

RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

BRUNO KARR

BRUNO V. SCHMITT

**Une méthode numérique dans le domaine de
la stabilité et des bifurcations pour un système
différentiel périodique avec symétries**

RAIRO. Analyse numérique, tome 17, n° 4 (1983), p. 397-406

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1983__17_4_397_0

© AFCET, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE MÉTHODE NUMÉRIQUE DANS LE DOMAINE DE LA STABILITÉ ET DES BIFURCATIONS POUR UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL PÉRIODIQUE AVEC SYMÉTRIES (*)

par Bruno KARR ⁽¹⁾ et Bruno V. SCHMITT ⁽¹⁾ ⁽²⁾

Communiqué par P. J. LAURENT

Résumé. — Dans [4] il a été exposé une méthode numérique de localisation de certaines solutions périodiques. Nous complétons ici cette méthode en montrant que, en même temps que la solution, on peut déterminer le type de stabilité (infinitésimale) de cette solution.

Abstract. — A numerical method to locate some periodic solutions has been developed in [4]. We complete here this method by showing that, simultaneously with the solution, one can determine the (infinitesimal) stability type of that solution.

INTRODUCTION

1. Soit (F) un système différentiel de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (F)$$

où $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue, de classe C^1 en x , et périodique en t , de période $p > 0$.

Le problème fondamental (à savoir celui de l'existence de solutions p -périodiques, dites harmoniques, ou de solutions kp -périodiques, dites sous-harmoniques d'ordre k) est en général abordé en utilisant la méthode de perturbations de Poincaré, ou plus généralement des méthodes d'analyse fonctionnelle [3]. Lorsque (F) admet certaines symétries, d'importantes simplifi-

(*) Reçu en juillet 1982.

⁽¹⁾ Département de Mathématiques, Université de Metz, Ile du Saulcy, 57000 Metz.

⁽²⁾ Institut de Recherche Mathématique Avancée, 7, rue R.-Descartes, 67084 Strasbourg-cedex.

cations peuvent apparaître, sur le plan théorique [1, 2, 5], mais aussi sur le plan numérique, lorsqu'on cherche à localiser numériquement des solutions périodiques avec symétrie(s) [4].

Le but de cet article est de compléter la méthode numérique de localisation (que nous appelons méthode des symétries) exposée dans [4], de manière à pouvoir dans un même calcul, localiser une solution périodique symétrique et déterminer le type de stabilité de cette solution périodique ; on pourra alors par ce moyen localiser avec précision les bifurcations pouvant exister dans une famille continue de solutions périodiques avec symétrie(s) (voir [1, 2]).

2. Nous commençons, dans le paragraphe I, par introduire avec détail le problème et les notations, avant d'exposer la méthode proprement dite dans le paragraphe II ; enfin, dans le paragraphe III, nous donnons deux exemples d'application.

I. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS PÉRIODIQUES AVEC SYMÉTRIES [1, 2]

1. Rappelons qu'un système différentiel (F) , p -périodique, est dit de symétrie i ($i = 1$ ou 2) au temps $t = \alpha$ si on a :

$$F_j(\alpha - t, x_1, x_2) = (-1)^{i+j-1} F_j(\alpha + t, (-1)^{i+1} x_1, (-1)^i x_2), \\ j = 1, 2; \quad (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3.$$

On note $\mathcal{F}_i^\alpha(p)$ l'ensemble de ces systèmes différentiels. Etant donné $(F) \in \mathcal{F}_i^\alpha(p)$, une propriété remarquable des solutions de (F) , à la base de la méthode numérique des symétries, est la suivante :

Si $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ est une solution de $(F) \in \mathcal{F}_i^\alpha(p)$, telle que :

$$\varphi_{3-i}(\alpha) = \varphi_{3-i}(\alpha + p/2) = 0,$$

alors φ est p -périodique, d'orbite symétrique par rapport à l'axe Ox_i ; on note $\mathcal{S}_i^\alpha(p, F)$ l'ensemble de ces solutions p -périodiques symétriques.

