

PHILIPPE CORTEY-DUMONT

**Sur les inéquations variationnelles à  
opérateur non coercif**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 19, n° 2 (1985), p. 195-212

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1985\\_\\_19\\_2\\_195\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1985__19_2_195_0)

© AFCET, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES A OPÉRATEUR NON COERCIF (\*)

par Philippe CORTEY-DUMONT <sup>(1)</sup>

Communique par F BREZZI

*Résumé — On étudie le problème des inéquations variationnelles à opérateur non coercif en utilisant au niveau de l'approximation une méthode qui repose sur la notion de sous-solution et qui introduit une grande symétrie dans le traitement du problème discret et du problème continu*

*Abstract — We consider the problem of variational inequalities with non-coercive operator. Especially we consider a new method for studying the approximation based on the concept of under-solution and symmetry*

Dans l'étude des problèmes à opérateur elliptique, on suppose généralement que la forme bilinéaire définie par :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + a_0 uv \right) dx,$$

est fortement coercive, c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\alpha \|v\|_{H^1}^2 \leq a(v, v)$ .

Pourtant, dans la modélisation des problèmes de contrôle, le caractère déterministe du processus qui est représenté par les coefficients  $b_i$ , peut être prépondérant. Il est alors intéressant d'affaiblir l'hypothèse de coercivité forte et de supposer seulement l'existence d'un  $\lambda > 0$  tel que :

$$\alpha \|v\|_{H^1}^2 \leq a(v, v) + \int_{\Omega} \lambda v^2 dx.$$

On étudie, dans ce travail, l'inéquation variationnelle (et, par une simplification immédiate, l'équation) associée à cet opérateur, un accent particulier étant mis sur l'approximation.

(\*) Reçu en mars 1984

(1) C M A Ecole Polytechnique, 91138 Palaiseau

Plus précisément, si le problème est défini par  
Trouver  $u$  solution de

$$\begin{cases} a(u, v - u) \geq (f, v - u) & v \leq \psi \quad \forall v \in H^1 \\ u \leq \psi \end{cases}$$

on le transforme en trouver  $u$  solution de

$$\begin{cases} b(u, v - u) \geq (f + \lambda u, v - u) & v \leq \psi \quad \forall v \in H^1 \\ u \leq \psi \end{cases}$$

où

$$b(u, v) = a(u, v) + \int_{\Omega} \lambda uv \, dx$$

L'opérateur  $b(u, v)$  vérifie alors l'hypothèse de coercivité forte et le nouveau problème s'apparente à une I Q V dans la mesure où le second membre dépend de la solution (cf [3]). Il est d'ailleurs possible de reprendre son étude dans le même esprit, à savoir

- 1) Définir un algorithme  $u_n = J(u_{n-1})$  où  $J(r) = w$  est la solution de

$$\begin{cases} b(w, v - w) \geq (f + \lambda r, v - w) & v \leq \psi \quad v \in H^1 \\ w \leq \psi \end{cases}$$

- 2) Trouver une sur-solution  $\hat{u}_0$  ( $\hat{u}_0 \geq J(\hat{u}_0)$ )
- 3) Trouver une sous-solution  $\check{u}_0$  ( $\check{u}_0 \leq J(\check{u}_0)$ )

On obtient alors l'existence et l'unicité de la solution (cf [2]), sa régularité, des propriétés de monotonie et de lipschitzianité par rapport aux seconds membres, d'un ordre d'approximation quasi optimal (cf [8, 9]), une méthode de résolution (cf [15])

Toutefois notre propos est de présenter dans ce cas très simple une nouvelle approche pour étudier l'approximation des I V et des I Q V (cf [9, 10]) qui nous permettra

- 1) d'obtenir l'ordre d'approximation optimal,
- 2) de mettre en évidence une symétrie parfaite dans le traitement du problème discret et du problème continu,
- 3) d'affaiblir le rôle de l'algorithme qui était prépondérant dans la précédente méthode (cf [8, 9]) En particulier, *il n'est plus utile d'avoir une estimation sur la vitesse de convergence de l'algorithme* (estimation qui était d'ailleurs superflue pour obtenir des résultats de convergence cf [12])



où :

(1.2) les coefficients  $a_0, b_l, a_{ij}$  sont suffisamment réguliers,  $a_0(x) \geq \alpha_0 > 0$  ;

(1.3) on suppose qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , et pour presque tout  $\xi \in \Omega$

$$\sum_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_i \xi_i^2.$$

On sait qu'il existe alors  $\lambda$  assez grand tel que :

$$(1.4) \quad \alpha \|v\|_{H^1}^2 \leq a(v, v) + \lambda \int_{\Omega} v^2 dx.$$

Rappelons, pour des raisons de complétude, la construction d'un  $\lambda$  qui permet de vérifier (1.4).

