

GABRIEL NGUETSENG

**Problèmes d'écrans perforés pour
l'équation de Laplace**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 19, n° 1 (1985), p. 33-63

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1985__19_1_33_0

© AFCET, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



PROBLÈMES D'ÉCRANS PERFORÉS POUR L'ÉQUATION DE LAPLACE (*)

par Gabriel NGUETSENG ⁽¹⁾

Communique par E. SANCHEZ-PALENCIA

Resume — Dans un ouvert Ω_ϵ obtenu à partir d'un domaine Ω dans lequel ont été creusées, dans un voisinage d'une section plane, un grand nombre de petites cavités (associées à un petit paramètre ϵ) de même taille, on considère les problèmes de Dirichlet et de Neumann pour l'opérateur de Laplace. On étudie le comportement asymptotique de la solution lorsque ϵ tend vers zéro. Dans le cas Dirichlet la solution limite est une fonction qui prend des valeurs nulles sur la section plane. Dans le cas Neumann la limite obtenue est solution du problème correspondant dans l'ouvert Ω tout entier. On donne un développement asymptotique de la solution, qui montre des phénomènes de couche limite. Des résultats de convergence sont établis.

Abstract — Let Ω be an open set of \mathbb{R}^3 . We consider the Dirichlet and Neumann problems for the Laplace equation in the domain Ω_ϵ obtained from Ω by removing a great number of small holes (associated with a small parameter ϵ) with same size in the vicinity of a plane section. We study the asymptotics of the solution as ϵ tends to zero. For the Dirichlet problem the solution tends to a function taking null values on the plane section. For the Neumann problem the limit solution is that of the corresponding problem in the whole set Ω . An asymptotic expansion of the solution exhibiting a boundary layer phenomenon is given. Convergence results are proved.

INTRODUCTION

On étudie les problèmes de Dirichlet et de Neumann pour l'équation de Laplace dans un ouvert $\Omega_\epsilon = (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}_\epsilon}) \cap \Omega$, où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^3 et \mathcal{O}_ϵ l'ouvert obtenu en reproduisant par $\epsilon Y'$ -périodicité ($Y' =]0, 1[\times]0, 1[$) un ouvert $\epsilon \mathcal{O}$ (de mesure — par rapport à $dx_1 dx_2 dx_3$ — non nulle) qui coupe le plan $x_3 = 0$.

L'objet de ce travail est, d'une part d'obtenir dans chaque cas la limite (dans un sens qui sera précisé ultérieurement) de la solution lorsque le paramètre ϵ tend vers zéro, d'autre part de mettre en évidence des phénomènes de couche limite qui ont lieu au voisinage de $x_3 = 0$.

(*) Reçu en février 1984

(¹) 4 rue Voltaire, 95100 Argenteuil

La démarche que l'on suit est basée sur une méthode qui combine la technique des développements asymptotiques raccordés [8] et celle des échelles multiples de la théorie de l'homogénéisation [1], [5]. Dans le cas Dirichlet la solution u_ε tend vers une fonction qui prend des valeurs nulles sur le plan $x_3 = 0$. Dans le cas Neumann la limite obtenue est solution du problème correspondant dans l'ouvert Ω tout entier.

L'étude de la solution u_ε (dans chaque cas) au voisinage de $x_3 = 0$ fait apparaître, dans cette région, des différences notables entre le gradient de u_ε et celui de la solution du problème correspondant sans trous. Ce phénomène est caractéristique de la couche limite, et constitue le but principal de notre étude. Nous l'abordons au moyen d'un développement asymptotique formel associé à des fonctions auxquelles nous imposons une croissance tempérée à l'infini (i.e., les distributions associées sont tempérées). De telles fonctions jouent un rôle essentiel tout au long de l'étude.

Ce travail s'inscrit dans le cadre général des « Problèmes d'Écrans » introduit par Lions [3], et utilise des résultats (sur le comportement à l'infini de fonctions Y' -périodiques) établis par E. Sanchez-Palencia [6]. Les problèmes que nous étudions ici apparaissent en théorie de la conduction de la chaleur. Les problèmes analogues en élasticité (qui ne sont pas traités ici) conduisent à des concentrations de contraintes dans la couche. Quelques indications en sont données dans la conclusion. Le plan de l'étude est le suivant :

1. Description géométrique et principales notations
2. Lemmes sur le comportement à l'infini de fonctions harmoniques Y' -périodiques
3. Etude de quelques problèmes aux limites G -périodiques
4. Structure des développements asymptotiques.
5. Problème de Dirichlet
6. Démonstration de la convergence pour le problème de Dirichlet
7. Problème de Neumann
8. Démonstration de la convergence pour le problème de Neumann.
9. Conclusion.

1. DESCRIPTION GÉOMÉTRIQUE ET PRINCIPALES NOTATIONS

On considère dans l'espace \mathbb{R}^3 des variables $x = (x_i)$ un ouvert borné et connexe \mathbb{R}^3 , de frontière suffisamment régulière, Ω contenant strictement l'origine de l'espace \mathbb{R}^3 .

On désignera par

- (1) 1) Ω^+ (resp. Ω^-) la partie de Ω contenue dans le demi-espace $x_3 > 0$ (resp. $x_3 < 0$)

(1.2) Σ la partie de Ω contenue dans le plan $x_3 = 0$

$\partial\Omega$ le bord de Ω

(1.3) $\partial^+\Omega$ (resp. $\partial^-\Omega$) la partie de $\partial\Omega$ contenue dans le demi-espace $x_3 > 0$ (resp. $x_3 < 0$)

Nous utiliserons souvent la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ c'est-à-dire

(1.4) $x = (x', x_3)$ avec $x' = (x_1, x_2)$.

Considérons maintenant l'espace auxiliaire \mathbb{R}_y^3 des variables $y = (y_i)$ avec comme en (1.4) la décomposition correspondante $y = (y', y_3)$, où $y' = (y_1, y_2)$.

On notera

(1.5) $Y' =]0, 1[\times]0, 1[$

le carré des périodes (qui peut tout aussi bien être un rectangle ou, plus généralement, un parallélogramme) et l'on considérera (comme en homogénéisation) \mathbb{R}_y^2 comme un réseau périodique de période de base Y' .

Dans l'espace \mathbb{R}_y^3 on considérera alors des fonctions $u = u(y', y_3)$ Y' -périodiques en y' . Il reviendra au même de dire que de telles fonctions sont $Y' \times \mathbb{R}$ -périodiques (ou plus généralement $D \cap (Y' \times \mathbb{R})$ -périodiques si elles sont définies dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}_y^3$). C'est sous cette forme que nous exprimerons souvent la périodicité par rapport à $y' = (y_1, y_2)$.

Dans cette étude la période de base sera l'ouvert (voir fig. 1)

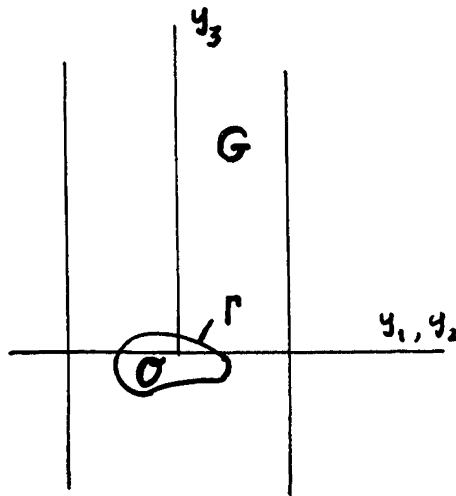


Figure 1. — Période de base G .

$$(1.6) \quad G = (Y' \times \mathbb{R}) \setminus \overline{\mathcal{C}}$$

($\overline{\mathcal{C}}$ désigne l'adhérence de \mathcal{C}) où

$$(1.7) \quad \begin{cases} \mathcal{C} \text{ est un ouvert borné strictement contenu dans } Y' \times \mathbb{R}, \text{ avec} \\ \text{mes } \mathcal{C} \neq 0 \text{ (où mes } \mathcal{C} \text{ désigne la mesure de } \mathcal{C} \text{ par rapport à } dy) \\ \mathcal{C} \cap Y' \neq \emptyset \text{ } (\emptyset \text{ désigne l'ensemble vide),} \\ \text{de bord } \Gamma = \partial \mathcal{C} \text{ suffisamment régulier.} \end{cases}$$

$$(1.8) \quad \begin{cases} \text{L'ensemble } \mathcal{C} \text{ (resp. } G) \text{ dénotera aussi bien l'ouvert défini au point} \\ (1.7) \text{ (resp. (1.6)) que celui obtenu en reproduisant ce dernier par} \\ Y' \text{-périodicité.} \end{cases}$$

On définit alors (ε étant un petit paramètre, $\varepsilon > 0$)

$$(1.9) \quad \Omega_\varepsilon = (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{C}_\varepsilon}) \cap \Omega$$

où $\overline{\mathcal{C}_\varepsilon} = \varepsilon \overline{\mathcal{C}}$, l'ouvert \mathcal{C} étant pris au deuxième sens de (1.8).

L'ensemble Ω_ε (représenté à la figure 2) désigne donc ce qui reste du domaine Ω lorsqu'on enlève les obstacles $\varepsilon \mathcal{C}$ (plutôt $\Omega \cap \varepsilon \overline{\mathcal{C}}$).

