Phi}'_{\bar{X}}(X, \Delta) = \text{Max}_{Q \in \mathcal{Q}(\bar{X})} \tilde{\varphi}'_{\bar{X}}(X, \varepsilon(Q), \Delta).$$

Etablissons maintenant le lien qui existe entre les dérivées directionnelles de  $\Phi(\cdot)$  et celles de  $\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\cdot)$  d'une part, entre les dérivées directionnelles de  $\varphi_k(\cdot, \varepsilon)$  et celles de  $\tilde{\varphi}_{\bar{X},k}(\cdot, \varepsilon)$  d'autre part.

**PROPOSITION 3 :** *Pour toute direction  $\Delta \in \mathbb{R}^{2n}$  on a :*

$$\Phi'(\bar{X}, \Delta) = \tilde{\Phi}'_{\bar{X}}(\bar{X}, \Delta).$$

*Preuve :* Résulte immédiatement des expressions de  $\Phi(\cdot)$  et  $\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\cdot)$ .

**PROPOSITION 4 :** *Soit  $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  et  $Q \in \mathcal{Q}(\bar{X})$ . On a pour tout entier  $k = 1, 2, \dots, n$  et pour toute direction  $\delta \in \mathbb{R}^2$  :*

$$\varphi'_k(\bar{x}_k, \varepsilon(Q), \delta) = \tilde{\varphi}'_{\bar{X},k}(\bar{x}_k, \varepsilon(Q), \delta).$$

*Preuve :* Il suffit de remarquer que si  $Q \in \mathcal{Q}(\bar{X})$  on a pour tout  $i \in I$  :

$$h_i(\bar{X}) = \|\bar{x}_k - a_i\|.$$

On déduit alors le résultat directement de l'expression de  $\varphi'_k(\cdot, \varepsilon(Q), \delta)$  et de celle de  $\tilde{\varphi}'_{\bar{X},k}(\cdot, \varepsilon(Q), \delta)$ .

Nous avons déjà signalé que le type de norme utilisée (norme polyédrique) est fondamental dans ce modèle. Précisons : tout d'abord le choix d'une telle norme permet de modéliser de façon assez réaliste les déplacements entre installations et emplacements donnés (pour une interprétation géométrique voir [7]), d'autre part il confère au modèle une structure particulière qui va permettre dans le chapitre suivant de caractériser les maxima locaux de  $\Phi$ .

Rappelons qu'une norme est entièrement définie par sa boule unité qui dans notre cas est un polytope  $B$  dont l'ensemble des sommets sera noté  $D$  :

$$D = \{d_k, k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm r \text{ avec la convention } d_{-k} = -d_k\}.$$

Ward et Wendell [7] ont donné dans  $\mathbb{R}^2$  différentes caractérisations de ces normes polyédriques et ont introduit [6] un ensemble  $\mathfrak{J}$  fini de points : « the set of intersection points » qui joue un rôle important dans les problèmes de localisation. En particulier, on peut montrer, sous certaines conditions, que l'ensemble  $\mathfrak{J}$  contient les solutions de  $\mathcal{P}$ .

L'algorithme que nous allons envisager au Chapitre 4 engendre des points de  $\mathfrak{J}$ . Nous sommes donc conduits à rappeler également la construction de cet ensemble :