Soit

$$b = \sup_{l, x \in \Omega} |b_l(x)|$$

$$a = \sup_{x \in \Omega} |a_0(x)|$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \sum_{ij=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_l b_l \frac{\partial u}{\partial x_l} u + a_0 u^2 + \lambda u^2 \right) dx \\ & \geq \alpha \int_{\Omega} \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx - b \sqrt{\varepsilon} \left( \int_{\Omega} \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \int_{\Omega} u^2 dx \right)^{1/2} + \\ & \quad + (\lambda + a) \int_{\Omega} u^2 dx \\ & \geq \alpha \int_{\Omega} \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx - \frac{b\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx - \frac{b}{2\varepsilon} \int_{\Omega} u^2 dx + (\lambda + a) \int_{\Omega} u^2 dx \\ & \geq \left( \alpha - \varepsilon \frac{b}{2} \right) \int_{\Omega} \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \left( \lambda + a - \frac{b}{2\varepsilon} \right) \int_{\Omega} u^2 dx. \end{aligned}$$

On choisit alors  $\varepsilon < \frac{2\alpha}{b}$  et  $\lambda > -a + \frac{b}{2\varepsilon}$  si  $b \neq 0$  ( $\lambda > a$  autrement), ce qui entraîne la  $V$ -ellipticité de  $a(u, v) + \lambda \int_{\Omega} uv dx$ .

*Remarque :* Il serait intéressant de déterminer a priori des  $\lambda$  plus proches du  $\lambda_0$  minimal.

*Notation :* On est conduit à définir la forme bilinéaire  $b(, )$  fortement coercive suivante :

$$(1.5) \quad b(u, v) = a(u, v) + \int_{\Omega} \lambda uv \, dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

De plus, on considère :

$$(1.6) \quad \text{un second membre } f \in L^{\infty}(\Omega)$$

$$(1.7) \quad \text{un obstacle } \psi \in W^{2,\infty}(\Omega) \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \leq 0.$$

*Le problème continu*

Soit  $u$  la solution de l'inéquation variationnelle suivante :

$$(1.8) \quad \begin{cases} a(u, v - u) \geq (f, v - u) & v \leq \psi \quad v \in H^1(\Omega) \\ u \leq \psi. \end{cases}$$

Si l'obstacle  $\psi$  est suffisamment grand, les résultats qui seront proposés s'appliqueront trivialement au cas des équations à opérateur non coercif.

Par une transformation immédiate,  $u$  est également la solution du problème suivant :

Trouver  $u$  solution de :

$$(1.9) \quad \begin{cases} b(u, v - u) \geq (f + \lambda u, v - u) & v \leq \psi \quad v \in H^1(\Omega) \\ u \leq \psi. \end{cases}$$

Il aurait été possible de considérer des conditions aux limites de type de Dirichlet en effectuant quelques modifications techniques de détail.

*Notations complémentaires*

(1.10) On note  $w = \sigma(f + \lambda r)$  la solution de l'I.V. suivante :

$$\begin{cases} b(w, v - w) \geq (f + \lambda r, v - w) & v \leq \psi \quad v \in H^1(\Omega) \\ w \leq \psi. \end{cases}$$

(1.11) On a naturellement la relation suivante :

$$\mathfrak{J}(r) = \sigma(f + \lambda r).$$

(1.12) On note également la solution  $u$  de l'I.Q.V. comme suit :

$$u = \partial(f, \psi) \text{ (second membre } f, \text{ obstacle } \psi).$$

Étudions quelques propriétés de la solution du problème (1.9) et commençons par introduire un algorithme.

*Algorithme* : On pose  $\hat{u}_0$  la solution de :

$$(1.13) \quad a(\hat{u}_0, v) = (f, v) \quad v \in H^1(\Omega)$$

puis on définit  $\check{C}$  tel que :

$$(1.14) \quad -\check{C} \leq \psi; \quad -\check{C} \leq \hat{u}_0; \quad f + a_0 \check{C} \geq 0 \text{ p.p.}$$

En partant de  $\hat{u}_0$  (resp.  $\check{C} = \check{u}_0$ ), on pose :

$$(1.15) \quad \hat{u}_n = \mathcal{J}(\hat{u}_{n-1})$$

$$(1.16) \quad \check{u}_n = \mathcal{J}(\check{u}_{n-1}).$$

*Existence et unicité d'une solution*

Pour des raisons de complétude, rappelons quelques résultats immédiats.

**LEMME 1.1** : *Sous les hypothèses (1.1) à (1.7), les suites  $(\hat{u}_n)$  et  $(\check{u}_n)$  convergent respectivement en décroissant et en croissant vers l'unique solution du problème (1.9).*

*Propriétés de monotonie de la solution*

**LEMME 1.2** : *Sous les hypothèses (1.1) à (1.7) si  $f \geq \tilde{f}$  et  $\psi \geq \tilde{\psi}$  alors  $\partial(f, \psi) \geq \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi})$ .*

*Démonstration* : On associe à chacune de ces solutions d'I.Q.V. les suites  $\hat{u}_n(f, \psi)$  (resp.  $\hat{u}_n(\tilde{f}, \tilde{\psi})$ ) définies par l'algorithme (1.15). On montre sans peine par récurrence que  $\hat{u}_n(f, \psi) \geq \hat{u}_n(\tilde{f}, \tilde{\psi})$ , d'où le résultat.

