M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
- MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

P. WITOMSKI

Sur la résolution numérique d'une équation intégro-différentielle singulière non linéaire de la chimie des surfaces

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 19, nº 3 (1985), p. 477-512

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1985__19_3_477_0>

© AFCET, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(vol. 19, n° 3, 1985, p. 477 à 512)

SUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'UNE ÉQUATION INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE SINGULIÈRE NON LINÉAIRE DE LA CHIMIE DES SURFACES (*)

P. WITOMSKI (1)

Communiqué par F. ROBERT

Résumé. — *On étudie la résolution numérique d'une équation intégro-différentielle singulière non linéaire issue de la chimie des surfaces. On montre un résultat d'existence et d'unicité au moyen d'une régularisation elliptique permettant de se ramener à des itérations de point fixe pour un opérateur de puissance contractante. On en déduit une méthode de résolution numérique par approximation variationnelle.*

Abstract. — *We study the numerical solution of a non linear singular integrodifferential equation arising from surface chemistry. We show an existence and uniqueness result using an elliptic regularization and fixed point iterations for an operator with contracting k-th power. This and variational approximation provide an efficient numerical method.*

INTRODUCTION

On se propose d'étudier le problème non linéaire

$$\left.\begin{aligned} & u - xDu - \frac{1}{4\pi^2}\Lambda^1 \frac{[D^2 u]}{(1 + Du^2)^{3/2}} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ & Du(0 \pm) = \pm m \end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

où m est un nombre positif fixé, u est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $D = \frac{d}{dx}$, $[D^2 u] = D^2 u - 2m\delta$, δ désignant la masse de Dirac en 0.

On note Λ^s, $s \in \mathbb{R}$, l'opérateur défini par transformation de Fourier par $\Lambda^s u(\xi) = |\xi|^s \hat{u}(\xi)$.

Cette équation intervient dans la modélisation de phénomènes de corrosion métallique ([2], [3]). J. Duchon et R. Robert ont montré un résultat d'existence et d'unicité pour (E) par régularisation elliptique et point fixe de Schauder [4].

(*) Reçu en mai 1984.
(1) Laboratoire Imag-Tim3, BP 68, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France.

 © AFCET-Gauthier-Villars

Nous abordons ici la question du calcul numérique de la solution de (E).

Dans un premier paragraphe, on définit un schéma itératif qui permet d'établir de façon constructive l'existence d'une solution pour (E).

Pour cela, on montre que l'on peut approcher le problème au moyen d'une régularisation elliptique convenable permettant de se ramener à des itérations de point fixe pour un opérateur de puissance contractante. Le passage à la limite s'obtient en reprenant les estimations établies en [3].

Dans le deuxième paragraphe on étudie des approximations variationnelles pour les problèmes régularisés linéaires et non linéaires dans des espaces de fonctions à support compact. Ceci dans le but de traiter numériquement une approximation de (E) sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Les questions de convergence liées au support sont étudiées.

Dans le paragraphe 3 on développe une approximation interne par éléments finis et on étudie les problèmes de convergence.

Le paragraphe 4 est consacré à la résolution numérique proprement dite et à la mise en œuvre de la méthode sur un micro-ordinateur.

Les notations suivantes seront adoptées :

$|u|$ désigne la norme de la fonction u dans $L^2(\mathbb{R})$.
$|u|_\infty$ la norme dans $L^\infty(\mathbb{R})$
$H^s(\mathbb{R})$, $H^s(\alpha, \beta)$ sont les espaces de Sobolev usuels,
$\langle , \rangle$ désigne la dualité entre $H^s(\mathbb{R})$ et $H^{-s}(\mathbb{R})$ et $|\ |_{H^s}$ la norme dans $H^s(\mathbb{R})$.
$\mathscr{C}^\infty$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$\mathscr{D}(\alpha, \beta)$ l'espace des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans $]\alpha, \beta[$.

1. UN SCHÉMA ITÉRATIF CONVERGENT POUR L'ÉQUATION (E)

Notons f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(y) = (1 + y^2)^{-3/2}$. (E) s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} & u - xDu - \frac{1}{4\pi^2}\Lambda^1 f(Du)\,[D^2 u] = 0\,, \quad x \in \mathbb{R} \\ & Du(0 \pm) = \pm m\,. \end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

Il est commode de poser dans (E) $u = u_0 + v$ où u_0 est l'unique solution tempérée de l'équation linéaire

$$\left.\begin{aligned} & u_0 - xDu_0 - \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{1}{(1+m^2)^{1/2}}\,\Lambda^1[D^2 u_0] = 0\,, \quad x \in \mathbb{R} \\ & Du_0(0 \pm) = \pm m\,. \end{aligned}\right\} \qquad (EL)$$

Cette solution est obtenue par transformation de Fourier. On a :

$$\hat{u}_0(\xi) = \frac{-m}{2\pi^2 \xi^2}(1 - e^{-\mu|\xi|^3/3}) \quad \text{où} \quad \mu = (1 + m^2)^{-1/2}.$$

On remarque que u_0 est dans $H^1(\mathbb{R})$, paire et $[D^2 u_0]$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. (E) s'écrit donc :

$$\left.\begin{array}{l} v - xDv - \dfrac{1}{4\pi^2}\Lambda^1 f(Du_0 + Dv)[D^2 u_0 + D^2 v] = \dfrac{-\mu}{4\mu^2}\Lambda^1[D^2 u_0] \\ Dv(0) = 0. \end{array}\right\} \quad (VE)$$

Nous procéderons de la façon suivante :

i) régularisation elliptique de (VE) notée $(VE)_\varepsilon$
ii) linéarisation de $(VE)_\varepsilon$
iii) convergence du schéma itératif associé
iv) convergence de la solution régularisée vers la solution de (E).

1.1. Régularisation elliptique de (VE)

Pour ε fixé, on pose :

$$f_\varepsilon(y) = \begin{cases} (1 + y^2)^{-3/2} & \text{si} \quad 1 + y^2 \leqslant 1/\varepsilon \\ \varepsilon^{3/2} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\left.\begin{array}{l} v - xDv - \dfrac{1}{4\pi^2}\Lambda^1 f_\varepsilon(Du_0 + Dv)[D^2 u_0 + D^2 v] = \dfrac{-\mu}{4\pi^2}\Lambda^1[D^2 u_0] \\ Dv(0) = 0. \end{array}\right\} \quad (VE)_\varepsilon$$

Pour satisfaire la condition $Dv(0) = 0$ on cherche une solution paire dans $H^2(\mathbb{R})$. L'existence de cette solution sera prouvée par la convergence dans $H^2(\mathbb{R})$ du schéma itératif que l'on explicite maintenant.

1.2. Linéarisation de $(VE)_\varepsilon$

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, nous désignerons par $S_\lambda(f)$ l'unique solution dans $H^2(\mathbb{R})$ de l'équation

$$v - xDv + \lambda\Lambda^3 v = \Lambda^1 f$$

où λ est un réel strictement positif. Par transformation de Fourier on a :

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2 \xi^2} e^{-\lambda|\xi|^3/3} \int_0^{\xi} e^{\lambda|s|^3/3} s \mid s \mid \hat{f}(s)\, ds \tag{0}$$

et on vérifie comme en [3] que v appartient à $H^2(\mathbb{R})$. Nous allons maintenant donner un schéma itératif pour résoudre (VE) dans $\tilde{H}^2(\mathbb{R}) = \{ u \in H^2(\mathbb{R}),$ u paire $\}$.

Pour $w \in \tilde{H}^2(\mathbb{R})$ on désigne par $T_\lambda(w)$ l'unique solution dans $H^2(\mathbb{R})$ de l'équation

$$v - xDv + \lambda\Lambda^3(v - w) = \frac{1}{4\pi^2} \Lambda^1 H_\varepsilon(Dw) \tag{VEL}_\varepsilon$$

où

$$H_\varepsilon(Dw) = f_\varepsilon(Du_0 + Dw)([D^2 u_0] + D^2 w) - \mu[D^2 u_0] .$$

Il est clair que $H_\varepsilon(Dw) \in L^2(\mathbb{R})$ et que $T_\lambda(w) = S_\lambda(H_\varepsilon(Dw) + \lambda\Lambda^2 w)$. u_0 et w étant paires on vérifie que $T_\lambda(w)$ est dans $\tilde{H}^2(\mathbb{R})$.

On considère donc l'itération $v_{n+1} = T_\lambda(v_n)$ dans $\tilde{H}^2(\mathbb{R})$.

1.3. Convergence du schéma itératif

Pour montrer la convergence de la suite v_n on met en évidence un sous-ensemble H_R de $\tilde{H}^2(\mathbb{R})$, invariant par T_λ sur lequel T_λ est de puissance p-ième contractante. Plus précisément on a le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1 : *Soit* $0 < \varepsilon \leqslant \mu^2$. *Il existe* $\lambda(\varepsilon)$ *tel que pour tout* $\lambda \geqslant \lambda(\varepsilon)$:
i) *on peut trouver* $R > 0$ *tel que* T_λ *laisse invariant*

$$H_R = \{ u \in \tilde{H}^2(\mathbb{R}), \mid \Lambda^1 u \mid \leqslant R, \mid \Lambda^2 u \mid \leqslant R \}$$

ii) *il existe* p *entier tel que* T_λ^p *soit contractant sur* H_R.

Démonstration : i) Nous écrivons $(VEL)_\varepsilon$ sous une forme équivalente en utilisant le lemme suivant (voir [3]).

LEMME 1.2 : *Soit* $h \in L^2(\mathbb{R})$. *Il existe une fonction tempérée unique* u *solution de l'équation*

$$u - xDu = \Lambda^1 h$$

et vérifiant l'estimation $\mid \Lambda^{-1} u \mid^2 + 3\pi^2 \mid xu \mid^2 \leqslant \mid h \mid^2$. *Si* $u \in L^2(\mathbb{R})$ *alors* $\Lambda^{-1/2} u \in L^2(\mathbb{R})$ *et* $\langle h, u \rangle = 2 \mid \Lambda^{-1/2} u \mid^2$.

Pour w dans $H^2(\mathbb{R})$, $v \in H^2(\mathbb{R})$ est solution de $(VEL)_\varepsilon$ si et seulement si

$$\Lambda^{-1}(v - xDv) + \lambda\Lambda^2(v - w) = \frac{1}{4\pi^2} H_\varepsilon(Dw). \tag{1}$$

Nous aurons besoin de deux estimations.

Estimation $(E1)$

Multiplions (1) par v et intégrons. Le lemme 1.2 donne

$$\langle \Lambda^{-1}(v - xDv), v \rangle = 2 \mid \Lambda^{-1/2} v \mid^2. \tag{2}$$

Le second terme du premier membre donne

$$\lambda \langle \Lambda^2(v - w), v \rangle = \frac{\lambda}{2} \mid \Lambda^1 v \mid^2 - \frac{\lambda}{2} \mid \Lambda^1 w \mid^2 + \frac{\lambda}{2} \mid \Lambda^1(v - w) \mid^2. \tag{3}$$

On traite le second membre en intégrant par parties.

Notons F_ε la primitive de f_ε qui s'annule en 0.

F_ε vérifie la propriété de monotonie suivante

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; \quad (F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(y))(x - y) \geqslant \varepsilon^{3/2}(x - y)^2. \tag{4}$$

Cette propriété essentielle résulte de la régularisation de f en f_ε qui est minorée par $\varepsilon^{3/2}$.

En remarquant que u_0 et w sont dans $H^2(I)$, $(I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0, +\infty[)$ et que sur I on a $D(F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - \mu Du_0) = H_\varepsilon(Dw)$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(Dw)\, v\, dx = [(-F_\varepsilon(Du_0 + Dw) + \mu Du_0)\, v]_{0^-}^{0^+} - \\ - \int_{\mathbb{R}} (F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - \mu Du_0)\, Dv\, dx.$$

Comme $\varepsilon \leqslant \mu^2$, c'est-à-dire $1 + m^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$, on a $(F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - \mu Du_0)(0\pm) = 0$.