2. Soit $(F) \in \mathcal{F}_i^\alpha(p)$ et soit $\varphi \in \mathcal{S}_i^\alpha(p; F)$; le système d'équations aux variations $(\partial F(\varphi))$ associé à φ :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t)) y \quad (\partial F(\varphi))$$

est alors un système différentiel linéaire p -périodique de symétrie i au temps $t = \alpha$; on note $\mathcal{L}_i^\alpha(p)$ l'ensemble de ces systèmes linéaires.

En notant par \mathcal{M} l'ensemble des matrices carrées régulières d'ordre 2, et par $I \in \mathcal{M}$ la matrice unité, soit $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ la solution matricielle fondamentale de $(\partial F(\varphi))$ telle que $X(\alpha) = I$, et soit :

$$X(\alpha + p/2) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix};$$

enfin, soit $\gamma(\varphi) = -\operatorname{sgn}(abcd)$.

On peut montrer alors [1, 2] que :

a) Si $\gamma(\varphi) \neq 0$ la solution nulle de $(\partial F(\varphi))$ est instable au sens de Lyapounov si $\gamma(\varphi) = -1$, et la solution φ du système initial (F) est alors également instable au sens de Lyapounov ; si $\gamma(\varphi) = +1$ la solution nulle de $(\partial F(\varphi))$ est stable au sens de Lyapounov, mais φ n'est pas nécessairement stable pour (F) : on dit qu'elle est stable au sens infinitésimal.

b) Si $\gamma(\varphi) = 0$, $(\partial F(\varphi))$ admet une infinité de solutions $2p$ -périodiques, on dira que $(\partial F(\varphi))$ est exceptionnel.

3. Soit $({}^\lambda F) \in \mathcal{F}_i^\alpha(p)$, où $\lambda \in \Lambda$, intervalle ouvert de \mathbb{R} , une famille continue en λ de systèmes différentiels périodiques avec symétries.

Soit ${}^\lambda \varphi \in \mathcal{S}_i^\alpha(p, {}^\lambda F)$, $\lambda \in \Lambda$, une famille continue de solutions périodiques symétriques de $({}^\lambda F)$; les coefficients a, b, c, d et $\gamma({}^\lambda \varphi)$, introduits ci-dessous, sont alors des fonctions de λ . Si pour $\lambda = \eta$, ${}^\eta \varphi$ est une solution (ou point) de bifurcation de la famille, alors nécessairement $\gamma({}^\eta \varphi) = 0$, $(\partial F({}^\eta \varphi))$ est donc exceptionnel, et l'un des coefficients a, b, c ou d s'annule. Le calcul des coefficients a, b, c, d et γ , pour différentes solutions d'une famille de solutions périodiques permet donc de localiser les points de bifurcation possibles de cette famille.

4. Dans l'étude de la stabilité d'une solution $\varphi \in \mathcal{S}_i^\alpha(p, F)$ (obtenue par exemple par la méthode numérique des symétries) les valeurs numériques de a, b, c, d et le signe du produit $-abcd(\gamma(\varphi))$ jouent donc un rôle primordial, amplifié par la localisation possible de bifurcations grâce au changement de signe de l'un de ces coefficients ; or les vecteurs colonne de la solution matricielle fondamentale X sont les solutions de $(\partial F(\varphi))$ issues de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ au

temps α ; $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ représentent les valeurs vectorielles atteintes par ces solutions au temps $\alpha + p/2$; nous allons montrer dans le paragraphe II comment la méthode des symétries, qui livre des solutions $\varphi \in \mathcal{S}_i^\alpha(p, F)$, permet simultanément de déterminer numériquement les solutions fondamentales de $(\partial F(\varphi))$, et donc les valeurs numériques de a, b, c, d et $\gamma(\varphi)$.