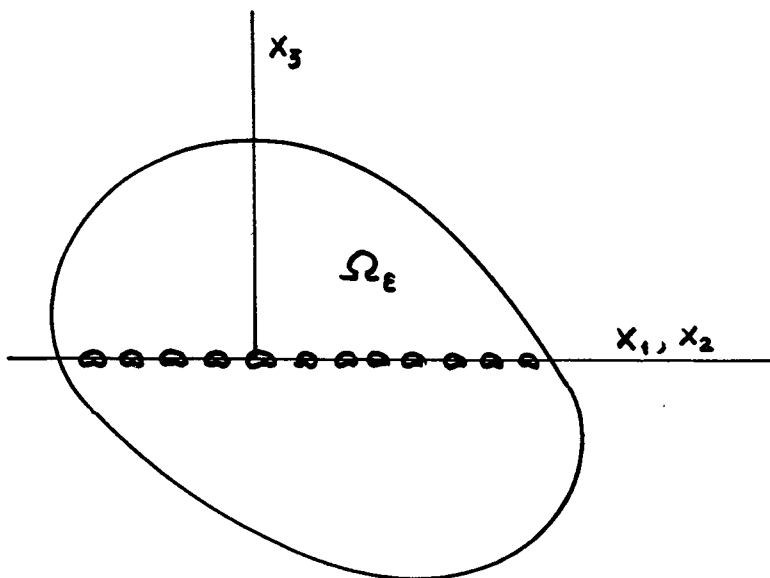


Figure 2. — Ouvert Ω_ε .

2. LEMMES SUR LE COMPORTEMENT A L'INFINI DES FONCTIONS HARMONIQUES Y' -PÉRIODIQUES

H étant un espace de Hilbert (dans ce travail nous prendrons $H = L^2(Y')$, $L^2(Y')$ étant identifié aux fonctions $u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3_{y'})$, uY' -périodique) on définit avec [7] l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}; H)$ des distributions tempérées à valeurs dans H , ainsi que l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}; H)$ (des fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R} à valeurs dans H , à décroissance rapide pour la norme de H).

A ces espaces nous associons les ensembles respectifs

$$(2.1) \quad \begin{cases} S(+\infty; H) \text{ (resp. } S(-\infty; H)) \text{ des fonctions } u = u(y', y_3) \text{ telles que} \\ y_3 \rightarrow u(\cdot, y_3) \text{ coïncide au voisinage de } +\infty \text{ (resp. } -\infty) \text{ avec une} \\ \text{fonction de } \mathcal{S}(\mathbb{R}, H) \end{cases}$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} S'(+\infty; H) \text{ (resp. } S'(-\infty; H)) \text{ des fonctions } u = u(y', y_3) \text{ telles que} \\ y_3 \rightarrow u(\cdot, y_3) \text{ coïncide au voisinage de } +\infty \text{ (resp. } -\infty) \text{ avec une} \\ \text{distribution de } \mathcal{S}'(\mathbb{R}; H). \end{cases}$$

Pour simplifier, nous noterons souvent

$$(2.3) \quad u(y_3) = u(\cdot, y_3), \text{ ou simplement } u, \text{ pour désigner la fonction } y_3 \rightarrow u(\cdot, y_3).$$

Considérons maintenant une fonction $F = F(y)$ vérifiant

$$(2.4) \quad F \in S(+\infty; L^2(Y'))$$

$$(2.5) \quad F \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times]a, +\infty[) \ (a > 0); \quad FY'\text{-périodique en } y'.$$

Le lemme qui suit sera constamment utilisé lors de l'étude asymptotique. Un résultat dans la même direction avait été annoncé dans [2].

LEMME 2.1 : *Soit $u = u(y)$ une fonction définie dans $\mathbb{R}^2 \times]a, +\infty[$ et vérifiant*

$$(2.6) \quad \begin{cases} -\Delta u = F \text{ dans } \mathbb{R}^2 \times]a, +\infty[\\ u \text{ est } Y'\text{-périodique en } y' \\ u \in S'(+\infty; L^2(Y')) \end{cases} \\ \left(\text{avec } \Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \right).$$

Alors, il existe $\alpha^+, \beta^+ \in \mathbb{R}$ et $u_+^{\text{res}} \in S(+\infty; L^2(Y'))$ telles que

$$(2.7) \quad u(y_3) = \alpha^+ y_3 + \beta^+ + u_+^{\text{res}}(y_3) \text{ au voisinage de } y_3 = +\infty.$$

Remarque 2.1 : Si l'on a $F \in S(-\infty; L^2(Y'))$, $F \in C^\alpha(\mathbb{R}^2 \times]-\infty, -a[)$ ($a > 0$), on obtient (moyennant des modifications évidentes dans (2.6)) un résultat analogue au voisinage de $y_3 = -\infty$, c'est-à-dire

$$(2.8) \quad u(y_3) = \alpha^- y_3 + \beta^- + u_{-1}^{res}(y_3) \text{ au voisinage de } y_3 = -\infty. \quad \square$$

Le lemme suivant se déduit sans peine du précédent :

LEMME 2.2 : *On considère $F = F(y)$ vérifiant (2.4) et (2.5). Soit $u = u(y)$ telle que les deux premières propriétés de (2.6) soient satisfaites.*

Alors,

(i) *Si $u \in L^2(a, +\infty; L^2(Y'))$, alors u vérifie (2.7) avec $\alpha^+ = \beta^+ = 0$.*

(ii) *Si $\frac{\partial u}{\partial y_3} \in L^2(a, +\infty; L^2(Y'))$, alors u vérifie (2.7) avec $\alpha^+ = 0$.*

Remarque 2.2 : On obtient par symétrie un résultat analogue au voisinage de $y_3 = -\infty$ (cf. Remarque 2.1).

Remarque 2.3 : Lorsqu'une fonction u , définie au voisinage de $|y_3| = \infty$, aura un comportement à la fois de la forme (2.7) et de la forme (2.8), nous noterons de façon globale

$$(2.9) \quad u = \alpha y_3 + \beta + u^{res} \text{ au voisinage de } |y_3| = \infty$$

où α (resp. β , u^{res}) est égal à α^+ (resp. β^+ , u_+^{res}) pour $y_3 > 0$ et à α^- (resp. β^- , u_-^{res}) pour $y_3 < 0$ ($|y_3|$ étant suffisamment grand).

3. ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES AUX LIMITES G -PÉRIODIQUES

Dans cette section ainsi que dans les suivantes, la notation « $\psi \in C^\alpha(G)$, ψG -périodique »

(3.1) signifie : $\psi \in C^\alpha(\mathbb{R}_y^3 \setminus \overline{\mathcal{C}})$, $\psi(y', y_3)$ Y' -périodique en y' où l'ouvert \mathcal{C} est pris au deuxième sens de (1.8).

3.1. Espaces fonctionnels

Définissons les espaces (sans topologie)

$$\mathcal{V} = \{ \psi \mid \psi \in C^\alpha(G), \psi G\text{-périodique}; \psi = 0 \text{ dans un voisinage de } |y_3| = \infty \}$$

$$\mathcal{V}_0 = \{ \psi \mid \psi \in \mathcal{V}, \psi = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

($\Gamma = \partial\mathcal{C}$ est défini au point (1.7)).

On munira chacun de ces espaces de la norme

$$(3.1)_b \quad \|u\|_V = \left(\sum_i \int_G \left| \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) \right|^2 dy \right)^{1/2}$$

qui en fait des espaces vectoriels normés *non complets*.

On définit alors l'espace

$$(3.2) \quad V \text{ (resp. } V_0) \text{ complété de } \mathcal{V} \text{ (resp. } \mathcal{V}_0) \text{ pour la norme (3.1)}_b \text{ qui est un espace de Hilbert.}$$

Remarque 3.1 : On a $V_0 \subset V$, V_0 étant fermé dans V (car identique à l'adhérence de \mathcal{V}_0 dans V).

Remarque 3.2 : Si une fonction u est dans V , alors elle satisfait à « u est G -périodique, $\frac{\partial u}{\partial y_i} \in L^2(G)$ ». En outre on a $u|_\Gamma = 0$ si $u \in V_0$, $u|_\Gamma$ étant défini au sens de $H^{1/2}(\Gamma)$ (cf. (1.7)).

Le lemme suivant nous permettra de résoudre les problèmes aux limites qui interviennent dans cette étude.

LEMME 3.1 (de caractérisation) : Soit u une fonction vérifiant

$$(3.3) \quad \begin{cases} \text{(i) } u \in C^\infty(G), uG\text{-périodique, } \frac{\partial u}{\partial y_i} \in L^2(G) \\ \text{(ii) il existe deux constantes } \beta^+ \text{ et } \beta^- \text{ telles que la fonction } u - \beta^+ \\ \text{(resp. } u - \beta^-) \text{ coïncide au voisinage de } y_3 = +\infty \text{ (resp. } y_3 = -\infty) \\ \text{avec une fonction de } L^2(G). \end{cases}$$

Alors,

(i) Il existe $u^0 \in V$ tel que $u = u^0 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Si en outre $u|_\Gamma = 0$, alors $u \in V_0$.

Démonstration : Par définition (cf. (3.2) et la Remarque 3.1) il suffit de montrer que :

(i) il existe une suite $u_k \in \mathcal{V}$ telle que

$$(3.4) \quad \|u_k - u\|_V \rightarrow 0 \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

(ii) si $u|_\Gamma = 0$ alors $u_k \in \mathcal{V}_0$ (i.e. $u_k|_\Gamma = 0$).