On décompose l'intégrale de droite en

$$-\int_{\mathbb{R}} (F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - F_\varepsilon(Du_0))\, Dv\, dx + \int_{\mathbb{R}} (\mu Du_0 - F_\varepsilon(Du_0))\, Dv\, dx. \tag{5}$$

Avec (4) on a :

$$-\int_{\mathbb{R}} (F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - F_\varepsilon(Du_0))\, Dv\, dx =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} (F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - F_\varepsilon(Du_0))\,(Dw + D(v - w))\, dx$$

$$\leqslant -\varepsilon^{3/2} \,|\, Dw \,|^2 + |\, f_\varepsilon \,|_\infty \,|\, Dw \,|\,|\, D(v - w) \,|\,.$$

Comme $|\, f_\varepsilon \,|_\infty = 1$ et pour $v \in H^1(\mathbb{R})$, $|\, Dv \,| = 2\,\pi \,|\, \Lambda^1 v \,|$, il vient

$$-\frac{1}{4\,\pi^2} \int_{\mathbb{R}} (F_\varepsilon(Du_0 + Dw) - F_\varepsilon(Du_0))\, Dv\, dx \leqslant$$

$$\leqslant -\varepsilon^{3/2} \,|\, \Lambda^1 w \,|^2 + |\, \Lambda^1 w \,|\,|\, \Lambda^1(v - w) \,|\,. \quad (6)$$

D'autre part, comme pour tout $z \in \mathbb{R}$, $|\, \mu z - F_\varepsilon(z) \,| \leqslant |\, z \,|$ on a :

$$\frac{1}{4\,\pi^2} \int_{\mathbb{R}} (\mu Du_0 - F_\varepsilon(Du_0))\, Dv\, dx \leqslant |\, \Lambda^1 u_0 \,|\,|\, \Lambda^1 v \,|\,. \quad (7)$$

Avec (6) et (7) il vient

$$\frac{1}{4\,\pi^2} \int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(Dw)\, v\, dx \leqslant$$

$$\leqslant -\varepsilon^{3/2} \,|\, \Lambda^1 w \,|^2 + |\, \Lambda^1 w \,|\,|\, \Lambda^1(v - w) \,| + |\, \Lambda^1 u_0 \,|\,|\, \Lambda^1 v \,|$$

$$\leqslant -\varepsilon^{3/2} \,|\, \Lambda^1 w \,|^2 + \frac{1}{2\,\rho} \,|\, \Lambda^1 w \,|^2 + \frac{\rho}{2} \,|\, \Lambda^1(v - w) \,|^2 + \frac{1}{2\,\beta} \,|\, \Lambda^1 v \,|^2 + \frac{\beta}{2} \,|\, \Lambda^1 u_0 \,|^2 \quad (8)$$

avec $\rho > 0$ et $\beta > 0$ que nous allons maintenant déterminer. Avec (2), (3) et (8) on a :

$$2 \,|\, \Lambda^{-1/2} v \,|^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2\,\beta}\right) |\, \Lambda^1 v \,|^2 - \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\,\beta} - \varepsilon^{3/2}\right) |\, \Lambda^1 w \,|^2 +$$

$$+ \frac{\lambda - \rho}{2} \,|\, \Lambda^1(v - w) \,|^2 \leqslant \frac{\beta}{2} \,|\, \Lambda^1 u_0 \,|^2\,.$$

On choisit $\rho > \dfrac{1}{2\,\varepsilon^{3/2}}$, puis $\lambda \geqslant \rho$ et enfin β tel que $\dfrac{1}{2\,\rho} - \varepsilon^{3/2} + \dfrac{1}{2\,\beta} < 0$.

Posons

$$K_1 = K_1(\varepsilon, \rho, \lambda, \beta) = \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\,\rho} - \varepsilon^{3/2}\right) \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2\,\beta}\right)^{-1}$$

et

$$M_1 = M_1(\varepsilon, \rho, \lambda, \beta, u_0) = \frac{\beta}{2} | \Lambda^1 u_0 |^2 \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2\beta}\right)^{-1}.$$

La première estimation est

$$| \Lambda^1 v |^2 \leqslant K_1 | \Lambda^1 w |^2 + M_1, \qquad 0 < K_1 < 1. \tag{E1}$$

Estimation (*E*2)

Multiplions (1) par $\Lambda^2 v$ et intégrons. On a immédiatement

$$\lambda \langle \Lambda^2(v - w), \Lambda^2 v \rangle = \frac{\lambda}{2} | \Lambda^2 v |^2 - \frac{\lambda}{2} | \Lambda^2 w |^2 + \frac{\lambda}{2} | \Lambda^2(v - w) |^2.$$

Examinons le terme $\langle \Lambda^{-1}(v - xDv), \Lambda^2 v \rangle$.

On a $v - xDv = 2v - D(xv)$, $xv \in L^2(\mathbb{R})$ et $v \in H^2(\mathbb{R})$. Donc

$$\langle \Lambda^{-1}(v - xDv), \Lambda^2 v \rangle = 2 | \Lambda^{1/2} v |^2 + \langle xv, D\Lambda^1 v \rangle.$$

Calculons ce dernier terme par transformation de Fourier :

$$\langle xv, D\Lambda^1 v \rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{xv}(2 i\pi\xi) | \xi | \overline{\hat{v}} \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} D\hat{v}(\xi) \, \xi | \xi | \, \overline{\hat{v}}(\xi) \, d\xi$$

v étant réelle et paire, $\hat{v}$ l'est aussi. Comme $D\hat{v}\,\hat{v} = \frac{1}{2} D\hat{v}^2$ et $D(\xi | \xi |) = 2 | \xi |$ il vient en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \langle xv, D\Lambda^1 v \rangle &= \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} D\hat{v}^2(\xi) \, \xi | \xi | \, d\xi \\ &= \lim_{a \to +\infty} \left[a^2 \hat{v}^2(a) - \int_{-a}^{+a} | \xi | \, \hat{v}^2(\xi) \, d\xi \right] \\ &= \lim_{a \to +\infty} a^2 \hat{v}^2(a) - | \Lambda^{1/2} v |^2. \end{aligned}$$

On a $\lim_{a \to +\infty} a^2 \hat{v}^2(a) = 0$ en vertu du lemme suivant :

LEMME 1.3 (voir [3] pour la démonstration) : *Soit* ν *une fonction höldérienne d'ordre* $\alpha/2$, $0 < \alpha \leqslant 2$. *Si* $\xi^{1+\alpha} \nu$ *est de carré sommable,* $\xi^\alpha \nu$ *tend vers* 0 *lorsque* $| \xi |$ *tend vers l'infini.*

Il suffit donc de montrer que $\lim_{a \to +\infty} a\hat{v}(a) = 0$. Comme xv est dans $L^2(\mathbb{R})$,

$\hat{v} \in H^1(\mathbb{R})$. $\hat{v}$ est donc höldérienne d'ordre 1/2. On applique le lemme 1.3 avec $\alpha = 1$ en remarquant que $\xi^2 \hat{v} = \widehat{\Lambda^2 v}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ car $v \in H^2(\mathbb{R})$. On a ainsi montré que $\langle \Lambda^{-1}(v - xDv), \Lambda^2 v \rangle = | \Lambda^{1/2} v |^2$ et donc

$$| \Lambda^{1/2} v |^2 + \frac{\lambda}{2} | \Lambda^2 v |^2 - \frac{\lambda}{2} | \Lambda^2 w |^2 + \frac{\lambda}{2} | \Lambda^2(v - w) |^2 = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(Dw) \Lambda^2 v \, dx . \quad (9)$$

Le second membre s'écrit

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(Du_0 + Dw) ([D^2 u_0] + D^2 v + D^2(w - v)) \Lambda^2 v \, dx - \\ - \frac{\mu}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} [D^2 u_0] \Lambda^2 v \, dx . \quad (10)$$

Comme $\varepsilon^{3/2} \leqslant f_\varepsilon \leqslant 1$ on majore (10) par :

$$- \varepsilon^{3/2} | \Lambda^2 v |^2 + | \Lambda^2(w - v) | \, | \Lambda^2 v | + | [\Lambda^2 u_0] | \, | \Lambda^2 v | .$$

Choisissons ρ et β comme précédemment. On obtient avec (9) et (10) :

$$| \Lambda^{1/2} v |^2 + \left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\rho}\right) | \Lambda^2 v |^2 - \frac{\lambda}{2} | \Lambda^2 w |^2 + \\ + \frac{\lambda - \rho}{2} | \Lambda^2(v - w) |^2 \leqslant \frac{\beta}{2} | [\Lambda^2 u_0] |^2 .$$

D'où en posant

$$K_2 = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\rho}\right)^{-1}$$

$$M_2 = \frac{\beta}{2} | [\Lambda^2 u_0] |^2 \left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2\rho}\right)^{-1} .$$

On a l'estimation $(E2)$

$$| \Lambda^2 v |^2 \leqslant K_2 | \Lambda^2 w |^2 + M_2 , \qquad 0 < K_2 < 1 . \qquad (E2)$$

Achevons maintenant le point i) du théorème 1.1.

ε étant fixé, on choisit $\rho = \lambda(\varepsilon) > \dfrac{1}{2\,\varepsilon^{3/2}}$, $\lambda \geqslant \lambda(\varepsilon)$ et β tel que

$$\frac{1}{2\,\rho} - \varepsilon^{3/2} + \frac{1}{2\,\beta} < 0\,.$$

K_1, K_2, M_1 et M_2 sont alors calculés et on choisit

$$R^2 \geqslant \max\left(\frac{M_1}{1-K_1}, \frac{M_2}{1-K_2}\right).$$

Avec les estimations $(E1)$ et $(E2)$ il est clair que $T_\lambda(H_R) \subset H_R$.

ii) Prenons w_1 et w_2 dans H_R et notons

$$v_1 = T_\lambda(w_1)\,, \quad v_2 = T_\lambda(w_2)\,, \quad w = w_1 - w_2\,, \quad v = v_1 - v_2\,,$$

on a

$$\Lambda^{-1}(v - xDv) + \lambda\Lambda^2(v - w) = \frac{1}{4\,\pi^2}(H_\varepsilon(Dw_1) - H_\varepsilon(Dw_2))\,. \tag{11}$$

Multiplions (11) par v et intégrons. En conduisant les calculs comme pour l'estimation $(E1)$ il vient :

$$\begin{aligned} 2\,|\,\Lambda^{-1/2}\,v\,|^2 + \frac{\lambda}{2}\,|\,\Lambda^1\,v\,|^2 - \frac{\lambda}{2}\,|\,\Lambda^1\,w\,|^2 + \frac{\lambda}{2}\,|\,\Lambda^1(v-w)\,|^2 &\leqslant \\ &\leqslant -\,\varepsilon^{3/2}\,|\,\Lambda^1\,w\,|^2 + |\,\Lambda^1\,w\,|\,|\,\Lambda^1(v-w)\,| \\ &\leqslant -\,\varepsilon^{3/2}\,|\,\Lambda^1\,w\,|^2 + \frac{1}{2\,\rho}\,|\,\Lambda^1\,w\,|^2 + \frac{\rho}{2}\,|\,\Lambda^1(v-w)\,|^2\,. \end{aligned}$$

Soit

$$2\,|\,\Lambda^{-1/2}\,v\,|^2 + \frac{\lambda}{2}\,|\,\Lambda^1\,v\,|^2 + \frac{\lambda-\rho}{2}\,|\,\Lambda^1(v-w)\,|^2 \leqslant \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\,\rho} - \varepsilon^{3/2}\right)|\,\Lambda^1\,w\,|^2\,.$$

Avec toujours le même choix pour λ et ρ on obtient en posant

$$K_3 = K_3(\varepsilon, \rho, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\,\rho} - \varepsilon^{3/2}\right)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-1} \quad \text{et} \quad M_3 = \frac{K_3}{\lambda}$$

$$|\,\Lambda^1\,v\,|^2 \leqslant K_3\,|\,\Lambda^1\,w\,|^2 \qquad 0 < K_3 < 1 \tag{12}$$

$$|\,\Lambda^{-1/2}\,v\,|^2 \leqslant M_3\,|\,\Lambda^1\,w\,|^2\,. \tag{13}$$

L'estimation sur $\Lambda^2\,v$ s'obtient en multipliant (11) par $\Lambda^2\,v$ et en intégrant.

Il vient :

$$|\Lambda^{1/2} v|^2 + \frac{\lambda}{2}|\Lambda^2 v|^2 - \frac{\lambda}{2}|\Lambda^2 w|^2 + \frac{\lambda}{2}|\Lambda^2(v-w)|^2 =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} (H_\varepsilon(Dw_1) - H_\varepsilon(Dw_2))\,\Lambda^2 v\,dx\,. \tag{14}$$

Le second membre se décompose en la somme de deux termes

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(Du_0 + Dw_1)\,D^2 w\Lambda^2 v\,dx \tag{15}$$

et

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} (f_\varepsilon(Du_0 + Dw_1) - f_\varepsilon(Du_0 + Dw_2))([D^2 u_0] + D^2 w_2)\,\Lambda^2 v\,dx\,. \tag{16}$$

On majore (15) par $-\varepsilon^{3/2}|\Lambda^2 v|^2 + \frac{\rho}{2}|\Lambda^2(v-w)|^2 + \frac{1}{2\rho}|\Lambda^2 v|^2$ avec le choix habituel de ρ.