C.Q.F.D.

Soit  $X$  l'ensemble des sous-solutions (pour l'I.Q.V.), c'est-à-dire l'ensemble des  $w \in H^1(\Omega)$  tel que :

$$(1.17) \quad \begin{cases} b(w, v) \leq (f + \lambda w, v) \quad \forall v \in H^1 \quad v \geq 0 \\ w \leq \psi. \end{cases}$$

**LEMME 1.3** : *Sous les hypothèses (1.1) à (1.7), la solution  $u$  de (1.9) est le plus grand élément de  $X$ .*

*Démonstration* : On a  $u \leq \psi$ . En prenant  $\hat{v} = u - v$  avec  $v \geq 0$  on a :

$$b(u, v) \leq (f + \lambda u, v) \quad v \geq 0$$

donc :

$$u \in X.$$

Par ailleurs, soit  $w \in X$  :

$w \leq \sigma(f + \lambda w)$  car  $w$  est une sous-solution pour l'I.V. définie avec le second membre  $f + \lambda w$ .

Donc :

$$f + \lambda w \leq f + \lambda \sigma(f + \lambda w).$$

Soit :

$$w \leq \sigma(f + \lambda w) \leq \sigma(f + \lambda \sigma(f + \lambda w)).$$

Ainsi  $w$  est une sous-solution pour l'application  $\mathcal{J}$ ; de plus  $\hat{u}_0$  est une sur-solution pour l'application  $\mathcal{J}$ . Or  $\mathcal{J}$  est croissante pour l'ordre « naturel » et  $w \leq \hat{u}_0$ .

Ainsi :

$$w \leq \mathcal{J}(w) \leq \dots \leq \mathcal{J}^n(w) \leq \dots \leq \mathcal{J}^n(\hat{u}_0) \leq \dots \leq \mathcal{J}(\hat{u}_0) \leq \hat{u}_0$$

d'où l'on en déduit d'après l'unicité :

$$w \leq \sup_n \mathcal{J}^n(w) = u = \inf_n \mathcal{J}^n(\hat{u}_0)$$

C.Q.F.D.

### Régularité de la solution

LEMME 1.4 : Sous les hypothèses (1.1) à (1.7) la solution  $u$  de l'I.Q.V. appartient à  $W^{2,p}$ .

Démonstration : Appliquons l'inégalité de Lewy-Stampaccia à l'opérateur  $\mathcal{B} = \mathcal{A} + \lambda \mathcal{J}$ .

Donc :

$$\mathcal{B}\psi \wedge (f + \lambda u) \leq \mathcal{B}u \leq f + \lambda u$$

mais :

$$-\hat{C} \leq u \leq \hat{u}_0$$

donc :

$$\|u\|_L \leq \text{Cte}$$

ainsi :

$$\|\mathcal{B}u\|_\infty \leq \text{Cte}$$

d'où le résultat (cf. [4]).

C.Q.F.D.



*Lipschitzianité par rapport au second membre*

(1.18) Soient  $f$  et  $g$  deux seconds membres appartenant à  $L^\infty(\Omega)$ .

On introduit  $u$  et  $w$  les solutions des I.Q.V. suivantes :

$$(1.19) \quad u = \mathcal{J}_f(u) = \sigma(f + \lambda u)$$

$$(1.20) \quad w = \mathcal{J}_g(w) = \sigma(g + \lambda w).$$

On va montrer que  $\|u - w\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty$ .

**LEMME 1.5 :** *Sous les hypothèses (1.1) à (1.7), on peut se ramener au cas où  $f \geq g \geq 0$  et  $\psi \geq 0$ .*

*Démonstration :* En considérant  $\inf(g, f)$  et  $\sup(g, f)$ , on peut, grâce aux propriétés de monotonie de la solution de l'I.Q.V., supposer  $f \geq g$ .

Si on introduit  $K$  une constante telle que

$$K + f \geq \gamma_0 > 0 \quad \text{et} \quad K + g \geq \gamma_0 > 0 \quad \text{puis} \quad \psi + \mathcal{O} \geq 0$$

où  $\mathcal{O}$  est la solution de :  $\mathcal{O} = K$ , on peut se ramener au cas où  $f, g$  sont des fonctions positives.

En effet :

$$u + \mathcal{O} = \partial(f + K; \psi + \mathcal{O})$$

$$w + \mathcal{O} = \partial(g + K; \psi + \mathcal{O})$$

mais alors :

$$\|u - w\|_\infty = \|u + \mathcal{O} - w - \mathcal{O}\|_\infty.$$

C.Q.F.D.

(1.21) On se place donc dans le cas où  $f \geq g \geq 0$  et  $\psi \geq 0$ .