Pour $a > 0$ (suffisamment grand), introduisons une fonction $\theta^+ = \theta^+(y_3)$ telle que

$$(3.5) \quad \theta^+ \in C^\infty(\mathbb{R}), \theta^+ = 0 \text{ pour } y_3 \leq a, \theta^+ = 1 \text{ au voisinage de } y_3 = +\infty.$$

Puis posons

$$\theta^-(y_3) = \theta^+(-y_3) \text{ (la fonction symétrique de } \theta^+)$$

$$w(y_3) = \beta^+ \cdot \theta^+(y_3) + \beta^- \cdot \theta^-(y_3) \text{ (}\beta^+ \text{ et } \beta^- \text{ étant les constantes au point (3.3))}$$

$$v = u - w, \text{ fonction de } H^1(G) \text{ (grâce à (3.3)).}$$

Considérons enfin une suite tronquante $\varphi_k(y_3) = \varphi(y_3/k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ dans un voisinage de $[-1, 1]$.

Définissons la suite u_k par $u_k = u\varphi_k$. On a $u_k \in \mathcal{V}$. Par ailleurs $u_k - u = v_k - v + w_k - w$; avec $v_k = v\varphi_k$, $w_k = w\varphi_k$; donc $\|u_k - u\|_{\mathcal{V}} \leq \|v_k - v\|_{\mathcal{V}} + \|w_k - w\|_{\mathcal{V}}$ où (w et w_k étant des fonctions ne dépendant que de y_3)

$$\|w_k - w\|_{\mathcal{V}}^2 = \|w'_k - w'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \left(\text{avec la notation } \psi' = \frac{d\psi}{dy_3} \right).$$

En utilisant le théorème de Lebesgue on a (propriété classique) $v_k \rightarrow v$ dans $H^1(G)$, donc $\|v_k - v\|_{\mathcal{V}} \rightarrow 0$. De façon analogue on vérifie sans difficulté que $\|w_k - w\|_{\mathcal{V}} \rightarrow 0$, d'où la propriété (3.4). Le point (ii) découle naturellement de la construction de la suite u_k . Ceci achève la démonstration. \square

3.2. Quelques résultats d'existence et d'unicité dans G

Dans toute la suite de cette étude nous utiliserons (sauf mention expresse) la convention de l'indice répété.

Nous noterons (parce que nous considérerons plus tard l'opérateur de Laplace pour d'autres variables)

$$(3.6) \quad \Delta_y = \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_i}.$$

On considérera souvent une fonction $F = F(y)$ vérifiant (avec (3.1))

$$(3.7) \quad F \in C^\infty(G), FG\text{-périodique}; F \in S(+\infty; L^2(Y')) \cap S(-\infty; L^2(Y')).$$

PROPOSITION 3.1 : Soit F vérifiant (3.7), avec en outre

$$(3.8) \quad F = 0 \text{ pour } |y_3| > \xi \text{ (}\xi > 0\text{), } \xi \text{ suffisamment grand.}$$

Alors, il existe $u \in V_0$, solution de

$$(3.9) \quad \begin{cases} -\Delta_y u = F \text{ dans } G \\ uG\text{-périodique} \\ \frac{\partial u}{\partial y_i} \in L^2(G) \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

La fonction u est unique, et a un comportement à l'infini du type (2.9) avec $\alpha^+ = \alpha^- = 0$.

Remarque 3.3 : Si u est solution de (3.9) (l'ensemble G dans (3.9)₁ étant pris au deuxième sens de (1.8)) alors, grâce au Lemme 2.2 (voir aussi Remarque 2.2) u a un comportement à l'infini du type (2.9) avec $\alpha^+ = \alpha^- = 0$.

Démonstration de la Proposition 3.1 : Avec la Remarque 3.3, nous avons seulement à établir l'existence et l'unicité de u .

Soit u vérifiant (3.9). Alors $(-\Delta_\gamma$ étant hypoelliptique) $u \in C^\infty(G)$.

Grâce à la Remarque 3.3, le Lemme 3.1 est applicable. On a $u \in V_0$. En outre

$$(3.10) \quad \int_G \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy = \int_G F \psi dy \quad \forall \psi \in \mathcal{V}_0$$

l'intégration au deuxième membre se faisant en réalité sur l'ouvert borné (associé au nombre ξ du point (3.8))

$$(3.11) \quad B = G \cap (Y' \times]-\xi, \xi[).$$

Mais alors, on a l'inégalité du type Poincaré (car $\psi = 0$ sur Γ)

$$(3.12) \quad \|\psi\|_{L^2(B)} \leq C \left(\sum_i \int_B \left| \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right|^2 dy \right)^{1/2} \quad \forall \psi \in \mathcal{V}_0$$

de sorte que $\left| \int_G F \psi dy \right| \leq C_{te} \|\psi\|_V \quad \forall \psi \in \mathcal{V}_0$, et donc F définit une

forme linéaire continue sur V_0 . En prolongeant alors (3.10) à V_0 , on est ramené au problème variationnel coercif

$$(3.13) \quad \begin{cases} u \in V_0 \\ \int_G \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial v}{\partial y_i} dy = \int_G F v dy \quad \forall v \in V_0 \end{cases}$$

qui définit u de façon unique. Enfin, en prenant dans l'équation (3.13) des fonctions test convenables, et utilisant la Remarque 3.2, on achève la démonstration en montrant que les problèmes (3.9) et (3.13) sont équivalents. \square

PROPOSITION 3.2 : Soit F vérifiant (3.7), et soit $\chi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ telles que

$$(3.14) \quad \int_G F dy + \int_\Gamma \chi ds = 0, \quad \left| \int_G F \psi dy + \int_\Gamma \chi \psi ds \right| \leq C \|\psi\|_V \\ \forall \psi \in \mathcal{V}.$$

Alors, il existe $u \in V$, solution de

$$(3.15) \quad \begin{cases} -\Delta_y u = F \text{ dans } G \\ uG\text{-périodique} \\ \frac{\partial u}{\partial y_i} \in L^2(G) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \chi \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

La fonction u est unique, et a un comportement à l'infini du type (2.9) avec $\alpha^+ = \alpha^- = 0$.

Remarque 3.4. Si $u(u \in V)$ est solution de (3.15), toute fonction

$$(3.16) \quad u_c = u + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

est encore solution, et les u_c de la forme (3.16) constituent l'ensemble de toutes les solutions de (3.15). Chaque solution u_c a un comportement à l'infini du type (2.9) avec $\alpha^+ = \alpha^- = 0$ et $\beta^+ = \beta_0^+ + c$, $\beta^- = \beta_0^- + c$ (β_0^+ et β_0^- étant bien définis par la solution $u \in V$).

De la sorte, la différence $\beta^+ - \beta^-$ ne dépend pas de la solution u_c .

Remarque 3.5 : La première propriété de (3.14) est une condition de compatibilité entre F et χ . \square

Démonstration de la proposition 3.2. Elle suit les lignes de la Proposition 3.1, la Remarque 3.3 étant valable ici. Grâce au Lemme 3.1 (voir notamment le point (i) de la conclusion) l'étude de (3.15) conduit au problème variationnel coercif

$$(3.17) \quad \begin{cases} u \in V \\ \int_G \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial v}{\partial y_i} dy = \int_G Fv dy + \int_\Gamma \chi v ds \quad \forall v \in V \end{cases}$$

qui définit u de façon unique.

L'équivalence entre (3.17) et « (3.15), avec $u \in V$ » s'obtient sans difficulté. L'ensemble de toutes les solutions est donné par (3.16), où $u \in V$. Ceci achève la démonstration. \square

Remarque 3.6 : Dans les applications, nous serons parfois dans la situation

$$(3.18) \quad \begin{cases} \chi = 0 \\ F \text{ vérifie (3.7), (3.8) et la condition } \int_G F dy = 0. \end{cases}$$

Montrons que (3.14) est alors satisfaite. D'après la condition $\int_G F dy = 0$, il suffit de montrer que

$$(3.19) \quad \left| \int_G F \psi dy \right| \leq \text{Cte} \|\psi\|_V \quad \forall \psi \in \mathcal{V}.$$

Or, cette propriété découle immédiatement de $\int_G F dy = 0$ et de l'inégalité analogue de (3.12) :

$$(3.20) \quad \|\psi - \psi_B\|_{L^2(B)} \leq C \left(\sum_i \int_B \left| \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right|^2 dy \right)^{1/2} \quad \forall \psi \in \mathcal{V}$$

où

$$\psi_B = \frac{1}{|B|} \int_B \psi dy, \quad |B| = \text{mesure de } B$$

[la preuve de (3.20) est classique. Elle utilise le fait que $\int_B (\psi - \psi_B) dy = 0$].

En effet $\int_G F \psi dy = \int_B F \cdot (\psi - \psi_B) dy$, et l'on voit que (3.19) est immédiat grâce à (3.20). \square

4. STRUCTURE DES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

On suit une démarche qui combine la méthode des échelles multiples de la théorie de l'homogénéisation et la méthode des développements asymptotiques raccordés (cette démarche est très voisine de celle de [6]). L'utilisation des échelles multiples se justifie par la périodicité (locale) en $y' = (y_1, y_2)$. La technique des développements raccordés est attachée ici à la présence d'une couche au voisinage de $x_3 = 0$.

Elle sera décrite au moyen de la variable x_3 (ou x_3/ε) qui est associée aux phénomènes de couche.

— Développement extérieur

Nous postulons dans $\Omega^+ \cup \Omega^-$ (cf. (1.1) pour notations) l'existence d'un développement extérieur de la forme

$$(4.1) \quad u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \dots$$

De manière précise, on aura

$$(4.2) \quad \begin{cases} u_\varepsilon(x) = u_0^+(x) + \varepsilon u_1^+(x) + \dots & \text{dans } \Omega^+ \\ u_\varepsilon(x) = u_0^-(x) + \varepsilon u_1^-(x) + \dots & \text{dans } \Omega^- \end{cases}$$

où u_k^+ et u_k^- ($k = 0, 1, \dots$) sont, a priori, deux fonctions indépendantes l'une de l'autre. La relation entre ces deux fonctions s'obtiendra ensuite par raccordement de chacune d'elles avec la couche.