**DÉFINITION 3 :** *Soit  $\tilde{I} \subset I$  un sous-ensemble de  $I$ . On dira que l'ensemble :*

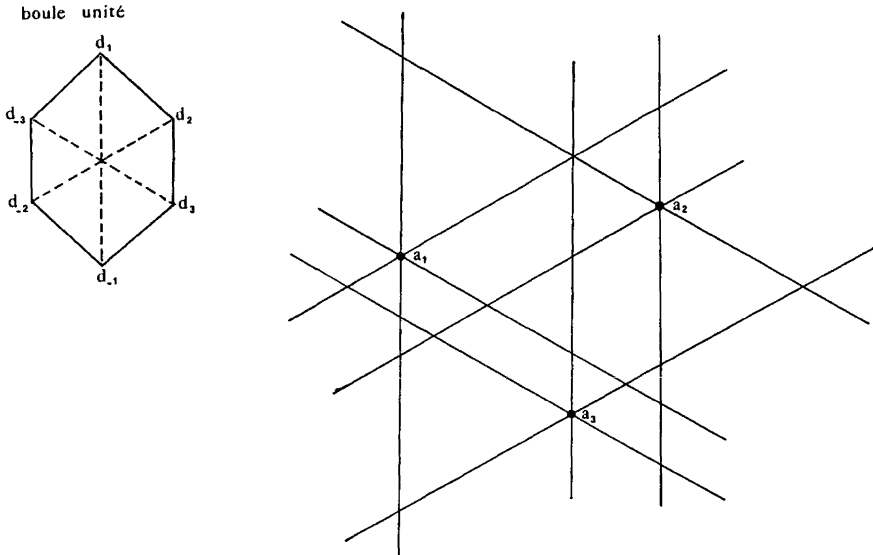
$$D_{\tilde{I}}(x) = \begin{cases} D & \text{si } x \text{ est l'un des } a_i, \quad i \in \tilde{I} \\ \{d \in D \text{ pour lesquels } \exists i \in \tilde{I} \text{ tel que } d = \alpha(x - a_i) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}\} & \end{cases}$$

constitue l'ensemble des directions fondamentales au point  $x$  relativement à  $\tilde{I}$  et associées à  $D$ .

On construit alors l'ensemble  $\tilde{\mathcal{J}}$  : « the set of intersection points » associé à  $D$  et relativement à  $\tilde{I}$  en posant :

$$\tilde{\mathcal{J}} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \exists d' \in D_{\tilde{I}}(x), \exists d'' \in D_{\tilde{I}}(x), d' \text{ et } d'' \text{ non colinéaires} \} .$$

L'ensemble  $\tilde{\mathcal{J}}$  est obtenu géométriquement en prenant toutes les intersections des droites de direction  $d \in D$  passant par les  $a_i, i \in \tilde{I}$ , comme le montre la figure ci-dessous :



En un point  $x \in \mathbb{R}^2$ , distinct des  $a_i, i \in \tilde{I}$ , une direction  $d \in D$  est fondamentale si la droite passant par  $x$  de direction  $d$  contient au moins un des  $a_i, i \in \tilde{I}$ .  $\tilde{\mathcal{J}}$  peut alors s'interpréter comme l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^2$  qui possèdent au moins deux directions fondamentales non colinéaires.

Choisissons  $\varepsilon \in E$  et soit  $P(\varepsilon)$  la partition associée à  $\varepsilon$ . Pour chaque entier  $k = 1, 2, \dots, n$  on peut construire :

- l'ensemble  $\mathcal{J}_k^\varepsilon$  des intersections associées à  $D$ , relativement à  $P_k^\varepsilon$
- en tout point  $x \in \mathbb{R}^2$ , l'ensemble  $D_k^\varepsilon(x)$  des directions fondamentales en  $x$ , associées à  $D$ , relativement à  $P_k^\varepsilon$ .

Si  $\mathcal{J}$  (resp.  $D(x)$ ) désigne les intersections (resp. les directions fondamentales en  $x$ ) relativement à  $I$  on a bien entendu les relations :

- a)  $\mathcal{J}_k^\varepsilon \subset \mathcal{J}$ .
- b)  $D_k^\varepsilon(x) \subset D(x)$ .



Afin de ne pas compliquer les notations dans la suite on dira qu'un point  $X \in \mathbb{R}^{2n}$  appartient à  $\mathfrak{J}^e$  si pour tout  $k = 1, 2, \dots, n$  on a  $x_k \in \mathfrak{J}_k^e$ . On notera de même  $X \in \mathfrak{J}$  si  $x_k \in \mathfrak{J}$  pour tout  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Nous sommes alors en mesure de caractériser les maxima locaux de  $\Phi$  :

### 3. ÉTUDE DES POINTS CRITIQUES DE $\Phi$

**DÉFINITION 4 :** On dit que  $\bar{X}$  est point critique de  $\Phi$  si et seulement si

$$\Phi'(\bar{X}, \Delta) \leq 0$$

pour toute direction  $\Delta \neq 0$ . Si l'inégalité précédente est stricte,  $\bar{X}$  est dit point critique strict de  $\Phi$ .

**THÉORÈME 2 :**

- i)  $\bar{X}$  est un point critique (resp. un point critique strict) de  $\Phi(\cdot)$  si et seulement si  $\bar{X}$  est un point critique (resp. un point critique strict) de  $\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\cdot)$ .
- ii)  $\bar{X}$  est un maximum local (resp. un maximum local strict) de  $\Phi(\cdot)$  si et seulement si  $\bar{X}$  est un maximum local (resp. un maximum local strict) de  $\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\cdot)$ .