*Définition :*

(1.22) Soit  $N$  défini par  $N\alpha_0 \geq 1$  (rappelons que  $0 < \alpha_0 \leq a_0(x)$ ).

*Notation :*

(1.23) Soit  $\phi$  la solution de l'équation suivante :

$$a(\phi, v) = \int_{\Omega} \tilde{C}v \, dx \quad \text{avec} \quad \tilde{C} = \|f - g\|_\infty.$$

**LEMME 1.6 :** *Sous les hypothèses (1.1) à (1.7) on a  $\|\phi\|_\infty \leq N\tilde{C}$ .*

*Démonstration :* D'après le lemme (1.1), il existe une solution unique à ce problème. Montrons que :  $\phi \leq N\tilde{C}$ .

On a trivialement :

$$a(N\tilde{C}, v) + \int_{\Omega} (1 - a_0) N\tilde{C}v \, dx = \int_{\Omega} N\tilde{C}v \, dx$$

$$a(N\tilde{C}, v) = \int_{\Omega} a_0 N\tilde{C}v \, dx$$

donc :

$$a(N\tilde{C} - \phi, v) = \int_{\Omega} (a_0 N\tilde{C} - \tilde{C}) v \, dx = \int_{\Omega} Dv \, dx$$

où :

$$D = a_0 N\tilde{C} - \tilde{C} \geq 0 \quad \text{d'après (1.22)}$$

donc  $N\tilde{C} - \phi$  est la solution positive de l'équation, ainsi  $\phi \leq N\tilde{C}$ .

Comme  $\tilde{C} \geq 0$ , on a  $\phi \geq 0$ . Donc  $\|\phi\|_{\infty} \leq N\tilde{C}$ .

C.Q.F.D.

LEMME 1.7 : Sous les hypothèses (1.1) à (1.7), on a :

$$\|u - w\|_{\infty} \leq N\tilde{C} \quad \text{où} \quad \tilde{C} = \|f - g\|_{\infty}.$$

*Démonstration* : On peut se ramener au cas où  $f \geq g \geq 0$  et  $\psi \geq 0$ .

Soient  $u = \partial(f; \psi)$  et  $w = \partial(g; \psi)$ , on a sans difficulté :

$$u + \phi = \partial(f + \tilde{C}; \psi + \phi) \quad \text{où} \quad \phi \text{ est défini en (1.23)}$$

d'après les propriétés de monotonie de la solution des I.V., on a :

$$u \leq w \leq u + \phi$$

donc :

$$\|u - w\|_{\infty} \leq \|\phi\|_{\infty} \leq N\|f - g\|_{\infty}.$$

C.Q.F.D.

*Remarque* : On sait également montrer (mais ce serait inutile pour notre propos) que :

$$\|\hat{u}_n - u\|_{\infty} \leq C\gamma^n \quad \text{et} \quad \|\check{u}_n - u\|_{\infty} \leq C\gamma^n \quad \text{avec} \quad \gamma \in ]0, 1].$$

## II. ÉTUDE DU PROBLÈME DISCRET

On va maintenant introduire le problème discret et effectuer une étude similaire à celle entreprise précédemment pour le problème continu. Pour insister sur la *symétrie* de la démonstration que nous proposons, on suivra exactement la même démarche qu'au paragraphe précédent.

On établit sur  $\Omega$  une triangulation régulière quasi uniforme et on introduit  $\mathcal{V}_h$  l'espace d'éléments finis conformes suivant :

$$(2.1) \quad \mathcal{V}_h = \{ v_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^1 \text{ tel que } v_h|_T \in P_1 \}.$$

Les fonctions  $\varphi_i, i = (1, \dots, m(h))$  seront les fonctions de base usuelles définies par :  $\varphi_i(M_j) = \delta_{ij}$  où  $M_j$  est un sommet de la triangulation. On s'est ramené au cas où  $\Omega$  est un polygone convexe.

L'opérateur de restriction sera :

$$(2.2) \quad \text{pour } v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^1 \quad r_h v(x) = \sum_{i=1}^{m(h)} v(M_i) \varphi_i(x).$$

*Le problème discret*

Soit  $u_h$  la solution de l'inéquation variationnelle suivante :

$$(2.3) \quad \begin{cases} a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) & v_h \leq r_h \psi \\ u_h \leq r_h \psi. \end{cases}$$

On pourrait sans grandes difficultés supplémentaires introduire une approximation de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  et prendre ainsi en compte des méthodes d'intégration numérique.

Bien évidemment,  $u_h$  est également la solution de l'I.Q.V. discrète suivante :

$$(2.4) \quad \begin{cases} b(u_h, v_h - u_h) \geq (f + \lambda u_h, v_h - u_h) & v_h \leq r_h \psi \\ u_h \leq r_h \psi \end{cases}$$

avec :

$$(2.5) \quad b(u_h, v_h) = a(u_h, v_h) + \int_{\Omega} \lambda u_h v_h dx.$$

*Notation* : Soit  $w_h = \sigma_h(g)$  la solution de l'I.V. suivante :

$$(2.6) \quad \begin{cases} b(w_h, v_h - w_h) \geq (g, v_h - w_h) & v_h \leq r_h \psi \\ w_h \leq r_h \psi. \end{cases}$$

(2.7) On notera également la solution  $u_h$  de l'I.Q.V. par :

$$u_h = \partial_h(f; \psi).$$

Introduisons maintenant un algorithme.