Pour (16) il faut une majoration plus fine si l'on veut obtenir la contraction. f_ε est Lipschitzienne de constante $k \leqslant 3$. Posons $N_1 = 3(|[\Lambda^2 u_0]| + R)$. On majore (16) par :

$$3\,|Dw|_\infty\,|[\Lambda^2 u_0] + \Lambda^2 w_2|\,|\Lambda^2 v| \leqslant \frac{1}{2\beta}|\Lambda^2 v|^2 + \frac{\beta}{2}N_1^2\,|Dw|_\infty^2\,.$$

Comme $|Dw|_\infty^2 \leqslant 2\,|Dw|\,|D^2 w| \leqslant 16\,\pi^3\left(\frac{1}{2\nu}|\Lambda^1 w|^2 + \frac{\nu}{2}|\Lambda^2 w|^2\right)$ pour tout $\nu > 0$, il vient

$$\frac{1}{2\beta}|\Lambda^2 v|^2 + \frac{\beta}{2}N_1^2\,|Dw|_\infty^2 \leqslant \frac{1}{2\beta}|\Lambda^2 v|^2 +$$
$$+ 8\,N_1^2\,\pi^3\left(\frac{\beta\nu}{2}|\Lambda^2 w|^2 + \frac{\beta}{2\nu}|\Lambda^1 w|^2\right).$$

En reportant ces majorations dans (14) on obtient

$$|\Lambda^{1/2} v|^2 + \left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\rho} - \frac{1}{2\beta}\right)|\Lambda^2 v|^2 -$$
$$-\left(\frac{\lambda}{2} + 4\,\beta\nu N_1^2\,\pi^3\right)|\Lambda^2 w|^2 + \frac{\lambda-\rho}{2}|\Lambda^2(v-w)|^2 \leqslant \frac{8\,\pi^3}{\nu}|\Lambda^1 w|^2\,.$$

On choisit maintenant $\nu > 0$ tel que

$$4\,\beta\nu N_1^2\,\pi^3 < \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\,\rho} - \frac{1}{2\,\beta}.$$

On pose

$$K_4 = \left(\frac{\lambda}{2} + 4\,\beta\nu N_1^2\,\pi^3\right)\left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\,\rho} - \frac{1}{2\,\beta}\right)^{-1}$$

$$M_4 = \frac{8\,\pi^3}{\nu}\left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon^{3/2} - \frac{1}{2\,\rho} - \frac{1}{2\,\beta}\right)^{-1}.$$

On obtient l'estimation

$$|\,\Lambda^2\,v\,|^2 \leqslant K_4\,|\,\Lambda^2\,w\,|^2 + M_4\,|\,\Lambda^1\,w\,|^2 \qquad 0 < K_4 < 1\,. \tag{17}$$

L'estimation sur v se déduit de (12) et (13) et de la relation

$$|\,v\,|^2 \leqslant \frac{2}{3}\,|\,\Lambda^{-1/2}\,v\,|^2 + \frac{1}{3}\,|\,\Lambda^1\,v\,|^2\,.$$

En posant $M_5 = \frac{2}{3}\,M_3 + \frac{1}{3}\,K_3$ il vient :

$$|\,v\,|^2 \leqslant M_5\,|\,\Lambda^1\,w\,|^2\,. \tag{18}$$

Montrons maintenant que T_λ est de puissance p-ième contractante pour la norme usuelle de $H^2(\mathbb{R})$ à partir de (12), (17), (18) et du calcul du rayon spectral de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_5 & 0 \\ 0 & K_3 & 0 \\ 0 & M_4 & K_4 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad K_3 \text{ et } K_4 \text{ sont dans }]0 \quad 1[\,.$$

Il est clair que les valeurs propres de M sont 0, K_3, K_4 et que le rayon spectral $\rho(M) = \max(K_3, K_4)$ est strictement inférieur à 1. Donc $\lim\limits_{p\to+\infty} M^P = 0$.

Notons X_p le vecteur de composantes $|\,T_\lambda^p(w)\,|^2$, $|\,\Lambda^1\,T_\lambda^p(w)\,|^2$ et $|\,\Lambda^2\,T_\lambda^p(w)\,|^2$. La matrice M étant à termes positifs on obtient avec la relation d'ordre classique sur $\mathbb{R}^3$ et (12), (17), (18)

$$X_p \leqslant MX_{p-1} \leqslant M^2\,X_{p-2} \leqslant \cdots \leqslant M^p\,X_0\,.$$

Prenons sur $\mathbb{R}^3$ la norme $|\,X\,|_1 = |\,x_1\,| + |\,x_2\,| + |\,x_3\,|$ où x_1, x_2, x_3 sont

les composantes de X, et $\| M \|_1$ la norme matricielle induite. On a :

$$| X_p |_1 \leqslant \| M^p \|_1 \, | X_0 |_1 .$$

Comme $| X_0 |_1 = | w |_{H^2}^2$ et $| X_p |_1 = | T_\lambda^p(w) |_{H^2}^2$ on a donc prouvé que T_λ^p est contractant sur H_R pour p assez grand. Énonçons maintenant le résultat d'existence et d'unicité pour l'équation $(VE)_\varepsilon$.

THÉORÈME 1.4 : *L'équation $(VE)_\varepsilon$ admet une solution unique dans $H^2(\mathbb{R})$. Cette solution s'obtient comme limite de l'itération $v_{n+1} = T_\lambda v_n$ dans H_R. Elle est paire.*

Démonstration : Supposons que v_1 et v_2 soient deux solutions de $(VE)_\varepsilon$. On a :

$$\Lambda^{-1}(v_1 - v_2 - xD(v_1 - v_2)) - \frac{1}{4\pi^2}(H_\varepsilon(Dw_1) - H_\varepsilon(Dw_2)) = 0 . \quad (19)$$

On multiplie (19) par $v_1 - v_2$ et on intègre :

$$|\Lambda^{-1/2}(v_1 - v_2)|^2 + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} (F_\varepsilon(Du_0 + Dv_1) - F_\varepsilon(Du_0 + Dv_2))(Dv_1 - Dv_2)\, dx = 0$$

Avec (4) il vient $| \Lambda^{-1/2}(v_1 - v_2) |^2 + \varepsilon^{3/2} | \Lambda^1(v_1 - v_2) |^2 = 0$, ce qui prouve l'unicité.

La convergence de l'itération $v_{n+1} = T_\lambda v_n$ résulte du théorème 1.2. La limite est dans H_R donc paire par construction. C'est l'unique solution dans $H^2(\mathbb{R})$ de $(VE)_\varepsilon$. —*—

1.4. Convergence de la solution régularisée quand ε tend vers 0

Notons v_ε la solution de $(VE)_\varepsilon$ et $u_\varepsilon = u_0 + v_\varepsilon$. Remarquons que les estimations obtenues dégénèrent quand ε tend vers 0 et ne permettent pas de passer à la limite. Il faut d'autres estimations pour obtenir le résultat essentiel à savoir Du_ε borné dans $L^\infty(\mathbb{R})$ indépendamment de ε. u_ε vérifie

$$\left.\begin{aligned} & u_\varepsilon - xDu_\varepsilon - \frac{1}{4\pi^2} \Lambda^1 f_\varepsilon(Du_\varepsilon)\,[D^2 u_\varepsilon] = 0 \\ & Du_\varepsilon(0 \pm) = \pm m . \end{aligned}\right\} \qquad (UE)_\varepsilon$$

Comme $Du_\varepsilon \in H^1(0, +\infty)$ on a

$$D \operatorname{Log}(1 + Du_\varepsilon^2) = 2 \frac{Du_\varepsilon D^2 u_\varepsilon}{1 + Du_\varepsilon^2} \quad \text{et pour tout} \quad x \geqslant 0$$

$$\operatorname{Log}(1 + Du_\varepsilon^2(x)) - \operatorname{Log}(1 + m^2) = 2 \int_0^x \frac{Du_\varepsilon}{(1 + Du_\varepsilon^2)^{1/4}} \frac{D^2 u_\varepsilon}{(1 + Du_\varepsilon^2)^{3/4}} dx .$$

D'où

$$| \operatorname{Log}(1 + Du_\varepsilon^2(x)) - \operatorname{Log}(1 + m^2) | \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{Du_\varepsilon^2}{(1 + Du_\varepsilon^2)^{1/2}} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{[D^2 u_\varepsilon]^2}{(1 + Du_\varepsilon^2)^{3/2}} dx \right)^{1/2} . \tag{20}$$

Pour montrer que Du_ε reste borné dans $L^\infty(\mathbb{R})$, nous allons obtenir des majorations sur le second membre en suivant [3]. Nous aurons besoin de trois estimations.

Estimation $(D1)$

Appliquons le lemme 1.2 sur $(UE)_\varepsilon$. On obtient :

$$2 \, | \Lambda^{-1/2} u_\varepsilon |^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(Du_\varepsilon) \, [D^2 u_\varepsilon] \, u_\varepsilon \, dx .$$

On intègre le second membre par parties et il vient :

$$2 \, | \Lambda^{-1/2} u_\varepsilon |^2 + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(Du_\varepsilon) \, Du_\varepsilon \, dx + \frac{1}{2\pi^2} \mu m u_\varepsilon(0) = 0 . \tag{D1}$$

Estimation $(D2)$

u_ε vérifie

$$\Lambda^{-1}(u_\varepsilon - xDu_\varepsilon) - \frac{1}{4\pi^2} f_\varepsilon(Du_\varepsilon) \, [D^2 u_\varepsilon] = 0 . \tag{21}$$

On multiplie (21) par $- [D^2 u_\varepsilon]$ et on intègre :

$$- \langle \Lambda^{-1}(u_\varepsilon - xDu_\varepsilon), [D^2 u_\varepsilon] \rangle + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(Du_\varepsilon) \, | [D^2 u_\varepsilon] |^2 \, dx = 0 .$$

Le crochet se calcule comme dans [3] où l'on trouvera la démonstration d'un lemme analogue :

LEMME 1.5 : *Si u_ε est solution de $(UE)_\varepsilon$, on a :*

$$- \langle \Lambda^{-1}(u_\varepsilon - xDu_\varepsilon), [D^2 u_\varepsilon] \rangle = 4\pi^2 \, | \Lambda^{1/2} u_\varepsilon |^2 + 4 m \Lambda^{-1} u_\varepsilon(0) .$$

On remarquera que $\Lambda^{-1} u_\varepsilon(0)$ a un sens parce que $|\xi|^{-1} \hat{u}_\varepsilon$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et donc $\Lambda^{-1} u_\varepsilon$ est continue, nulle à l'infini. L'estimation $(D2)$ est

$$4\pi^2 |\Lambda^{1/2} u_\varepsilon|^2 + 4m\Lambda^{-1} u_\varepsilon(0) + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(Du_\varepsilon) |[D^2 u_\varepsilon]|^2 dx = 0. \quad (D2)$$

Estimation $(D3)$

Notons $B_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\frac{1}{4\pi^2} f_\varepsilon(Du_\varepsilon)[D^2 u_\varepsilon]$. Avec le lemme 1.2 on a $\Lambda^{-1} u_\varepsilon$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Multiplions $(UE)_\varepsilon$ par $\Lambda^{-1} u_\varepsilon$ et intégrons.

$$\langle \Lambda^{-1}(u_\varepsilon - xDu_\varepsilon), \Lambda^{-1} u_\varepsilon \rangle + \langle B_\varepsilon(u_\varepsilon), \Lambda^{-1} u_\varepsilon \rangle = 0.$$

Calculons le premier crochet :

$$\langle \Lambda^{-1}(u_\varepsilon - xDu_\varepsilon), \Lambda^{-1} u_\varepsilon \rangle = 2|\Lambda^{-1} u_\varepsilon|^2 - \langle \Lambda^{-1} D(xu_\varepsilon), \Lambda^{-1} u_\varepsilon \rangle.$$

Mais $-\langle \Lambda^{-1} D(xu_\varepsilon), \Lambda^{-1} u_\varepsilon \rangle = \int_{\mathbb{R}} D\hat{u}_\varepsilon \frac{\bar{\hat{u}}_\varepsilon}{\xi} d\xi$. Posons $\hat{\theta} = \frac{\hat{u}_\varepsilon}{\xi}$. $\hat{\theta} \in L^2(\mathbb{R})$.