*Preuve :*

(i) Se déduit directement de la proposition 3.

(ii) On n'envisagera que le cas d'un maximum local strict.

*Condition nécessaire :* Par convexité des fonctions  $q_i$  on a pour tout  $X \in \mathbb{R}^{2n}$  :

$$q_i[h_i(X)] \geq q_i[h_i(\bar{X})] + q'_i[h_i(\bar{X})] \cdot (h_i(X) - h_i(\bar{X}))$$

et en sommant ces inégalités il vient :

$$\Phi(X) \geq \Phi(\bar{X}) + \tilde{\Phi}_{\bar{X}}(X) - \tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\bar{X}).$$

Comme  $\bar{X}$  est un maximum local strict de  $\Phi(\cdot)$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\bar{X}$  tel que :

$$\Phi(X) < \Phi(\bar{X}) \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{V}, \quad X \neq \bar{X}.$$

On en déduit alors

$$\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(X) < \tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\bar{X}) \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{V}, \quad X \neq \bar{X}$$

ce qui signifie que  $\bar{X}$  est un maximum local strict de  $\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\cdot)$ .

*Condition suffisante* : Par hypothèse il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de

$$\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

que l'on peut supposer sans restriction de la forme  $\mathcal{V} = \prod_{k=1}^n v_k$  où  $v_k$  est un voisinage de  $\bar{x}_k$  tel que :

$$\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\bar{X}) > \tilde{\Phi}_{\bar{X}}(X) \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{V}, \quad X \neq \bar{X}.$$

Choisissons  $Q \in \mathcal{Q}(\bar{X})$  une partition  $\bar{X}$ -admissible et posons  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon(Q)$ . Compte tenu du Théorème 1bis on peut écrire pour tout  $X \in \mathcal{V}$

$$\tilde{\varphi}_{\bar{X}}(\bar{X}, \bar{\varepsilon}) = \tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\bar{X}) > \tilde{\Phi}_{\bar{X}}(X) \geq \tilde{\varphi}_{\bar{X}}(X, \bar{\varepsilon})$$

ce qui s'écrit encore d'après la proposition 2bis :

$$\sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}_{\bar{X},k}(\bar{x}_k, \bar{\varepsilon}) > \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}_{\bar{X},k}(x_k, \bar{\varepsilon}).$$

En appliquant cette inégalité pour des  $X$  dans  $\mathcal{V}$  de la forme

$$X = (0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0)$$

avec  $x_k \neq \bar{x}_k$ , on obtient pour tout  $k$  :

$$\tilde{\varphi}_{\bar{X},k}(\bar{x}_k, \bar{\varepsilon}) > \tilde{\varphi}_{\bar{X},k}(x_k, \bar{\varepsilon}) \quad \text{pour tout } x_k \in v_k, \quad x_k \neq \bar{x}_k$$

ce qui signifie que  $\bar{x}_k$  est un maximum local strict de la fonction  $\tilde{\varphi}_{\bar{X},k}(\cdot, \bar{\varepsilon})$ . Cette fonction est concave, affine par morceaux (voir [4]). Donc  $\bar{x}_k$  en est l'unique maximum. Il résulte également de [4] que l'on a alors :

$$\tilde{\varphi}'_{\bar{X},k}(\bar{x}_k, \bar{\varepsilon}, \delta) < 0 \quad \text{pour tout } \delta \neq 0, \quad \delta \in \mathbb{R}^2.$$

On déduit alors de la proposition 2bis :

$$\tilde{\varphi}'_{\bar{X}}(\bar{X}, \bar{\varepsilon}, \Delta) < 0 \quad \text{pour tout } \Delta \neq 0, \quad \Delta \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Ce résultat ne dépendant pas du choix de la partition  $\bar{X}$ -admissible  $Q$  choisie on a d'après le corollaire 1bis :

$$\tilde{\Phi}'_{\bar{X}}(\bar{X}, \Delta) < 0 \quad \text{pour tout } \Delta \neq 0, \quad \Delta \in \mathbb{R}^{2n}$$

ce qui s'écrit encore (prop. 3) :

$$\Phi'(\bar{X}, \Delta) < 0 \quad \text{pour tout } \Delta \neq 0, \quad \Delta \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Comme  $\Phi$  est Lipschitz (Prop. 1),  $\bar{X}$  est un maximum local strict de  $\Phi$  d'après la proposition 2 de [4].