Remarque 4.1 : Les développements précédents ont lieu à une grande distance (à l'échelle de x_3/ε) de l'écran Σ (cf. (1.2)), donc dans une région suffisamment éloignée des effets de périodicité (cf. Section 1) pour que ceux-ci soient considérés comme amortis. Aussi ces développements ne contiennent-ils pas les variables $y' = x'/\varepsilon$ de périodicité.

Notons enfin que les fonctions u_1, u_2, \dots sont des correcteurs associés aux effets de couche. \square

— *Développement intérieur*

On postule dans un voisinage (dont l'épaisseur est d'ordre ε) de Σ le développement

$$(4.3) \quad u_\varepsilon(x) = v_0\left(x', \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(x', \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 v_2\left(x', \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) + \dots$$

où les fonctions $v_k = v_k(x', y)$ (avec $y = (y', y_3)$, $y' = (y_1, y_2)$) sont indépendantes de ε , et vérifient les conditions

$$(4.4) \quad v_k(x', \cdot) \in C^\infty(G), \quad v_k(x', \cdot) \text{ est } G\text{-périodique}$$

$$(4.5) \quad v_k(x', \cdot) \in S'(+\infty; L^2(Y')) \cap S'(-\infty; L^2(Y'))$$

(cf. Section 2 pour définition des ensembles S').

Remarque 4.2 : La séparation des variables $y' = \frac{x'}{\varepsilon}$ et $y_3 = \frac{x_3}{\varepsilon}$ dans (4.3) a pour but de montrer que ces variables joueront des rôles nettement distincts. La variable locale $y' = \frac{x'}{\varepsilon}$ est associée aux effets de périodicité, tandis que $y_3 = \frac{x_3}{\varepsilon}$ est attachée aux phénomènes de couche. Cette séparation est caractéristique de la méthode « Echelle multiples-Développements raccordés » utilisée dans ce travail. \square

— *Raccordement*

Le lien entre u_k^+ et u_k^- ($k = 0, 1$) s'obtiendra au moyen de raccordements

associés à des v_k convenables. Chaque raccordement obéira à une loi précise qui dépendra de l'ordre des développements considérés.

De façon générale nous utiliserons les règles suivantes (des détails précis peuvent être trouvés dans [8]. Voir aussi [6] où ce genre de problèmes est abordé sous un aspect fonctionnel) :

$$(4.6) \quad \ll \text{Lim. Ext. (Lim. Int.)} = \text{Lim. Int. (Lim. Ext.)} \gg$$

$$(4.7) \quad \ll \text{Dév. Ext. 2 termes (Dév. Int. 2 termes)} = \text{Dév. Int. 2 termes (Dév. Ext. 2 termes)} \gg .$$

Lors de l'étude du problème de Neumann, le lien entre $\frac{\partial u_1^+}{\partial x_3}(x', 0)$ et $\frac{\partial u_1^-}{\partial x_3}(x', 0)$ proviendra d'un raccordement suivant la loi

$$(4.8) \quad \ll \text{Dév. Ext. 2 termes (Dév. Int. 3 termes)} = \text{Dév. Int. 3 termes (Dév. Ext. 2 termes)} \gg .$$

Ces raccordements ne concerneront que les variables extérieure x_3 et intérieure y_3 , la variable x' y jouant le rôle de paramètre. \square

5. PROBLÈME DE DIRICHLET

5.1. Position du problème et obtention des formules pour u_0, u_1, v_0, v_1

Dans le cadre de la Section 1, on considère u_ε , solution de

$$(5.1) \quad -\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon$$

$$(5.2) \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon$$

avec

$$(5.3) \quad f \in L^2(\Omega); \quad f = 0 \text{ au voisinage de } \Sigma \text{ (pour simplifier l'étude)} .$$

Notre objet est d'étudier le comportement asymptotique de u_ε pour $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Équations extérieures pour u_0, u_1

On postule (4.2). Avec (5.1) (restreint à l'ouvert convenable), on obtient aux ordres respectifs $\varepsilon^0, \varepsilon, \dots$

$$(5.4) \quad \begin{aligned} & -\Delta u_0^+ = f \quad \text{dans } \Omega^+, \quad -\Delta u_0^- = f \quad \text{dans } \Omega^- \\ & -\Delta u_1^+ = 0 \quad \text{dans } \Omega^+, \quad -\Delta u_1^- = 0 \quad \text{dans } \Omega^- \end{aligned}$$

avec les conditions (provenant du développement de (5.2))

$$(5.5) \quad u_0^+ = 0 \quad \text{sur} \quad \partial^+ \Omega, \quad u_0^- = 0 \quad \text{sur} \quad \partial^- \Omega$$

et des conditions analogues pour u_1^+, u_1^-, \dots (cf. (1.3) pour les notations $\partial^+ \Omega, \partial^- \Omega$).

Équations locales

L'obtention des équations locales est basée sur la remarque qui suit : Si $\Phi^\varepsilon(x) = \Phi\left(x', \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right)$, on a :

$$(5.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi^\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} & i = 1, 2 \\ \frac{\partial \Phi^\varepsilon}{\partial x_3} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} \end{cases}$$

(le premier membre étant appliqué à x , et le second à $(x', x'/\varepsilon, x_3/\varepsilon)$).

On en déduit la décomposition de $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$:

$$(5.7) \quad \Delta = \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_y + \frac{2}{\varepsilon} \Delta_{x'y'} + \Delta_{x'}$$

avec Δ_y donné par (3.6)

$$(5.8) \quad \Delta_{x'y'} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_i}, \quad \Delta_{x'} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad \square$$

Postulons alors (4.3). En partant de (5.1), avec (5.7), on obtient aux différents ordres $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^0, \dots$

$$(5.9) \quad \begin{cases} -\Delta_y v_0 = 0 \\ -\Delta_y v_1 - 2\Delta_{x'y'} v_0 = 0 \\ -\Delta_y v_2 - 2\Delta_{x'y'} v_1 - \Delta_{x'} v_0 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

avec les conditions (provenant du développement de (5.2))

$$(5.10) \quad v_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad v_1 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad v_2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma. \quad \square$$

5.2. Calcul de v_0 , u_0 , v_1 et u_1

Calcul de v_0 : Montrons que :

$$(5.11) \quad v_0 = 0.$$

Le problème pour v_0 (où x' est fixé en tant que paramètre) est $(5.9)_1$, $(5.10)_1$ avec (4.4) (4.5) (pour $k = 0$). Le Lemme 2.1 est donc applicable. On a

$$(5.12) \quad v_0(x', \cdot) = \alpha_0 y_3 + \beta_0 + v_0^{\text{res}}(x', \cdot) \text{ au voisinage de } |y_3| = \infty$$

où $\alpha_0(x')$, $\beta_0(x')$ et $v_0^{\text{res}}(x', \cdot)$ sont définis comme au point (2.9).

Effectuons le raccordement associé au premier terme v_0 de (4.3).

On utilisera la règle (des limites) (4.6). Avec (5.12), le développement, pour x_3 fixé, $\varepsilon \rightarrow 0$, de la limite intérieure $v_0(x', x'/\varepsilon, y_3) \mid y_3 = x_3/\varepsilon$ donne au premier membre de (4.6) la quantité

$$(5.13) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\alpha_0 x_3/\varepsilon)$$

où

$$\alpha_0 = \alpha_0^+ \text{ (resp. } \alpha_0^-) \text{ pour } x_3 > 0 \text{ (resp. } x_3 < 0) .$$

D'autre part, le développement, pour y_3 fixé, $\varepsilon \rightarrow 0$, de la limite extérieure $u_0(x', x_3) \mid_{x_3=\varepsilon y_3}$ donne au second membre de (4.6)

$$(5.14) \quad u_0(x', 0) \text{ (avec } u_0(x', 0) = u_0^+(x', 0) \text{ si } y_3 > 0, u_0(x', 0) = u_0^-(x', 0) \text{ si } y_3 < 0) .$$

Il suffit alors d'identifier (5.13) et (5.14). On a nécessairement $\alpha_0^+ = \alpha_0^- = 0$ donc (cf. (5.12)) $\frac{\partial v_0}{\partial y_j} \in L^2(G) \quad \forall j$. Il suffit ensuite d'utiliser la proposition 3.1. Ceci achève la preuve de (5.11). \square

Calcul de u_0 (i.e. u_0^+ et u_0^-) : Aux formules (5.4) et (5.5) pour u_0^+ et u_0^- doivent être attachées des conditions sur Σ . Celles-ci s'obtiendront en considérant le deuxième terme v_1 du développement (4.3).