On a :

$$\int_{\mathbb{R}} D\hat{u}_\varepsilon \frac{\bar{\hat{u}}_\varepsilon}{\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} D(\xi\hat{\theta})\bar{\hat{\theta}}\, d\xi = |\hat{\theta}|^2 + \int_{\mathbb{R}} \xi D\hat{\theta}\bar{\hat{\theta}}\, d\xi.$$

En intégrant par parties on a $\int_{\mathbb{R}} \xi D\hat{\theta}\bar{\hat{\theta}}\, d\xi = -\int_{\mathbb{R}} \hat{\theta} D(\xi\bar{\hat{\theta}})\, d\xi$. Comme cette intégrale est réelle, elle vaut aussi

$$-\int_{\mathbb{R}} D(\xi\hat{\theta})\bar{\hat{\theta}}\, d\xi, \quad \text{d'où} \quad \int_{\mathbb{R}} D(\xi\hat{\theta})\bar{\hat{\theta}}\, d\xi = \frac{1}{2}|\theta|^2$$

et

$$-\langle \Lambda^{-1} D(xu_\varepsilon), \Lambda^{-1} u_\varepsilon \rangle = \frac{1}{2}|\hat{\theta}|^2 = \frac{1}{2}|\Lambda^{-1} u_\varepsilon|^2.$$

L'estimation $(D3)$ est

$$\frac{5}{2}|\Lambda^{-1} u_\varepsilon|^2 + \langle B_\varepsilon(u_\varepsilon), \Lambda^{-1} u_\varepsilon \rangle = 0 \quad (D3)$$

d'où

$$|\Lambda^{-1} u_\varepsilon| \leqslant |B_\varepsilon(u_\varepsilon)|. \quad (22)$$

On utilise maintenant ces trois estimations pour montrer la

PROPOSITION 1.6 : i) *$B_\varepsilon(u_\varepsilon)$ est borné dans $L^2(\mathbb{R})$.*
ii) *$\Lambda^{-1} u_\varepsilon$ et $\Lambda^{1/2} u_\varepsilon$ sont bornés dans $L^2(\mathbb{R})$.*
iii) *$Du_\varepsilon(1 + Du_\varepsilon^2)^{-1/4}$ est borné dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration

i) Pour tout $\alpha > 0$, il existe $C(\alpha) \geqslant 0$ tel que

$$| \Lambda^{-1} u_\varepsilon |_\infty \leqslant \alpha | \Lambda^{1/2} u_\varepsilon | + C(\alpha) | \Lambda^{-1} u_\varepsilon | .$$

On porte cette inégalité dans $(D2)$ en prenant $\alpha = \dfrac{\pi^2}{m}$. On obtient

$$2 \pi^2 | \Lambda^{1/2} u_\varepsilon |^2 - \langle B_\varepsilon(u_\varepsilon), [D^2 u_\varepsilon] \rangle \leqslant A_1 + A_2 | \Lambda^{-1} u_\varepsilon | \tag{23}$$

avec A_1 et A_2 deux constantes. Comme pour tout $z \in \mathbb{R}$ $f_\varepsilon(z) \geqslant (f_\varepsilon(z))^2$, on a

$$- \langle B_\varepsilon(u_\varepsilon), [D^2 u_\varepsilon] \rangle = \frac{1}{4 \pi^2} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(Du_\varepsilon) [D^2 u_\varepsilon]^2 \, dx \geqslant 4 \pi^2 | B_\varepsilon(u_\varepsilon) |^2 . \tag{24}$$

En reportant (22) et (24) dans (23) on obtient $B_\varepsilon(u_\varepsilon)$ borné dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendamment de ε.

ii) On déduit de (22) que $\Lambda^{-1} u_\varepsilon$ est borné dans $L^2(\mathbb{R})$ et avec (23) $\Lambda^{1/2} u_\varepsilon$ l'est aussi. Donc u_ε est borné dans $L^2(\mathbb{R})$.

iii) Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

LEMME 1.7 (voir [3] pour la démonstration) : *Quel que soit $M > 1$, il existe $C(M) \geqslant 0$ tel que l'on ait*

$$2 | u(0) | \leqslant M \int_{\mathbb{R}} \frac{Du^2}{(1 + Du^2)^{1/2}} \, dx + C(M) | u |^{2/3}$$

pour toute fonction paire u de $H^1(\mathbb{R})$.

On applique ce lemme à u_ε et en remarquant que pour tout $z \in \mathbb{R}$ on a $z^2(1 + z^2)^{-1/2} \leqslant F_\varepsilon(z) z$ il vient

$$2 | u_\varepsilon(0) | \leqslant M \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(Du_\varepsilon) Du_\varepsilon \, dx + C(M) | u_\varepsilon |^{2/3} . \tag{25}$$

Reportons (25) dans ($D1$)

$$8\,\pi^2\,|\,\Lambda^{-1/2}\,u_\varepsilon\,|^2 + \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(Du_\varepsilon)\,Du_\varepsilon\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \mu m\left(M\int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(Du_\varepsilon)\,Du_\varepsilon\,dx + C(M)\,|\,u_\varepsilon\,|^{2/3}\right).$$

Choisissons M tel que $\mu m M < 1$. $\Lambda^{-1/2}\,u_\varepsilon$ et u_ε étant bornés dans $L^2(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(Du_\varepsilon)\,Du_\varepsilon\,dx$ est borné. Donc $\int_{\mathbb{R}} \frac{Du_\varepsilon^2}{(1+Du_\varepsilon^2)^{1/2}}\,dx$ est borné.

Pour finir de montrer que Du_ε est borné dans $L^\infty(\mathbb{R})$ il suffit de remarquer que :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{[D^2\,u_\varepsilon]^2}{(1+Du_\varepsilon^2)^{3/2}}\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(Du_\varepsilon)\,[D^2\,u_\varepsilon]^2\,\mathrm{d}x = -\,4\,\pi^2\,\langle\,B_\varepsilon(u_\varepsilon),\,[D^2\,u_\varepsilon]\,\rangle\,.$$

Ce dernier terme est majoré avec (23) par $A_1 + A_2\,|\,\Lambda^{-1}\,u_\varepsilon\,|^2$ qui est borné indépendamment de ε. —*—

Pour conclure, on peut donc obtenir la solution de l'équation (E) par un schéma itératif convergent.

THÉORÈME 1.8 : *Il existe* $\varepsilon > 0$ *et* $\lambda > 0$ *tels que le schéma*

$$u_{n+1} - xDu_{n+1} + \lambda\Lambda^3\,u_{n+1} = \frac{1}{4\,\pi^2}\,\Lambda^1\,f_\varepsilon(Du_n)\,[D^2\,u_n] + \lambda\Lambda^3\,u_n$$

$$Du_{n+1}(0\,\pm) = \pm\,m$$

avec u_0 *solution de* (EL), *converge vers l'unique solution de* (E) *au sens suivant :*

$$u_n \to u \quad \textit{dans} \quad H^1(\mathbb{R}) \quad \textit{et} \quad [D^2\,u_n] \to [D^2\,u] \quad \textit{dans} \quad L^2(\mathbb{R})\,.$$

$$u \quad \textit{est paire}\,.$$

Démonstration : Elle résulte immédiatement de l'estimation sur $|\,Du_\varepsilon\,|_\infty$. On a $|\,Du_\varepsilon\,|_\infty \leqslant C$. On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $1 + C^2 \leqslant 1/\varepsilon$ et λ comme dans le théorème 1.1 qui donne la convergence du schéma itératif vers u_ε tel que

$$u_\varepsilon - xDu_\varepsilon = \frac{1}{4\,\pi^2}\,\Lambda^1\,f_\varepsilon(Du_\varepsilon)\,[D^2\,u_\varepsilon] = \frac{1}{4\,\pi^2}\,\Lambda^1\,f(Du_\varepsilon)\,[D^2\,u_\varepsilon]$$

$$Du_\varepsilon(0\,\pm) = \pm\,m$$

u_ε est alors l'unique solution de (E). (L'unicité pour (E) s'obtient immédiatement par le même raisonnement que pour $(VE)_\varepsilon$.) —*—

2. APPROXIMATION VARIATIONNELLE A SUPPORT COMPACT

La résolution numérique de (E), outre la non-linéarité, pose le problème du domaine qui est non borné. Pour cela nous allons approcher $(VE)_\varepsilon$ et $(VEL)_\varepsilon$ dans un espace de fonctions à support compact. Le plan de ce paragraphe est :

i) Un espace d'approximants à support compact. Propriétés.
ii) Approximation variationnelle du problème linéaire $(VEL)_\varepsilon$.
iii) Approximation variationnelle du problème non linéaire $(VE)_\varepsilon$.

Nous donnerons pour ces deux derniers points les résultats de convergence en fonction du support.

2.1. Un espace d'approximants à support compact

Le calcul de la suite $v_{n+1} = T_\lambda v_n$ étudiée au paragraphe 1 nécessite la résolution d'une équation de la forme

$$v - xDv + \lambda\Lambda^3 v = \Lambda^1 f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \tag{26}$$

Rappelons que l'on connaît analytiquement v par transformation de Fourier (voir § 1.2). Mais ceci n'est pas exploitable numériquement. Aussi allons-nous approcher v par la solution d'une équation variationnelle dans un espace de fonctions à support compact.

Énonçons d'abord quelques propriétés utiles de la solution v de (26).

PROPOSITION 2.1 : *Soit v l'unique solution dans $H^2(\mathbb{R})$ de* (26).

i) $\Lambda^{-1}(v - xDv)$ *existe et appartient à* $L^2(\mathbb{R})$.
ii) xv *et* $\Lambda^{-1/2} v$ *sont dans* $L^2(\mathbb{R})$.
iii) $v \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\hat{v}(0) = 0$.

Démonstration : Les points i) et ii) résultent de l'application du lemme 1.2 à l'équation (26). $v \in L^1(\mathbb{R})$ car $v(x) = \frac{1}{x}(xv(x))$ et $xv \in L^2(\mathbb{R})$. Enfin d'après la formule (0) donnant $\hat{v}(\xi)$ et avec l'inégalité de Schwarz il vient $|\hat{v}(\xi)| \leqslant C|\xi|^{1/2}$ et donc $\hat{v}(0) = 0$. —*—

On approche maintenant v au sens suivant

THÉORÈME 2.2: *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe σ_j à support compact dans $[-j, +j]$ ayant les propriétés suivantes :*

i) $\sigma_j \in H^2(\mathbb{R})$.

ii) $\lim_{j \to +\infty} \sigma_j = v$ *dans* $H^2(\mathbb{R})$ *fort.*

iii) $\lim_{j \to +\infty} x\sigma_j = xv$ *dans* $L^2(\mathbb{R})$ *fort.*

iv) $\hat{\sigma}_j(0) = 0$.

v) $\lim_{j \to +\infty} \Lambda^{-1/2} \sigma_j = \Lambda^{-1/2} v$ *dans* $L^2(\mathbb{R})$ *fort.*

Démonstration : On commence par trouver une suite α_j qui vérifie les points i) et ii). Pour cela on prend $\Psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\Psi \equiv 1$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$0 \leqslant \Psi \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{supp} \Psi \subset [-1, 1].$$

On pose $\Psi_j(x) = \Psi(x/j)$ et $\alpha_j(x) = v(x)\, \Psi_j(x)$. On vérifie que α_j est dans $H^2(\mathbb{R})$, à support dans $[-j, j]$ et $\lim_{j \to +\infty} \alpha_j = v$ dans $H^2(\mathbb{R})$ fort.

Pour avoir des fonctions d'intégrale nulle on prend $\nu \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \nu(x)\, dx = 1$ et $\operatorname{supp} \nu \subset [-1, 1]$ et on pose

$$\sigma_j = \alpha_j + c_j \nu \quad \text{où} \quad c_j = -\int_{\mathbb{R}} \alpha_j(x)\, \mathrm{d}x.$$

Puisque α_j converge ponctuellement vers v qui est dans $L^1(\mathbb{R})$ et comme α_j est dominé par v on a

$$\lim_{j \to +\infty} c_j = -\int_{\mathbb{R}} v(x)\, dx = 0.$$

Les points i), ii), iv) sont alors vérifiés par σ_j. Montrons maintenant que $x\sigma_j$ converge vers xv dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{j \to +\infty} x\alpha_j(x) = xv(x) \quad \text{et} \quad |x\alpha_j(x) - xv(x)|^2 \leqslant 4\, |xv(x)|^2.$$

Comme xv est dans $L^2(\mathbb{R})$, on a par convergence dominée

$$\lim_{j \to +\infty} x\alpha_j = xv \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

Quant au terme $c_j\, xv$ il est clair qu'il tend vers 0 puisque $xv \in L^2(\mathbb{R})$ et $\lim_{j \to +\infty} c_j = 0$.