Nous allons maintenant énoncer un Lemme qui va permettre, au chapitre suivant consacré à l'algorithme de résolution de  $\mathcal{P}$ , de ne pas « bloquer » sur un point critique qui ne serait pas un maximum local de  $\Phi$ .

**LEMME 1 :** *Soit  $\bar{X} \in \mathcal{J}$  un point critique de  $\Phi$ .*

*Supposons qu'il existe  $\bar{\Delta} \neq 0$  tel que  $\Phi'(\bar{X}, \bar{\Delta}) = 0$ . Alors il existe  $X^* \in \mathcal{J}$  tel que  $\Phi(X^*) > \Phi(\bar{X})$  et on a un procédé constructif pour obtenir un tel point.*

*Preuve :*  $\bar{X}$  étant point critique de  $\Phi(\cdot)$  il est point critique de  $\tilde{\Phi}_{\bar{X}}(\cdot)$  d'après le Théorème 2. On en déduit facilement à l'aide du corollaire 1bis et de la proposition 2bis que  $\bar{x}_k$  est point critique de  $\tilde{\varphi}_{\bar{x}_k}(\cdot, \varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon = \varepsilon(Q)$  avec  $Q \in \mathcal{Q}(\bar{X})$ .

Cela s'écrit :

$$\tilde{\varphi}'_{\bar{x}_k}(\bar{x}_k, \varepsilon(Q), \delta) \leq 0 \quad \text{pour tout } Q \in \mathcal{Q}(\bar{X}) \quad \text{et tout } \delta \in \mathbb{R}^2.$$

D'autre part comme  $\Phi'(\bar{X}, \bar{\Delta}) = 0$  on est assuré par le Théorème 1bis de l'existence de  $\bar{Q} \in \mathcal{Q}(\bar{X})$  tel que :

$$\tilde{\Phi}'_{\bar{X}}(\bar{X}, \bar{\varepsilon}, \bar{\Delta}) = 0 \quad \text{avec } \bar{\varepsilon} = \varepsilon(\bar{Q})$$

ce qui signifie encore (prop. 2bis)

$$\sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}'_{\bar{x}_k}(\bar{x}_k, \bar{\varepsilon}, \bar{\delta}_k) = 0 \quad \text{avec } \bar{\Delta} = (\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \dots, \bar{\delta}_n).$$

Comme tous les termes de cette somme sont négatifs ou nuls chaque terme est nul. Il nous faut alors envisager deux cas :

- a)  $\bar{x}_k \in \mathcal{J}_k^{\bar{\varepsilon}} \subset \mathcal{J}$
- b)  $\bar{x}_k \in \mathcal{J}$  mais  $\bar{x}_k \notin \mathcal{J}_k^{\bar{\varepsilon}}$ .

Nous ne discuterons que le cas a). Le cas b) se ramène au précédent; la démonstration est technique et fait appel à la propriété de convexité ou de stricte convexité de la fonction  $\varphi_k(\cdot, \bar{\varepsilon})$  dans certaines directions issues de  $\bar{x}_k$ . Nous renvoyons pour cela à la référence [3].

Supposons donc  $\bar{x}_k \in \mathcal{J}_k^{\bar{\varepsilon}}$ .

D'après la proposition 7 de [4] il existe  $\delta_k^* \in D_{\bar{\varepsilon}}^k(\bar{x}_k)$  tel que  $\tilde{\varphi}'_{\bar{x}_k}(\bar{x}_k, \bar{\varepsilon}, \delta_k^*) = 0$  ce qui s'écrit encore compte tenu de la proposition 4 :

$$\varphi'_k(\bar{x}_k, \bar{\varepsilon}, \delta_k^*) = 0$$

Comme  $\delta_k^* \in D_{\bar{\varepsilon}}^k(\bar{x}_k)$  on sait (Lemme 2 de [4]) que  $\varphi_k(\cdot, \bar{\varepsilon})$  est strictement convexe sur un segment  $[\bar{x}_k, x_k^*]$  avec  $x_k^* \in \mathfrak{J}_k$ . Ceci nous permet d'affirmer que :

$$\varphi_k(x_k^*, \bar{\varepsilon}) > \varphi_k(\bar{x}_k, \bar{\varepsilon}).$$