*Algorithme* : On pose  $\hat{u}_{0h}$  la solution de :

$$(2.8) \quad a(\hat{u}_{0h}, v_h) = (f, v_h) \quad v_h \in \mathcal{V}_h$$

puis en reprenant la constante  $\check{C}$  définie en (1.16), on définit à partir de  $\hat{u}_{0h}$  (resp.  $\check{C} = \check{u}_{0h}$ ) les suites  $\hat{u}_{nh}$  et  $\check{u}_{nh}$  par :

$$(2.9) \quad \hat{u}_{nh} = \mathcal{J}_h(\hat{u}_{n-1h})$$

$$(2.10) \quad \check{u}_{nh} = \mathcal{J}_h(\check{u}_{n-1h}).$$

*Hypothèse du principe du maximum discret*

On pose  $B$  la matrice définie par :

$$(2.11) \quad B_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) + \int_{\Omega} \lambda \varphi_i \varphi_j dx.$$

(2.12) On suppose que  $B$  est une  $M$ -matrice (ce qui est vérifié sous les hypothèses usuelles (cf. [7]) puisque l'opérateur  $\mathcal{A} + \lambda \mathcal{J}$  est fortement coercif).

*Existence et unicité d'une solution*

LEMME 2.1 : Sous les hypothèses (1.1) à (1.7), (2.12), les suites  $(\hat{u}_{nh})$  et  $(\check{u}_{nh})$  convergent respectivement en décroissant et en croissant vers l'unique solution du problème (2.4).

On reprend la démonstration du cas continu.

*Propriété de monotonie de la solution*

LEMME 2.2 : Sous les hypothèses (1.1) à (1.7), (2.12), si  $f \geq \tilde{f}$  et  $\psi \geq \tilde{\psi}$  alors  $\partial_h(f; \psi) \geq \partial_h(\tilde{f}; \tilde{\psi})$ .

*Démonstration* : On associe à chacune de ces solutions d'I.Q.V. les suites  $\hat{u}_h(f; \psi)$  (resp.  $\hat{u}_h(\tilde{f}; \tilde{\psi})$ ) par l'algorithme défini en (2.9). On montre sans peine en comparant les seconds membres et les obstacles que  $\hat{u}_h(f; \psi) \geq \hat{u}_h(\tilde{f}; \tilde{\psi})$  d'où le résultat.

C.Q.F.D.

Soit  $X_h$  l'ensemble des sous-solutions (pour l'I.Q.V. discrète) c'est-à-dire l'ensemble des  $w_h \in \mathcal{V}_h$  tel que :

$$(2.13) \quad \begin{cases} b(w_h, \varphi_i) \leq (f + \lambda w_h, \varphi_i) & \forall i \in (1, \dots, m(h)) \\ w_h \leq r_h \psi. \end{cases}$$

**LEMME 2.3 :** *Sous les hypothèses (1.1) à (1.7), (2.12), la solution  $u_h$  de l'I.Q.V. est le plus grand élément de  $X_h$ .*

*Démonstration :* On a  $u_h \leq r_h \psi$  et en prenant  $v_h = u_h - \varphi_i$  on a :

$$b(u_h, \varphi_i) \leq (f + \lambda u_h, \varphi_i)$$

donc :  $u_h \in X_h$ .

D'autre part, soit  $w_h \in X_h$ .  $w_h \leq \sigma_h(f + \lambda w_h)$  car  $w_h$  est une sous-solution pour l'I.Q.V. discrète définie avec le second membre  $f + \lambda w_h$ .

Donc :

$$f + \lambda w_h \leq f + \lambda \sigma_h(f + \lambda w_h).$$

Soit :

$$w_h \leq \sigma_h(f + \lambda w_h) \leq \sigma_h(f + \lambda \sigma_h(f + \lambda w_h)).$$

Ainsi  $w_h$  est une sous-solution pour l'algorithme défini en (2.10).

De plus :

$$w_h \leq \hat{u}_{0h} \quad \text{donc} \quad \sigma_h(f + \lambda w_h) \leq \sigma_h(f + \lambda \hat{u}_{0h}) = \hat{u}_{1h}$$

et

$$\sigma_h(f + \lambda \sigma_h(f + \lambda w_h)) \leq \sigma_h(f + \lambda \sigma_h(f + \lambda \hat{u}_{0h})) = \hat{u}_{2h}$$

donc (par récurrence)  $w_h \leq u_h$ .

C.Q.F.D.

*Lipschitzianité par rapport au second membre*

(2.14) Soient deux seconds membres  $f$  et  $g \in L^\infty(\Omega)$ .