Montrons le point v). Comme $\hat{\sigma}_j$ est $\mathscr{C}^\infty$ et $\hat{\sigma}_j(0) = 0$ on a

$$\hat{\sigma}_j(\xi) = \int_0^\xi D\hat{\sigma}_j(s)\, ds \leqslant |\, \xi\, |^{1/2}\, |\, D\hat{\sigma}_j\, |$$

par l'inégalité de Schwarz.

Par transformation de Fourier le point iii) donne $\lim_{j \to +\infty} D\hat{\sigma}_j = D\hat{v}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ fort et $|\, \xi\, |^{-1/2}\, \hat{\sigma}_j(\xi)$ est donc borné au voisinage de l'origine et $\Lambda^{-1/2}\, \sigma_j$ est dans $L^2(\mathbb{R})$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}} |\, \xi^{-1} |\, |\, \hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)\, |^2\, d\xi =$$

$$= \int_{|\xi| \leqslant 1} |\, \xi\, |^{-1}\, |\, \hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)\, |^2\, d\xi + \int_{|\xi| > 1} |\, \xi\, |^{-1}\, |\, \hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)\, |^2\, d\xi$$

$$\leqslant \int_{|\xi| \leqslant 1} |\, \xi\, |^{-1}\, |\, \hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)\, |^2\, d\xi + |\, \hat{v} - \hat{\sigma}_j\, |^2 .$$

Examinons l'intégrale du second membre. Comme $\hat{\sigma}_j$ converge vers $\hat{v}$ dans $H^1(\mathbb{R})$ l'intégrande converge vers 0 pour tout $\xi \neq 0$. De plus

$|\, \xi\, |^{-1}\, |\, \hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)\, |^2$ est borné sur $[-1, 1]$ indépendamment de j car on a

$$|\, \xi\, |^{-1}\, |\, \hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)\, |^2 \leqslant 2(|\, D\hat{v}\, |^2 + |\, D\hat{\sigma}_j\, |^2)$$

et $D\hat{\sigma}_j$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ fort.

Par le théorème de convergence dominée on obtient donc

$$\lim_{j \to +\infty} \int_{|\xi| \leqslant 1} |\, \xi\, |^{-1}\, |\, \hat{v}(\xi) - \hat{\sigma}_j(\xi)\, |^2\, d\xi = 0$$

et comme $\hat{\sigma}_j$ converge vers $\hat{v}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ on a montré v). —•—

On considère maintenant

$$V_j = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp} v \subset [-j, j],\ \int_{\mathbb{R}} v(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Muni de la norme induite par $H^1(\mathbb{R})$, V_j est un espace de Hilbert.

PROPOSITION 2.3 : *Λ^{-1}, $\Lambda^{-1/2}$ et $v \to \Lambda^{-1}(v - xDv)$ sont des opérateurs continus de V_j dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration : On a $\widehat{\Lambda^{-1}v} = |\xi|^{-1}\hat{v}$.

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{-2} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \leqslant \int_{|\xi| \leqslant 1} |\xi|^{-2} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > 1} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi .$$

$\hat{v}$ étant dans $H^1(\mathbb{R})$ on a $|\hat{v}(\xi)| \leqslant |\xi| \, |D\hat{v}|_\infty$.

$$|D\hat{v}(\xi)| \leqslant 2\pi \int_{\mathbb{R}} |x| \, |v(x)| \, dx \leqslant 2\pi \left(\int_{-j}^{+j} x^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$\left(\int_{-j}^{+j} |v(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \leqslant C |v| .$$

D'où $\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{-2} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \leqslant 2C^2 |v|^2 + |v|^2 \leqslant C_1 |v|^2$ ce qui montre la continuité de Λ^{-1}.

La démonstration pour $\Lambda^{-1/2}$ et $v \to \Lambda^{-1}(v - xDv)$ est du même type.

2.2. Approximation variationnelle à support compact de $(VED)_\varepsilon$

On considère sur $V_j \times V_j$ la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \langle \Lambda^{-1}(u - xDu), v \rangle + \lambda \langle \Lambda^1 u, \Lambda^1 v \rangle .$$

Les crochets sont des produits scalaires dans $L^2(\mathbb{R})$ et λ est positif.

Notons que cette forme n'est pas symétrique à cause du terme $\langle \Lambda^{-1}(xDu), v \rangle$.

PROPOSITION 2.4 : *La forme $a(.,.)$ est continue sur $V_j \times V_j$. Elle est coercive sur V_j.*

Démonstration : Décomposons $\langle \Lambda^{-1}(u - xDu), v \rangle$ sous la forme

$$2 \langle \Lambda^{-1/2} u, \Lambda^{-1/2} v \rangle - \langle \Lambda^{-1} D(xu), v \rangle .$$

$$2 \langle \Lambda^{-1/2} u, \Lambda^{-1/2} v \rangle = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{u}(\xi) \, \bar{\hat{v}}(\xi)}{|\xi|} d\xi .$$

Comme $\hat{u}(0) = 0$, on a $|\hat{u}(\xi)| \leqslant |\xi|^{1/2} |D\hat{u}|$ avec l'inégalité de Schwarz.

D'où

$$2\,|\langle \Lambda^{-1/2} u, \Lambda^{-1/2} v \rangle| \leqslant 2 \int_{|\xi| \leqslant 1} |D\hat{u}|\,|D\hat{v}|\,d\xi + 2 \int_{|\xi|>1} |\hat{u}(\xi)|\,|\hat{v}(\xi)|\,d\xi$$

$$\leqslant 4\,|D\hat{u}|\,|D\hat{v}| + 2\,|\hat{u}|\,|\hat{v}|$$

$$\leqslant 16\,\pi^2\,|\widehat{xu}|\,|\widehat{xv}| + 2\,|u|\,|v|$$

$$\leqslant (16\,\pi^2 j^2 + 2)\,|u|\,|v|\,.$$

Par suite

$$|a(u, v)| \leqslant (16\,\pi^2 j^2 + 2)\,|u|\,|v| + \lambda\,|\Lambda^1 u|\,|\Lambda^1 v|$$

ce qui prouve la continuité de $a(.,\,.)$.

Pour la coercivité on a

$$a(u, u) = 2\,|\Lambda^{-1/2} u|^2 + \lambda\,|\Lambda^1 u|^2 - \langle \Lambda^{-1} D(xu), u \rangle\,.$$

Montrons que $\langle \Lambda^{-1} D(xu), u \rangle = 0$.

On remarque que $D(|\hat{u}|^2) = 2\,\mathrm{Re}\,\bar{\hat{u}} D\hat{u}$ et u étant réelle $\langle \Lambda^{-1} D(xu), u \rangle$ est réel. D'où

$$\langle \Lambda^{-1} D(xu), u \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sign}\,(\xi)\, D\hat{u}\bar{\hat{u}}\,d\xi = -\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sign}\,(\xi)\,\mathrm{Re}\,D\hat{u}\bar{\hat{u}}\,d\xi$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sign}\,(\xi)\, D(|\hat{u}|^2)\,d\xi$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} D(|\hat{u}|^2)\,d\xi + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} D(|\hat{u}|^2)\,d\xi = 0$$

car $\hat{u}$ est nulle en 0 et à l'infini ($u \in L^1(\mathbb{R})$). —*—

On déduit immédiatement du théorème de Lax-Milgram et de la proposition précédente le

THEOREM 2.5 : *Pour tout f dans $L^2(\mathbb{R})$ il existe une unique solution v_j de l'équation variationnelle*

$$\langle \Lambda^{-1}(v_j - xDv_j), \mathrm{v} \rangle + \lambda \langle \Lambda^1 v_j, \Lambda^1 \mathrm{v} \rangle = \langle f, \mathrm{v} \rangle\,, \quad \forall \mathrm{v} \in V_j\,. \tag{27}$$

Abordons maintenant l'étude de la convergence de v_j vers la solution v de (26). Nous allons montrer que v_j tend vers v dans $H^1(\mathbb{R})$ fort en comparant v_j et l'approximation σ_j de v exhibée dans le théorème 2.2.

La solution de (26) vérifie

$$\langle \Lambda^{-1}(v - xDv), \mathrm{v} \rangle + \lambda \langle \Lambda^1 v, \Lambda^1 \mathrm{v} \rangle = \langle f, \mathrm{v} \rangle \quad \forall \mathrm{v} \in V_j . \tag{28}$$

On décompose v en $\sigma_j + v - \sigma_j$ dans (28) puis on fait la différence entre (27) et (28) en posant $\theta_j = v_j - \sigma_j$ et en prenant $\mathrm{v} = \theta_j$. Il vient :

$$\begin{aligned} &\langle \Lambda^{-1}(\theta_j - xD\theta_j), \theta_j \rangle + \lambda \langle \Lambda^1 \theta_j, \Lambda^1 \theta_j \rangle = \\ &\quad = \langle \Lambda^{-1}(v - \sigma_j - xD(v - \sigma_j)), \theta_j \rangle + \lambda \langle \Lambda^1(v - \sigma_j), \Lambda^1 \theta_j \rangle . \end{aligned} \tag{29}$$

Le premier membre de (29) vaut $2 \mid \Lambda^{-1/2} \theta_j \mid^2 + \lambda \mid \Lambda^1 \theta_j \mid^2$. Le second membre est majoré par :

$$\begin{aligned} 2 \mid \Lambda^{-1/2}(v - \sigma_j) \mid \; \mid \Lambda^{-1/2} \theta_j \mid + 2\pi \mid xv - x\sigma_j \mid \; \mid \theta_j \mid + \\ + \lambda \mid \Lambda^1(v - \sigma_j) \mid \; \mid \Lambda^1 \theta_j \mid \leqslant \mid \Lambda^{-1/2}(v - \sigma_j) \mid^2 + \mid \Lambda^{-1/2} \theta_j \mid^2 \\ + (\pi^2/\alpha) \mid xv - x\sigma_j \mid^2 + \alpha \mid \theta_j \mid^2 \\ + \frac{\lambda}{2} \mid \Lambda^1(v - \sigma_j) \mid^2 + \frac{\lambda}{2} \mid \Lambda^1 \theta_j \mid^2 . \end{aligned}$$

Comme $\mid \theta_j \mid^2 \leqslant \frac{2}{3} \mid \Lambda^{-1/2} \theta_j \mid^2 + \frac{1}{3} \mid \Lambda^1 \theta_j \mid^2$ on prend α assez petit de façon que $\frac{2\alpha}{3} \leqslant \frac{1}{2}$ et $\frac{\alpha}{3} \leqslant \frac{\lambda}{4}$ et on obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mid \Lambda^{-1/2} \theta_j \mid^2 + \frac{\lambda}{4} \mid \Lambda^1 \theta_j \mid^2 \leqslant \mid \Lambda^{-1/2}(v - \sigma_j) \mid^2 + \\ + (\pi^2/\alpha) \mid xv - x\sigma_j \mid^2 + \frac{\lambda}{2} \mid \Lambda^1(v - \sigma_j) \mid^2 . \end{aligned}$$

On conclut avec le théorème 2.2 que $\Lambda^{-1/2} \theta_j$ et $\Lambda^1 \theta_j$ convergent vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$ fort et donc $v_j - \sigma_j$ tend vers 0 dans $H^1(\mathbb{R})$ fort.

Comme σ_j converge vers v dans $H^2(\mathbb{R})$ fort, on a donc montré la

PROPOSITION 2.6 : *La solution v_j de l'équation variationnelle* (27) *converge dans $H^1(\mathbb{R})$ vers la solution v du problème linéaire* (26).

Remarque 2.7 :

i) On ne peut pas avoir d'ordre de convergence en fonction de j sans informa-

tion supplémentaire (que l'on ne possède pas) sur la décroissance de v à l'infini.

ii) Théoriquement, on peut approcher la solution du problème non linéaire (E) en utilisant le théorème 1.4 et la proposition 2.6. Pratiquement, on va utiliser le schéma itératif décrit au paragraphe 1 sur une approximation variationnelle à support compact de $(E)_\varepsilon$.

2.3. Approximation variationnelle à support compact de (VE)

En reprenant les notations des paragraphes 2.1 et 2.2 on associe à $(VE)_\varepsilon$ le problème variationnel

$$\left.\begin{aligned} & v_j \in V_j \text{ vérifie pour tout } \mathrm{v}_j \in V_j \\ & \langle \Lambda^{-1}(v_j - xDv_j), \mathrm{v}_j \rangle = \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv_j), D\mathrm{v}_j \rangle + \\ & \qquad\qquad + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle Du_0, D\mathrm{v}_j \rangle . \end{aligned}\right\} \qquad (EC)_\varepsilon$$

Nous allons montrer que $(EC)_\varepsilon$ admet une solution v_j unique dans V_j par une itération de point fixe suivant celle du théorème d'existence pour la solution v de $(E)_\varepsilon$. Nous montrerons ensuite que v_j converge vers v lorsque j tend vers $+\infty$.