Le problème pour v_1 est $(5.9)_2$ (où $v_0 = 0$), $(5.10)_2$, avec (4.4) et (4.5). En raisonnant comme lors du calcul de v_0 on a :

$$(5.15) \quad v_1(x', \cdot) = \alpha_1 y_3 + \beta_1 + v_1^{\text{res}}(x', \cdot) \text{ au voisinage de } |y_3| = \infty .$$

Effectuons le raccordement associé à $v_0 = 0$ et v_1 . Nous utiliserons la règle (4.7), avec une convention de signe du genre de la précédente (cf. (5.13),

(5.14)). En utilisant (5.15), on obtient sans difficulté pour le premier membre de (4.7) l'expression :

$$(5.16) \quad \alpha_1 x_3 + \varepsilon \beta_1 .$$

Par ailleurs un calcul élémentaire [développement, pour y_3 fixé, $\varepsilon \rightarrow 0$, de $u_0(x', x_3) + \varepsilon u_1(x', x_3) |_{x_3=\varepsilon y_3}$] donne au second membre de (4.7)

$$(5.17) \quad u_0(x', 0) + x_3 \frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x', 0) + \varepsilon u_1(x', 0) .$$

Il suffit alors d'identifier (5.16) et (5.17). On obtient

$$(5.18) \quad u_0^+(x', 0) = u_0^-(x', 0) = 0$$

$$(5.19) \quad \frac{\partial u_0^+}{\partial x_3}(x', 0) = \alpha_1^+(x'), \quad \frac{\partial u_0^-}{\partial x_3}(x', 0) = \alpha_1^-(x')$$

$$(5.20) \quad u_1^+(x', 0) = \beta_1^+(x'), \quad u_1^-(x', 0) = \beta_1^-(x') .$$

Avec (5.18) et les formules précédentes pour u_0^+ et u_0^- on a

$$(5.21) \quad \begin{cases} -\Delta u_0^+ = f \text{ dans } \Omega^+ \\ u_0^+ = 0 \text{ sur } \partial\Omega^+ \\ \text{et le problème analogue pour } u_0^- \\ \text{et } u_0^+ \text{ (resp. } u_0^-) \text{ est défini de façon unique.} \quad \square \end{cases}$$

Remarque 5.1 : Les quantités α_1^+ et α_1^- sont bien déterminées par (5.19).

Calcul de v_1 : On cherche v_1 , solution (pour x' fixé, x' paramètre) de (4.4), (4.5), (5.9)₂ (avec $v_0 = 0$), (5.10)₂ et (5.15) où (Remarque 5.1) $\alpha_1^+(x')$ et $\alpha_1^-(x')$ sont donnés par (5.19).

Considérons pour cela deux fonctions $\Phi^+(y)$ et $\Phi^-(y)$ vérifiant

$$(5.22) \quad \begin{cases} -\Delta_y \Phi^+ = 0 \text{ dans } G \text{ (resp. } -\Delta_y \Phi^- = 0 \text{ dans } G) \\ \Phi^+ \text{ (resp. } \Phi^-) \text{ } G\text{-périodique} \\ \Phi^+ \text{ (resp. } \Phi^-) = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

et

$$(5.23) \quad \begin{cases} \Phi^+ \text{ (resp. } \Phi^-) \text{ a un comportement à l'infini du type (5.15) avec} \\ \alpha_1^+ = 1 \text{ (resp. } \alpha_1^+ = 0), \alpha_1^- = 0 \text{ (resp. } \alpha_1^- = 1) \\ \beta_1^+, \beta_1^- \text{ étant des constantes non données, indépendantes de } x'. \end{cases}$$

LEMME 5.1 : La fonction Φ^+ (resp. Φ^-) est définie de façon unique par (5.22) et (5.23), et ne dépend que de la période G .

Démonstration : Il suffit de faire la démonstration pour Φ^+ . Soit θ^+ comme au point (3.5) (avec $a > 0$, a suffisamment grand).

Définissons la fonction

$$(5.24) \quad b^+ = \theta^+ y_3.$$

On a : $b^+ \in C^\infty(G)$, b^+ G -périodique, $b^+ = 0$ sur Γ .

En outre, la fonction $\Delta_y b^+$ vérifie la condition (3.8) de la Proposition 3.1, de sorte qu'on peut associer à b^+ une fonction $w_1^+(y)$, solution unique du problème (3.9) pour le second membre $F = \Delta_y b^+$.

Il suffit alors de prendre $\Phi^+ = b^+ + w_1^+$, d'où le Lemme 5.1. \square

On peut maintenant déterminer la fonction v_1 . Elle est donnée par

$$(5.25) \quad v_1(x', y) = \frac{\partial u_0^+}{\partial x_3}(x', 0) \Phi^+(y) + \frac{\partial u_0^-}{\partial x_3}(x', 0) \Phi^-(y).$$

En effet on vérifie facilement que le second membre de (5.25) est solution (unique) du problème pour v_1 .

Remarque 5.2 : $\beta_1^+(x')$ et $\beta_1^-(x')$ sont désormais connus.

Calcul de u_1 : La détermination de u_1^+ et u_1^- découle de ce qui précède. On a

$$(5.26) \quad \begin{cases} -\Delta u_1^+ = 0 \text{ dans } \Omega^+ \\ u_1^+ = 0 \text{ sur } \partial^+ \Omega \\ u_1^+ = \beta_1^+ \text{ sur } \Sigma \\ \text{et le problème analogue (associé à } \beta_1^-) \text{ pour } u_1^-, \end{cases}$$

qui définit u_1^+ (resp. u_1^-) de façon unique.

Ceci achève l'étude asymptotique. \square

6. DÉMONSTRATION DE LA CONVERGENCE POUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET

Nous aurons besoin du résultat suivant :

LEMME 6.1 : Il existe $c > 0$ (c indépendante de ε) telle que

$$(6.1) \quad \int_{\Sigma} |u(x', 0)|^2 dx' \leq \varepsilon c \int_{\Omega} |\text{grad } u(x)|^2 dx; \quad \forall u \in H^1(\Omega), u|_{\varepsilon\Gamma} = 0$$

(où $\Gamma = \partial\mathcal{O}$, \mathcal{O} étant pris au deuxième sens de (1.8)).

Démonstration : Définissons un ouvert B comme au point (3.11) (avec ξ fixé une fois pour toutes). Grâce à l'inégalité (3.12), $\|w\|_{H^1(B)}$ et $\|\text{grad}_y w\|_{(L^2(B))^3}$ sont deux normes équivalentes sur l'espace des $w \in H^1(B)$, $w|_\Gamma = 0$ (on note $\text{grad}_y w = \left(\frac{\partial w}{\partial y_i}\right)$).

On a donc, par le théorème des traces,

$$(6.2) \quad \int_{Y'} |w(y', 0)|^2 dy' \leq c \int_B |\text{grad}_y w(y)|^2 dy \quad \forall w \in H^1(B), \quad w|_\Gamma = 0$$

(w prolongé par 0 à $B \cup \mathcal{O}$) inégalité qui ne dépend pas de la périodicité.

En faisant l'homothétie $x = \varepsilon y$, on déduit de (6.2) que

$$(6.3) \quad \int_{\varepsilon Y'} |u(x', 0)|^2 dx' \leq \varepsilon c \int_{\varepsilon B} |\text{grad} u(x)|^2 dx \quad \forall u \in H^1(\varepsilon B), \quad u|_{\varepsilon \Gamma} = 0.$$

Pour avoir le résultat voulu, il suffit de sommer (6.3) pour tous les domaines εB qui coupent Ω , puis d'effectuer des majorations convenables. \square

On en déduit la :

PROPOSITION 6.1 : Définissons $u_0 = u_0^+$ (resp. u_0^-) dans Ω^+ (resp. Ω^-) où u_0^+ (resp. u_0^-) est définie par (5.21).

Soit $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ la solution de (5.1), (5.2). Identifiant u_ε à son prolongement (encore noté u_ε) par 0 à Ω tout entier, on a

$$(6.4) \quad u_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}.$$

Démonstration : On a, avec (5.3),

$$(6.5) \quad \begin{cases} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon) \\ \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon) \end{cases}$$

où toute fonction de $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ est identifiée à son prolongement par 0 à Ω . Donc (en prenant dans l'équation ci-dessus $v = u_\varepsilon$)

$$(6.6) \quad \|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \text{Cte}$$

d'où (par extraction d'une sous-suite)

$$(6.7) \quad u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}.$$

Grâce à la continuité de l'application $u \rightarrow u|_{\Sigma}$ de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Sigma)$ et au Lemme 6.1, (6.7) implique (avec (6.6)) que $u|_{\Sigma} = 0$.

D'autre part, pour ε suffisamment petit on peut prendre dans (6.5) $v = \varphi_0^+$ (resp. φ_0^-) où φ_0^+ (resp. φ_0^-) est le prolongement par 0 à Ω d'une fonction φ^+ (resp. φ^-) $\in \mathcal{D}(\Omega^+)$ (resp. $\mathcal{D}(\Omega^-)$). On en déduit sans peine que $-\Delta u = f$ dans Ω^+ puis dans Ω^- , d'où finalement $u = u_0$ (u_0 définie à l'énoncé de la Proposition), et par suite (6.4). Ceci achève la démonstration. \square

7. PROBLÈME DE NEUMANN

7.1. Position du problème et obtention des formules pour u_0, u_1, v_0, v_1

Dans le cadre de la section 1 on considère u_ε définie à une constante additive près par

$$(7.1) \quad -\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon$$

$$(7.2) \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon$$

où f vérifie (5.3), avec en outre

$$(7.3) \quad \int_{\Omega} f dx = 0.$$

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de u_ε pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

La démarche sera, à la condition (7.2) près, celle de la section 5. Les développements (4.2) et (4.3) conduisent respectivement aux formules (5.4) et (5.9), auxquelles doivent être jointes différentes conditions provenant des développements de (7.2). Le développement extérieur de cette condition donne naturellement

$$(7.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_0^+}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial^+ \Omega, & \frac{\partial u_0^-}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial^- \Omega \\ \text{et des conditions analogues pour } u_1^+, u_1^-, \dots \end{cases}$$

D'autre part, en utilisant (5.6), on a sur $\varepsilon\Gamma = \partial\mathcal{O}_\varepsilon$ la décomposition

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 n_i(y) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^3 n_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

d'où (aux ordres respectifs ε^{-1} , ε^0 , ...)

$$(7.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial v_0}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial v_k}{\partial n} = -\frac{\partial v_{k-1}}{\partial n_{x'}}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

où l'on note

$$(7.6) \quad \frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i=1}^3 n_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial}{\partial n_{x'}} = \sum_{i=1}^2 n_i(y) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad \square$$

7.2. Calcul de v_0 , u_0 , v_1 , u_1

Calcul de v_0 : Montrons que v_0 est une fonction indépendante de y , c'est-à-dire

$$(7.7) \quad v_0 = v_0(x') \quad (\text{fonction du seul paramètre } x').$$

Le problème pour v_0 est (4.4), (4.5) (pour $k = 0$), $(5.9)_1$, $(7.5)_1$. En raisonnant comme à la Section 5 on obtient pour $v_0(x', \cdot)$ le comportement (5.12), et par suite (en utilisant le raccordement (4.6)) $\alpha_0^+ = \alpha_0^- = 0$. On en déduit aussitôt que $\frac{\partial v_0}{\partial y_i} \in L^2(G) \forall i$, d'où (Proposition 3.2) (7.7).