On introduit  $u_h$  et  $w_h$  les solutions des I.Q.V. suivantes :

$$(2.15) \quad u_h = \partial_h(f; \psi)$$

$$(2.16) \quad w_h = \partial_h(g; \psi).$$

*Notation* : Soit  $\phi_h$  la solution de l'équation suivante :

$$(2.17) \quad a(\phi_h, v_h) = \int_{\Omega} \tilde{C} v_h dx \quad \tilde{C} = \|f - g\|_{\infty}.$$

$$(2.18) \quad \text{Soit } N \text{ définie par : } N\alpha_0 \geq 1 \text{ (rappelons que } 0 < \alpha_0 \leq a_0(x)).$$

**LEMME 2.4** : *Sous les hypothèses (1.1) à (1.7), (2.12), on a :*

$$\|u_h - w_h\| \leq N\tilde{C} \quad \text{où} \quad \tilde{C} = \|f - g\|_{\infty}.$$

La démonstration est exactement celle du cas continu. On montre donc que l'on peut se ramener au cas où  $f \geq g \geq 0$  et  $\psi \geq 0$  puis que  $\|\phi_h\|_{\infty} \leq NC$  avant de conclure.

*Remarque* : On peut montrer (mais ce serait inutile pour notre propos) que :

$$\|\hat{u}_{nh} - u_h\|_{\infty} \leq C\gamma^n \quad \text{et} \quad \|u_{nh} - u_h\|_{\infty} \leq C\gamma^n \quad \text{avec} \quad \gamma \in ]0, 1].$$

### III. ÉTUDE DE L'APPROXIMATION

Avant d'aborder le résultat, il est intéressant d'introduire quelques notations.

*Notations*

(3.1) Soit  $\bar{u}_h$  la solution du problème discret suivant :

$$\begin{cases} b(\bar{u}_h, v_h - \bar{u}_h) \geq (f + \lambda u, v_h - \bar{u}_h) & v_h \leq r_h \psi \\ u_h \leq r_h \psi \end{cases}$$

$u$  étant la solution de l'I.Q.V. continue.

(3.2) Soit  $\bar{u}^{(h)}$  la solution du problème continu suivant :

$$\begin{cases} b(\bar{u}^{(h)}, v - \bar{u}^{(h)}) \geq (f + \lambda u_h, v - \bar{u}^{(h)}) & v \leq \psi \\ \bar{u}^{(h)} \leq \psi \end{cases}$$

où  $u_h$  est la solution de l'I.Q.V. discrète.

**THÉORÈME** : *Sous les hypothèses (1.1) à (1.7), (2.12), on a :*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\infty} &\leq Ch^2 |\log h|^2 \\ \|u - u_h\|_{W^{1,\infty}} &\leq Ch |\log h|^2. \end{aligned}$$

La démonstration se décompose en trois parties.

*Première partie* : Construction d'une fonction discrète  $\alpha_h$  « proche » de  $u$  qui vérifie  $\alpha_h \leq u_h$ . Comme  $\bar{u}_h$  est solution d'une I.V., on a :

$$\begin{cases} b(\bar{u}_h, \varphi_i) \leq (f + \lambda u, \varphi_i) \\ \bar{u}_h \leq r_h \psi \end{cases}$$

donc :

$$b(\bar{u}_h, \varphi_i) \leq (f + \lambda u_h + \lambda \|u - \bar{u}_h\|_\alpha, \varphi_i)$$

ainsi  $\bar{u}_h$  appartient à  $X$  défini en (2.13) où  $f$  est remplacé par  $\|u - \bar{u}_h\|_\infty$ . Comme  $u_h = \partial_h(f, \Psi)$  d'après le lemme (2.4), on a :

$$\bar{u}_h \leq u_h + Ch^2 |\text{Log } h|^2.$$

Posons :

$$(3.3) \quad \alpha_h = \bar{u}_h - Ch^2 |\text{Log } h|^2.$$

Alors  $\alpha_h$  vérifie :

$$\begin{aligned} \alpha_h &\leq u_h \\ \|\alpha_h - u\|_\infty &\leq Ch^2 |\text{Log } h|^2. \end{aligned}$$

*Deuxième partie* : Construisons un  $\beta^{(h)}$  « proche » de  $u_h$  qui vérifie  $\beta^{(h)} \leq u$ . Comme  $\bar{u}^{(h)}$  est solution d'une I.V., pour tout  $v$  positif dans  $H^1(\Omega)$ , on a :

$$b(\bar{u}^{(h)}, v) \leq (f + \lambda u_h, v)$$

donc :

$$\begin{cases} b(\bar{u}^{(h)}, v) \leq (f + \lambda \|\bar{u}^{(h)} - u_h\|_\infty + \lambda \bar{u}^{(h)}, v) \\ \bar{u}^{(h)} \leq \psi. \end{cases}$$

Ainsi :