Après sommation sur  $k$ , il vient si  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$

$$\Phi(X^*) \geq \varphi(X^*, \bar{\varepsilon}) > \varphi(\bar{X}, \bar{\varepsilon}) = \Phi(\bar{X})$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

Remarquons de plus que la référence [4] fournit un procédé constructif très simple pour calculer  $x_k^*$  à partir du point  $\bar{x}_k$  et la direction  $\delta_k^*$ . Le procédé nous permet donc de calculer facilement le point  $X^*$  à partir de  $\bar{X}$  et de la direction  $\Delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_n^*)$ .

*Remarque 3 :* Dans le Lemme 1 la difficulté n'est pas de trouver un point  $X^*$  satisfaisant  $\Phi(X^*) > \Phi(\bar{X})$  mais plutôt de trouver un point  $X^* \in \mathfrak{J}$  satisfaisant cette propriété. D'autre part il résulte de la démonstration de ce lemme que tout voisinage de  $\bar{X}$  contient un point  $X^*$  tel que  $\Phi(X^*) > \Phi(\bar{X})$ . On peut alors énoncer la proposition suivante :

**PROPOSITION 5 :** *Soit  $\bar{X} \in \mathfrak{J}$  un maximum local de  $\Phi$ . Alors  $\bar{X}$  est un maximum local strict de  $\Phi$ .*

*Remarque 4 :* En fait on peut démontrer (voir [5]) que l'ensemble des points critiques stricts de  $\Phi$ , des maxima locaux de  $\Phi$  et des maxima locaux stricts de  $\Phi$  coïncident et que cet ensemble est inclus dans  $\mathfrak{J}$ .

On peut maintenant décrire un algorithme permettant de résoudre  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire de trouver un maximum local de  $\Phi$ .

#### 4. ALGORITHME

*Description :*

- point de départ : choisir  $X^0 \in \mathfrak{J}$
- itération  $m$  : supposons construit  $X^m \in \mathfrak{J}$  :

a) si  $X^m$  n'est pas un point critique de  $\tilde{\Phi}_{X^m}(\cdot)$  :  
calculer  $X^{m+1}$  point critique de  $\tilde{\Phi}_{X^m}(\cdot)$  satisfaisant

- (\*)  $X^{m+1} \in \mathfrak{J}$
- (\*\*)  $\tilde{\Phi}_{X^m}(X^{m+1}) > \tilde{\Phi}_{X^m}(X^m)$

b) si  $X^m$  est point critique strict de  $\tilde{\Phi}_{X^m}(\cdot)$  FIN

c) si  $X^m$  est point critique (non strict) de  $\tilde{\Phi}_{X^m}(\cdot)$  :  
calculer  $X^{m+1}$  satisfaisant

$$(*) \quad X^{m+1} \in \mathfrak{J}$$

$$(**) \quad \Phi(X^{m+1}) > \Phi(X^m).$$

**THÉORÈME 3** : *L'algorithme précédent converge en un nombre fini d'étapes : il construit une suite finie  $\{X^m, 0 \leq m \leq m_*\}$  telle que :*

a)  $\Phi(X^{m-1}) < \Phi(X^m)$  pour tout  $m = 1, 2, \dots, m_*$

b)  $X^{m_*}$  est un maximum local strict de  $\Phi$ .

*Preuve* : à l'itération  $m$  nous avons les trois cas suivants :

a)  $X^m$  n'est pas point critique de  $\tilde{\Phi}_{X^m}(\cdot)$  :  
par convexité des fonctions  $q_i$  on a pour tout  $i \in I$  :

$$q_i[h_i(X^{m+1})] \geq q_i[h_i(X^m)] + q'_i[h_i(X^m)](h_i(X^{m+1}) - h_i(X^m))$$

et en sommant ces inégalités il vient :

$$\Phi(X^{m+1}) \geq \Phi(X^m) + \tilde{\Phi}_{X^m}(X^{m+1}) - \tilde{\Phi}_{X^m}(X^m)$$

ce qui prouve que  $\Phi(X^{m+1}) > \Phi(X^m)$ .

b) L'algorithme s'arrête car  $X^m$  est point critique strict de  $\tilde{\Phi}_{X^m}(\cdot)$ . Du Théorème 2 on déduit que  $X^m$  est point critique strict de  $\Phi$  et comme cette fonction est Lipschitz (prop. 1)  $X^m$  est un maximum local strict de  $\Phi$ .

c) Le successeur  $X^{m+1}$  de  $X^m$  par construction améliore strictement l'objectif  $\Phi$ .