II. INTÉGRATION DE L'ÉQUATION AUX VARIATIONS

a) Soit $I(x_{10}, x_{20}, t_0, h, x_{11}, x_{21}, (s))$ une méthode numérique permettant de calculer, avec une précision d'ordre h^p ($p \geq 2$), les valeurs :

$$x_{11} = x(t_0 + h, t_0, (x_{10}, x_{20}))$$

et

$$x_{21} = x'(t_0 + h, t_0, (x_{10}, x_{20})),$$

où $x(t, t_0, (x_{10}, x_{20}))$ est la solution de l'équation différentielle :

$$x'' = s(t, x, x'), \quad (s)$$

qui est telle que :

$$x(t_0, t_0, (x_{10}, x_{20})) = x_{10} \quad \text{et} \quad x'(t_0, t_0, (x_{10}, x_{20})) = x_{20}.$$

On suppose que la méthode numérique nécessite uniquement de savoir calculer $s\left(t_0 + k \frac{h}{2}, x_1, x_2\right)$, pour $k = 0, 1$ et 2 , et x_1, x_2 quelconques.

b) Ainsi pour pouvoir intégrer numériquement une solution de (s) sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, avec un pas $h = \frac{1}{n}(t_1 - t_0)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, il suffira de savoir calculer $s\left(t_0 + k \frac{h}{2}, x_1, x_2\right)$, pour $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$, et x_1, x_2 quelconques.

c) Soit φ la solution de l'équation différentielle :

$$x'' = f(t, x, x'), \quad (f)$$

qui à l'instant t_0 (on supposera que $t_0 = 0$, quitte à faire un changement de temps) est telle que $\varphi(t_0) = x_0$ et $\varphi'(t_0) = x'_0$.

Soit $(\partial f(\varphi))$ l'équation aux variations associée ; supposons que nous connaissions la forme explicite des expressions $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, x')$ et $\frac{\partial f}{\partial x'}(t, x, x')$.

Or, on a :

$$\partial f(\varphi)(t, x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) x_1 + \frac{\partial f}{\partial x'}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) x_2,$$

donc, d'après b), nous allons pouvoir intégrer les deux solutions fondamentales de $(\partial f(\varphi))$ sur $[0, t_1]$, avec un pas $h = \frac{t_1}{n}$, si nous pouvons calculer

$\partial f(\varphi)(t, x_1, x_2)$ pour les instants $k \frac{h}{2}$, avec $k = 0, 1, \dots, 2n$; cela nécessite donc de connaître $\varphi = \varphi'$ pour ces mêmes instants.

d) En pratique on ne connaît pas, en général, explicitement les fonctions φ et φ' , ce qui n'est d'ailleurs pas gênant puisqu'il n'est utile de les connaître que pour les valeurs discrètes $k \frac{h}{2}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$. De plus, il n'est nullement nécessaire de mémoriser toutes ces valeurs; en effet, la j -ième itération de l'intégration de l'équation aux variations ne nécessite la connaissance de $\varphi(\tau)$ et $\varphi'(\tau)$ que pour $\tau = (j-1)h$, $(j-1/2)h$ et jh .

Il suffit donc de mener de front l'intégration de la solution φ et l'intégration de l'équation aux variations associée à cette solution, avec des pas respectifs $\frac{h}{2}$ et h , en effectuant deux itérations consécutives pour la première avant d'entamer une pour la seconde.

e) Un tel algorithme est des plus simples à mettre en œuvre; les résultats du paragraphe III ont été obtenus sur un ordinateur de poche: SHARP PC-1211, en prenant pour $I(x_{10}, x_{20}, t_0, h, x_{11}, x_{21}, (s))$ une méthode numérique d'intégration Runge-Kutta d'ordre 4, soit l'algorithme suivant:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{h^2}{2} s(t_0, x_{10}, x_{20}), \\ r_2 &= \frac{h^2}{2} s\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_{10} + \frac{h}{2} x_{20} + \frac{1}{4} r_1, x_{20} + \frac{1}{h} r_1\right), \\ r_3 &= \frac{h^2}{2} s\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_{10} + \frac{h}{2} x_{20} + \frac{1}{4} r_1, x_{20} + \frac{1}{h} r_2\right), \\ r_4 &= \frac{h^2}{2} s\left(t_0 + h, x_{10} + h x_{20} + r_3, x_{20} + \frac{2}{h} r_3\right), \\ x_{11} &= x_{10} + h x_{20} + \frac{1}{3} (r_1 + r_2 + r_3), \\ x_{21} &= x_{20} + \frac{1}{3h} (r_1 + 2(r_2 + r_3) + r_4). \end{aligned}$$