Remarque 7.1 : Un premier raccordement de u_0 avec la couche donne (cf. (4.6))

$$(7.8) \quad u_0^+(x', 0) = u_0^-(x', 0) = v_0(x'). \quad \square$$

Calcul de u_0 : Comme à la Section 5, le calcul effectif de u_0 passe par l'étude du deuxième terme v_1 du développement (4.3). La fonction v_1 vérifie (4.4), (4.5) (pour $k = 1$), $(5.9)_2$ (où, d'après (7.7), $2 \Delta_{x', y'} v_0 = 0$) et (7.5) (pour $k = 1$). On en déduit (comme précédemment pour v_0) que

$$(7.9) \quad v_1(x', \cdot) = \alpha_1 y_3 + \beta_1 + v_1^{\text{res}}(x', \cdot) \text{ au voisinage de } |y_3| = \infty.$$

On a l'égalité

$$(7.10) \quad \alpha_1^+(x') = \alpha_1^-(x').$$

Cette égalité s'obtient facilement en intégrant $(5.9)_2$ sur un ouvert B de la forme (3.11) (avec ξ suffisamment grand), puis en utilisant la propriété

$\int_{\Gamma} \frac{\partial v_0}{\partial n_{x'}} dS = 0$ (la vérification est facile d'après (7.7)) qui simplifie la formule de Green, ainsi que la formule (7.9) qui introduit les α_1 . Il suffit alors de passer à la limite pour $\xi \rightarrow +\infty$. \square

Effectuons maintenant le deuxième raccordement de u_0 avec la couche. La règle (4.7) conduit à l'identité

$$v_0(x') + \alpha_1 x_3 + \varepsilon \beta_1 = u_0(x', 0) + x_3 \frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x', 0) + \varepsilon u_1(x', 0)$$

d'où (outre (7.8)) :

$$(7.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_0^+}{\partial x_3}(x', 0) = \alpha_1^+(x'), & \frac{\partial u_0^-}{\partial x_3}(x', 0) = \alpha_1^-(x') \\ u_1^+(x', 0) = \beta_1^+(x'), & u_1^-(x', 0) = \beta_1^-(x'). \end{cases}$$

Remarque 7.2 : Définissons $u_0(x)$ par $u_0 = u_0^+$ (resp. u_0^-) dans Ω^+ (resp. Ω^-). Le crochet $\llbracket \cdot \rrbracket$ désignant le saut à travers Σ , on a d'après (7.8), (7.10), et (7.11)

$$\llbracket u_0 \rrbracket = 0, \quad \left\llbracket \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \right\rrbracket = 0. \quad \square$$

Avec la Remarque 7.2, on a pour u_0 (i.e. u_0^+ et u_0^-) le problème

$$(7.12) \quad \begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_0}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

qui définit u_0 à une constante additive près.

Remarque 7.3 : La fonction $v_0(x')$ est alors bien définie (à une constante additive près) par (7.8).

Calcul de v_1 : On cherche v_1 satisfaisant à (4.4), (4.5) (pour $k = 1$), (5.9)₂ (où $2 \Delta_{x'} v_0 = 0$) et (7.5) (pour $k = 1$). Définissons des fonctions Φ^k ($1 \leq k \leq 3$) par

$$(7.13) \quad \begin{cases} -\Delta_y \Phi^k = 0 & \text{dans } G \\ \Phi^k \text{ } G\text{-périodique} \\ \frac{\partial \Phi^3}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \quad \frac{\partial \Phi^k}{\partial n} = -n_k & \text{sur } \Gamma \quad (k = 1, 2) \end{cases}$$

(où n_k désigne la k -ième composante de la normale n à Γ)

(7.14) Φ^3 a un comportement à l'infini de la forme (2.9) avec $\alpha^+ = \alpha^- = 1$

(7.15) $\frac{\partial \Phi^k}{\partial y_i} \in L^2(G)$ pour $k = 1, 2$.

LEMME 7.1 : Les fonctions Φ^k sont définies de façon unique à une constante additive près par (7.13)-(7.15), et ne dépendent que de la période G .

Démonstration

1) *Preuve pour Φ^3* : Définissons $b^3 = \theta y_3$ où $\theta = \theta(y_3)$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\theta = 0$ dans un voisinage suffisamment grand de $y_3 = 0$, $\theta = 1$ au voisinage de $|y_3| = \infty$.

On voit sans difficulté que la fonction $F = \Delta_y b^3$ vérifie (3.7), (3.8) et la condition « $\int_G F dy = 0$ » de la Remarque 3.6, de sorte que (cf. Remarque 3.6) le problème (3.15) pour $F = \Delta_y b^3$, $\chi = 0$, définit bien une fonction w^3 . Il suffit alors de prendre $\Phi^3 = w^3 + b^3$.

2) *Preuve pour Φ^k ($k = 1, 2$)* : Définissons une fonction $\theta_0 = \theta_0(y)$ telle que

$$(7.16) \quad \theta_0 \in \mathcal{D}(G \cup \overline{\mathcal{O}}), \quad \theta_0 = 1 \text{ dans un voisinage de } \overline{\mathcal{O}}$$

puis posons

$$b^k = -y_k \theta_0.$$

Considérée comme définie dans G , la fonction b^k vérifie

$$b^k \in C^\infty(G), \quad b^k \text{ } G\text{-périodique}, \quad \frac{\partial b^k}{\partial n} = -n_k \text{ sur } \Gamma.$$

En suivant la démarche précédente (cf. le point 1)) on voit facilement que $\Phi^k = w^k + b^k$ ($k = 1, 2$); où w^k est solution de (3.15) avec $\chi = 0$, $F = \Delta_y b^k$. Ceci achève la démonstration du Lemme 7.1. \square

Avec (7.8), (7.10), (7.11), et le Lemme 7.1, on vérifie sans peine que

$$(7.17) \quad v_1(x', y) = \frac{\partial u_0}{\partial x_k}(x', 0) \Phi^k(y)$$

(somme étendue à $k = 1, 2, 3$), fonction définie à une « constante » $C(x')$ additive près, est la solution cherchée. Ceci achève le calcul de v_1 .

Remarque 7.4 : La différence $\beta_1^+(x') - \beta_1^-(x')$ est bien définie. \square

Calcul de u_1 : Avec (5.4), (7.4), (7.11) et la Remarque 7.4 (qui donne $\llbracket u_1 \rrbracket$ sur Σ), la fonction $u_1(x)$ sera bien définie si $\llbracket \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \rrbracket$ est donné (cf. Remarque 7.2) sur Σ . Nous devons pour cela considérer le troisième terme v_2 du développement (4.3). Rappelons d'abord que v_2 vérifie

$$(7.18) \quad \begin{cases} -\Delta_y v_2 = 2 \Delta_{x'y'} v_1 + \Delta_{x'} v_0 & \text{dans } G \\ \frac{\partial v_2}{\partial n} = -\frac{\partial v_1}{\partial n_{x'}} & \text{sur } \Gamma \\ \text{et les conditions (4.4), (4.5)} \end{cases}$$

où (d'après (7.17) et le comportement à l'infini des Φ^k)

$$(7.19) \quad 2 \Delta_{x'y'} v_1 \in S(+\infty; L^2(Y')) \cap S(-\infty; L^2(Y')).$$

Posons alors

$$(7.20) \quad Z_2 = v_2 + \frac{1}{2} \Delta_{x'} v_0 \cdot y_3^2.$$

On a

$$(7.21) \quad \begin{cases} -\Delta_y Z_2 = 2 \Delta_{x'y'} v_1 & \text{dans } G \\ \frac{\partial Z_2}{\partial n} = -\frac{\partial v_1}{\partial n_{x'}} + \Delta_{x'} v_0 \cdot n_3 y_3 & \text{sur } \Gamma \\ Z_2 \text{ vérifie (4.4) et (4.5).} \end{cases}$$

Avec (7.19), le Lemme 2.1 est applicable. On en déduit que

$$(7.22) \quad v_2(x', \cdot) = -\frac{1}{2} \Delta_{x'} v_0(x') \cdot y_3^2 + \alpha_2 y_3 + \beta_2 + v_2^{\text{res}}(x', \cdot)$$

au voisinage de $|y_3| = \infty$.