Finalement, l'algorithme engendre de façon strictement monotone les points  $X^m$  qui de plus appartiennent tous à l'ensemble fini  $\mathfrak{J}$ . Cela suffit pour prouver que l'algorithme converge en un nombre fini d'itérations vers un maximum local strict  $X^{m_*}$  de  $\Phi$ .

*Remarques sur la mise en œuvre :*

1) Comment tester si  $X^m$  est un point critique de  $\tilde{\Phi}_{X^m}(\cdot)$  ? Pour cela on peut engendrer toutes les partitions  $X^m$  admissibles. Pour chaque partition  $X^m$ -admissible  $\varepsilon$  il suffit alors de calculer les dérivées directionnelles de la fonction  $\tilde{\varphi}_{X^m}(\cdot, \varepsilon)$ . Cela revient à calculer pour chaque entier  $k$  les dérivées directionnelles de  $\tilde{\varphi}_{X^m, k}(\cdot, \varepsilon)$  et pour cela il suffit d'évaluer les dérivées directionnelles dans les directions appartenant à l'ensemble  $D(x_k^m)$  des directions fondamentales en  $x_k^m$  associées à  $D$  et relativement à  $I$ . Ce calcul est très simple puisque  $\tilde{\varphi}_{X^m, k}(\cdot, \varepsilon)$  est affine par morceaux.

2) Dans [5] on trouvera une procédure permettant d'obtenir un point critique de  $\tilde{\Phi}_{X^m}(\cdot)$  satisfaisant les conditions (\*) et (\*\*) de a). Cette procédure

constitue une amélioration d'une heuristique : « the alternate location and allocation algorithm » donnée par Cooper dans [1], [2].

3) Dans [4] on trouvera des précisions concernant le calcul explicite d'un point  $X^{m+1}$  satisfaisant les conditions (\*) et (\*\*) de c).

## CONCLUSION

Bien que l'algorithme proposé ne converge pas, a priori, vers une solution globale du problème, il possède les avantages suivants :

\* Tous les calculs sont explicites et n'utilisent que des opérations élémentaires.

\* On obtient un maximum local en un nombre fini d'itérations.

\* Le nombre  $p$  d'installations à localiser n'influence que très peu le volume des calculs : plus  $p$  est important, plus la taille des sous-problèmes est petite et globalement le volume des calculs reste pratiquement constant.

Pour la modélisation le choix des fonctions  $q_i$  peut être varié ; un des choix usuels consiste à prendre  $q_i(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_{il} \exp(-\beta_{il} t)$  avec  $\alpha_{il} > 0$  et  $\beta_{il} > 0$ .

D'autre part on peut choisir une norme polyédrique qui dépend des points ou emplacements fixés. Ces différentes variantes donnent une certaine souplesse au cours de la modélisation et le problème de localisation décrit dans cet article peut avoir ainsi de nombreuses applications.

## REFERENCES

- [1] L. COOPER, *Location-allocation problems*, Operations Research 11, n° 3 (1963), pp. 331-343.
- [2] L. COOPER, *Heuristic methods for location-allocation problems*, SIAM Review, Vol. 6, N° 1 (1964), pp. 37-53.
- [3] H. IDRISSE, P. LORIDAN, C. MICHELOT, *Localisation de maxima locaux d'un problème de Fermat-Weber généralisé*, Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université de Dijon (1982).
- [4] H. IDRISSE, P. LORIDAN, C. MICHELOT, *Approximation of solutions for location problems*, to appear.
- [5] C. MICHELOT, *Properties of a class of non convex multifacility location problems*, Math. Prog, to appear.
- [6] J. E. THISSE, J. E. WARD, R. E. WENDELL, *Some properties of location problems with block norm and round norms*, Operations Research 32, n° 6 (1984), 1309-1327.
- [7] J. E. WARD, R. E. WENDELL, *Using block norms for location modeling*, Operations Research 33, n° 5 (1985), pp. 1074-1090.