III. EXEMPLES

1) Considérons l'équation différentielle:

$$x'' + tx'^3 = 0. \quad (1)$$

Soit φ la solution de (1) telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$. On montre que

$$\varphi(t) = 1 + \operatorname{Arg sh}(t) = 1 + \operatorname{Log}(t + \sqrt{t^2 + 1}); \quad \text{ainsi} \quad \varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

Utilisons l'algorithme *RK* pour intégrer φ et φ' sur $[0, 1]$ avec un pas $h = 0.1$; les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-après :

TABLEAU 1

t	Intégration de :		Valeurs exactes de :	
	$\varphi(t)$	$\varphi'(t)$	$\varphi(t)$	$\varphi'(t)$
0.	1.	1.	1.	1.
0.1	1.09983395	0.99503715	1.09983407	0.99503719
0.2	1.19868988	0.98058055	1.19869011	0.98058067
0.3	1.29567276	0.95782606	1.29567304	0.95782628
0.4	1.39003499	0.92847637	1.39003532	0.92847669
0.5	1.48121147	0.89442682	1.48121182	0.89442719
0.6	1.56882453	0.85749256	1.56882389	0.85749292
0.7	1.65266617	0.81923160	1.65266656	0.81923192
0.8	1.73266782	0.78086855	1.73266825	0.78086880
0.9	1.80886646	0.74329396	1.80886669	0.74329414
1.	1.88137307	0.70710667	1.88137358	0.70710678
1.1	1.95034637	0.67267275	1.95034693	0.67267279
1.2	1.02597253	0.64018440	2.01597313	0.64018439
1.3	2.07845042	0.60971080	2.07845105	0.60971076
1.4	2.13798138	0.58123826	2.13798204	0.58123819
1.5	2.19476252	0.55470029	2.19476321	0.55470019
1.6	2.24898262	0.52999904	2.24898332	0.52999894
1.7	2.30081970	0.50702024	2.30082042	0.50702012
1.8	2.35044000	0.48564304	2.35044074	0.48564293
1.9	2.39799762	0.46574655	2.39799836	0.46574643
2.	2.44363472	0.44721371	2.44363547	0.44721359

L'équation aux variations associée à la solution φ de (1) est donnée par :

$$y'' + 3 t (\varphi'(t))^2 \cdot y' = 0, \quad (2)$$

soit :

$$y'' + \frac{3t}{t^2 + 1} y' = 0, \quad (2')$$

dont les solutions fondamentales peuvent être calculées explicitement :

$$\psi_1(t) \equiv 1 \quad \text{et} \quad \psi_2(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

La méthode décrite dans II nous permet d'intégrer ψ_2 (ψ_1 étant une constante) en utilisant la forme (2) de l'équation aux variations; le pas d'intégration

étant 0.2 ; les résultats, rassemblés dans le tableau 2, sont confrontés à ceux obtenus par une intégration directe utilisant la forme (2') de l'équation aux variations ; les valeurs entre parenthèses étant les valeurs exactes calculées.

TABLEAU 2

t	Intégration de		Intégration directe de	
	$\psi_2(t)$	$\psi'_2(t)$	$\psi_2(t)$	$\psi'_2(t)$
0	0	1	0	1
0.2	0.19609842	0.94286194	0.19609842 (0.19611613)	0.94286193 (0.94286603)
0.4	0.37136753	0.80039995	0.37136752 (0.37139067)	0.80039988 (0.80041094)
0.6	0.51447243	0.63050033	0.51447240 (0.51449575)	0.63050015 (0.63050950)
0.8	0.62466946	0.47613941	0.62466939 (0.62469504)	0.47613917 (0.47613951)
1	0.70707782	0.35356171	0.70707770 (0.70710678)	0.35356148 (0.35355339)
1.2	0.76818998	0.26238340	0.76818982 (0.76822127)	0.26238322 (0.26237065)
1.4	0.81370134	0.19637805	0.81370115 (0.81373347)	0.09637792 (0.19636425)
1.6	0.84796647	0.14888910	0.84796626 (0.84799830)	0.14888902 (0.14887610)
1.8	0.87412634	0.11454988	0.87412612 (0.87415727)	0.11454983 (0.11453842)
2	0.89439740	0.08945250	0.89439717 (0.89442719)	0.08945247 (0.08944271)