$\bar{u}^{(h)} \in X$  défini en (1.17) où  $f$  devient  $f + \lambda \|\bar{u}^{(h)} - u_h\|_\infty$  et d'après le lemme (1.3)

$$\bar{u}^{(h)} \leq \partial(f + \lambda \|\bar{u}^{(h)} - u_h\|_\infty; \psi).$$

Donc, en utilisant la lipschitzianité de  $\partial(\cdot)$  par rapport aux seconds membres et le fait que par définition  $u = \partial(f; \psi)$  on a, en considérant les résultats de [10] :

$$\bar{u}^{(h)} - Ch^2 |\text{Log } h|^2 \leq u.$$

On pose alors :

$$(3.4) \quad \beta^{(h)} = \bar{u}^{(h)} - Ch^2 |\operatorname{Log} h|^2.$$

*Troisième partie* : Concluons comme suit :

$$\begin{aligned} u &\leq \alpha_h + Ch^2 |\operatorname{Log} h|^2 \\ &\leq u_h + Ch^2 |\operatorname{Log} h|^2 \\ &\leq \beta^{(h)} + Ch^2 |\operatorname{Log} h|^2 \\ &\leq u + Ch^2 |\operatorname{Log} h|^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\|u - u_h\|_{\infty} \leq Ch^2 |\operatorname{Log} h|^2$$

et par propriété inverse :

$$\|u - u_h\|_{W^{1,\infty}} \leq Ch |\operatorname{Log} h|^2.$$

*Approximation de la zone de contact*

On pose :

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \Omega \text{ tel que } u(x) = \psi(x)\} \\ S_h &= \{x \in \Omega \text{ tel que } u_h(x) < r_h \psi(x) - \xi(h)\} \end{aligned}$$

où l'on suppose :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\xi(h)}{Ch^2 |\operatorname{Log} h|} = 0.$$

Alors, pour  $h$  assez petit  $S_h \subset S$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} S_h = S$  au sens des ensembles. On peut adapter le résultat récent de [18] et établir que la convergence de la frontière libre discrète vers la frontière libre continue est approximativement en  $O(4)$  sous des hypothèses convenables (cf. [18]).

*Expérimentation numérique*

On considère  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  discrétisé de manière usuelle :

$$\text{un second membre } f = \sin(\Pi x) \times \sin(2 \Pi y) \times \sin(\Pi(x + y))$$

$$\text{un obstacle } \Psi = 0$$

$$\text{l'opérateur } -\Delta u - 0,1 \frac{\partial u}{\partial y} + C \frac{\partial u}{\partial x} + 2u.$$

1) *Détermination de l'ordre de convergence*

On a considéré successivement le cas  $h_0 = \frac{1}{10}$ ,  $h_1 = \frac{1}{20}$ ,  $h_2 = \frac{1}{40}$ .



$C$	$\lambda$	Ordre de convergence
50	0 1	Divergence 2,1034
200	0 ou 4 10	Divergence 0,93124

### 2) Dépendance par rapport au paramètre de relaxation

On a résolu l'inéquation variationnelle discrète par une méthode de relaxation-projection  $h = \frac{1}{24}$ ,  $C = 200$ .

$\omega$	$\lambda = 8$	$\lambda = 12$
1 1	127	175
1,05	127	176
1,1	127	177
1,2	130	179
1,4	diverge	diverge

### 3) Choix de la stratégie

On résout généralement le problème (2.6) par l'intermédiaire de la suite d'I.V. définie par l'algorithme (2.9). On a pu établir dans [15] que l'on pouvait également utiliser des stratégies plus souples et changer à tout moment le second membre en utilisant les résultats intermédiaires calculés.

$$h = \frac{1}{24} \quad C = 200 \quad \omega = 1.$$

$\lambda$	I.V.		Changement toutes les 3 itérations		Changement à chaque itération
	Nombre d'itérations	Nombre d'I.V.	Nombre d'itérations	Nombre de changement	
8	369	45	127	45	69
10	316	54	152	54	78
20	413	96	271	96	124
40	676	186	509	182	213

*Autres applications de la méthode :*

1) Nous pouvons considérer, comme dans [10] des opérateurs non linéaires et des obstacles moins réguliers. On obtiendra alors l'ordre d'approximation

de l'équation associée à l'opérateur et à la régularité de la solution de l'I.V. La prise en compte d'autres conditions aux limites (Dirichlet, mixte), se fera comme dans [10].

2) Après transformation, le problème s'écrit :

Trouver  $u$  solution de :

$$\begin{cases} b(u, v - u) \geq (f + \lambda u, v - u) & v \leq \psi \quad v \in H^1 \\ u \leq \psi. \end{cases}$$

Le second membre dépend donc linéairement de la solution. On peut également considérer des seconds membres dépendant non linéairement de  $u$ .