On peut maintenant raccorder u_1 avec la couche. Nous appliquerons la règle (4.8).

On a (pour $x_3 \neq 0$ fixé, $\varepsilon \rightarrow 0$) grâce à (7.9) et (7.22) :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= v_0(x') + \varepsilon v_1(x', x'/\varepsilon, x_3/\varepsilon) + \varepsilon^2 v_2(x', x'/\varepsilon, x_3/\varepsilon) + \cdots \\ &= v_0(x') + \varepsilon(\alpha_1 x_3/\varepsilon + \beta_1 + \cdots) \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{2} \Delta_{x'} v_0(x') \times \right. \\ &\quad \left. \times x_3^2/\varepsilon^2 + \alpha_2 x_3/\varepsilon + \beta_2 + \cdots \right) + \cdots, \end{aligned}$$

d'où le premier membre de (4.8)

$$(7.23) \quad v_0(x') + \alpha_1 x_3 - \frac{1}{2} \Delta_{x'} v_0(x') \cdot x_3^2 + \varepsilon(\beta_1 + \alpha_2 x_3).$$

Au deuxième membre de (4.8) on obtient (en considérant (4.1) à l'ordre ε)

$$(7.24) \quad u_0(x', 0) + x_3 \frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x', 0) + \frac{x_3^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2}(x', 0) + \\ + \varepsilon \left(u_1(x', 0) + x_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x', 0) \right).$$

Il suffit alors d'identifier (7.23) et (7.24). On obtient (outre (7.8) et (7.11)) :

$$(7.25) \quad \Delta_{x'} v_0(x') + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2}(x', 0) = 0$$

(qui est la forme asymptotique de (7.1))

$$(7.26) \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3}(x', 0) = \alpha_2^+(x'), \quad \frac{\partial u_1^-}{\partial x_3}(x', 0) = \alpha_2^-(x')$$

donc

$$(7.27) \quad \frac{\partial u_1^+}{\partial x_3}(x', 0) - \frac{\partial u_1^-}{\partial x_3}(x', 0) = \alpha_2^+(x') - \alpha_2^-(x').$$

Notre objet est de calculer la quantité $\alpha_2^+ - \alpha_2^-$.

LEMME 7.2 : *Pour que v_2 (et par suite u_1) existe, il est nécessaire que*

$$(7.28) \quad \alpha_2^+(x') - \alpha_2^-(x') = - \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial v_1}{\partial n_{x'}} dS + \Delta_{x'} v_0 \cdot \int_{\Gamma} y_3 n_3 dS \right).$$

Démonstration : Elle est analogue à celle de l'égalité (7.10). On part de (7.21) et on raisonne comme dans la preuve de (7.10), avec (cf. (7.22))

$$(7.29) \quad Z_2(x', \cdot) = \alpha_2 y_3 + \beta_2 + v_2^{\text{res}}(x', \cdot) \text{ au voisinage de } |y_3| = \infty,$$

et en utilisant la propriété

$$(7.30) \quad \int_{G \setminus B} \Delta_{x'y} v_1 dy = \int_G \Delta_{x'y} v_1 dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial v_1}{\partial n_{x'}} dS$$

qui découle de

$$(7.31) \quad \int_{G \setminus B} \Delta_{x'y'} v_1 dy = 0,$$

car (avec la périodicité) on a

$$(7.32) \quad \int_{Y'} \Delta_{x'y'} v_1(x', y', y_3) dy' = 0 \quad \forall y_3, \quad |y_3| \text{ suffisamment grand.}$$

Cela achève la preuve du Lemme 7.2. \square

Si nous admettons donc un instant que (7.18) définit bien une fonction v_2 , alors les formules (5.4), (7.4), (7.11) (avec la Remarque 7.4), (7.27) et (7.28) définissent u_1 à une constante additive près. \square

Montrons, pour achever l'étude asymptotique, que v_2 existe. Il revient au même de vérifier que (7.21) (avec (7.29)) définit bien Z_2 .

LEMME 7.3 : *Il existe Z_2 solution de (7.21), avec (7.29) où la différence $\alpha_2^+ - \alpha_2^-$ est donnée par (7.28).*

Remarque 7.5 : Supposons qu'il existe Z solution de (7.21), avec un comportement du type

$$(7.33) \quad \begin{cases} Z(x', \cdot) = \alpha y_3 + \beta + Z^{\text{res}}(x', \cdot) \text{ au voisinage de } |y_3| = \infty \\ \alpha^+ = \alpha_2^+ - \alpha_2^- \text{ (donné par (7.28))}, \quad \alpha^- = 0. \end{cases}$$

Alors, on vérifie sans difficulté que toute solution Z_2 de (7.21) est de la forme

$$Z_2(x', y) = Z(x', y) + \lambda(x') \cdot \Phi^3(y); \quad \lambda(x') \in \mathbb{R},$$

Φ^3 donné par (7.13) (7.14). \square

Démonstration du Lemme 7.3 : Grâce à la Remarque 7.5, il suffit de montrer qu'il existe Z solution de (7.21) et vérifiant (7.33).

Définissons d'abord une fonction b_1 , solution de (3.15) pour $F = \Delta_{x'y'} v_1$ ($\Delta_{x'y'} v_1$ vérifie bien (3.7); cf. (7.19)) $\chi = -\frac{\partial v_1}{\partial n_{x'}}$.

La fonction b_1 existe. En effet : d'après (7.30), la première condition (3.14) est satisfaite par F et χ . Avec la formule de Green

$$\int_G \Delta_{x'y'} v_1 \cdot \psi dy - \int_\Gamma \frac{\partial v_1}{\partial n_{x'}} \cdot \psi dS = \sum_{i=1}^2 \int_G \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dy, \quad \forall \psi \in \mathcal{V}$$

et le fait (dédduit de (7.17) et du comportement à l'infini des Φ^k) que

$$\sum_{i=1}^2 \int_{G \setminus B} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dy = 0$$

(B étant un ouvert du type (3.11) avec ξ suffisamment grand, ξ fixe) on voit facilement que la deuxième condition (3.14) est aussi vérifiée. Donc b_1 existe.

Puis posons :

$$b_2 = \frac{\Delta_{x'} v_0}{2} y_3 \theta_0, \quad \theta_0 \text{ étant une fonction qui vérifie (7.16)}$$

$$a_1 = \left(- \int_{\Gamma} \frac{\partial v_1}{\partial n_{x'}} dS \right) \theta^+ y_3,$$

$$a_2 = \left(- \Delta_{x'} v_0 \cdot \int_{\Gamma} y_3 n_3 dS \right) \theta^+ y_3$$

où $\theta^+ = \theta^+(y)$ est une fonction vérifiant (3.5).

On vérifie facilement que

$$(7.34) \quad \int_G \Delta_y a_1 dy + \int_G \Delta_{x'y'} v_1 dy = 0, \quad \int_G \Delta_y a_2 dy + \int_G \Delta_y b_2 dy = 0,$$

Enfin faisons le changement de fonction $Z = Z_0 + a_1 + a_2 + b_1 + b_2$.

On est alors ramené à l'étude du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} - \Delta_y Z_0 = \Delta_y a_1 + \Delta_{x'y'} v_1 + \Delta_y a_2 + \Delta_y b_2 \\ Z_0 \text{ } G\text{-périodique} \\ \frac{\partial Z_0}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial Z_0}{\partial y_i} \in L^2(G). \end{array} \right.$$

Nous sommes dans le cadre de la Proposition 3.2, avec $\chi = 0$ et

$$F = \Delta_y a_1 + \Delta_{x'y'} v_1 + \Delta_y a_2 + \Delta_y b_2.$$

Avec (7.34), la première condition (3.14) est satisfaite. Il reste à vérifier que la deuxième est aussi satisfaite. Mais grâce à la Remarque 3.6 (où l'on peut prendre $F = \Delta_y a_2 + \Delta_y b_2$) il suffit de montrer que

$$(7.35) \quad \left| \int_G \Delta_y a_1 \cdot \psi dy + \int_G \Delta_{x'y'} v_1 \cdot \psi dy \right| \leq \text{Cte} \quad \|\psi\|_V \quad \forall \psi \in \mathcal{V}.$$

Nous aurons besoin de l'inégalité

$$(7.36) \quad \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^2(G \setminus B)} \leq \text{Cte} \left(\sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right\|_{L^2(G \setminus B)}^2 \right)^{1/2} \quad \forall \psi \in \mathcal{V}$$

où :

$$\tilde{\psi}(y_3) = \frac{1}{|Y'|} \int_{Y'} \psi(y', y_3) dy' \quad (|Y'| = 1 = \text{volume de } Y')$$

B un ouvert de la forme (3.11) tel que

$$\Delta_y a_1 = 0 \quad \text{dans } G \setminus B$$

[la propriété (7.36) résulte de $\|\psi(y_3) - \tilde{\psi}(y_3)\|_{L^2(Y')}^2 \leq c \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(y_3) \right\|_{L^2(Y')}^2$ (pour $|y_3|$ suffisamment grand), inégalité qui se démontre comme (3.20)].

Montrons alors (7.35) : En utilisant (7.34) on a, pour tout $\psi \in \mathcal{V}$

$$(7.37) \quad \int_G \Delta_y a_1 \cdot \psi dy + \int_G \Delta_{x'y'} v_1 \cdot \psi dy = \int_B (\Delta_y a_1 + \Delta_{x'y'} v_1) \times \\ \times (\psi - \psi_B) dy + \int_{G \setminus B} \Delta_{x'y'} v_1 \cdot (\psi - \psi_B) dy$$

où ψ_B est défini en (3.20) (B étant l'ouvert qui figure au point (7.36)).