On peut remarquer qu'à chaque étape l'erreur relative commise est du même ordre pour les deux types d'intégration.

On pourra comparer ces résultats avec ceux obtenus pour un pas $h = 0.2$ (voir tableau 3).

TABLEAU 3

t	Intégration de		Intégration de		Intégration directe de	
	$\varphi(t)$	$\varphi'(t)$	$\psi_2(t)$	$\psi'_2(t)$	$\psi_2(t)$	$\psi'_2(t)$
0	1	1	0	1	0	1
0.2	1.19868646	0.98057864				
0.4	1.39003012	0.92847064	0.37100603	0.80014405	0.37100591	0.80014282
0.6	1.56881911	0.85748554				
0.8	1.73266136	0.78086322	0.62428245	0.47600821	0.62428105	0.47600349
1	1.88136507	0.70710390				
1.2	2.01596300	0.64018370	0.76764260	0.26254234	0.76763937	0.26253848
1.4	2.13797063	0.58123885				
1.6	2.24897101	0.53000028	0.84738052	0.14908646	0.84737613	0.14908443
1.8	2.35042785	0.48564455				
2	2.44362226	0.44721525	0.89383531	0.08960731	0.89393036	0.08960638

2) Un exemple où l'E.D. et la solution sont périodiques.

Soit l'équation du pendule paramétriquement forcé :

$$x'' + (a - 2q \cos 2t) \sin x = 0. \quad P(a, q)$$

Prenons $a = 1$; soit $x(t, 0, (x_0, x'_0))$ la solution de $P(1, q)$ issue au temps initial 0 de x_0 avec une dérivée égale à x'_0 .

La méthode numérique des symétries nous permet d'affirmer, par exemple, que pour $q = 0.4046948$, les conditions initiales $x_0 = 0.709232$ et $x'_0 = 0$ sont infiniment voisines de celles d'une solution 5π -périodique de $P(1, q)$, notée $\varphi[1]$.

Pour l'orbite de φ , dans le plan des phases (x, x') , on se reportera à la figure 1 ; φ est une solution sous-harmonique d'ordre 5 avec des harmoniques paires ; notons enfin que $\varphi'(5\pi/2) = 0$ et que l'orbite de φ est symétrique par rapport à l'axe des x .

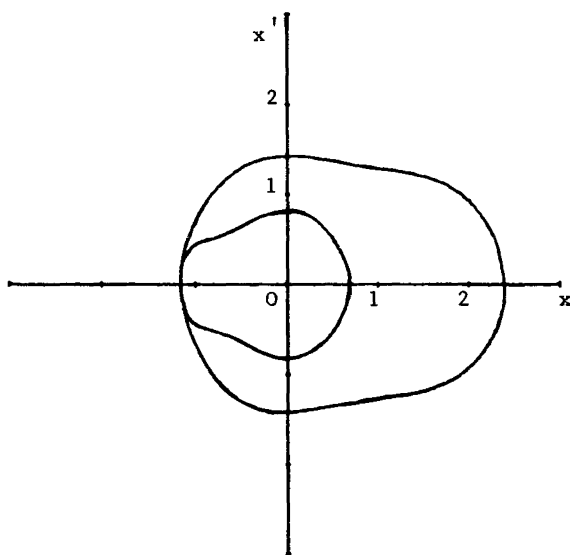


Figure 1.

L'équation aux variations associée est donnée par :

$$y'' + (1 - 2q \cos 2t) \cos \varphi(t) \cdot y = 0 \quad (\partial P(1, q)(\varphi)).$$

Considérons cette équation différentielle sous sa forme canonique et soit alors χ la solution matricielle fondamentale en $t = 0$.