L'exemple suivant (cf. [21]) est issu d'un problème de cinétique chimique :

Trouver  $u_\lambda$  solution de :

$$\begin{cases} b(u_\lambda, v - u_\lambda) \geq \lambda(e^{u_\lambda}, v - u_\lambda) & v \leq \psi \quad v \in H_0^1(\Omega) \\ u_\lambda \leq \psi. \end{cases}$$

Il n'y a plus unicité de la solution. Pourtant les idées introduites précédemment s'appliquent avec succès à ce problème de bifurcation non linéaire.

On peut également prendre en compte des seconds membres de la forme  $f(u)$  où  $f$  est une fonction croissante, régulière, telle que  $0 < f(0)$ .

3) Dans [22], nous étudions, grâce à cette approche, l'analyse numérique de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman : trouver  $u$  solution de  $\text{Max}_n (G_n - f_n) = 0$ .

4) On peut montrer sans l'hypothèse du principe du maximum discret que la solution  $u_n$  d'une I.V. discrète à opérateur coercif est quasiment la plus grande sous-solution discrète. L'obtention de ce résultat s'appuie sur une notion de « régularité discrète » (cf. [19]). On en déduit alors que  $u \leq u_h + Ch^2 |\text{Log } h|^2$ .

*Retour sur le problème initial :*

En s'appuyant sur la notion d'application  $\alpha$ -contractante, nous reprenons dans [23] l'étude du problème initial. Nous pouvons alors unifier l'étude des différents aspects de l'analyse numérique : erreur d'approximation, convergence des algorithmes de résolution, erreurs d'arrondi dues à la représentation des nombres en machine. Nous obtenons également un résultat sur la convergence de la méthode des sous-domaines.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C BAIOCCHI, *Lecture Note Math gem*, n° 606 (1977), pp 27-34
- [2] A BENSOUSSAN, J L LIONS, *Applications des inequations variationnelles en contrôle stochastique*, t 1 et 2, Dunod (1978-1982)
- [3] A BENSOUSSAN, J L LIONS, *C R A S*, t 276, Serie A, pp 1189-1133 (1973), *C R A S*, t 278, Serie A, p 675, p 747 (1974)
- [4] H BREZIS, *These d'État*
- [5] F BREZZI, W W HAGER, P A RAVIART, *Error estimates for the finite element solution of variational inequalities*, Num Math 28 (1977), p 431
- [6] P G CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland (1978)
- [7] P G CIARLET, P A RAVIART, *Maximum principle and uniform convergence for the finite element method*, Comp meth in appl mech and eng 2 (1973), pp 1-20
- [8] P CORTEY-DUMONT, *Approximation numérique d'une I Q V liee a des problemes de gestion de stock*, RAIRO rouge, vol 4 (1980), p 335
- [9] P CORTEY-DUMONT, *On the approximation of a class of Q V I related to the impulse control*, Free boundary value problems (Ed Magenes) (1979)
- [10] P CORTEY-DUMONT, *Finite element approximation in  $L^\infty$ -norm of variational inequalities with non-linear operator*, Article soumis a Num Math
- [11] P CORTEY-DUMONT, *C R A S*, 288, Serie A, p 14 (1979), *C R A S*, 290, Serie A, p 255 (1980)
- [12] P CORTEY-DUMONT, E LOINGER, *Sur l'approximation d'une I Q V liee a des problemes d'infiltration en milieu poreux*, Calcolo, Vol XIX, fasc II (avril-juin) 1982
- [13] R FALK, *Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities*, Math of Computation, vol 28, n° 128 (1974), pp 963-971
- [14] R GLOWINSKI, J L LIONS, R TREMOLIERE, *Numerical analysis of variational inequalities*, North-Holland (1976)
- [15] J C MIELLOU, *A mixte relaxation algorithm applied to quasi-variational inequations*, Proceedings 7th IFIP Conférence (1975), vol 2, p 192, Springer-Verlag (1976)
- [16] J NITSCHKE,  *$L^\infty$ -convergence of finite element approximation*, Lecture Note in Math, Vol 606 (1977), pp 1-15
- [17] R SCOTT, *Optimal  $L^\infty$ -estimates for the finite element method on irregular meshes*, Math of Comp, vol 30, n° 316 (1976), pp 681-697
- [18] F BREZZI and L A CAFFARELLI, *Convergence of the discrete free boundaries for finite element approximations*, RAIRO, vol 17, n° 4 (1983), pp 385-395
- [19] Ph CORTEY-DUMONT, *C R A S*, 296, Serie I, pp 753-756 (1983)
- [20] Ph CORTEY-DUMONT, *On finite element approximation in the  $L^\infty$ -norm of parabolic variational inequalities and quasi-variational inequalities* Rapport interne CMA Ecole Polytechnique n° 112
- [21] F CONRAD, P CORTEY-DUMONT, *On the numerical analysis of bifurcation problems in elliptic variational inequalities* Rapport interne CMA École Polytechnique n° 119
- [22] P CORTEY-DUMONT, *Sur l'approximation de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman*, accepte dans Mathematics in applied sciences
- [23] M BOULBRACHENE, P CORTEY-DUMONT, J-C MIELLOU, *Notion d'application a-contractante Exemples* (a paraître)