En utilisant l'inégalité (3.20) on a

$$\left| \int_B (\Delta_y a_1 + \Delta_{x'y'} v_1) (\psi - \psi_B) dy \right| \leq C \cdot \|\psi\|_V.$$

D'autre part, en utilisant successivement (7.31) et (7.32) on a

$$\int_{G \setminus B} \Delta_{x'y'} v_1 \cdot (\psi - \psi_B) dy = \int_{G \setminus B} \Delta_{x'y'} v_1 \cdot \psi dy = \\ = \int_{G \setminus B} \Delta_{x'y'} v_1 \cdot (\psi - \tilde{\psi}) dy,$$

d'où

$$\left| \int_{G \setminus B} \Delta_{x'y'} v_1 \cdot (\psi - \psi_B) dy \right| \leq C \|\psi\|_V \quad \text{grâce à (7.36).}$$

Ceci achève la preuve de (7.35), d'où l'existence et l'unicité, à une constante additive près, de Z_0 . Le Lemme 7.3 est ainsi complètement établi.

8. DÉMONSTRATION DE LA CONVERGENCE POUR LE PROBLÈME DE NEUMANN

Etablissons d'abord le résultat suivant :

LEMME 8.1 : Si $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$, on peut définir $u^p \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que

$$(8.1) \quad u^p = u \quad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon$$

$$(8.2) \quad \int_{\Omega} |\text{grad } u^p|^2 dx \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} |\text{grad } u|^2 dx$$

où la constante C est indépendante de u et de ε .

Démonstration : Etablissons d'abord un résultat (analogue) au niveau local, la périodicité n'étant aucunement prise en compte : pour $\xi_0 > 0$; ξ_0 fixé, suffisamment grand, posons

$$Y = Y' \times]-\xi_0, \xi_0[; \quad B = G \cap Y \quad (B \text{ est de la forme (3.11)}).$$

Soit $w = w(y)$, $w \in H^1(B)/\mathbb{R}$. Définissons w^0 tel que

$$(8.3) \quad \begin{cases} -\Delta_y w^0 = 0 & \text{dans } \mathcal{C} \\ w^0 = w|_{\Gamma} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

(où $\Gamma = \partial\mathcal{C}$, \mathcal{C} l'ouvert au point (1.7), i.e. l'obstacle).

Le problème (8.3) définit w^0 de façon unique (la solution associée à $w + c$ étant $w^0 + c$, $c \in \mathbb{R}$) et l'on a (en utilisant la continuité de l'application $w \rightarrow w|_{\Gamma}$ de $H^1(B)/\mathbb{R}$ dans $H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{R}$)

$$(8.4) \quad \int_{\mathcal{C}} |\text{grad}_y w^0|^2 dy \leq C_0 \int_B |\text{grad}_y w|^2 dy$$

où C_0 ne dépend pas de w .

Définissons alors $w^p = w^p(y)$, $w^p \in H^1(Y)/\mathbb{R}$ par $w^p = w$ dans B , $w^p = w^0$ dans \mathcal{C} . Alors (cf. (8.4))

$$\int_Y |\text{grad}_y w^p|^2 dy \leq C_0 \int_B |\text{grad}_y w|^2 dy$$

d'où (par l'homothétie $x = \varepsilon y$ comme à la section 6)

$$(8.5) \quad \int_{\varepsilon Y} |\text{grad } u^p(x)|^2 dx \leq C_0 \int_{\varepsilon B} |\text{grad } u(x)|^2 dx \quad \forall u \in H^1(\varepsilon B)/\mathbb{R}$$

où $u^p \in H^1(\varepsilon Y)/\mathbb{R}$, $u^p = u$ dans εB .

Si maintenant $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$, d'après ce qui précède, on peut définir de façon évidente $u^p \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que l'on ait (8.1).

L'inégalité (8.2), quant à elle, s'obtient facilement en sommant (8.5) pour toutes les périodes qui coupent le support de u , cette dernière pouvant (grâce au théorème 8.1 de [4], p. 42) être considérée comme définie dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}_\varepsilon}$ (cf. (1.9)) tout entier, et à support dans un compact $K \subset \mathbb{R}^3$. Ceci achève la preuve du lemme 8.1.

Nous pouvons maintenant démontrer la convergence de u_ε (solution de (7.1), (7.2)) vers u_0 (solution de (7.12)) :

PROPOSITION 8.1 : Soient $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ la solution de (7.1), (7.2) et $u_0 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ la solution de (7.12). Alors, on a

$$(8.6) \quad u_\varepsilon^p \rightarrow u_0 \quad \text{dans } H^1(\Omega)/\mathbb{R} \text{ faible}$$

u_ε^p étant définie comme au lemme 8.1.

Démonstration : Avec (5.3) (i.e. $f = 0$ dans un voisinage de Σ) et (7.3) on a

$$(8.7) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} \text{grad } u_\varepsilon \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}.$$

Notant que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq \text{Cte} \quad \|\text{grad } v\|_{(L^2(\omega))^3} \quad \forall v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

et prenant dans (8.7) $v = u_\varepsilon^p$, on obtient grâce au Lemme 8.1 et à la condition (7.3)

$$(8.8) \quad \|\text{grad } u_\varepsilon^p\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq \text{Cte} \quad \forall \varepsilon$$

c'est-à-dire $\|u_\varepsilon^p\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq \text{Cte}$; d'où (par extraction d'une sous-suite)

$$(8.9) \quad u_\varepsilon^p \rightarrow u \quad \text{dans } H^1(\Omega)/\mathbb{R} \text{ faible}.$$

Mais alors (8.7) implique pour tout $v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$

$$(8.10) \quad \int_{\Omega} \text{grad } u_\varepsilon^p \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \text{grad } u_\varepsilon^p \cdot \text{grad } v \, dx.$$

pour v (fixé) indépendant de ε , on a en utilisant (8.8)

$$\left| \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \text{grad } u_\varepsilon^p \cdot \text{grad } v \, dx \right| \leq \text{Cte} \|\text{grad } v\|_{(L^2(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon))^3} \rightarrow 0$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

de sorte que (8.10) donne à la limite, avec (8.9)

$$\int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

d'où l'on déduit le résultat voulu. Ceci achève la démonstration.

9. CONCLUSION

Par la méthode « Développements asymptotiques raccordés. Échelles multiples » nous obtenons, pour chacun des problèmes considérés, la solution u_ε sous la forme

$$(9.1) \quad \begin{cases} u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + O(\varepsilon^2) & \text{dans } \Omega^+ \cup \Omega^- \\ u_\varepsilon(x) = v_0(x') + \varepsilon v_1(x', x/\varepsilon) + O(\varepsilon^2) & \text{au voisinage de } \Sigma \end{cases}$$

où u_0, u_1, v_0, v_1 (avec $v_1 = v_1(x', y)$) sont déterminés de façon unique (l'unicité ayant lieu, dans le cas Neumann, à une constante additive près); dans les Sections 6 et 8 nous démontrons la convergence vers le premier terme u_0 , c'est-à-dire respectivement

— $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible.
 — $u_\varepsilon^p \rightarrow u_0$ dans $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ faible (u_ε^p la fonction qui prolonge u_ε à Ω tout entier) justifiant ainsi (du moins au premier ordre, i.e. à l'ordre ε^0) la méthode formelle.

Le terme de couche $v_1(x', y)$ joue un rôle important au niveau local. Sa connaissance permet, par la formule (déduite de (9.1)), avec $v_0(x') = u_0(x', 0)$

$$(9.2) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (u_\varepsilon(x) - u_0(x', 0)) = \frac{\partial v_1}{\partial y_i} (x', x/\varepsilon) + O(\varepsilon) \quad \text{au voisinage de } \Sigma$$

de déterminer le champ de vecteurs $\text{grad } u_\varepsilon(x)$ au niveau local.

En élasticité, l'intérêt d'une telle étude asymptotique réside dans l'analyse de la contrainte locale. L'analogue de la formule (9.2) correspond alors à une concentration d'effort au voisinage de l'écran, phénomène important associé à l'étude des effets d'endommagement.

Ce travail a bénéficié du soutien constant de E. Sanchez-Palencia. Je tiens à l'en remercier vivement.

REFERENCES

- [1] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS and G. PAPANICOLAOU. *Asymptotic analysis for periodic Structures*, North Holland, Amsterdam (1978).
- [2] E. M. LANDIS and G. P. PANASENKO. *A theorem on the asymptotics of solutions of elliptic equations with coefficients periodic in all variables except one*, Sov. Math. Dokl. 18 (1977) 1140-1143 (Dokl. Akad. Nank. 235, 1977).
- [3] J. L. LIONS. *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and their Control*, Gordon and Breach, New York (1981).
- [4] J. L. LIONS et E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1, Dunod, Paris (1968).
- [5] E. SANCHEZ-PALENCIA. *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes 127, Springer, Berlin (1980).
- [6] E. SANCHEZ-PALENCIA. *Un problème d'écoulement lent d'un fluide visqueux incompressible à travers une paroi finement perforée* (Actes à paraître aux éditions Eyrolles, Ecole d'Eté EDF-INRIA-CEA sur l'Homogénéisation).
- [7] L. SCHWARTZ. *Distributions à valeurs vectorielles I, II*, Ann. Inst. Fourier, 7 (1954), 1-141 ; 8 (1958), 1-209.
- [8] VAN DYKE. *Perturbation methods in fluid Mechanics*, Acad. Press, New York (1964).