On considère le schéma itératif suivant :

$$\left.\begin{aligned} & v_n \in V_j,\ v_{n+1} \in V_j \text{ et vérifie pour tout } \mathrm{v} \in V_j \\ & \langle \Lambda^{-1}(v_{n+1} - xDv_{n+1}), \mathrm{v} \rangle + \lambda \langle \Lambda^1(v_{n+1} - v_n), \Lambda^1 \mathrm{v} \rangle = \\ & \qquad = \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv_n), D\mathrm{v} \rangle + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle Du_0, D\mathrm{v} \rangle . \end{aligned}\right\} \qquad (ECL)_\varepsilon$$

L'existence et l'unicité d'une solution pour $(ECL)_\varepsilon$ découlent de la proposition 2.4 et du théorème de Lax-Milgram car on vérifie facilement que l'application

$$\mathrm{v} \to \lambda \langle \Lambda^1 v_n, \Lambda^1 \mathrm{v} \rangle - \frac{1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv_n), D\mathrm{v} \rangle + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle Du_0, D\mathrm{v} \rangle$$

est une forme linéaire continue sur V_j muni de la norme induite par $H^1(\mathbb{R})$.

Nous noterons $S_\lambda : v_n \to v_{n+1}$ l'opérateur de linéarisation défini par $(ECL)_\varepsilon$.

THÉORÈME 2.8 : *Soit* $0 < \varepsilon < \mu^2$. *Il existe* $\lambda(\varepsilon)$ *tel que pour tout* $\lambda \geqslant \lambda(\varepsilon)$, S_λ *soit de puissance contractante sur* V_j. *L'itération* $v_{n+1} = S_\lambda v_n$ *converge quel que soit le point de départ dans* V_j *vers une solution de* $(EC)_\varepsilon$. *Cette solution est unique et paire.*

Démonstration : Soient w_1 et w_2 dans V_j. On pose $v_1 = S_\lambda w_1$, $v_2 = S_\lambda w_2$, $w = w_1 - w_2$ et $v = v_1 - v_2$. On a pour tout v dans V_j

$$\langle \Lambda^{-1}(v - xDv), \mathrm{v} \rangle + \lambda \langle \Lambda^1(v - w), \Lambda^1 \mathrm{v} \rangle =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dw_2) - F_\varepsilon(Du_0 + Dw_1), D\mathrm{v} \rangle .$$

Prenons $\mathrm{v} = v_1 - v_2$ et procédons comme dans le point ii) du théorème 1.1. Il vient :

$$2 \,|\, \Lambda^{-1/2} v \,|^2 + \frac{\lambda}{2} |\, \Lambda^1 v \,|^2 - \frac{\lambda}{2} |\, \Lambda^2 w \,|^2 + \frac{\lambda}{2} |\, \Lambda^1(v - w) \,|^2 \leqslant$$

$$\leqslant - \varepsilon^{3/2} |\, \Lambda^1 w \,|^2 + |\, \Lambda^1 w \,| \; |\, \Lambda^1(v - w) \,|$$

$$\leqslant - \varepsilon^{3/2} |\, \Lambda^1 w \,|^2 + \frac{1}{2\rho} |\, \Lambda^1 w \,|^2 + \frac{\rho}{2} |\, \Lambda^1(v - w) \,|^2 .$$

D'où

$$2 \,|\, \Lambda^{-1/2} v \,|^2 + \frac{\lambda}{2} |\, \Lambda^1 v \,|^2 + \frac{\lambda - \rho}{2} |\, \Lambda^1(v - w) \,|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\rho} - \varepsilon^{3/2} \right) |\, \Lambda^1 w \,|^2 .$$

Choisissons $\rho > 0$ tel que $\varepsilon^{3/2} > 1/2\,\rho$ et $\lambda \geqslant \rho$. On obtient en posant :

$$K_5 = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\rho} - \varepsilon^{3/2} \right), \quad M_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\rho} - \varepsilon^{3/2} \right)$$

$$|\, \Lambda^1 v \,|^2 \leqslant K_5 \,|\, \Lambda^1 w \,|^2 , \quad 0 < K_5 < 1 \tag{30}$$

$$|\, \Lambda^{-1/2} v \,|^2 \leqslant M_5 \,|\, \Lambda^1 w \,|^2 . \tag{31}$$

Il est clair, à partir de (30) et (31) que S_λ^p est contractant en norme $H^1(\mathbb{R})$ pour p (dépendant de λ) assez grand et l'itération $v_{n+1} = S_\lambda v_n$ converge dans V_j. On en déduit que la solution v_j de $(EC)_\varepsilon$ est unique. Notons $\tilde{v}_j$ obtenue par

parité en posant $\tilde{v}_j(x) = v_j(-x)$. $\tilde{v}_j$ vérifie

$$\langle \Lambda^{-1}(\tilde{v}_j - xD\tilde{v}_j), \tilde{v} \rangle = \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + D\tilde{v}_j), D\tilde{v} \rangle + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle Du_0, D\tilde{v} \rangle$$

pour tout $\tilde{v} \in V_j$. Donc $\tilde{v}_j = v_j$. —*—

Remarques 2.9 :

i) On vérifie que la suite des itérés obtenus par $(ECL)_\varepsilon$ est formée de fonctions paires dès que l'un des itérés est pair.

ii) Il n'y a pas de conditions sur l'itéré de départ comme dans le théorème 1.8. On prendra v_0 pair pour diminuer le nombre des calculs.

Précisons maintenant la convergence de v_j vers la solution du problème non linéaire $(VE)_\varepsilon$.

PROPOSITION 2.10 : *La solution v_j de l'équation variationnelle $(EC)_\varepsilon$ converge dans $H^1(\mathbb{R})$ vers la solution v de $(VE)_\varepsilon$ quand j tend vers l'infini.*

Démonstration : On procède comme dans la proposition 2.6 pour le cas linéaire. La solution v de $(VE)_\varepsilon$ vérifie pour tout $\nu_j \in V_j$

$$\begin{aligned}\langle \Lambda^{-1}(v - xDv), \nu_j \rangle &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \langle f_\varepsilon(Du_0 + Dv)([D^2 u_0] + D^2 v), \nu_j \rangle - \frac{\mu}{4\pi^2} \langle [D^2 u_0], \nu_j \rangle \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv), D\nu_j \rangle + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle Du_0, D\nu_j \rangle . \qquad (32)\end{aligned}$$

Soit σ_j une approximation de v au sens du théorème 2.2. On écrit $v = \sigma_j + v - \sigma_j$, on pose $g_j = v_j - \sigma_j$ et on fait la différence entre $(EC)_\varepsilon$ et (32). Il vient :

$$\begin{aligned}\langle \Lambda^{-1}(g_j - xDg_j), \nu_j \rangle = \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv_j) - F_\varepsilon(Du_0 + Dv), D\nu_j \rangle + \\ + \langle \Lambda^{-1}(v - \sigma_j + xD(v - \sigma_j)), \nu_j \rangle .\end{aligned}$$

Prenons $\nu_j = g_j$. On obtient

$$\begin{aligned}2 \,|\, \Lambda^{-1/2} g_j \,|^2 = \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv_j) - F_\varepsilon(Du_0 + D\sigma_j) + \\ + F_\varepsilon(Du_0 + D\sigma_j) - F_\varepsilon(Du_0 + Dv), Dg_j \rangle \\ + 2 \langle \Lambda^{-1/2}(v - \sigma_j), \Lambda^{-1/2} g_j \rangle - \langle \Lambda^{-1} D(x(v - \sigma_j)), g_j \rangle .\end{aligned}$$

D'où :

$$2 \mid \Lambda^{-1/2} g_j \mid^2 \leqslant - \varepsilon^{3/2} \mid \Lambda^1 g_j \mid^2 + \mid \Lambda^1(\sigma_j - v) \mid \mid \Lambda^1 g_j \mid + \\ + 2 \mid \Lambda^{-1/2}(v - \sigma_j) \mid \mid \Lambda^{-1/2} g_j \mid + 2\pi \mid xv - x\sigma_j \mid \mid g_j \mid .$$

On conclut comme dans la proposition 2.6 que g_j tend vers 0 dans $H^1(\mathbb{R})$ quand j tend vers l'infini. Puisque σ_j converge vers v dans $H^2(\mathbb{R})$ la proposition est démontrée. —*—

3. APPROXIMATION INTERNE PAR ÉLÉMENTS FINIS

On donne dans ce paragraphe une approximation interne de V_j. On définit ensuite les problèmes approchés associés aux équations variationnelles étudiées au paragraphe 2 et on étudie la convergence des schémas obtenus.

3.1. Approximation de V_j

On construit un maillage sur l'intervalle $[-j, +j]$ en posant :

$$x_p = ph, \quad p = -N, -N+1, \ldots, N-1, N, \quad h = j/N. \tag{33}$$

Pour $m = -N+1, \ldots, N-1$ on note f_m la fonction continue sur $\mathbb{R}$ affine sur chaque intervalle défini par (33) telle que $f_m(x_p) = \delta_{mp}$ pour $p = -N, \ldots, N$.

Pour $m = -N+2, \ldots, N-2$ on note $e_m = f_{m-1} - f_{m+1}$ et on note V_{hj} le sous-espace de V_j engendré par la base e_p

$\pi_h : H_0^1(-j, j) \to H_0^1(-j, j)$ l'opérateur d'interpolation affine.

V_{hj} approxime V_j au sens suivant :

PROPOSITION 3.1 : *Pour tout N, il existe un opérateur linéaire continu r_h : $V_j \to V_{hj}$, $(h = j/N)$, tel que : pour tout $v \in V_j \cap H^2(\mathbb{R})$* $\lim_{N \to \infty} \mid r_h v - v \mid_{H^1} = 0$.

Démonstration : Pour $f \in H_0^1(-j, j)$ on note $\omega_h(f)$ la fonction continue, affine par morceaux de pas h, nulle en $-j$ et $+j$, constante sur $[-j+h, j-h]$. La constante est déterminée par $\int_{-j}^{+j} \omega_h(f)\, dx = \int_{-j}^{+j} f(x)\, dx$ soit

$$C(f)(2j - h) = \int_{-j}^{+j} f(x)\, dx.$$

Il est clair que ω_h est linéaire de $H_0^1(-j, j)$ dans $H_0^1(-j, j)$ et un calcul simple

donne

$$| \omega_h(f) |_{H^1}^2 \leqslant \frac{2h}{3} C^2(f) + 2(j-h) C^2(f) + \frac{2}{h} C^2(f) . \tag{34}$$

Comme $C(f)$ dépend continûment de f sur $H_0^1(-j, j)$, ω_h est continu.

On définit $r_h : H_0^1(-j, j) \to H_0^1(-j, j)$ par

$$r_h v = \pi_h v - \omega_h(\pi_h v) .$$

$r_h v$ est continu, affine par morceaux, de somme nulle.

Notons I_h l'espace des fonctions de $H_0^1(-j, j)$ affines par morceaux de pas h, de somme nulle. On a

$$V_{hj} \subset I_h \subset V_{h/2j} .$$

D'où $r_h : H_0^1(-j, j) \to V_{h/2j}$.

Soit maintenant $v \in V_j \cap H^2(\mathbb{R})$. On a :

$$| v - r_h v |_{H^1} \leqslant | v - \pi_h v |_{H^1} + | \omega_h(\pi_h v) |_{H^1} .$$

Les résultats classiques d'interpolation (*cf.* [1]) donnent $| v - \pi_h v |_{H^1} \leqslant \text{Cte } h$. On a d'autre part

$$\int_{-j}^{+j} (v - \pi_h v)\, dx = - \int_{-j}^{+j} \pi_h v\, dx = - \int_{-j}^{+j} \omega_h(\pi_h v)\, dx =$$
$$= - C(\pi_h v)(2j - h) .$$

D'où $| C(\pi_h v) | \leqslant \text{Cte } | v - \pi_h v |_{L^2} \leqslant \text{Cte } h$.