On peut montrer [2] que l'on a les relations suivantes :

$$\det \chi(t) \equiv 1$$

et
$$\chi(5\pi) = I_1 \chi^{-1}(5\pi/2) I_1 \chi(5\pi/2) \quad \text{où} \quad I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Nous allons intégrer $\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix}$ avec notre méthode, de différentes façons :

a) Sur l'intervalle $[0, 5\pi]$ avec un nombre de pas égal à 100 (ce qui nécessite une intégration de φ avec un nombre de pas égal à 200), on obtient alors les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} a(5\pi) &= 42.34480155, & c(5\pi) &= 37.43315901, \\ b(5\pi) &= 47.87329374, & d(5\pi) &= 42.34400752, \end{aligned}$$

d'où : $\det \chi(5\pi) = 0.99997836$, résultat qui dans une certaine mesure est révélateur de la précision.

b) Sur le même intervalle mais avec un nombre de pas double, on obtient :

$$\begin{aligned} a(5\pi) &= 42.34702278, & c(5\pi) &= 37.43582143, \\ b(5\pi) &= 47.87493594, & d(5\pi) &= 42.34624858, \end{aligned}$$

d'où : $\det \chi(5\pi) = 1.00000044$.

c) Sur l'intervalle $[0, 5\pi/2]$ avec un nombre de pas égal à 100, on obtient :

$$\begin{aligned} a(5\pi/2) &= 4.84529602, & c(5\pi/2) &= 4.18456746, \\ b(5\pi/2) &= 4.94144175, & d(5\pi/2) &= 4.47398795, \end{aligned}$$

$\det \chi(5\pi/2) = 0.999999655$;

on peut alors, d'après (3), en déduire $\chi(5\pi)$, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} a(5\pi) &= d(5\pi) = (a(5\pi/2) \cdot d(5\pi/2) + b(5\pi/2) \cdot c(5\pi/2)) = 42.35559236 \\ b(5\pi) &= 2 a(5\pi/2) \cdot b(5\pi/2) = 47.88549609 \\ c(5\pi) &= 2 c(5\pi/2) \cdot d(5\pi/2) = 37.44340878 \end{aligned}$$

La solution φ est instable au sens de Lyapounov car

$$\gamma(\varphi) = - \operatorname{sgn} \left(a\left(\frac{5\pi}{2}\right) b\left(\frac{5\pi}{2}\right) c\left(\frac{5\pi}{2}\right) d\left(\frac{5\pi}{2}\right) \right) = -1 ;$$

de plus, $\partial P(1, q)(\varphi)$ n'est pas exceptionnelle pour la période 5π , de ce fait il est aisé de montrer que la solution φ de $P(1, q)$ peut être perturbée paramétriquement : pour λ suffisamment proche de q , il existe ${}^\lambda\varphi$ appartenant à $\mathcal{S}_1^0(5\pi, P(1, \lambda))$ telle que ${}^\lambda\varphi$ tende vers φ pour λ tendant vers q .

BIBLIOGRAPHIE

1. B. KARR, *Systèmes différentiels périodiques avec symétries : stabilité et bifurcations ; application à l'équation du pendule forcé*. Thèse, Univ. de Metz, Oct. 1981.
2. B. KARR et B. V. SCHMITT, *Systèmes différentiels périodiques avec symétries : stabilité et bifurcations*. Analysis (à paraître).
3. N. ROUCHE et J. MAWHIN, *Equations différentielles ordinaires*. Tome 2 : stabilité et solutions périodiques. Masson, Paris, 1973.
4. B. V. SCHMITT, *Sur la structure de l'équation de Duffing sans dissipation*. SIAM J. Applied Math., Vol. 42, N° 4, 1982.
5. B. V. SCHMITT et S. MAZZANTI, *Solutions périodiques symétriques de l'équation de Duffing sans dissipation*. J. Differential Equations, Vol. 42, n° 2, Nov. 1981.