Avec (34) il vient

$$| \omega_h(\pi_h v) |_{H^1}^2 \leqslant \text{Cte } h \quad \text{et donc} \quad \lim_{N \to \infty} | r_h v - v |_{H^1} = 0 .$$

3.2. Approximation de $(EC)_\varepsilon$

La solution v_j de $(EC)_\varepsilon$ est approchée par v_h solution de

$$v_h \in V_{hj} \quad \text{et vérifie pour} \quad p = -N + 2, \ldots, N - 2$$

$$\left.\begin{aligned} &\langle \Lambda^{-1}(v_h - xDv_h), e_p \rangle = \\ &\quad = \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv_h), De_p \rangle + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle Du_0, De_p \rangle . \end{aligned}\right\} (EC)_{\varepsilon,N}$$

Rappelons que h et N sont liés par la relation $h = j/N$.

Nous montrerons en suivant la démarche du paragraphe 2.3 que $(EC)_{\varepsilon,N}$ admet une solution unique v_h dans V_{hj} par une itération de point fixe. Pour cela on considère le schéma itératif discrétisé associé à $(ECL)_\varepsilon$

$$\left.\begin{aligned} & v_n \in V_{hj},\ v_{n+1} \in V_{hj} \quad \text{et vérifie pour } p = -N+2, \ldots, N-2 \\ & \langle \Lambda^{-1}(v_{n+1} - xDv_{n+1}), e_p \rangle + \lambda < \Lambda^1(v_{n+1} - v_n), \Lambda^1 e_p \rangle = \\ & \qquad = \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv_n), De_p \rangle + \frac{\mu}{4\pi^2} \langle Du_0, De_p \rangle . \end{aligned}\right\} (ECL)_{\varepsilon,N}$$

L'existence de v_{n+1} est donnée par le théorème de Lax-Milgram. Notons $S_{\lambda h} : v_n \to v_{n+1}$ l'opérateur de linéarisation défini par $(ECL)_{\varepsilon,N}$.

THÉORÈME 3.2 : *Soit* $0 < \varepsilon \leqslant \mu^2$. *Il existe* $\lambda(\varepsilon)$ *tel que pour tout* $\lambda \geqslant \lambda(\varepsilon)$ $S_{\lambda h}$ *soit de puissance contractante sur* V_{hj}. *L'itération* $v_{n+1} = S_{\lambda h} v_n$ *converge quel que soit le point de départ dans* V_{hj} *vers une solution de* $(EC)_{\varepsilon,N}$. *Cette solution est unique et paire.*

Démonstration : On procède comme dans le théorème 2.8 en remplaçant V_j par V_{hj}. —*—

3.3. Un résultat de convergence

On étudie la convergence de v_h solution de $(EC)_{\varepsilon,N}$ quand la finesse du maillage sur $[-j, j]$ tend vers 0 c'est-à-dire quand $N \to +\infty$.

THÉORÈME 3.3 : *La solution* v_h *de* $(EC)_{\varepsilon,N}$ *converge dans* $H^1(\mathbb{R})$ *quand* $N \to +\infty$ *vers la solution* v_j *de* $(EC)_\varepsilon$.

Démonstration : Pour tout v_h dans V_{hj}, on a

$$\langle \Lambda^{-1}(v_j - v_h - xD(v_j - v_h)), \mathrm{v}_h \rangle = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv_h) - F_\varepsilon(Du_0 + Dv_j), D\mathrm{v}_h \rangle .$$

Prenons $\mathrm{v}_h = r_h v - v_h$ avec $v \in V_j \cap H^2(\mathbb{R})$ fixé. Il vient :

$$2 \,|\, \Lambda^{-1/2}(v_j - v_h) \,|^2 + \langle \Lambda^{-1}(v_j - v_h - xD(v_j - v_h)), r_h v - v_j \rangle = \\ = \frac{-1}{4\pi^2} \langle F_\varepsilon(Du_0 + Dv_j) - F_\varepsilon(Du_0 + Dv_h), Dv_j - Dv_h + Dr_h v - Dv_j \rangle \\ \leqslant -\varepsilon^{3/2} \,|\, \Lambda^1(v_j - v_h) \,|^2 + |\, \Lambda^1(v_j - v_h) \,|\, |\, \Lambda_1(r_h v - v_j) \,| .$$

D'où

$$2 \mid \Lambda^{-1/2}(v_j - v_h) \mid^2 + \varepsilon^{3/2} \mid \Lambda^1(v_j - v_h) \mid^2 \leqslant \mid \Lambda^1(v_j - v_h) \mid \mid \Lambda^1(r_h v - v_j) \mid +$$
$$+ 2 \mid \Lambda^{-1/2}(v_j - v_h) \mid \mid \Lambda^{-1/2}(r_h v - v_j) \mid + 2 \pi j \mid v_j - v_h \mid . \mid r_h v - v_j \mid .$$

En faisant les majorations habituelles, on peut trouver C_1, C_2, C_3 des constantes positives telles que :

$$\mid \Lambda^{-1/2}(v_j - v_h) \mid^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^{3/2} \mid \Lambda^1(v_j - v_h) \mid^2 \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \mid r_h v - v_j \mid^2 + C_2 \mid \Lambda^1(r_h v - v_j) \mid^2 + C_3 \mid \Lambda^{-1/2}(r_h v - v_j) \mid^2 .$$

Avec la proposition 3.1 et la continuité de $\Lambda^{-1/2}$ de V_j dans $L^2(\mathbb{R})$ (*cf.* proposition 2.3) on obtient la convergence de v_h vers v_j quand $N \to +\infty$. —*—

4. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

Dans ce paragraphe on étudie la résolution numérique de $(EC)_{\varepsilon,N}$ en tenant compte des erreurs dues à l'intégration numérique. La convergence du schéma itératif proposé est montrée. On donne ensuite des indications sur la mise en œuvre pratique et les résultats numériques obtenus.

4.1. Intégration numérique

La méthode itérative proposée au paragraphe 3 demande la résolution d'un système linéaire à chaque pas. Les intégrales intervenant dans la formation de la matrice seront calculées formellement (voir § 4.2).

Examinons le second membre de $(EC)_{\varepsilon,N}$. On remplace Du_0 et $F_\varepsilon(Du_0 + Dv_n)$ par $\pi_h Du_0$ et $\pi_h F_\varepsilon(Du_0 + Dv_n)$. On notera que cette interpolation a un sens sur chaque intervalle $[x_p, x_{p+1}]$ car Du_0 est continu en dehors de l'origine et Dv_n est constant (0 est un nœud du maillage).

Pratiquement on doit trouver :

$$\left.\begin{array}{l} v_h^* \in V_h \quad \text{tel que pour} \quad p = -N+2, \ldots, N-2 \\ \langle \Lambda^{-1}(v_h^* - xDv_h^*), e_p \rangle = \\ \quad = \dfrac{-1}{4\pi^2} \langle \pi_h F_\varepsilon(Du_0 + Dv_h^*), De_p \rangle + \dfrac{\mu}{4\pi^2} \langle \pi_h Du_0, De_p \rangle . \end{array}\right\} \quad (EC)^*_{\varepsilon,N}$$

Pour cela on forme le schéma itératif

$$\left.\begin{array}{l} v_n^* \in V_h,\ v_{n+1}^* \in V_h \quad \text{et vérifie pour} \quad p = -N+2, \ldots, N-2 \\ \langle \Lambda^{-1}(v_{n+1}^* - xDv_{n+1}^*), e_p \rangle + \lambda \langle \Lambda^1(v_{n+1}^* - v_n^*), \Lambda^1 e_p \rangle = \\ \quad = \dfrac{-1}{4\pi^2} \langle \pi_h F_\varepsilon(Du_0 + Dv_n^*), De_p \rangle + \dfrac{\mu}{4\pi^2} \langle \pi_h Du_0, De_p \rangle . \end{array}\right\} \quad (ECL)_{\varepsilon,N}^*$$

Notons $S_\lambda^* : v_n^* \to v_{n+1}^*$ l'opérateur de linéarisation défini par $(ECL)_{\varepsilon,N}^*$.

PROPOSITION 4.1 : *Soit* $0 < \varepsilon \leqslant \mu^2$. *Il existe* $\lambda(\varepsilon)$ *tel que pour tout* $\lambda \geqslant \lambda(\varepsilon)$, S_λ^* *soit de puissance contractante sur* V_{hj}. *L'itération* $v_{n+1} = S_\lambda^* v_n$ *converge quel que soit le point de départ dans* V_{hj} *vers la solution* v_h^* *de* $(EC)_{\varepsilon,N}^*$. *Cette solution est paire.*

Démonstration : L'existence de v_{n+1}^* dans $(ECL)_{\varepsilon,N}^*$ est donnée par le théorème de Lax-Milgram. Pour étudier la convergence il suffit d'adapter la démonstration du théorème 2.8. La seule modification provient du second membre.

Prenons w_1^* et w_2^* dans V_{hj} et notons v_1^* et v_2^* les solutions correspondantes de $(ECL)_{\varepsilon,N}^*$. Posons $w^* = w_1^* - w_2^*$ et $v^* = v_1^* - v_2^*$. On a

$$\begin{aligned} &\langle \Lambda^{-1}(v^* - xDv^*), v^* \rangle + \lambda \langle \Lambda^1(v^* - w^*), \Lambda^1 v^* \rangle = \\ &\quad = \frac{1}{4\pi^2} \langle \pi_h F_\varepsilon(Du_0 + Dw_2^*) - \pi_h F_\varepsilon(Du_0 + Dw_1^*), Dv^* \rangle \\ &\quad = \frac{1}{4\pi^2} \langle \pi_h(F_\varepsilon(Du_0 + Dw_2^*) - F_\varepsilon(Du_0 + Dw_1^*)), Dw^* + Dv^* - Dw^* \rangle . \end{aligned} \tag{35}$$

Pour majorer cette expression on somme sur chaque intervalle $[x_p, x_{p+1}]$. En notant pour une fonction h

$$h(x_p^+) = \lim_{\substack{x \to x_p \\ x > x_p}} h(x) \quad \text{et} \quad h(x_p^-) = \lim_{\substack{x \to x_p \\ x < x_p}} h(x)$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\langle \Lambda^{-1}(v^* - xDv^*), v^* \rangle + \lambda \langle \Lambda^1(v^* - w^*), \Lambda^1 v \rangle \leqslant \\ &\leqslant \frac{h}{8\pi^2} \sum_{p=-N}^{N-1} (F_\varepsilon(Du_0 + Dw_2^*)(x_p^+) - F_\varepsilon(Du_0 + Dw_1^*)(x_p^+)) \times \\ &\times (Dw^*(x_p^+) + D(v^* - w^*)(x_p^+) + (F_\varepsilon(Du_0 + Dw_2^*)(x_{p+1}^-) - \end{aligned}$$

$$- F_\varepsilon(Du_0 + Dw_1^*)(x_{p+1}^-))\,(Dw^*(x_{p+1}^-) + D(v^* - w^*)(x_{p+1}^-))$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi^2}(-\varepsilon^{3/2}\,|\,Dw^*\,|^2 + |\,D(v^* - w^*)\,|\,|\,Dw^*\,|) =$$

$$= -\varepsilon^{3/2}\,|\,\Lambda^1 w^*\,|^2 + |\,\Lambda^1(v^* - w^*)\,|\,|\,\Lambda^1 w^*\,|\,.$$

On conclut la démonstration comme dans le théorème 2.8. L'itération $v_{n+1}^* = S_\lambda^* v_n^*$ est convergente vers v_h^* unique solution du $(EC)_{\varepsilon,N}^*$. —*—

Remarque 4.2 : On notera comme dans la remarque 2.9 que la solution v_h^* est paire ainsi que la suite v_n^* dès lors que l'un des itérés est pair. La convergence est assurée pour tout point de départ.

Pour terminer étudions la convergence de v_h^* vers v_j solution de $(EC)_\varepsilon$.

PROPOSITION 4.3 : *La solution v_h^* de $(EC)_{\varepsilon,N}^*$ converge dans V_j vers la solution v_j de $(EC)_\varepsilon$.*

Démonstration : Il suffit de montrer que $v_h - v_h^*$ tend vers 0 dans V_j. En soustrayant $(EC)_{\varepsilon,N}^*$ à $(EC)_{\varepsilon,N}$, il vient :

$$2\,|\,\Lambda^{-1/2}(v_h - v_h^*)\,|^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\langle \pi_h F_\varepsilon(Du_0 + Dv_h^*) - F_\varepsilon(Du_0 + Dv_h), D(v_h - v_h^*)\rangle +$$

$$+ \frac{\mu}{4\pi^2}\langle Du_0 - \pi_h Du_0, D(v_h - v_h^*)\rangle \leqslant -\varepsilon^{3/2}\,|\,\Lambda^1(v_h - v_h^*)\,|^2$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2}\langle \pi_h F_\varepsilon(Du_0 + Dv_h) - F_\varepsilon(Du_0 + Dv_h), D(v_h - v_h^*)\rangle$$

$$+ \frac{\mu}{4\pi^2}\langle \pi_h Du_0 - Du_0, D(v_h - v_h^*)\rangle\,.$$

Sur chaque intervalle $[x_p, x_{p+1}]$ on a une régularité H^2 pour Du_0.

$DF_\varepsilon(Du_0 + Dv_h) = f_\varepsilon(Du_0 + Dv_h)(D^2 u_0 + D^2 v_h)$ est dérivable presque partout car Du_0 n'est pas constante sur un ensemble de mesure non nulle. Comme f_ε et f_ε' sont dans $L^\infty(\mathbb{R})$, $F_\varepsilon(Du_0 + Dv_h)$ a une régularité H^2 sur chaque intervalle.

En appliquant les résultats classiques d'interpolation (*cf.* [1]), on obtient sur chaque intervalle

$$|\,F_\varepsilon(Du_0 + Dv_h) - \pi_h F_\varepsilon(Du_0 + Dv_h)\,|_{L^2[x_p, x_{p+1}]} \leqslant \text{Cte}\, h^2$$

où la constante ne dépend pas de h.

Il vient alors

$$2 \mid \Lambda^{-1/2}(v_h - v_h^*) \mid^2 + \varepsilon^{3/2} \mid \Lambda^1(v_h - v_h^*) \mid^2 \leqslant \text{Cte}\, h \mid \Lambda^1(v_h - v_h^*) \mid$$

et on en déduit que $v_h - v_h^* \to 0$ quand $h \to 0$ dans V_j. —*—

4.2. Calcul formel des coefficients de la matrice associée à $(ECL)^*_{\varepsilon,N}$

Le terme général de la matrice associée à $(ECL)^*_{\varepsilon,N}$ est de la forme :

$$\langle \Lambda^{-1}(e_i - xDe_i), e_j \rangle + \lambda \langle \Lambda^1 e_i, \Lambda^1 e_j \rangle .$$

Ces termes peuvent s'intégrer exactement.

Λ^{-1} est l'opérateur $-2 \log \mid x \mid *$ où $*$ désigne la convolution. En notant δ_s la distribution de Dirac au point sh et $\mathscr{P}_k \log \mid x \mid$ la primitive k-ième de $\log \mid x \mid$ nulle en 0 on obtient

$$\begin{aligned}\langle \Lambda^{-1}(e_i - xDe_i), e_j \rangle = {} & 2\ \mathscr{P}_3 \log \mid x \mid * ((i-2)\,\delta_{i-2} - 2(i-1)\,\delta_{i-1} + \\ & + 2(i+1)\,\delta_{i+1} - (i+2)\,\delta_{i+2}), \delta_{j-2} - 2\,\delta_{j-1} + 2\,\delta_{j+1} - \delta_{j+2} \rangle .\end{aligned}$$

Cette expression est développée en utilisant le code de calcul formel MACSYMA. En posant $a = j - i$ il vient

$$\begin{aligned}\langle \Lambda^{-1}(e_i - xDe_i), e_j \rangle = & \\ = & -\frac{h^3}{3}[(a+4)^3 \operatorname{Log} \mid a+4 \mid - 4(a+3)^3 \operatorname{Log} \mid a+3 \mid + \\ & + 4(a+2)^3 \operatorname{Log} \mid a+2 \mid + 4(a+1)^3 \operatorname{Log} \mid a+1 \mid \\ & - 10\,a^3 \operatorname{Log} \mid a \mid + 4(a-1)^3 \operatorname{Log} \mid a-1 \mid \\ & + 4(a-2)^3 \operatorname{Log} \mid a-2 \mid - 4(a-3)^3 \operatorname{Log} \mid a-3 \mid \\ & + (a-4)^3 \operatorname{Log} \mid a-4 \mid]\, i \\ & - \frac{h^3}{3}[-2(a+4)^3 \operatorname{Log} \mid a+4 \mid + 6(a+3)^3 \operatorname{Log} \mid a+3 \mid \\ & - 4(a+2)^3 \operatorname{Log} \mid a+2 \mid - 2(a+1)^3 \operatorname{Log} \mid a+1 \mid \\ & + 2(a-1)^3 \operatorname{Log} \mid a-1 \mid + 4(a-2)^3 \operatorname{Log} \mid a-2 \mid \\ & - 6(a-3)^3 \operatorname{Log} \mid a-3 \mid + 2(a-4)^3 \operatorname{Log} \mid a-4 \mid] .\end{aligned}$$

Remarque 4.4 : Pour l;évaluation numérique de ces expressions il faut grouper les termes de façon à minimiser la répercussion des erreurs d'arrondis.

Le calcul des termes $\langle \Lambda^1 e_i, \Lambda^1 e_j \rangle$ est simple. On a

$$\langle \Lambda^1 e_i, \Lambda^1 e_j \rangle = \frac{-1}{4\pi^2} \langle D^2 e_i, e_j \rangle$$

$$= \frac{-1}{4\pi^2 h} [e_j(x_{i-2}) - 2 e_j(x_{i-1}) + 2 e_j(x_{i+1}) - e_j(x_{i+2})] .$$

4.3. Mise en œuvre et résultats numériques

La méthode a été programmée en langage PASCAL sur un micro-ordinateur MICRAL 90-50. La taille du code de calcul est de 43K0 et les données occupent 20K0. Cet appareil dispose d'une arithmétique câblée ce qui permet des calculs itératifs assez rapides. Cependant la taille des systèmes linéaires que l'on peut inverser est limitée à environ 50 inconnues.

Il est important de constater que la matrice associée au schéma itératif ne varie pas au cours des itérations. La triangulation et les permutations de lignes sont donc effectuées au premier pas et ensuite on travaille seulement sur le second membre.

On résout un système triangulaire à chaque pas.

Les remarques sur la parité des itérations prennent leur importance à ce niveau puisque la taille du système linéaire est divisée par deux.

On a utilisé les possibilités graphiques sur écran (propres au MICRAL) pour visualiser l'étude des itérations. Enfin, les calculs faits utilisent des programmes de la bibliothèque de calcul scientifique BANG réalisée sur MICRAL par l'équipe d'Analyse Numérique du Laboratoire IMAG de Grenoble, et, je remercie particulièrement A. Eberhard pour son aide à la mise au point des programmes.

Nous avons effectué plusieurs séries d'expériences numériques afin de tester l'influence des différents paramètres.

i) *Influence de* λ

On fixe $j = 0{,}5, h = 0{,}025, \varepsilon = 0{,}14$.

On calcule la solution pour $\lambda = 22$. Cette valeur est supérieure au $\lambda(\varepsilon)$ théorique qui assure la convergence du schéma. Pour obtenir la solution on itère jusqu'à ce que les 14 décimales significatives soient stabilisées.

Le graphique suivant indique le nombre d'itérations nécessaires en fonction de λ pour que la distance entre un itéré et la solution ci-dessus soit inférieure à η.

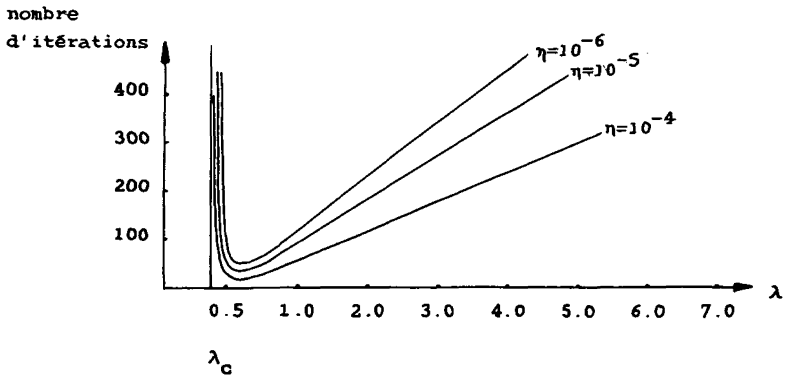

Figure 1. — Nombre d'itérations en fonction de λ.

$\eta = 10^{-6}$

λ	nombre d'itérations
0,49	∞
0,50	538
0,51	132
0,52	77
0,54	44
0,56	34
0,58	33
0,60	34
0,80	47

λ	nombre d'itérations
1,00	60
2,00	124
3,00	189
4,00	253
5,00	317
6,00	381
7,00	446
8,00	510
9,00	574

On remarquera que la convergence du schéma est vérifiée pour des $\lambda < \lambda(\varepsilon)$ mais qu'en dessous d'une valeur critique de l'ordre de 0,49 le schéma diverge. Numériquement cette divergence se traduit soit par l'apparition de cycles soit par l'explosion de la solution.

Fixons maintenant λ à 0,58 par exemple (pour minimiser les itérations) et diminuons η. On obtient les résultats suivants :

η	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}
itérations	19	26	33	40	47	54	62	69	76	83	90

ce qui montre que la convergence est bien *linéaire.*

ii) *Influence de* ε

On vérifie que la convergence ne dépend pas de ε choisi dans l'intervalle $]0, \mu^2]$ ce qui indique expérimentalement que l'estimation sur $|Du|_\infty$ semble être donnée par la pente à l'origine.

iii) *Influence de h et j*

Les essais numériques sur ces paramètres sont limités car il se pose rapidement des problèmes de taille mémoire et de temps de calcul.

Les courbes suivantes montrent l'effet de troncature dû au choix du support et indiquent qu'il n'est pas utile de choisir j trop grand (ce que l'on sait par la physique du problème).

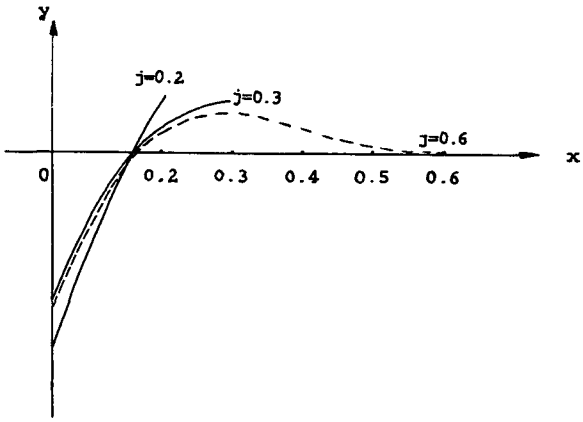

Figure 2. — Effet de la troncature sur la solution.

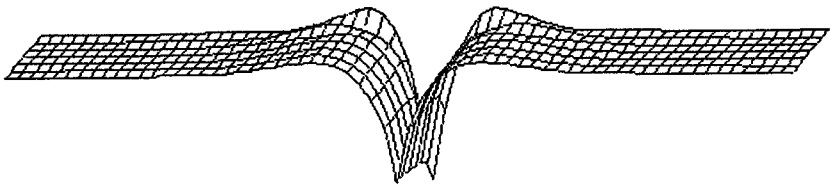

Figure 3. — Visualisation d'itérations convergentes $\lambda > \lambda_c$.

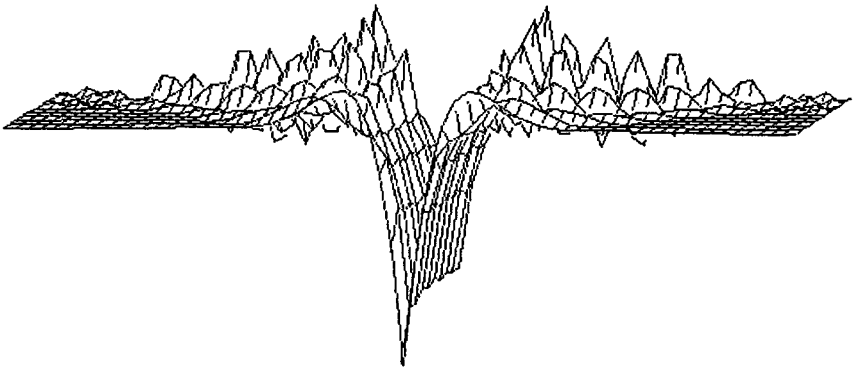

Figure 4. — Visualisation d'itérations divergentes pour $\lambda < \lambda_c$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems.* Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland (1978).

[2] L. COUDURIER, N. EUSTATOPOULOS, J. C. GJOUD, P. DESRE, *Corrosion intergranulaire du cuivre par le plomb liquide sous l'effet des forces capillaires.* Journal de Chimie Physique, 3, 289-294 (1977).

[3] J. DUCHON, R. ROBERT, *Creusement d'un sillon par capillarité. Un modèle approché.* Rapport de Recherche Imag n° 280 (1981).

[4] J. DUCHON, R. ROBERT, *A nonlinear singular integrodifferential equation arising in surface chemistry.* A paraître dans J. Diff. Equation (1983).